

VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia, 2026 XXXV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny

Megyei forduló

5. osztály

1. feladat (30 pont). Egy úrhajó vezérkarát a kapitány, a tisztek és az altisztek alkotják. Valamennyiük ruháját csillagok díszítik, a kapitány ruháján 8, a tiszteken 5, az altiszteken pedig 3 csillag van. Az úrhajó vezérlő szobájában tanácskozást tartanak, amelyen a vezérkarból tízen vesznek részt és ruhájukon összesen 44 csillag található. Köztük van-e a kapitány? Hány tiszt és altiszt vett részt a tanácskozáson?
Biró Gabriella, Nagyvárad

2. feladat (30 pont). Az ábrán látható bűvös négyzetbe a természetes számokat helyezzük el 1-től 16-ig, mindegyiket pontosan egyszer úgy, hogy minden sorban, minden oszlopban és a két átló mentén a számok összege ugyanannyi legyen. Írd be a hiányzó számokat! Hogyan gondolkoztál?

	8		1
2		7	
3		6	
	5	9	4

Matlap 9/2025, A:5170

3. feladat (20 pont). Koppány és Vajk játékot játszottak az $1, 2, 3, \dots, 10$ természetes számokkal. A fiúk minden körben választottak maguknak néhány számot, majd tettek egy-egy kijelentést. Döntsd el, ki mondott igazat!

a) Első körben mindketten választottak. Koppány az összes párosat, Vajk pedig az összes páratlant választotta. Mindketten négyzetre emelték a számokat, majd rendre elosztották mindegyiket 10-zel. Vajk azt állítja, hogy többféle maradékot kapott, mint Koppány. Igazat mondott?

b) Második körben Koppány kiválasztotta a 2, 3, 5, 7 és 9 számokat, majd mindeniket a 2026-ik hatványra emelte, az eredményeket pedig összeadta. Azt állította ezután, hogy négyzetszámot kapott. Igazat mondott?

c) Harmadik körben Vajk választotta a 2-es számot. Rendre felemelte a $96, 97, \dots, 2025, 2026$ hatványra, majd a kapott eredményeket összeadta. Azt állította ezután, hogy négyzetszámot kapott. Igazat mondott?

*Gáspár Edit, Zilah
Pálhegyi Farkas László, Nagyvárad*

4. feladat (20 pont). Az A, B, C nem feltétlenül különböző, nemnulla természetes számokat jelölnek, amelyekre $A \leq B \leq C$.

- a) Írd fel az összes lehetséges (A, B, C) számhármast, amelyre $A^2 + B^2 + C^2 = 99$.
- b) Írj fel három olyan (A, B, C) számhármast, amelyre $A^2 + B^2 + C^2 = 99^{2025}$.
- c) Írj fel egy olyan (A, B, C) számhármast, amelyre $A^3 + B^3 + C^3 = 99$.
- d) Írj fel egy olyan (A, B, C) számhármast, amelyre $A^3 + B^3 + C^3 = 99^{2026}$.

Simon József, Csíkszereda

6. osztály

1. feladat (30 pont). A társasjátékstand előtt egyezkedik Csongor és Dávid. Ugyanazon társasjáték megvásárlását tervezik, de külön-külön egyiküknek sincs elegendő pénze: Csongor pénzéből hiányzik a játék árának $\frac{1}{3}$ -a, míg Dávidé az ár 16, (6)%-val kevesebb. Ezért úgy döntenek, hogy közösen vásárolják meg a játékot. A vásárlást követően összesen 90 lejük maradt meg.

a) Határozd meg a társasjáték árát, valamint azt, hogy mennyi pénze volt Csongornak és Dávidnak a vásárlás előtt!

b) A megmaradt összeget úgy osztják fel egymás között, hogy a vásárlás előtti és az osztzkodás utáni pénzük aránya megegyezzen. Mennyi pénzt kap Csongor, illetve Dávid a megmaradt pénzből?

Hodgyai Edit, Micske

2. feladat (30 pont). Jancsinak három doboza van, az első dobozban pontosan három sárga golyó, a másodikban három zöld golyó és a harmadikban három kék golyó van. Az első lépésben: az első dobozból kivesz 3 golyót és szétosztja a másik kettő között úgy, hogy mindegyikbe legalább egy golyót tesz. A következő lépésben kivesz 3 golyót a második dobozból és hasonlóan szétosztja. Ugyanezt a lépést teszi meg a harmadik doboz esetében is, majd visszatér az első dobozhoz. Ezeket a lépéseket addig folytatja, amíg eléri, hogy az első dobozban legyenek a kék golyók, másodikban a sárgák, és harmadikban a zöldek.

Jancsinak sikerült 8 lépésből elérni a célját. Találj ennél kevesebb lépésből álló megoldást!

Simon József, Csíkszereda

3. feladat (20 pont). Az 500 cm hosszúságú AB szakaszon felvesszük az $M_1, M_2, M_3, \dots, M_{25}$ ($A \neq M_1, B \neq M_{25}$) pontokat ebben a sorrendben úgy, hogy az $AM_1, M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, \dots, M_{24}M_{25}$ szakaszok hossza 25 egymásutáni természetes szám legyen. Határozd meg az $M_{25}B$ szakasz hosszának legkisebb és legnagyobb lehetséges értékét!

Matlap 9/2025, A:5174

4. feladat (20 pont). Nevezzük „jó”-nak azokat az (a, b) nullától különböző természetes számokból alkotott számpárokat, amelyekben az a és b legnagyobb közös osztójának és legkisebb közös többszörösének az összege 226.

a) Sorold fel a 225 osztóit!

b) Határozd meg azokat az (a, b) „jó” számpárokat, amelyekre a és b relatív prímek!

c) Hány olyan (a, b) alakú „jó” számpár létezik, amelyben a és b nem relatív prímek? Sorold fel az összeset!

Czeplédi Csilla, Arad

7. osztály

1. feladat (30 pont). Határozd meg az $\overline{ab}$ alakú természetes számokat, ha az $a + b$, $a - b$ és $a \cdot b$ számok egyenesen arányosak a 7, 1, illetve 12 számokkal.

Szász Hajnalka, Csíkszereda

2. feladat (30 pont). Az ábrán látható négyzetrács 16 négyzete közül néhányat szürkére kell satírozni úgy, hogy a négyzetekbe beírt számok a számot tartalmazó és az azzal szomszédos négyzetek közül a szürkére satírozott négyzetek számával legyenek egyenlők. Határozd meg satírozás után a szürke négyzetek számát! Hányféleképpen végezhetjük el a satírozást? (Két négyzet szomszédos, ha van közös oldaluk vagy közös csúcsuk.)

1		7	
0		3	

Matlap 10/2025, A:5195

3. feladat (20 pont). Az $ABCD$ négyzeten kívül vedd fel az E és F pontokat úgy, hogy $\widehat{AFB} = \widehat{DEC} = 90^\circ$ és $\widehat{EDC} \equiv \widehat{FBA}$.

a) Bizonyítsd be, hogy

$$T_{EFBC} = \frac{1}{2} \cdot T_{ABCD} + T_{AFB}.$$

b) Határozd meg a DEF szög mértékét!

c) Igazold, hogy az EF egyenes átmegy a négyzet középpontján!

Simon József, Csíkszereda

4. feladat (20 pont). a) Igazold, hogy bármilyen $\overline{abc}$ alakú szám esetén az $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ összeg osztható 111-gyel!

b) Keresd meg az összes $\overline{abc}$ alakú számot, amelyre teljesül, hogy

$$\sqrt{\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{a0} + \overline{b0} + \overline{c0}} = \overline{ab}.$$

Köncse Balázs, Csíkszereda

8. osztály**5. feladat (20 pont).** Adottak az

$$a = (\sqrt{2} - 1)^{-1} + |1 - \sqrt{2}| - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - (2\sqrt{2})^{-1} \right) \cdot 2\sqrt{2} \quad \text{és}$$

$$b = \left(\left(\sqrt{9 + 4\sqrt{2}} \right)^{-1} + \left(\sqrt{9 - 4\sqrt{2}} \right)^{-1} \right) \cdot \left(\sqrt{9 + 4\sqrt{2}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{2}} \right)$$

valós számok.

a) Számítsd ki az a és b számok egész részét!

b) Igazold, hogy az

$$E = \sqrt{4 - 4a + a^2} + \sqrt{b^2 - 6b + 9} - \sqrt{a^2 - 2ab + b^2}$$

egész szám!

*Tóth Csongor, Szováta***6. feladat (20 pont).** Az a és b nullától különböző természetes számok, $a > b$ és $m_a - m_b = 18$, ahol m_a és m_b az a és b számok számtani, illetve mértani közepét jelöli. Határozd meg az a és b természetes számokat a következő esetekben:

a) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 18$

b) $a - b = 120$

*Simon József, Csíkszereda***7. feladat (20 pont).** Adott az $ABCD$ négyzet és a térben egy olyan P pont, amelyre a PAD háromszög egyenlő szárú és P -ben derékszögű, illetve a PBC háromszög egyenlő oldalú.a) Igazold, hogy a (PAD) és (PBC) síkok merőlegesek egymásra!b) Határozd meg a (PAD) és (PBC) síkoknak az $(ABCD)$ síkkal alkotott szögét!c) Bizonyítsd be, hogy az A pontnak a PD szakasz felezőpontja szerinti szimmetrikusa egybeesik a B pontnak a PC egyenes szerinti szimmetrikusával!*Simon József, Csíkszereda, Matlap 10/2025, A:2504***8. feladat (20 pont).** Egy tompaszögű háromszög oldalhosszai méterben kifejezve 2-nél nagyobb egymás utáni páratlan természetes számok, és egyik sem négyzetszám. Határozd meg a háromszög oldalainak hosszát és a tompaszög mértékét!*Dávid Géza, Székelyudvarhely*

9. osztály

1. feladat (30 pont). Az a, b, c egymástól páronként különböző valós számokra teljesülnek az

$$a^3 + ax = b^3 + bx = c^3 + cx$$

összefüggések, ahol x egy adott valós szám.

a) Mutasd ki, hogy $a + b + c = 0$.

b) Igazold, hogy

$$|a + y| + |1 + y - b| \geq |c + 1|, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Cziprok András, Szatmárnémeti

2. feladat (30 pont). Az ABC hegyesszögű háromszögben $\widehat{ABC} = 2\widehat{ACB}$ és D a BC oldal felezőpontja. Ha E a D kezdőpontú DB félegyenese azon pontja, amelyre $AB = 2DE$, akkor bizonyítsd be, hogy:

a) E a B és D pontok között található;

b) AE az ABC háromszög magassága!

*Matlap 10/2025, L:3948
Olasz Ferenc, Szatmárnémeti*

3. feladat (20 pont). a) Igazold, hogy:

$$\sqrt{1+a} < 1 + \frac{a}{2}, \quad \forall a > 0.$$

b) Tekintsük az $(a_n)_{n \geq 1}$ számtani haladványt, amelyben $r > 0, a_1 > 0$ és $4a_1a_2 > 1$. Képezzük az

$$S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{r}{a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2}}}$$

összeget, ahol $n \in \mathbb{N}^*$.

Mutasd ki, hogy $[S_n] = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, ahol $[x]$ az x szám egészrészét jelöli.

Cziprok András, Szatmárnémeti

4. feladat (20 pont). a) Egy város általános és középiskolai tagozatain (5. osztálytól 12. osztályig) összesen 2026 diák jár. Ha minden évfolyamon legfeljebb 5 különböző iskolából vannak a tanulók, akkor igazold, hogy van egy iskola a városban, ahonnan legalább 26 fiú vagy legalább 26 lány származik ugyanarról az évfolyamról!

b) Igazold, hogy 2025 tetszőleges egész szám közül kiválasztható 324 darab szám, amelyeknek összege osztható 36-tal!

Köncse Balázs, Csíkszereda

10. osztály

5. feladat (20 pont). a) Az a és b pozitív valós számok teljesítik az

$$a^2 + b^2 = 2024ab$$

összefüggést. Igazold, hogy

$$\lg \frac{a+b}{\sqrt{2026}} = \frac{\lg a + \lg b}{2}.$$

b) Igazold, hogy ha $x, y, z, w > 1$ tetszőleges valós számok, akkor

$$\log_w \left(\frac{x+y+z}{3} \right)^3 - \log_{\frac{1}{w}} \left(\frac{xy+yz+zx}{3} \right)^3 \geq 2 \cdot \log_w (xyz \cdot \sqrt{xyz}).$$

Forgács István, Szatmárnémeti

6. feladat (20 pont). Adott az $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^*$,

$$f(n) = \sum_{k=-n^3}^{n^3} \left[\sqrt[3]{k} \right], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

függvény, ahol $[a]$ az a valós szám egész részét jelöli.

a) Igazold, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$f(n) = n - n^3.$$

b) Tanulmányozd az f függvény injektivitását és szürjektivitását!

Szilágyi Judit, Kolozsvár

7. feladat (20 pont). Az a , b és c komplex számokra fennállnak a

$$|a| = |b| = |c| = 1 \quad \text{és} \quad |a+b-c|^2 + |b+c-a|^2 + |c+a-b|^2 = 12$$

összefüggések. Igazold, hogy az a, b és c affixumú pontok egy egyenlő oldalú háromszög csúcspontjai!

Matlap 9/2025, L:3936

8. feladat (20 pont). Egy játékban 6 játékos vesz részt. Bármely két játékos vagy szövetségese vagy riválisa egymásnak. Bizonyítsd be, hogy biztosan kiválasztható a hat játékos közül három olyan, akik páronként vagy mind szövetségeseik egymással, vagy mind riválisok egymással!

11. osztály

1. feladat (30 pont). Adott az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = U$ mátrixegyenlet, ahol $X, U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Igazold, hogy az $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix esetén nincs megoldása az egyenletnek!

b) Add meg az összes olyan $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixot, amelyre az egyenletnek végtelen sok megoldása van!

Miklós Dóra, Lövete

2. feladat (30 pont). Az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozatot az

$$a_1 = \sqrt{5} \quad \text{és} \quad a_{n+1} = \frac{2a_n + 3[a_n] + 6}{5}, \quad \forall n \geq 1,$$

rekurzióval értelmezzük, ahol $[x]$ az x valós szám egész részét jelöli.

a) Számítsd ki a sorozat általános tagjának $[a_n]$ egész részét!

b) Igazold, hogy létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ határérték és határozd meg az értékét!

c) Igazold, hogy létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n^2}$ határérték és számítsd ki az értékét!

Mastan Eliza, Nagybánya

3. feladat (20 pont). Adott egy $(x_n)_{n \geq 1}$ valós számsorozat, amelyre teljesülnek a következő feltételek:

$$x_n > 1 \quad \text{és} \quad x_{n+1}^3 < 3x_n - 2, \quad \forall n \geq 1.$$

Igazold, hogy a sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!

Matlap 8/2025, L:3924

4. feladat (20 pont). Egy $n \times n$ -es négyzetrácsos táblán véletlenszerűen kijelölünk két különböző mezőt (vagyis 1×1 -es négyzetet). Határozd meg annak a valószínűségét, hogy a kijelölt mezők középpontjait összekötő szakasz felezőpontja is egy mező középpontja legyen!

Hasas Tünde, Nagyvárád

12. osztály

1. feladat (30 pont). Ha x és y olyan tetszőleges valós számok, amelyekre $xy \neq -1$, legyen $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$, valamint tekintsük a $G = (-1, 1)$ halmazt.

a) Igazold, hogy „ $*$ ” művelet a G -n és $(G, *)$ kommutatív csoport!

b) Számítsd ki az $(x_n)_{n \geq 1}$ sorozat határértékét, ahol $x \in G$ adott csoportelem és $x_n = \underbrace{x * x * \dots * x}_{n\text{-szer}}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

Matlap 10/2025, L:3958

2. feladat (30 pont). Számítsd ki a következő határozatlan integrálokat:

a)

$$\int \frac{1}{x(x^{2025} + 2026)} dx, \quad x > 0.$$

b)

$$\int \frac{a \sin x + b \cos x}{b \sin x + a \cos x} dx, \quad a, b > 0, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy

3. feladat (20 pont). Számítsd ki az $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény minimumát, ha

$$F(x) = \max \left\{ x^2 + \frac{2026}{x}, 2027x \right\}, \quad \forall x > 0.$$

Csapó Hajnalka, Csíkszereda

4. feladat (20 pont). Egy $n \times n$ -es táblázat mezőibe beírjuk az $1, 2, \dots, n^2$ számokat sorfolytonosan (balról jobbra, fentről lefelé).

1	2	3	$\dots$		n
$n+1$	$n+2$	$n+3$	$\dots$		$2n$
			$\vdots$	$\dots$	
			$\dots$		n^2

Legyen $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ (rögzített). Egy k -blokk alatt a táblázat egy olyan részét értjük, amelyet úgy kapunk, hogy a táblázaton belül a rácsvonalak mentén kijelölünk egy k egymásutáni sorból és k egymásutáni oszlopból álló, összefüggő, négyzet alakú tartományt.

a) Hány k -blokk van?

b) Határozd meg az összes lehetséges k -blokkösszeg legnagyobb közös osztóját, ha blokkösszeg alatt a blokkban lévő számok összegét értjük!

Csapó Hajnalka, Csíkszereda

Országos döntő - I. forduló

5. osztály

1. feladat (30 pont). A gyűrűk ura a műhelyében varázsgyűrűt készít, amelyeket majd a boltjában elad, darabját 10 petáért. Gyűrűket csak munkanapokon készít, de boltja a hét minden napján nyitva van. Hétfő reggel belépett az üres boltjába, nekifogott és készített néhány gyűrűt. Kedden háromszor annyit készített, mint hétfőn, és eladott a hétfőn készített gyűrűkből 12 darabot. Szerdán feleannyi gyűrűt készített, mint hétfőn és eladta a kedden készített gyűrűk felét, amelyekért 240 petáért kapott. Csütörtökön és pénteken is ugyanannyi gyűrűt készített és adott el, mint kedden. Hány petáért érnek a hétvégére a boltban maradt gyűrűk?
Bíró Gabriella, Nagyvárad

2. feladat (30 pont). Egy 6×6 -os tábla négy sarkát kivágtuk. A maradékot L-alakú, négy egység-négyzetből álló darabokkal szeretnénk teljesen lefedni úgy, hogy a darabok egymást ne fedjék. A darabok tetszőlegesen elhelyezhetők a táblán, de minden darabnak pontosan 4 kis négyzetecskét kell fednie. Keresd meg az összes lehetséges lefedést!
András Szilárd, Csíkdelye

3. feladat (20 pont). Adott az $n = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2025}$ természetes szám.

- a) Igazold, hogy n egy páratlan szám!
- b) Határozd meg n utolsó számjegyét!
- c) Igazold, hogy n osztható 11-gyel!

*Czeglédi Csilla-Ilona, Arad
Kiss Sándor, Nagykároly*

4. feladat (20 pont). Az a természetes számot „mágikus” számnak nevezzük, ha felírható két, egymástól és nullától is különböző négyzetszám összegeként.

- a) Határozd meg a kétjegyű „mágikus” számok számát!
- b) Mennyi lehet egy kétjegyű „mágikus” prímszám 4-gyel való osztási maradéka?
- c) Igazold, hogy 26^n „mágikus” szám, bármely $n \geq 1$ természetes szám esetén!

Faluvégi Melánia, Zilah

6. osztály

1. feladat (30 pont). Határozd meg azokat az $\overline{abac}$ alakú természetes számokat, amelyeket 77-tel osztva a hányados $\overline{ac}$, a maradék pedig a c számjegy négyszerese!

Papp Ilonka, Brassó

2. feladat (30 pont). Az AOB és BOC egymás melletti szögek, a BOC és COD is egymás melletti szögek és a három szög mértékének összege 180° . Vegyük fel az O pontból kiinduló OE, ON, OP, OI, OJ és OK félegyeneseket az adott szögek belső tartományaiban úgy, hogy $\widehat{AOE} = \widehat{EOB}$, $\widehat{BON} = \widehat{NOP} = \widehat{POC}$ és $\widehat{COI} = \widehat{IOJ} = \widehat{JOK} = \widehat{KOD}$. Tudjuk, hogy $\widehat{AOP} = 60^\circ$ és $\widehat{BOK} = 135^\circ$.

- a) Határozd meg az AOB , BOC és COD szögek mértékét!
- b) Igazold, hogy a BOP és IOK szögek szögfelezői merőlegesek egymásra!

Simon József, Csíkszereda

3. feladat (20 pont). A Salamon Ernő Gimnáziumban az idei tanévben 540 diák tanul. Az iskolában három szakkör működik: a nemezelés, a fafaragás és a jégkorong. Minden diák jár legalább egy szakkörre. A tanulók 45%-a jégkorongozni jár, egyharmada nemezeléssel foglalkozik. A tanulók egytizede jégkorongozás és nemezelés szakkörre is jár, 30%-a jégkorongozik is és fafaragást is tanul, míg 15%-a nemezeléssel is és fafaragással is foglalkozik. Az iskola tanulóinak 5%-a mindhárom szakkörön részt vesz.

- a) Hány tanuló vesz részt mind a három szakkörön?
- b) Az iskola tanulóinak hány százaléka jár legtöbb egy szakkörre?
- c) Hány tanuló nem jár sem jégkorongozni sem nemezelni?

Hodgyai Edit, Micske

4. feladat (20 pont). Az a és b természetes számok legkisebb közös többszörösének és a számok kétszeresének az összege egyenlő a számok legnagyobb közös osztójának az 50-szeresével. Határozd meg ezeket az a és b számokat, ha összegük legfeljebb 50.

Mátéfi István, Marosvásárhely

7. osztály

1. feladat (30 pont). Határozd meg az $A = \left\{ \overline{abc} \mid \sqrt{\overline{abc}} + \sqrt{c} \in \mathbb{N} \right\}$ halmazt, elemei felsorolásával!

Faluvégi Melánia, Zilah

2. feladat (30 pont). Marci leírta a $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{30}$ számokat különböző oszlopokba úgy, hogy bármelyik két oszlopot választja ki, legyen az oszlopoknak egy-egy eleme, amit össze tud adni. Marci a $\sqrt{a}$ és $\sqrt{b}$ számokat pontosan akkor tudja összeadni, ha a gyökök alól ki tud emelni természetes számokat úgy, hogy a gyökök alatt ugyanaz maradjon mindkét számban. Például a $\sqrt{2}$ és a $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ számokat Marci össze tudja adni, de a $\sqrt{2}$ és $\sqrt{6}$ számokat nem tudja összeadni.

a) Határozd meg hány összeadható számokból álló számpár képezhető, amelyben a tagok különbözőek?

b) Legfeljebb hány oszlopot tud Marci képezni a megengedett szabályok szerint? Válaszodat indokold!

Köncse Balázs, Csíkszereda

3. feladat (20 pont). Adottak az x és y nullától különböző természetes számok, amelyek teljesítik a következő összefüggést:

$$\frac{2026}{2027} < \frac{x}{y} < \frac{2027}{2028}.$$

a) Igazold, hogy az x és y nem egymás utáni számok!

b) Mennyi az $x + y$ legkisebb értéke, ha $y = x + a$ és $a \in \mathbb{N}^*$?

Gáspár Edit, Zilah
Hasas Tünde, Nagyvárad

4. feladat (20 pont). Az A , B és C középpontú körök páronként kívülről érintik egymást az M , N és P pontokban úgy, hogy $M \in AB$, $N \in BC$ és $P \in AC$. Legyen K az NM egyenesnek az A középpontú körrel való második metszéspontja. Az A és C középpontú körökben vedd fel rendre a PF és NE átmérőket!

a) Bizonyítsd be, hogy $KA \parallel BC$!

b) Igazold, hogy a K , P és E pontok kollineárisak!

c) Mutasd ki, hogy a KE és FM egyenesek által alkotott szög kongruens az MPN szöggel!

Simon József, Csíkszereda

8. osztály

1. feladat (30 pont). a) Határozd meg azokat az $(x; y)$ egész számpárokat, amelyekre:

$$(x^2 - 4x + 6)(2y^2 - 2y + 1) = 3.$$

b) Határozd meg azokat az x és y valós számokat, amelyekre

$$(x^2 - 4x + 6)(2y^2 - 2y + 1) = 1.$$

Mátéfi István, Marosvásárhely

2. feladat (30 pont). Adott a $VABCD$ szabályos négyoldalú gúla. Az alapon az átlók metszéspontja O , a P pont pedig az O pont vetülete a VBC síkra.

a) Igazold, hogy a P magasságpont a VBC háromszögben!

b) Legyen $AB = 2a$ és $VA = 3a$, illetve $BP \cap VC = \{N\}$. Határozd meg a BND sík és az alapsík által közrezárt szög koszinuszát!

Hamar Erzsébet, Marosvásárhely

3. feladat (20 pont). Marcika leírta a $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{50}$ számokat különböző oszlopokba úgy, hogy bármelyik két oszlopot választja ki, legyen az oszlopoknak legalább egy-egy eleme, amit össze lehet adni. Marcika a $\sqrt{a}$ és $\sqrt{b}$ számokat pontosan akkor tudja összeadni, ha a gyökök alól ki tud emelni természetes számokat úgy, hogy a gyökök alatt ugyanaz maradjon mindkét számban. Például a $\sqrt{2}$ és a $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ számokat össze tudja adni, de a $\sqrt{2}$ és a $\sqrt{6}$ számokat nem.

a) Igazold, hogy a számok beírhatóak 9 oszlopba a fenti szabályok szerint!

b) Igazold, hogy a számok nem írhatóak be 10 oszlopba a fenti szabályok szerint!

Köncse Balázs, Csíkszereda

4. feladat (20 pont). a) Adott az $ABCD A'B'C'D'$ kocka, amelynek az éle a . Határozd meg az A' pont távolságát az $AB'D'$ síktól!

b) Adott az $ABCD A'B'C'D'$ téglatest. Igazold, hogy az $ABCD A'B'C'D'$ téglatest akkor és csakis akkor kocka, ha $A'C \perp (AB'D')$.

Simon József, Csíkszereda

9. osztály

1. feladat (30 pont). Oldd meg a valós számok halmazán a

$$\sqrt{x + 2\sqrt{2x - 4}} + \sqrt{x + 6 - 4\sqrt{2x - 4}} = (x - 3)\sqrt{2}$$

egyenletet!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

2. feladat (30 pont). Igazold, hogy ha $x \geq 1$ és $\sqrt{x} \notin \mathbb{Z}$, akkor

$$\frac{1}{[\sqrt{x} + 2026] - 2026} + \frac{1}{\{\sqrt{x} + 2026\}} \geq \frac{8}{x + 1}.$$

Tóth Csongor, Szováta

3. feladat (20 pont). Igazold, hogy bármely $x, y, z > 0$ valós számok esetén teljesül a következő egyenlőtlenség

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) + (y^2 + 1)(z^2 + 1) + (z^2 + 1)(x^2 + 1) \geq 4 \cdot (3xyz - x - y - z).$$

Barta Zágoni Csongor, Marosvásárhely

4. feladat (20 pont). Az $ABCD$ konvex négyszög oldalait meghosszabbítjuk úgy, hogy $B' \in (AB, BB' = AB, C' \in (BC, CC' = 2BC, D' \in (CD, DD' = 3CD$ és $A' \in (DA, AA' = 4DA$.

a) Igazold, hogy A az $A'B'C'D'$ négyszög súlypontja!

b) Bizonyítsd be, hogy $T_{A'B'C'D'} > 12T_{ABCD}$.

*Csapó Hajnalka, Csíkszereda
András Szilárd, Csíkdelne*

10. osztály

1. feladat (30 pont). Határozd meg az x valós számokat, amelyekre teljesül az alábbi egyenlőség:

$$2026^{x-\frac{\pi}{4}} + 2026^{\frac{\pi}{4}-x} = \sqrt{2} \cdot (\sin x + \cos x).$$

*Szilágyi Judit, Kolozsvár
Forgács István, Szatmárnémeti*

2. feladat (30 pont). Tekintsük az $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(z) = \varepsilon^{2026} z + \varepsilon^{2027} \bar{z}$$

függvényt, ahol ε harmadrendű egységgyök és $\varepsilon \neq 1$.

a) Igazold, hogy bármely $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$f(z) = 2 \cdot \operatorname{Re}(\varepsilon z) \quad \text{és} \quad f(z) + f(\bar{z}) = -2 \cdot \operatorname{Re}(z),$$

ahol $\operatorname{Re}(z)$ a z komplex szám valós részét jelöli!

b) Igazold, hogy az f függvény szürjektív, de nem injektív!

Szilágyi Judit, Kolozsvár

3. feladat (20 pont). Igazold, hogy

$$\sqrt[3]{1 - \log_{abc} a} + \sqrt[3]{1 - \log_{abc} b} + \sqrt[3]{1 - \log_{abc} c} \geq \sqrt[3]{2 - 2 \log_{abc} ab} + \sqrt[3]{2 - 2 \log_{abc} bc} + \sqrt[3]{2 - 2 \log_{abc} ca},$$

bármely $a, b, c \in (1, +\infty)$ esetén!

Kiss Csongor, Kolozsvár

4. feladat (20 pont). a) Legyen O a komplex számsík kezdőpontja (origója), B és C a sík két olyan pontja, amelyre az OBC háromszög pozitív körbejárású. Igazold, hogy az OBC háromszög H magasságpontjának affixuma

$$h = i \cdot (b - c) \cdot \operatorname{ctg}(\alpha),$$

ahol b és c a B , illetve a C pont affixuma, és α a BOC szög mértéke!

b) Az $ABCD$ konvex négyszög átlói nem merőlegesek egymásra és az O pontban metszik egymást. Legyen S_1 az OAB és S_2 az OCD háromszög súlypontja, illetve H_1 az OBC , H_2 pedig az OAD háromszög magasságpontja. Igazold, hogy

$$S_1 S_2 \perp H_1 H_2.$$

Dávid Géza, Székelyudvarhely

11. osztály

1. feladat (30 pont). Az $(x_n)_{n \geq 1}$ pozitív tagú számsorozat esetén $x_1 = \frac{2}{3}$ és

$$(n+1)^2 \cdot x_{n+1} = n^2 \cdot x_n + \frac{1}{3}, \quad \forall n \geq 1.$$

a) Határozd meg a sorozat általános tagjának képletét!

b) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$ határértéket!

Tóth Viktória, Marosvásárhely

2. feladat (30 pont). Az $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix főátlón levő elemeinek összegét $\text{Tr} A$ -val jelöljük.

a) Igazold, hogy a $P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $P(x) = \det(A - xI_2)$ függvényre $P(x) = x^2 - \text{Tr} A \cdot x + \det A$, $\forall x \in \mathbb{C}$.

b) Bizonyítsd be, hogy $\det(A^2 + A + I_2) \geq \frac{3}{4} + 3 \cdot \text{Tr} A \cdot \det A$.

dr. Bencze Mihály, Brassó

3. feladat (20 pont). Az $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ mátrixok teljesítik az $A + B = A \cdot B$ összefüggést.

a) Igazold, hogy $A \cdot B = B \cdot A$.

b) Bizonyítsd be, hogy ha $\det(A + B) > 0$ és $\det[(AB)^2 - 5AB + 5I_n] > 0$, akkor $\det(A^5 + B^5) > 0$.

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

4. feladat (20 pont). Az $(x_n)_{n \geq 1}$ valós számsorozat esetén $x_1 \in (0, 1)$ és

$$x_{n+1} = x_n \cdot \cos(x_n), \quad \forall n \geq 1.$$

a) Igazold, hogy az $(x_n)_{n \geq 1}$ sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!

b) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot x_n$ határértéket!

c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\text{tg } x_k}{x_k} \right)^2 \right)$ határértéket!

Loga Patrik, Zilah

12. osztály

1. feladat (30 pont). Számítsd ki az

$$\int \frac{\sin 2x}{a + \sin^4 x + \cos^4 x} dx$$

integrált, ahol a olyan valós szám, amelyre $|a| > 1$.

dr. Bencze Mihály, Brassó

2. feladat (30 pont). Jelölje $[x]$ az x valós szám egészrészét, $\{x\}$ pedig a törtrészét. A valós számok halmazán a „ $\circ$ ” műveletet az

$$x \circ y = [x] \cdot [y] + \{\{x\} + \{y\}\}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

szabállyal értelmezzük. (A második tagban a külső kapcsos zárójel az összeg törtrészét jelöli).

a) Határozd meg a valós számok azon legbővebb $M \subset \mathbb{R}$ részhalmazát, amelyre teljesül, hogy $[x] \neq 0$ minden $x \in M$ esetén, és az $(M, \circ)$ pár Abel-csoportot alkot!

b) Legyen $x^{(n)} = \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_n$, ahol $n \in \mathbb{N}^*$. Határozd meg, hány olyan $x \in M$ létezik, amelyre teljesül az $x^{(2026)} = e$ egyenlőség, ahol e a csoport semleges eleme!

Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy

3. feladat (20 pont). Igazold, hogy a $2^x = x^{32}$ egyenletnek pontosan három valós megoldása van! Lásd be azt is, hogy ezek közül pontosan egy racionális!

Kovács Béla, Szatmárnémeti

4. feladat (20 pont). A $(G, \cdot)$ véges csoportnak A olyan részhalmaza, amely esetén $2|A| > |G|$, ahol $|H|$ -val jelöljük a H halmaz elemeinek számát. Vezessük be az

$$r(g) = |\{(a, b) \in A \times A \mid a \cdot b = g\}|$$

jelölést, ahol $g \in G$ (tehát $r(g)$ azoknak az $(a, b) \in A \times A$ pároknak a száma, amelyekre $a \cdot b = g$).

a) Számítsd ki $\sum_{g \in G} r(g)$ értékét!

b) Bizonyítsd be, hogy $r(g) \geq 2|A| - |G|$, minden $g \in G$ esetén!

c) Határozd meg azokat az A részhalmazokat, amelyekre $r(g) = 2|A| - |G|$, minden $g \in G$ esetén!

Lukács Andor, Kolozsvár

Országos döntő - II. forduló

9. osztály

1. feladat (30 pont). Adottak $x, y \in \mathbb{R}^*$ úgy, hogy

$$|x| + \frac{25}{|x|} + 16|y| + \frac{1}{4|y|} \leq \left[2\sqrt{7} + 1\right] + 8,$$

ahol $[a]$ az a szám egész részét jelöli. Mutasd ki, hogy

$$\sqrt{\frac{|x|}{|y|} + 22\left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right) + 27}$$

természetes szám!

*Mastan Eliza, Nagybánya
Fodor Erika, Beszterce*

2. feladat (30 pont). Az ABC egyenlő oldalú háromszögben legyen D az AC szakasz belső pontja, amelyre $AD = k \cdot DC$. A BD egyenesen az E pontot úgy vesszük fel, hogy $BE = (k + 1) \cdot DE$ és D a BE szakasz belső pontja. Határozzuk meg a k értékét úgy, hogy AE merőleges legyen az AB egyenesre!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

3. feladat (20 pont). Oldd meg a $(2xy - 10)^2 = 4x^2 + y^2$ egyenletet az egész számok halmazán!

*Mastan Eliza, Nagybánya
Tóth Csongor, Szováta*

4. feladat (20 pont). a) Igazold, hogy egy konvex négyszög akkor és csakis akkor ortodiagonális (átlói merőlegesek egymásra), ha szemben fekvő oldalainak négyzetösszege megegyezik!

b) Igazold, hogy ha egy kör köré írható négyszög ortodiagonális, akkor deltoid (az egyik átlója a szimmetriatengelye)!

Pálhegyi Farkas László, Nagyvárad

5. feladat (20 pont). a) Igazold, hogy az $A = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2\}$ halmaznak van két olyan négyelemű diszjunkt részhalmaza, amelyek elemeinek összege egyenlő!

b) Igazold, hogy a $B = \{1^2, 2^2, 3^2, \dots, 2024^2\}$ halmaznak van két olyan B_1 és B_2 diszjunkt részhalmaza, amelyekre $B_1 \cup B_2 = B$ és B_1 elemeinek összege egyenlő a B_2 elemeinek összegével!

*Kocsis Attila, Déva
Németi Mónika, Kolozsvár*

6. feladat (20 pont). Egy négyzetrácsos lapra rajzolt tetszőleges rácstéglalap felbontása alatt azt értjük, hogy olyan négyzetekre bontjuk, melyek csúcsai rácspontok, oldalaik pedig párhuzamosak a téglalap oldalaival, és amelyek belsejei diszjunktak. A téglalap minden ilyen lehetséges felbontása mellé odaírjuk a felbontásban szereplő legkisebb négyzet oldalhosszát.

Rajzolhat-e Norbi olyan $m \times n$ -es téglalapot, amely esetén a leírt számok közül a legnagyobb szám a 2025, illetve az m és n számok legnagyobb közös osztója:

a) 2026,

b) 2025,

c) 1.

10. osztály

1. feladat (30 pont). Az A halmaz az olyan nyolcjegyű pozitív egész számok halmaza, amelyek első öt számjegyének a szorzata 2025 és az utolsó négy számjegyének a szorzata is 2025. Határozd meg az A halmaz elemeinek számát!

Péter Róbert, Gyergyóremete

2. feladat (30 pont). Az $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ függvényt a következőképpen értelmezzük: $f(a)$ az a legkisebb négyzetszám, amelyre teljesül, hogy $a \mid f(a)$ (például $f(3) = 9, f(8) = 16$).

a) Határozd meg az összes olyan n számot, amelyre $f(n) = 2025$.

b) Hány megoldása van az $f(n) - n = 2025$ egyenletnek?

Barta Zágoni Csongor, Marosvásárhely

3. feladat (20 pont). Az $ABCD$ konvex négyszögben $\widehat{DAB} = 90^\circ$, $\widehat{ABC} = 150^\circ$, $AD = BC = a$, $AB = n \cdot a$, ahol $n \in (0, \infty)$ változó. Számítsd ki a $\frac{CD}{BD}$ arány legnagyobb értékét!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

4. feladat (20 pont). Adott 15 darab nemnulla, egymástól különböző, 987-nél kisebb természetes szám. Bizonyítsd be, hogy ezek között létezik három olyan szám, amelyek egy háromszög oldalhosszai lehetnek!

Bencze Mihály, Brassó

5. feladat (20 pont). Az $ABCD$ konvex négyszögben $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ és a BD egyenes az ABC háromszög köré írt kört az E pontban metszi.

a) Igazold, hogy a D pont az ABC háromszög köré írt kör belsejében található!

b) Igazold, hogy $AB = DB$ akkor és csak akkor, ha AD az $\widehat{EAC}$ szögfelezője!

Pálhegyi-Farkas László, Nagyváradi

6. feladat (20 pont). A $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ halmaz egy A részhalmazára teljesül, hogy az A bármely három a, b, c eleme esetén az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek nincs egész gyöke. Legtöbb hány eleme lehet az A halmaznak?

Barta Zágoni Csongor, Marosvásárhely

11-12. osztály

1. feladat (30 pont). Határozd meg az összes olyan (x, y) egész számpárt, amelyre

$$x(x+1)(x+2)(x+3) + 12 = y^2.$$

2. feladat (30 pont). Az ABC háromszögben $AB = AC$. Legyen $D \in (AC)$ egy mozgó pont és $E \in (BC)$ olyan pont, hogy $C \in (BE)$ és $BD = CE$. Igazold, hogy a BDE háromszög köréírt köre átmegy egy B -től különböző rögzített ponton!

Rákóczi Erik, Kolozsvár

3. feladat (20 pont). Igazold, hogy ha $a, b, x, y > 0$ valós számok, akkor

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{x+y}{xa+yb} + \frac{x+y}{xb+ya} \geq \frac{4}{a+b}.$$

dr. Bencze Mihály, Brassó

4. feladat (20 pont). Az ABC háromszög AB , BC , CA oldalának felezőpontjai C' , A' , B' és legyen M egy pont a síkban. Ha a az A' ponton át az AM egyenessel párhuzamosan húzott egyenes, b a B' ponton át az BM egyenessel párhuzamosan húzott egyenes és c a C' ponton át az CM egyenessel párhuzamosan húzott egyenes, akkor igazold, hogy az a , b , c egyenesek egy pontban futnak össze!

Szilágyi Zsolt, Kolozsvár

5. feladat (20 pont). Angelico felírt a táblára néhány 2026-nál nem nagyobb, legfeljebb 2026 db, nem feltétlenül különböző pozitív egész számot. Ezután mindegyik számot egyenként a 2026. hatványra emelte, majd a kapott számokat összeadta. Az így kapott eredmény $9^{1014} \cdot 11^{2028}$. Hány számot írhatott fel Angelico?

Barta Zágoni Csongor, Marosvásárhely

6. feladat (20 pont). Ali és Baba egy $1 \times 4n$ mezőből álló, sakktáblaszerűen színezett táblán játszik ($n \geq 2$). A játékosok felváltva lépnek, Ali kezd. Egy lépésben a soron lévő játékos két tetszőleges mező színét felcseréli, azzal a megkötéssel, hogy egy adott mezőpár cseréjére a játék teljes ideje alatt legfeljebb egyszer kerülhet sor. A játék akkor ér véget, ha az összes lehetséges párt megcserélték. Ali célja, hogy a játék bármely fázisában megjelenjen a táblán egy minél hosszabb egyszínű szakasz, Baba pedig ezt próbálja megakadályozni. Mekkora az a leghosszabb egyszínű szakasz, amit Ali a játék kimenetelétől függetlenül, átmenetileg is képes előállítani?

*Bodor Ádám, Csíkszereda
Ercse Ferenc, Sepsiszentgyörgy
Sajter Klaus, Csíkszereda*

MEGOLDÁSOK

Megyei forduló

5. osztály

1. feladat (30 pont). Egy űrhajó vezérkarát a kapitány, a tisztek és az altisztek alkotják. Valamennyiük ruháját csillagok díszítik, a kapitány ruháján 8, a tisztekén 5, az altisztekén pedig 3 csillag van. Az űrhajó vezérlő szobájában tanácskozást tartanak, amelyen a vezérkarból tízen vesznek részt és ruhájukon összesen 44 csillag található. Köztük van-e a kapitány? Hány tisztt és altisztt vett részt a tanácskozáson?

Bíró Gabriella, Nagyvárad

Megoldás. Hivatalból

(3 pont)

Tegyük fel, hogy köztük van a kapitány, ez azt jelenti hogy a maradék $10 - 1 = 9$ ember ruháján összesen $44 - 8 = 36$ csillag van.

(6 pont)

Alkalmazzuk a hamis feltevés módszerét. Tegyük fel, hogy mind a 9 ember altisztt, azaz mindenik ruháján 3 csillag van, ez $9 \cdot 3 = 27$. Marad még $36 - 27 = 9$ csillag.

(3 pont)

De a 9 nem osztható az $5 - 3 = 2$ különbséggel. Tehát nem lehet köztük a kapitány.

(3 pont)

Így viszont a vezérlő szobában levő 10 ember mindegyike csak tisztt (5 csillaggal) vagy altisztt lehet (3 csillaggal) és összesen 44 csillag van rajtuk.

(3 pont)

Alkalmazzuk a hamis feltevés módszerét. Tegyük fel, hogy mind a 10 ember altisztt, azaz mindenik ruháján 3 csillag van, ez $10 \cdot 3 = 30$. Marad még $44 - 30 = 14$ csillag.

(3 pont)

A különbség abból adódik, hogy vannak köztük tisztek is, nekik $5 - 3 = 2$ csillaggal több van a ruhájukon.

(3 pont)

Tehát $14 : 2 = 7$ tisztt és 3 altisztt vett részt a tanácskozáson.

(6 pont)



2. feladat (30 pont). Az ábrán látható bűvös négyzetbe a természetes számokat helyezzük el 1-től 16-ig, mindegyiket pontosan egyszer úgy, hogy minden sorban, minden oszlopban és a két átló mentén a számok összege ugyanannyi legyen. Írd be a hiányzó számokat! Hogyan gondolkoztál?

	8		1
2		7	
3		6	
	5	9	4

Matlap 9/2025, A:5170

Első megoldás. Hivatalból

(3 pont)

Megjegyzés. Helyes kitöltés esetén, indoklás nélkül 15 pont kapható.

A táblázatban a természetes számok szerepelnek 1-től 16-ig, mindegyik pontosan egyszer, így a táblázatban szereplő számok összege $1 + 2 + \dots + 16 = \frac{16 \cdot 17}{2} = 136$.

(6 pont)

Mivel minden sorban ugyanannyi a számok összege, így egy sorban az összeg $136 : 4 = 34$. **(3 pont)**
Tehát a feltételek alapján minden sorban, oszlopban, illetve a két átló mentén a számok összege 34 kell legyen. **(3 pont)**

Ekkor a harmadik oszlop legfelső eleme $34 - (7 + 6 + 9) = 34 - 22 = 12$. A legalsó sor első eleme pedig $34 - (5 + 9 + 4) = 34 - 18 = 16$. **(6 pont)**

Ezután az előző lépésekhez hasonlóan kitöltjük a négyzetet, figyelve arra, hogy az összeg mindenhol 34 legyen. Például a harmadik sor második eleme 10 kell legyen az átló miatt. Ekkor a harmadik sor utolsó eleme 15, a sor miatt. **(3 pont)**

A második sor utolsó eleme 14 kell legyen az utolsó oszlop miatt. Emiatt pedig a második sor második eleme 11. **(3 pont)**

Illetve ekkor az első sor első eleme 13, az első oszlop és az átló miatt. Az alábbi ábrán látható a helyes kitöltés: **(3 pont)**

13	8	12	1
2	11	7	14
3	10	6	15
16	5	9	4

■

Második megoldás. Hivatalból **(3 pont)**

A harmadik oszlopban a számok összege 22, a legalsó sorban pedig 18, tehát a két összeg között a különbség 4. Mivel minden sorban és oszlopban az összeg megegyezik, ezért a bal alsó sarokba beírt szám 4-gyel nagyobb kell legyen, mint az első sor harmadik eleme. **(3 pont)**

Tehát a két helyre kerülő számpárok lehetnek (10, 14), (11, 15) vagy (12, 16). **(3 pont)**

Hogyha a bal alsó sarokba 14-et írunk, a felső sor harmadik helyére pedig 10-et, akkor az összeg 32. Ekkor a bal felső sarokba a 13 kell kerüljön, de akkor az átló miatt a második sor második eleme 9 kellene legyen, de a 9 már szerepel a táblázatban, így ez a kitöltés nem befejezhető. **(6 pont)**

Hogyha a bal alsó sarokba 15 kerül, a felső sor harmadik helyére pedig 11, akkor az összeg 33. Ekkor a bal felső sarokba 13 kell kerüljön, így az átló miatt a második sor második eleme 10 kell legyen. Ekkor viszont a második oszlop összege miatt a harmadik sor második eleme szintén 10 kellene legyen, így a kitöltés nem befejezhető. **(6 pont)**

Így tehát a kitöltés csak a (12, 16) esetben fejezhető be. A kitöltés befejezését lásd az előző megoldásban. **(9 pont)**

■

3. feladat (20 pont). Koppány és Vajk játékot játszottak az $1, 2, 3, \dots, 10$ természetes számokkal. A fiúk minden körben választottak maguknak néhány számot, majd tettek egy-egy kijelentést. Döntsd el, ki mondott igazat!

a) Első körben mindketten választottak. Koppány az összes párosat, Vajk pedig az összes páratlant választotta. Mindketten négyzetre emelték a számokat, majd rendre elosztották mindegyiket 10-zel. Vajk azt állítja, hogy többféle maradékot kapott, mint Koppány. Igazat mondott?

b) Második körben Koppány kiválasztotta a 2, 3, 5, 7 és 9 számokat, majd mindeniket a 2026-ik hatványra emelte, az eredményeket pedig összeadta. Azt állította ezután, hogy négyzetszámot kapott. Igazat mondott?

c) Harmadik körben Vajk választotta a 2-es számot. Rendre felemelte a $96, 97, \dots, 2025, 2026$ hatványra, majd a kapott eredményeket összeadta. Azt állította ezután, hogy négyzetszámot kapott. Igazat mondott?

*Gáspár Edit, Zilah
Pálhegyi Farkas László, Nagyvárád*

Megoldás. Hivatalból

(2 pont)

a) A számok tízzel való osztási maradéka tulajdonképpen a számok utolsó számjegye. Jelölje egy n szám utolsó számjegyet az $u(n)$. Az páros számok négyzeteinek utolsó számjegyei: $u(2^2) = 4$, $u(4^2) = 6$, $u(6^2) = 6$, $u(8^2) = 4$, $u(10^2) = 0$. (2 pont)

A páratlan számok négyzeteinek utolsó számjegye: $u(1^2) = 1$, $u(3^2) = 9$, $u(5^2) = 5$, $u(7^2) = 9$, $u(9^2) = 1$. (2 pont)

Mindkét fiú csak 3 – 3 különböző maradékot (utolsó számjegyet) kapott, tehát Vajk hazudott.

b) Vizsgáljuk a 2026 . hatványok utolsó számjegyeit. A 2 hatványainak utolsó számjegyei rendre $2, 4, 8, 6$, majd ezek ismétlődnek négyessével. Minden 4 -gyel osztható hatvány utolsó számjegye 6 , így $u(2^{2024}) = 6$, ahonnan $u(2^{2026}) = 4$. A 3 hatványainak utolsó számjegyei rendre $3, 9, 7, 1$, majd ezek ismétlődnek négyessével. Minden 4 -gyel osztható hatvány utolsó számjegye 1 , így $u(3^{2024}) = 1$, ahonnan $u(3^{2026}) = 9$. Az 5 mindenik hatványának utolsó számjegye 5 , így $u(5^{2026}) = 5$. (2 pont)
A 7 hatványainak utolsó számjegyei rendre $7, 9, 3, 1$, majd ezek ismétlődnek négyessével. Minden 4 -gyel osztható hatvány utolsó számjegye 1 , így $u(7^{2024}) = 1$, ahonnan $u(7^{2026}) = 9$. A 9 hatványainak utolsó számjegyei rendre $9, 1$ majd ezek ismétlődnek kettessével. Minden páros hatvány utolsó számjegye 1 , így $u(9^{2026}) = 1$. (2 pont)

$$\begin{aligned} u(2^{2026} + 3^{2026} + 5^{2026} + 7^{2026} + 9^{2026}) &= u(u(2^{2026}) + u(3^{2026}) + u(5^{2026}) + u(7^{2026}) + u(9^{2026})) \\ &= u(4 + 9 + 5 + 9 + 1) \\ &= u(28) = 8. \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

De mivel négyzetszám nem végződhet 8 -ra, így Koppány hazudott. (2 pont)

c) A Vajk által számolt összeg legyen $A = 2^{96} + 2^{97} + \dots + 2^{2026}$. Vizsgáljuk az utolsó számjegyet. Ha az A összeget beszorozzuk kettővel, akkor

$$2 \cdot A = 2 \cdot (2^{96} + 2^{97} + \dots + 2^{2026}) = 2^{97} + 2^{98} + \dots + 2^{2027},$$

illetve vonjuk ki belőle az eredeti A összeget:

$$\begin{aligned} 2 \cdot A - A &= (2^{97} + 2^{98} + \dots + 2^{2027}) - (2^{96} + 2^{97} + \dots + 2^{2026}) \\ &= 2^{2027} - 2^{96}. \end{aligned} \quad (4 \text{ pont})$$

A 2 hatványainak utolsó számjegyei rendre $2, 4, 8, 6$, majd ezek ismétlődnek négyessével. Minden 4 -gyel osztható hatvány utolsó számjegye 6 , így $u(2^{96}) = 6$, illetve $u(2^{2027}) = 8$. Ekkor az $u(A) = u(2^{2027} - 2^{96}) = u(2^{2027}) - u(2^{96}) = 8 - 6 = 2$. Mivel négyzetszám utolsó számjegye nem lehet 2 , Vajk hazudott. (2 pont)



4. feladat (20 pont). Az A, B, C nem feltétlenül különböző, nemnulla természetes számokat jelölnék, amelyekre $A \leq B \leq C$.

- a) Írd fel az összes lehetséges (A, B, C) számhármast, amelyre $A^2 + B^2 + C^2 = 99$.
 b) Írj fel három olyan (A, B, C) számhármast, amelyre $A^2 + B^2 + C^2 = 99^{2025}$.
 c) Írj fel egy olyan (A, B, C) számhármast, amelyre $A^3 + B^3 + C^3 = 99$.
 d) Írj fel egy olyan (A, B, C) számhármast, amelyre $A^3 + B^3 + C^3 = 99^{2026}$.

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból

(2 pont)

- a) A 99 háromféleképpen írható fel három négyzetszám összegeként:

$$99 = 9 + 9 + 81 = 3^2 + 3^2 + 9^2, \quad (2 \text{ pont})$$

$$99 = 1 + 49 + 49 = 1^2 + 7^2 + 7^2, \quad (2 \text{ pont})$$

$$99 = 25 + 25 + 49 = 5^2 + 5^2 + 7^2. \quad (2 \text{ pont})$$

Így a számhármak a következők lehetnek: $(A, B, C) \in \{(3, 3, 9), (1, 7, 7), (5, 5, 7)\}$.

- b) Induljunk ki az előző alpont megoldásaiból. Az összeg a következőképp alakítható $A + B + C = 99^{2025} = 99 \cdot 99^{2024} = 99 \cdot (99^{1012})^2$. Így minden előző alpontbeli megoldásból kialakítható egy-egy megoldás:

$$\begin{aligned} 99 \cdot (99^{1012})^2 &= (3^2 + 3^2 + 9^2) \cdot (99^{1012})^2 = 3^2 \cdot (99^{1012})^2 + 3^2 \cdot (99^{1012})^2 + 9^2 \cdot (99^{1012})^2 \\ \text{tehát } 99^{2025} &= (3 \cdot 99^{1012})^2 + (3 \cdot 99^{1012})^2 + (9 \cdot 99^{1012})^2 \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

$$\begin{aligned} 99 \cdot (99^{1012})^2 &= (1^2 + 7^2 + 7^2) \cdot (99^{1012})^2 = 1^2 \cdot (99^{1012})^2 + 7^2 \cdot (99^{1012})^2 + 7^2 \cdot (99^{1012})^2 \\ \text{tehát } 99^{2025} &= (1 \cdot 99^{1012})^2 + (7 \cdot 99^{1012})^2 + (7 \cdot 99^{1012})^2 \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

$$\begin{aligned} 99 \cdot (99^{1012})^2 &= (5^2 + 5^2 + 7^2) \cdot (99^{1012})^2 = 5^2 \cdot (99^{1012})^2 + 5^2 \cdot (99^{1012})^2 + 7^2 \cdot (99^{1012})^2 \\ \text{tehát } 99^{2025} &= (5 \cdot 99^{1012})^2 + (5 \cdot 99^{1012})^2 + (7 \cdot 99^{1012})^2. \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

Így a számhármak a következők lehetnek: $(A, B, C) \in \{(3 \cdot 99^{1012}, 3 \cdot 99^{1012}, 9 \cdot 99^{1012}), (1 \cdot 99^{1012}, 7 \cdot 99^{1012}, 7 \cdot 99^{1012}), (5 \cdot 99^{1012}, 5 \cdot 99^{1012}, 7 \cdot 99^{1012})\}$.

- c) A 99 felírható, mint $99 = 8 + 27 + 64 = 2^3 + 3^3 + 4^3$, tehát egy darab számhármak az $(A, B, C) = (2, 3, 4)$. (2 pont)

d) Induljunk ki az előző alpont megoldásából. Ekkor az adott összeg a következőképp alakítható $A + B + C = 99^{2026} = 99 \cdot 99^{2025} = 99 \cdot (99^{675})^3$. Így az előző alpontbeli megoldásból kialakítható egy megoldás

$$\begin{aligned} 99 \cdot (99^{675})^3 &= (2^3 + 3^3 + 4^3) \cdot (99^{675})^3 = 2^3 \cdot (99^{675})^3 + 3^3 \cdot (99^{675})^3 + 4^3 \cdot (99^{675})^3 \\ \text{tehát } 99^{2026} &= (2 \cdot 99^{675})^3 + (3 \cdot 99^{675})^3 + (4 \cdot 99^{675})^3. \end{aligned} \quad (4 \text{ pont})$$

Tehát egy darab ilyen számhármass az $(A, B, C) = \{(2 \cdot 99^{675}, 3 \cdot 99^{675}, 4 \cdot 99^{675})\}$.

■

6. osztály

1. feladat (30 pont). A társasjátékstand előtt egyezkedik Csongor és Dávid. Ugyanazon társasjáték megvásárlását tervezik, de külön-külön egyiküknek sincs elegendő pénze: Csongor pénzéből hiányzik a játék árának $\frac{1}{3}$ -a, míg Dávidé az ár 16, (6)%-val kevesebb. Ezért úgy döntenek, hogy közösen vásárolják meg a játékot. A vásárlást követően összesen 90 lejük maradt meg.

a) Határozd meg a társasjáték árát, valamint azt, hogy mennyi pénze volt Csongornak és Dávidnak a vásárlás előtt!

b) A megmaradt összeget úgy osztják fel egymás között, hogy a vásárlás előtti és az osztzkodás utáni pénzük aránya megegyezzen. Mennyi pénzt kap Csongor, illetve Dávid a megmaradt pénzből?

Hodgyai Edit, Micske

Megoldás. Hivatalból

(3 pont)

a) Legyen a társasjáték ára x lej.

(3 pont)

Csongornak kezdetben a pénze $\frac{2}{3} \cdot x$ lej, Dávid pénze pedig $\frac{5}{6} \cdot x$ lej.

(6 pont)

Így $\frac{2}{3} \cdot x + \frac{5}{6} \cdot x = x + 90$.

(3 pont)

Ebből $4x + 5x = 6x + 540$, vagyis $x = 180$ lej a társasjáték ára.

(3 pont)

A vásárlás előtt Csongornak $\frac{2}{3} \cdot x = \frac{2}{3} \cdot 180 = 120$ leje volt, míg Dávidnak $\frac{5}{6} \cdot x = \frac{5}{6} \cdot 180 = 150$ lej állt rendelkezésére.

(3 pont)

b) A vásárlás előtti pénzösszegek aránya $\frac{120}{150}$. Ha Csongor y pénzösszeget fog visszakapni, akkor Dávid $90 - y$ összeget.

Tehát felírhatjuk, hogy $\frac{120}{150} = \frac{y}{90-y}$. Az aránypárok tulajdonságából következik, hogy

(3 pont)

$120 \cdot (90 - y) = 150 \cdot y$, ahonnan $9y = 360$, vagyis $y = 40$ lej.

(3 pont)

Így Csongor a megmaradt pénzből 40 lejt kap vissza, míg Dávid 50 lejt.

(3 pont)



2. feladat (30 pont). Jancsinak három doboza van, az első dobozban pontosan három sárga golyó, a másodikban három zöld golyó és a harmadikban három kék golyó van. Az első lépésben: az első dobozból kivesz 3 golyót és szétosztja a másik kettő között úgy, hogy mindegyikbe legalább egy golyót tesz. A következő lépésben kivesz 3 golyót a második dobozból és hasonlóan szétosztja. Ugyanezt a lépést teszi meg a harmadik doboz esetében is, majd visszatér az első dobozhoz. Ezeket a lépéseket addig folytatja, amíg eléri, hogy az első dobozban legyenek a kék golyók, másodikban a sárgák, és harmadikban a zöldek.

Jancsinak sikerült 8 lépésből elérni a célját. Találj ennél kevesebb lépésből álló megoldást!

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból

(3 pont)

Mivel egy lépésben 3 golyót kell kivegyünk egy dobozból, úgy kell rendezzük a golyókat, hogy mindig legyen a következő dobozban legalább három.

Első lépésben vigyünk két sárgát a második dobozba és egyet a harmadikba. A második lépésben a másodikból vigyünk két zöldet a harmadikba és egyet az elsőbe. A harmadik lépésben a harmadik dobozból tegyünk két kéket az elsőbe, és a harmadik kéket a másodikba. Az alábbi táblázatban követhetők ezek a lépések, a golyókat megszámoztuk a jobb követhetőség érdekében.

0. lépés			1. lépés		2. lépés		3. lépés		
					z_2				
			s_2		z_3				
			s_3	s_1	s_1				
s_1	z_1	k_1	z_1	k_1	k_1		z_1	k_1	s_1
s_2	z_2	k_2	z_2	k_2	s_2	k_2	k_2	s_2	z_2
s_3	z_3	k_3	z_3	k_3	z_1	s_3	k_3	s_3	z_3

Ezzel elértük, hogy minden színből kettő a helyére kerüljön, már csak egy olyan lépéssort kell találjunk, amivel a maradék golyókat egyvel arrébb tesszük, miközben a többit a helyén hagyjuk. Ezt elérhetjük az alábbi táblázatban látható három lépéssel **(27 pont)**

			4. lépés		5. lépés		6. lépés		
					k_1				
			k_2		k_2				
			k_3	z_1	z_1				
z_1	k_1	s_1	k_1	s_1	s_1		k_1	s_1	z_1
k_2	s_2	z_2	s_2	z_2	s_2	z_2	k_2	s_2	z_2
k_3	s_3	z_3	s_3	z_3	k_3	s_3	z_3	k_3	s_3

Pontozás: 8 lépésnél kevesebb (helyes!) lépéssor, amely eléri a kívánt elrendezést – **27 pont**. Ha nincs teljes megoldás, akkor a következők szerint ajánlott pontozni:

- 1) Leírja, vagy a leírt lépések alapján úgy rendez, hogy a következő dobozba legyen legalább három golyó – **6 pont**
- 2) Leír 3 lépést a bevezetett szabály alapján – **9 pont**. Ha ezt a lépéssort egyszer vagy kétszer megismételve a golyók a helyükre kerülnek, de nincs leírva – **6 pont**
- 3) Leír több lépéssort azzal a céllal, hogy a golyókat adott szabályok szerint rendezze – **6 pont**

■

3. feladat (20 pont). Az 500 cm hosszúságú AB szakaszon felvesszük az $M_1, M_2, M_3, \dots, M_{25}$ ($A \neq M_1, B \neq M_{25}$) pontokat ebben a sorrendben úgy, hogy az $AM_1, M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, \dots, M_{24}M_{25}$ szakaszok hossza 25 egymásutáni természetes szám legyen. Határozd meg az $M_{25}B$ szakasz hosszának legkisebb és legnagyobb lehetséges értékét!

Matlap 9/2025, A:5174

Első megoldás. Hivatalból **(2 pont)**

Jelölje a az $M_{25}B$ szakasz hosszát (centiméterben) és x az AM_1 szakasz hosszát (szintén centiméterben). Így $x \in \mathbb{N}^*$ és a feladat szövege alapján $M_1M_2 = x + 1, M_2M_3 = x + 2, \dots, M_{24}M_{25} = x + 24$.

(2 pont)

Mivel $AM_1 + M_1M_2 + M_2M_3 + \dots + M_{24}M_{25} + M_{25}B = AB$, felírhatjuk az

$$x + (x + 1) + (x + 2) + \dots + (x + 24) + a = 500 \quad \text{(4 pont)}$$

egyenletet. Az egyenletet egyszerűbb alakra hozva kapjuk, hogy $25 \cdot x + 1 + 2 + 3 + \dots + 24 + a = 500$, azaz $25 \cdot x + 25 \cdot 12 + a = 500$, ahonnan $25 \cdot x + a = 200$. **(4 pont)**

Mivel a bal oldalon két tag összege áll és a jobb oldalon egy szám, ezért a pontosan akkor lesz

a lehető legnagyobb, ha x a lehető legkisebb és a pontosan akkor lesz a lehető legkisebb, ha x a lehető legnagyobb. Az x legkisebb értéke 1, behelyettesítve az egyenletbe írhatjuk, hogy $25 \cdot 1 + a = 200$, ahonnan a legnagyobb lehetséges értéke $a = 175$ (és ez valóban lehetséges, hisz így az $AM_1, M_1M_2, \dots, M_{24}M_{25}, M_{25}B$ szakaszok hosszai rendre 1, 2, 3, $\dots$, 25, 175). (4 pont)

Mivel $a > 0$, ezért $25x < 200$, tehát $x < 8$ vagyis az x természetes szám legnagyobb lehetséges értéke 7. $x = 7$ esetén $a = 200 - 25 \cdot 7 = 25$, amely az a lehető legkisebb értéke (és ez valóban lehetséges, hisz így az $AM_1, M_1M_2, \dots, M_{24}M_{25}, M_{25}B$ szakaszok hosszai rendre 7, 8, 9, $\dots$, 31, 25). (4 pont) ■

Második megoldás. Hivatalból

(2 pont)

Jelölje a az $M_{25}B$ szakasz hosszát és x az AM_1 szakasz hosszát (centiméterben). Így $x \in \mathbb{N}^*$ és a feladat szövege alapján $M_1M_2 = x + 1, M_2M_3 = x + 2, \dots, M_{24}M_{25} = x + 24$. (2 pont)

Mivel $AM_1 + M_1M_2 + M_2M_3 + \dots + M_{24}M_{25} + M_{25}B = AB$, felírhatjuk az

$$x + (x + 1) + (x + 2) + \dots + (x + 24) + a = 500 \quad (4 \text{ pont})$$

egyenletet. Egyszerűbb alakra hozva $\frac{(x+x+24) \cdot 25}{2} + a = 500$, ahonnan kapjuk az $(x + 12) \cdot 25 + a = 500$ egyenletet. (4 pont)

Mivel $[(x + 12) \cdot 25] : 25$ és $500 : 25$, ezért a is osztható kell legyen 25-tel. De $x + 12 \geq 13$, tehát $(x + 12) \cdot 25 \geq 325$. Ebből következik, hogy $a \leq 175$. (4 pont)

Mivel $a \in \mathbb{N}^*$, $a : 25$ és $a \leq 175$ az a lehetséges értékei 25, 50, 75, $\dots$, 175.

Tehát a legkisebb értéke 25, míg a legnagyobb értéke 175. Ezeket rendre az $x = 7$, illetve az $x = 1$ értékekre veszi fel. (4 pont) ■

4. feladat (20 pont). Nevezzük „jó”-nak azokat az (a, b) nullától különböző természetes számokból alkotott számpárokat, amelyekben az a és b legnagyobb közös osztójának és legkisebb közös többszörösének az összege 226.

a) Sorold fel a 225 osztóit!

b) Határozd meg azokat az (a, b) „jó” számpárokat, amelyekre a és b relatív prímek!

c) Hány olyan (a, b) alakú „jó” számpár létezik, amelyben a és b nem relatív prímek? Sorold fel az összeset!

Czeglédi Csilla, Arad

Megoldás. Hivatalból

(2 pont)

a) $225 = 15^2 = 3^2 \cdot 5^2$, ezért 225 minden osztója $d = 3^u \cdot 5^v$ alakú, ahol $u, v \in \{0, 1, 2\}$. Így összesen 9 osztója van a 225-nek és ezek a $D_{225} = \{1, 3, 5, 9, 15, 25, 45, 75, 225\}$ halmaz elemei. (4 pont)

Megjegyzés. Más érvelés is elfogadható, de a felsorolás nem teljes értékű (hacsak nem látta be az összes többi 225-nél kisebb számra, hogy azok nem lehetnek osztók).

b) Mivel a és b relatív prímek, a legnagyobb közös osztójuk 1 és a legkisebb közös osztójuk a két szám szorzata, tehát a szöveg alapján felírható az $1 + a \cdot b = 226$ egyenlet, ahonnan $a \cdot b = 225$.
(2 pont)

A 225 osztói 9 olyan rendezett számpárt határoznak meg, amelyben a számok szorzata 225. Ezek közül 5 párban a két szám nem relatív prím, tehát a keresett számpárok $(1, 225)$, $(225, 1)$, $(9, 25)$, $(25, 9)$.
(2 pont)

c) Legyen d az a és b számok legnagyobb közös osztója, ekkor felírhatjuk, hogy $\begin{cases} a = d \cdot k \\ b = d \cdot p \end{cases}$, ahol k és p relatív prímek.
(2 pont)

Ez alapján $[a; b] = d \cdot k \cdot p$. (ez következik a $(a; b) \cdot [a; b] = a \cdot b$ összefüggésből vagy a legkisebb közös többszörös értelmezéséből és tulajdonságaiból). Így $d \cdot k \cdot p + d = 226$, vagyis a közös tényező kiemelése után $d \cdot (k \cdot p + 1) = 226$ tehát d osztója a 226-nak. Másrészt $D_{226} = \{1, 2, 113, 226\}$ és sem a , sem b nem lehet 1, tehát $d \in \{2, 113\}$.
(2 pont)

Ha $d = 2$, akkor $k \cdot p + 1 = 113$, tehát $k \cdot p = 112$. Másrészt $D_{112} = \{1, 2, 4, 7, 8, 14, 16, 28, 56, 112\}$, valamint k és p relatív prímek, tehát a (k, p) számpár az $\{(1, 112), (112, 1), (7, 16), (16, 7)\}$ halmaz elemei közül bármelyik lehet. Ebben az esetben az (a, b) számpár a $\{(2, 224), (224, 2), (14, 32), (32, 14)\}$ halmaznak tetszőleges eleme lehet.
(2 pont)

Ha $d = 113$, akkor $k \cdot p + 1 = 2$, tehát $k \cdot p = 1$. Ez csak a $k = p = 1$ esetben teljesül, tehát $a = b = 113$.
(2 pont)

A keresett „jó” számpárok száma tehát 5, és ezek a számpárok a következők:

$$(2, 224), (224, 2), (14, 32), (32, 14), (113, 113).$$

(2 pont)



7. osztály

1. feladat (30 pont). Határozd meg az $\overline{ab}$ alakú természetes számokat, ha az $a + b$, $a - b$ és $a \cdot b$ számok egyenesen arányosak a 7, 1, illetve 12 számokkal.

Szász Hajnalka, Csíkszereda

Első megoldás. Hivatalból

(3 pont)

Az arányosság

$$\frac{a+b}{7} = \frac{a-b}{1} = \frac{a \cdot b}{12} = k$$

alakban írható, ahol a és b számjegyek és $a \neq 0$.

(3 pont)

Ekkor

$$a+b=7k, \quad a-b=k, \quad \text{--- (3 pont)}$$

ahonnan az első két egyenlőség összeadásából azt kapjuk, hogy $2a = 8k$, azaz $a = 4k$.

(6 pont)

Mivel $b = a - k$ következik, hogy $b = 3k$.

(3 pont)

Ha $k \geq 3$, akkor $4k \geq 12$, tehát a nem lenne számjegy. Így csak a $k = 1$ és $k = 2$ eseteket kell megvizsgálnunk.

(3 pont)

Ha $k = 1$, akkor $a = 4$, $b = 3$ és valóban teljesül az $a \cdot b = 12$ egyenlőség. Tehát az $\overline{ab} = 43$ egy megoldás.

(3 pont)

Ha $k = 2$, akkor $a = 8$, $b = 6$. Ezekre a számokra viszont $a \cdot b = 48 \neq 12 \cdot k$, tehát ebben az esetben nincs megoldás.

(3 pont)

Összesítve: az egyetlen lehetséges megoldás $\overline{ab} = 43$.

(3 pont)



Második megoldás. Hivatalból

(3 pont)

Az arányosság

$$\frac{a+b}{7} = \frac{a-b}{1} = \frac{a \cdot b}{12} = k \quad \text{--- (3 pont)}$$

alakba írható. Ez alapján

$$a+b=7k \quad \text{és} \quad a-b=k, \quad \text{--- (3 pont)}$$

tehát a két egyenlőség megfelelő oldalait összeadva azt kapjuk, hogy

$$2a = 8k, \text{ vagyis } a = 4k. \quad \text{--- (3 pont)}$$

Ha $a = 4k$, akkor az $a + b = 7k$ egyenlőségből következik, hogy $b = 3k$.

(6 pont)

Az előbbi összefüggések alapján

$$a \cdot b = 12k^2. \quad \text{--- (3 pont)}$$

Az arányosság feltételéből viszont

$$a \cdot b = 12k,$$

tehát $k = k^2$. Ez csak akkor lehetséges, ha $k = 0$ vagy $k = 1$.

(3 pont)

$k = 0$ esetén $a = 0$ volna és ez nem lehetséges. $k = 1$ esetén $a = 4$ és $b = 3$ és ezek az értékek teljesítik az összes feltételt.

(3 pont)

Tehát az egyetlen szám, amely teljesíti a megadott feltételeket az $\overline{ab} = 43$.

(3 pont)



2. feladat (30 pont). Az ábrán látható négyzetrács 16 négyzete közül néhányat szürkére kell satírozni úgy, hogy a négyzetekbe beírt számok a számot tartalmazó és az azzal szomszédos négyzetek közül a szürkére satírozott négyzetek számával legyenek egyenlők. Határozd meg satírozás után a szürke négyzetek számát! Hányféleképpen végezhetjük el a satírozást? (Két négyzet szomszédos, ha van közös oldaluk vagy közös csúcsuk.)

1		7	
0		3	

Matlap 10/2025, A:5195

Megoldás. Hivatalból

(3 pont)

Induljunk a bal alsó sarokból. Mivel ott 0 van, azt jelenti, hogy sem a 0-t tartalmazó, sem pedig a három szomszédos négyzet nem szürke.

(3 pont)

Következzen a 3-at tartalmazó négyzet. A jobb alsó 2×2 -es sarok négy négyzetéből három szürke kell legyen. Ebből az ábrán látható négy eset adódik.

(6 pont)

1		7		1		7		1	
0		3		0		3		0	

Az első két esetben, ha a 7-et tartalmazó négyzetet vesszük figyelembe, akkor be kellene satírozni további hat négyzetet, amely szomszédos ezzel a négyzettel. Ez csak úgy lehetséges, ha az első és második sor utolsó 3 – 3 négyzetét besatírozzuk. Ekkor viszont az 1-gyel jelölt négyzetnek lenne két besatírozott szomszédos négyzete. Tehát ezek az esetek nem vezetnek megoldáshoz.

(6 pont)

A harmadik és a negyedik esetben, a 7-es miatt a jobb felső 2×3 -as téglalap 6 kis négyzete közül pontosan 5-öt kell besatírozni és az 1-es miatt a második oszlop első két négyzete közül csak legfeljebb az egyiket lehet besatírozni. Így csak a következő satírozások lehetségesek:

(6 pont)

1		7		1		7		1	
0		3		0		3		0	

Látható, hogy ezek a megoldások minden feltételnek megfelelnek.

(3 pont)

Tehát négyféle módon végezhető el a satírozás, és minden esetben 8 szürke négyzetünk lesz.

(3 pont)

Megjegyzés. A feladat bármelyik értéket tartalmazó mezőből kiindulva hasonlóan levezethető.



3. feladat (20 pont). Az $ABCD$ négyzeten kívül vedd fel az E és F pontokat úgy, hogy $\widehat{AFB} = \widehat{DEC} = 90^\circ$ és $\widehat{EDC} \equiv \widehat{FBA}$.

a) Bizonyítsd be, hogy

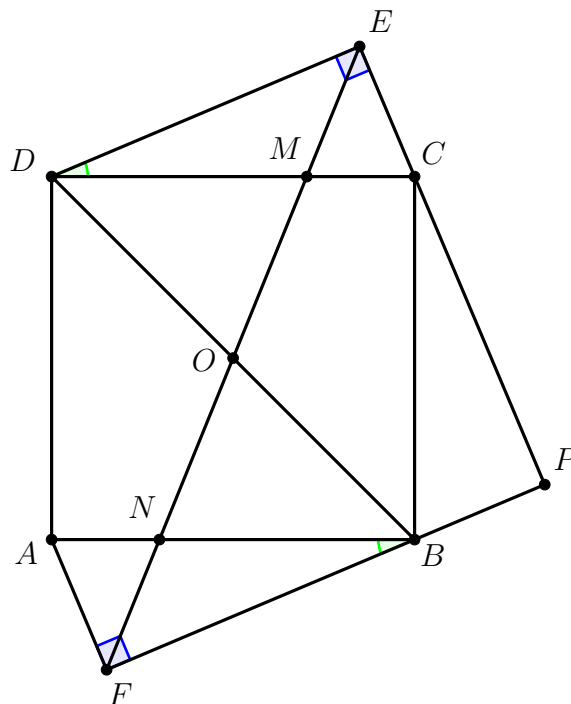
$$T_{EFBC} = \frac{1}{2} \cdot T_{ABCD} + T_{AFB}.$$

b) Határozd meg a DEF szög mértékét!

c) Igazold, hogy az EF egyenes átmegy a négyzet középpontján!

Simon József, Csíkszereda
(2 pont)

Első megoldás. Hivatalból



a) A feltételek alapján az EDC és FBA derékszögű háromszögek kongruensek (mert az átfogók kongruensek és D -nél levő hegyesszög egyenlő a B -nél levő hegyesszöggel). (2 pont)

Ez alapján $EC = AF$ és $\widehat{ECM} = \widehat{FAN}$, ahol $EF \cap DC = \{M\}$ és $EF \cap AB = \{N\}$. Másrészt

$$\widehat{EMC} \stackrel{\text{csúcsszögek}}{=} \widehat{DMN} \stackrel{DC \parallel AB}{=} \widehat{MNB} \stackrel{\text{csúcsszögek}}{=} \widehat{FNA},$$

tehát az EMC és FNA háromszögek kongruensek.

(2 pont)

Innen következik, hogy

$$T_{ECM_\Delta} + T_{BFN_\Delta} = T_{AFB_\Delta}$$

(2 pont)

Az $NBCM$ trapéz területe

$$T_{NBCM} = \frac{(NB + MC) \cdot BC}{2} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{1}{2} T_{ABCD}.$$

A fentiek alapján

$$T_{EFBC} = T_{ECM} + T_{BFN} + T_{BNMC} = \frac{1}{2} T_{ABCD} + T_{AFB}$$

(2 pont)

b) Ha $EC \cap FB = \{P\}$, akkor $\widehat{EDC} \equiv \widehat{PCB}$ mert merőleges szárú szögek, tehát

$$EDC_{\Delta} \equiv PCB_{\Delta} \text{ (átfogó és szög esete)} \quad (2 \text{ pont})$$

Ebből következik, hogy $PC \equiv DE \equiv FB$ és $EC \equiv PB$, tehát

$$EP \equiv FP \quad (2 \text{ pont})$$

és így a PEF_{Δ} egyenlő szárú és derékszögű, vagyis $\widehat{PEF} = 45^{\circ}$. Ebből következik, hogy $\widehat{DEF} = 45^{\circ}$.
(2 pont)

c) A $DEBF$ négyszög paralelogramma, mert $DE \equiv FB$ és $DE \parallel FB$ (mivel a DEF és EFP belső váltószögek kongruensek $\widehat{DEF} = 45^{\circ} = \widehat{EFP}$ alapján). (2 pont)

A $DEBF$ paralelogrammában az EF átló áthalad a DB átló felezőpontján, ami az $ABCD$ négyzet középpontja. (2 pont)

■

Megjegyzés. a) Ha előbb igazoljuk, hogy az EF egyenes átmegy a négyzet középpontján, akkor látható, hogy

$$T_{EFBC} = T_{EOBC} + T_{OFB}$$

Mivel $DEO_{\Delta} \equiv DFO_{\Delta}$, így

$$T_{EFBC} = T_{EOBC} + T_{ODE} = T_{DBCE}.$$

Ezt két háromszög területére bontva kapjuk, hogy

$$T_{EFBC} = T_{DBC} + T_{CED}.$$

Az előző alpontból tudjuk, hogy $CED_{\Delta} \equiv FAB_{\Delta}$, tehát

$$T_{EFBC} = \frac{1}{2}T_{ABCD} + T_{FAB}.$$

b) Ha $\{Q\} = DE \cap AF$, akkor belátható, hogy $QEPF$ egy négyzet, amelybe beírtuk az $ABCD$ négyzetet és a sarokban levő négy háromszög (DEC, CPB, BFA, AQD) kongruens. Ebből több különböző gondolatmenettel is következik mindhárom alpont.

4. feladat (20 pont). a) Igazold, hogy bármilyen $\overline{abc}$ alakú szám esetén az $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ összeg osztható 111-gyel!

b) Keresd meg az összes $\overline{abc}$ alakú számot, amelyre teljesül, hogy

$$\sqrt{\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{a0} + \overline{b0} + \overline{c0}} = \overline{ab}.$$

Köncse Balázs, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból

(2 pont)

a) Felbontjuk a három számot:

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c$$

$$\overline{bca} = 100b + 10c + a$$

$$\overline{cab} = 100c + 10a + b \quad (2 \text{ pont})$$

A megfelelő oldalakat összeadva és a, b , illetve c szerint csoportosítva a következő eredményhez jutunk:

$$\begin{aligned} \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} &= 100a + 10a + a + 100b + 10b + b + 100c + 10c + c \\ &= 111a + 111b + 111c \\ &= 111 \cdot (a + b + c) \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

A $111 \cdot (a + b + c)$ pedig osztható 111-gyel, így

$$(\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}) : 111.$$

b) Ha $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{a0} + \overline{b0} + \overline{c0}$, akkor

$$\begin{aligned} S &= 100a + 10b + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b + 10a + 10b + 10c \\ &= 121a + 121b + 121c \\ &= 121(a + b + c). \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

Ebből következik, hogy

$$\sqrt{\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{a0} + \overline{b0} + \overline{c0}} = \sqrt{121(a + b + c)} = 11\sqrt{a + b + c} = \overline{ab}, \quad (2 \text{ pont})$$

vagyis $\overline{ab}^2 = 11^2 \cdot (a + b + c)$. Ez azt jelenti, hogy $\overline{ab}^2 : 11^2$ vagyis $\overline{ab} : 11$. Ez pontosan akkor teljesül, ha $a = b$. Ekkor viszont a megadott egyenlőség egyenértékű a

$$11\sqrt{2a + c} = 11 \cdot a$$

egyenlőséggel, tehát $\sqrt{2a + c} = a$ (2 pont)

Mivel a, c számjegyek, ezért

$$\sqrt{2a + c} \leq \sqrt{27} < 6,$$

így

$$a < 6. \quad (2 \text{ pont})$$

Ha $a = 1$, akkor $\sqrt{2 + c} = 1$ nincs megoldás.

Ha $a = 2$, akkor $\sqrt{4 + c} = 2 \implies c = 0$ (nem lehetséges, mert $\overline{c0}$ kétjegyű szám).

Ha $a = 3$, akkor $\sqrt{6 + c} = 3 \implies c = 3$.

Ha $a = 4$, akkor $\sqrt{8 + c} = 4 \implies c = 8$.

Ha $a = 5$, akkor $\sqrt{10 + c} = 5 \implies c = 15$, ami nem számjegy. (4 pont)

A megoldások így $\overline{abc} \in \{333, 448\}$. (2 pont)



8. osztály**1. feladat (30 pont).** Adottak az

$$a = (\sqrt{2} - 1)^{-1} + |1 - \sqrt{2}| - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - (2\sqrt{2})^{-1} \right) \cdot 2\sqrt{2} \quad \text{és}$$

$$b = \left(\left(\sqrt{9 + 4\sqrt{2}} \right)^{-1} + \left(\sqrt{9 - 4\sqrt{2}} \right)^{-1} \right) \cdot \left(\sqrt{9 + 4\sqrt{2}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{2}} \right)$$

valós számok.

a) Számítsd ki az a és b számok egész részét!

b) Igazold, hogy az

$$E = \sqrt{4 - 4a + a^2} + \sqrt{b^2 - 6b + 9} - \sqrt{a^2 - 2ab + b^2}$$

egész szám!

Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. Hivatalból

(3 pont)a) Az a számot egyszerűbb alakra hozzuk:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{2} - 1} + \sqrt{2} - 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \cdot 2\sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1 - (2 - 1) \\ &= 2\sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

Mivel $\sqrt{2} \in (1, \frac{3}{2})$, ezért $2\sqrt{2} \in (2, 3)$, így $a \in (1, 2)$. Tehát az a szám egész része $[a] = 1$. **(9 pont)**
 A b számot is egyszerűbb alakra hozzuk:

$$\begin{aligned} b &= \left(\left(\sqrt{9 + 4\sqrt{2}} \right)^{-1} + \left(\sqrt{9 - 4\sqrt{2}} \right)^{-1} \right) \cdot \left(\sqrt{9 + 4\sqrt{2}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{2}} \right) \\ &= 1 + \sqrt{\frac{9 - 4\sqrt{2}}{9 + 4\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{9 + 4\sqrt{2}}{9 - 4\sqrt{2}}} + 1 \\ &= 2 + \frac{\sqrt{(9 - 4\sqrt{2})^2}}{\sqrt{49}} + \frac{\sqrt{(9 + 4\sqrt{2})^2}}{\sqrt{49}} \\ &= 2 + \frac{|9 - 4\sqrt{2}|}{7} + \frac{|9 + 4\sqrt{2}|}{7} \\ &= 2 + \frac{9 - 4\sqrt{2}}{7} + \frac{9 + 4\sqrt{2}}{7} \\ &= 2 + \frac{18}{7} = \frac{32}{7}. \end{aligned}$$

Mivel $\frac{32}{7} \in (4, 5)$, ezért a b szám egész része $[b] = 4$.

(6 pont)

Megjegyzés. Észrevehetjük, hogy $9 + 4\sqrt{2} = (1 + 2\sqrt{2})^2$ és $9 - 4\sqrt{2} = (1 - 2\sqrt{2})^2$, így rövidebben is kiszámítható a b értéke.

b)

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{4 - 4a + a^2} + \sqrt{b^2 - 6b + 9} - \sqrt{a^2 - 2ab + b^2} \\ &= \sqrt{(2 - a)^2} + \sqrt{(b - 3)^2} - \sqrt{(a - b)^2} \\ &= |2 - a| + |b - 3| - |a - b|. \end{aligned}$$

(6 pont)

Továbbá

$$\begin{aligned} a < 2 &\implies |2 - a| = 2 - a, \\ b > 3 &\implies |b - 3| = b - 3, \\ a < b &\implies |a - b| = b - a. \end{aligned}$$

(3 pont)

Ez alapján

$$\begin{aligned} E &= 2 - a + b - 3 - (b - a) \\ &= 2 - a + b - 3 - b + a \\ &= -1 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(3 pont)

■

2. feladat (30 pont). Az a és b nullától különböző természetes számok, $a > b$ és $m_a - m_g = 18$, ahol m_a és m_g az a és b számok számtani, illetve mértani közepét jelöli. Határozd meg az a és b természetes számokat a következő esetekben:

a) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 18$

b) $a - b = 120$

Simon József, Csíkszereda

Első megoldás. Hivatalból

(3 pont)

a) Felhasználva, hogy $m_a = \frac{a+b}{2}$ és $m_g = \sqrt{ab}$, azt kapjuk, hogy

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = 18. \quad (3 \text{ pont})$$

Átalakítások után

$$a + b - 2\sqrt{ab} = 36 \iff (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 36. \quad (3 \text{ pont})$$

Mivel $a > b$, ezért $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 6$.

(3 pont)

Tehát

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 18 \text{ és } \sqrt{a} - \sqrt{b} = 6,$$

ahonnan következik, hogy $a = 144$ és $b = 36$.

(6 pont)

- b) Az $a - b = 120$ egyenlőség ekvivalens azzal, hogy $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = 120$. (3 pont)
 Másrészt $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 6$, így $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 20$. (3 pont)

Tehát

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 20 \quad \text{és} \quad \sqrt{a} - \sqrt{b} = 6,$$

ahonnan következik, hogy $a = 169$ és $b = 49$. (6 pont)

■

Második megoldás. Hivatalból (3 pont)

- a) Mivel $a, b \in \mathbb{N}^*$ és $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 18 \in \mathbb{N}$, ezért ismert, hogy $\sqrt{a}$ és $\sqrt{b}$ is természetes szám kell, hogy legyen. (3 pont)

Mivel $a > b$, ezért $\sqrt{a} > \sqrt{b}$. Ha $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{N}^*$ és $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 18$, valamint $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, következik, hogy

$$(\sqrt{a}, \sqrt{b}) \in \{(17, 1), (16, 2), (15, 3), (14, 4), (13, 5), (12, 6), (11, 7), (10, 8)\},$$

vagyis

$$(a, b) \in \{(289, 1), (256, 4), (225, 9), (196, 16), (169, 25), (144, 36), (121, 49), (100, 64)\},$$

(6 pont)

ahonnan

$$(m_a, m_g) \in \{(145, 17), (130, 32), (117, 45), (106, 56), (97, 65), (90, 72), (85, 77), (82, 80)\}.$$

Ezek a számpárok közül csak az $a = 144$ és $b = 36$ esetén lesz az $m_a - m_g = 18$. (6 pont)

- b) Hasonlóan, mint az előző megoldás esetén.

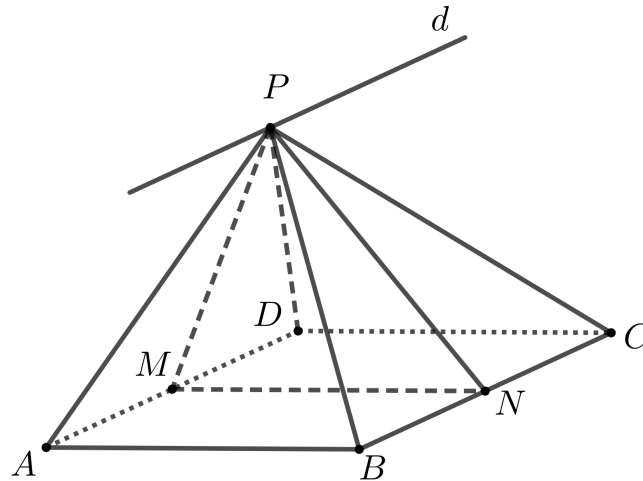
■

3. feladat (20 pont). Adott az $ABCD$ négyzet és a térben egy olyan P pont, amelyre a PAD háromszög egyenlő szárú és P -ben derékszögű, illetve a PBC háromszög egyenlő oldalú.

- a) Igazold, hogy a (PAD) és (PBC) síkok merőlegesek egymásra!
 b) Határozd meg a (PAD) és (PBC) síkoknak az $(ABCD)$ síkkal alkotott szögét!
 c) Bizonyítsd be, hogy az A pontnak a PD szakasz felezőpontja szerinti szimmetrikusa egybeesik a B pontnak a PC egyenes szerinti szimmetrikusával!

Simon József, Csíkszereda, Matlap 10/2025, A:2504

Megoldás. Hivatalból (2 pont)



a) Legyen d a P ponton áthaladó, AD -vel párhuzamos egyenes. Így d benne van a (PAD) síkban és mivel $AD \parallel BC$, a (PBC) síkban is. Tehát a (PAD) és (PBC) síkok metszésvonala a d egyenes. Jelölje M , illetve N az AD , valamint a BC szakasz felezőpontját, és legyen a négyzet oldalhossza $BC = a$. Mivel a PBC háromszög egyenlő oldalú, így $PN \perp BC$, de $BC \parallel d$, ezért $PN \perp d$. A PAD háromszögben $PA = PD$, ezért $PM \perp AD$, de $AD \parallel d$, így $PM \perp d$. Tehát a (PAD) és (PBC) síkok szöge az MPN szög. **(4 pont)**

Megjegyzés. Ha a versenyző csak megnevezi a két sík szögét, de nem indokolja meg, akkor 2 pont jár.

Az a oldalhosszú PBC egyenlő oldalú háromszögben PN magasság, ezért $PN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. A PAD egyenlő szárú derékszögű háromszögben $PM = AM = MD = \frac{a}{2}$. A PMN háromszögben

$$PM^2 + PN^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2 = MN^2,$$

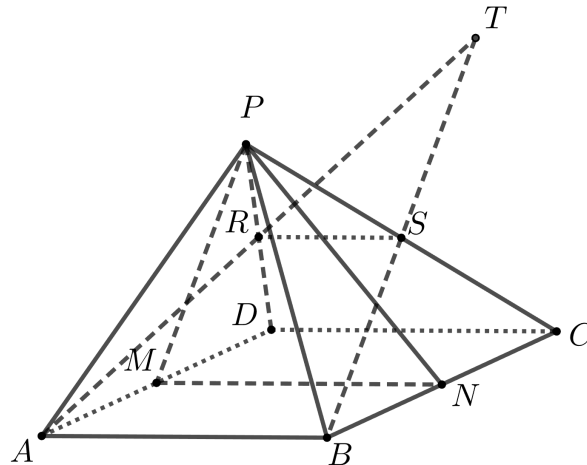
tehát $\widehat{MPN} = 90^\circ$, vagyis $PM \perp PN$, innen következik, hogy a (PAD) és (PBC) síkok merőlegesek egymásra. **(4 pont)**

b) Mivel $PM \perp AD$ és $MN \perp AD$, ezért a (PAD) és az $(ABCD)$ síkok szöge a PMN szög. **(2 pont)**

Továbbá $PN \perp BC$ és $MN \perp BC$, ezért a (PBC) és az $(ABCD)$ síkok szöge a PNM szög. **(2 pont)**

Tehát meg kell határozni a PMN derékszögű háromszögben a hegyesszögek mértékét. A PMN háromszögben a P szög 90° , $MN = a$ és $PM = \frac{a}{2}$, ezért $\widehat{PNM} = 30^\circ$ és $\widehat{PMN} = 60^\circ$. **(2 pont)**

c) Jelölje R , illetve S a PD , valamint a PC szakasz felezőpontját.



Az RS szakasz középvonal a PDC háromszögben, ezért $RS \parallel DC$ és $RS = \frac{DC}{2} = \frac{AB}{2}$. De $DC \parallel AB$, ezért $RS \parallel AB$, tehát az A, B, R és S pontok egy síkban vannak, ezért AR és BS metsző egyenesek. Legyen T az AR és BS egyenesek metszéspontja. Az $RS \parallel AB$ és $RS = \frac{AB}{2}$, ezért RS középvonal az ABT háromszögben, tehát T az A pontnak az R felezőpont szerinti és a B pontnak az S pont szerinti szimmetrikusa. Mivel S a PC felezőpontja, ezért $BS \perp PC$ a PBC egyenlő oldalú háromszögben, így a B pont PC egyenes szerinti szimmetrikusa megegyezik a B pont S pont szerinti szimmetrikusával. (4 pont)

■

4. feladat (20 pont). Egy tompaszögű háromszög oldalhosszai méterben kifejezve 2-nél nagyobb egymás utáni páratlan természetes számok, és egyik sem négyzetszám. Határozd meg a háromszög oldalainak hosszát és a tompaszög mértékét!

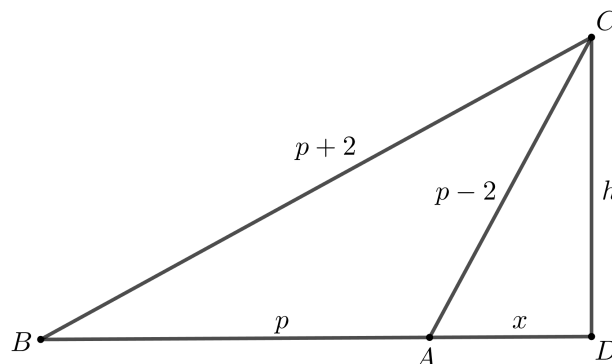
Dávid Géza, Székelyudvarhely

Első megoldás. Hivatalból

(2 pont)

Legyenek a háromszög oldalai méterben kifejezve $AC = p - 2$, $AB = p$ és $BC = p + 2$ hosszúságúak, p páratlan és $p \geq 5$. Mivel BC a leghosszabb, ezért az A szög a tompaszög. (2 pont)

Jelölje D a C pontnak az AB -re eső merőleges vetületét. Az $AD = x$ méter és a $CD = h$ méter.



Mivel az ADC és a BDC háromszög derékszögű a D -ben, Pitagorasz tétele alapján

$$\begin{aligned} x^2 + h^2 &= (p - 2)^2 \quad \text{és} \\ (p + x)^2 + h^2 &= (p + 2)^2. \end{aligned}$$

(4 pont)

A két összefüggést kivonva egymásból azt kapjuk, hogy $(p+x)^2 - x^2 = (p+2)^2 - (p-2)^2$, ahonnan

$$p^2 + 2px = 8p.$$

Ezt elosztva $p \geq 5$ -tel

$$p + 2x = 8. \quad (4 \text{ pont})$$

Mivel $p \geq 5$ páratlan természetes szám, ezért $p = 5$ vagy $p = 7$. (2 pont)

Ha $p = 7$, akkor $p + 2 = 9$, ami négyzetszám, ezért nem megoldás. (2 pont)

Ha $p = 5$, akkor $p - 2 = 3$, $p + 2 = 7$ és $x = 1,5$. Ebben az esetben $AC = 2AD$, tehát az ADC derékszögű háromszögben $\widehat{C} = 30^\circ$ és $\widehat{A} = 60^\circ$. (2 pont)

Tehát az ABC háromszögben a tompaszög 120° , az oldalak pedig 3 m, 5 m és 7 m hosszúságúak. (2 pont)

■

Második megoldás. Hivatalból (2 pont)

Legyenek a háromszög oldalai méterben kifejezve $AC = 2l + 1$, $AB = 2l - 1$ és $BC = 2l + 3$ hosszúságúak, ahol $l \geq 2$. Mivel ABC tompaszögű háromszög, ezért

$$\begin{aligned} BC^2 &> AB^2 + AC^2 & (4 \text{ pont}) \\ \iff (2l+3)^2 &> (2l-1)^2 + (2l+1)^2 \\ \iff 0 &> 4l^2 - 12l - 7 \\ \iff 0 &> 4l^2 - 12l + 9 - 16 \\ \iff 16 &> (2l-3)^2. \end{aligned}$$

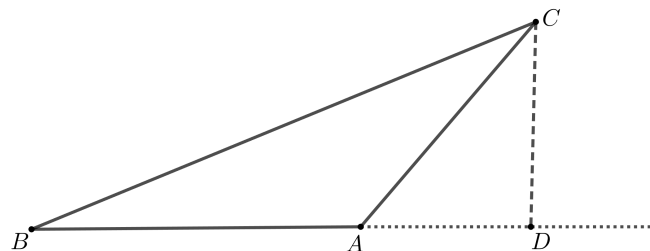
Mivel $l \geq 2$ természetes szám, ezért az l lehetséges értékei: 2 és 3. (6 pont)

Ha $l = 3$, akkor $BC = 9$, ami négyzetszám, tehát nem lehetséges. Ha $l = 2$, akkor $AB = 3$, $AC = 5$ és $BC = 7$. (4 pont)

Ebben az esetben a háromszög területe Héron képlete alapján

$$T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{15}{2} \left(\frac{15}{2} - 3\right) \left(\frac{15}{2} - 5\right) \left(\frac{15}{2} - 7\right)} = \frac{15\sqrt{3}}{4}.$$

Ugyanakkor $T_{ABC} = \frac{AB \cdot CD}{2}$, ahol CD az ABC háromszög C csúcsából húzott magassága.



Ez alapján

$$\frac{15\sqrt{3}}{4} = \frac{3 \cdot CD}{2} \implies CD = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

Az ADC háromszögben

$$\sin A = \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

így $\widehat{DAC} = 60^\circ$, tehát $\widehat{BAC} = 120^\circ$. (4 pont)

■

9. osztály

1. feladat (30 pont). Az a, b, c egymástól páronként különböző valós számokra teljesülnek az

$$a^3 + ax = b^3 + bx = c^3 + cx$$

összefüggések, ahol x egy adott valós szám.

a) Mutasd ki, hogy $a + b + c = 0$.

b) Igazold, hogy

$$|a + y| + |1 + y - b| \geq |c + 1|, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Cziprok András, Szatmárnémeti

Megoldás. Hivatalból

(3 pont)

a) $a^3 + ax = b^3 + bx \iff a^3 - b^3 + (a - b)x = 0 \iff (a - b)(a^2 + ab + b^2 + x) = 0$, de $a - b \neq 0$,
így $a^2 + ab + b^2 + x = 0$. (6 pont)

Hasonlóan $b^2 + bc + c^2 + x = 0$. (3 pont)

A két egyenletet kivonva egymásból kapjuk, hogy $a^2 - c^2 + b(a - c) = 0 \iff (a - c)(a + b + c) = 0$,
ahonnan mivel $a \neq c$ következik, hogy $a + b + c = 0$. (6 pont)

b) $a + b + c = 0 \implies a + b = -c$. (3 pont)

Használva a háromszög-egyenlőtlenséget írhatjuk, hogy

$$|a + y| + |1 + y - b| = |a + y| + |-(1 + y - b)| \quad (3 \text{ pont})$$

$$= |a + y| + |b - y - 1| \geq |a + y + b - y - 1| \quad (3 \text{ pont})$$

$$= |-c - 1| = |c + 1|, \forall y \in \mathbb{R}. \quad (3 \text{ pont})$$

■

2. feladat (30 pont). Az ABC hegyesszögű háromszögben $\widehat{ABC} = 2\widehat{ACB}$ és D a BC oldal felezőpontja. Ha E a D kezdőpontú DB félegyenes azon pontja, amelyre $AB = 2DE$, akkor bizonyítsd be, hogy:

a) E a B és D pontok között található;

b) AE az ABC háromszög magassága!

Matlap 10/2025, L:3948
Olasz Ferenc, Szatmárnémeti

Megoldás. Hivatalból

(3 pont)

Mutasd ki, hogy $[S_n] = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, ahol $[x]$ az x szám egészrészét jelöli.

Cziprok András, Szatmárnémeti

Megoldás. Hivatalból

(2 pont)

a) $\sqrt{1+a} < \sqrt{1+a+\frac{a^2}{4}} = \sqrt{\left(1+\frac{a}{2}\right)^2} = 1+\frac{a}{2}, \forall a > 0$, ahol felhasználtuk, hogy $1+\frac{a}{2} > 0$.
(6 pont)

b)

$$\begin{aligned} 1 + \frac{r}{a_k a_{k+1} a_{k+2}} &= 1 + \frac{2r}{2a_k a_{k+1} a_{k+2}} \\ &= 1 + \frac{a_{k+2} - a_k}{2a_k a_{k+1} a_{k+2}} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_k a_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+1} a_{k+2}} \right), \forall k \in \mathbb{N}^*. \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

Mivel $a_1 > 0, r > 0$, ezért $a_n > 0$ bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Felhasználva az a) alpont eredményét írhatjuk, hogy:

$$\sqrt{1 + \frac{r}{a_k a_{k+1} a_{k+2}}} < 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{a_k a_{k+1} a_{k+2}} = 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a_k a_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+1} a_{k+2}} \right). \quad (2 \text{ pont})$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{r}{a_k a_{k+1} a_{k+2}}} < \sum_{k=1}^n \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a_k a_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+1} a_{k+2}} \right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n 1 + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_k a_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+1} a_{k+2}} \right) \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

$$= n + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}} \right) < n + \frac{1}{4a_1 a_2} < n + 1, \quad \text{mivel } 4a_1 a_2 > 1. \quad (2 \text{ pont})$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{r}{a_k a_{k+1} a_{k+2}}} > \sum_{k=1}^n \sqrt{1} = n \quad (2 \text{ pont})$$

A fenti két összefüggésből adódik, hogy $n < S_n < n + 1$, ahonnan $[S_n] = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. (2 pont)

■

4. feladat (20 pont). a) Egy város általános és középiskolai tagozatain (5. osztálytól 12. osztályig) összesen 2026 diák jár. Ha minden évfolyamon legfeljebb 5 különböző iskolából vannak a tanulók, akkor igazold, hogy van egy iskola a városban, ahonnan legalább 26 fiú vagy legalább 26 lány származik ugyanarról az évfolyamról!

b) Igazold, hogy 2025 tetszőleges egész szám közül kiválasztható 324 darab szám, amelyeknek összege osztható 36-tal!

Köncse Balázs, Csíkszereda

Első megoldás. Hivatalból

(2 pont)

a) Ha minden évfolyamon legfeljebb 5 különböző iskolából vannak tanulók, akkor legtöbb $8 \cdot 5 = 40$ csoport van, amelyek egy iskola egy évfolyamba tartozó diákjait tartalmazzák (és nem üresek).

(2 pont)

Mivel $2026 : 40 = 50$, maradék 26, ezért van olyan iskola, amelynek valamelyik évfolyamán legalább 51 diák van (mert ha minden iskola minden évfolyamán legfeljebb 50 diák volna, akkor a diákok száma legtöbb $40 \cdot 50 = 2000$ lehetne).

(4 pont)

Így ennek az iskolának a szóbanforgó évfolyamán kell lennie legalább 26 lánynak vagy legalább 26 fiúnak.

(2 pont)

b) Igazoljuk, hogy bármely három egész szám közül kiválasztható 2, amelynek összege páros. Valóban: három szám közül kettő azonos paritású, ekkor összegük osztható 2-el.

(2 pont)

Igazoljuk, hogy bármely öt egész szám közül kiválasztható három, amelynek összege osztható hárommal. Ha a számok között van három olyan, amely hárommal osztva ugyanazt a maradékot adja, akkor az összegük osztható hárommal. Ha nincs köztük három olyan, amely hárommal ugyanazt a maradékot adná, akkor van köztük $3k_1, 3k_2 + 1, 3k_3 + 2$ alakú ($k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$), amelyeknek az összege osztható hárommal, így mindig van köztük három, amelynek összege osztható hárommal.

(4 pont)

Így tizenöt szám között van három számhármass, amelyekben a számok összege osztható 3-al. Ha a három számhármassban a számok összege rendre a, b, c , akkor mivel mindegyik osztható 3-mal, ezért $a + b + c = 3k_1 + 3k_2 + 3k_3$, ahol $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$. A fenti tulajdonság alapján a k_1, k_2, k_3 számok közül kiválasztható kettő, amelyek összege páros, legyen például k_1, k_2 , ekkor $a + b = 3(k_1 + k_2)$ osztható hattal. Ezzel kimutattuk, hogy bármely 15 szám közül kiválasztható hat, amelyeknek összege osztható hattal.

(2 pont)

A 2025 számot osszuk fel 135 darab, egyenként 15 elemű csoportra. Az előzőek szerint mindegyik 15-ös csoportból kiválasztható 6 szám úgy, hogy összegük 6-tal osztható legyen. Jelölje az így kiválasztott szám hatosok összegét rendre S_i $i \in \{1, \dots, 135\}$. Így $S_i = 6t_i$ valamely $t_i \in \mathbb{Z}$ esetén. Most a $t_1, t_2, \dots, t_{135}$ számokat osszuk fel 9 darab, egyenként 15 elemű csoportra. Alkalmazva ismét a fenti állítást (a 15 számra), mindegyik ilyen 15-ös csoportból kiválasztható 6 darab t_i úgy, hogy összegük 6-tal osztható legyen. Ennek megfelelően a kiválasztott $S_i = 6t_i$ összegek összege $\sum S_i = 6 \sum t_i$ 36-tal osztható. Mivel egy-egy S_i mindig 6 darab eredeti szám összege, a kiválasztott hat S_i szám összege $6 \cdot 6 = 36$ szám kiválasztását jelenti az eredeti számok közül. Ezt 9-szer végezzük el (mert a $t_1, t_2, \dots, t_{135}$ számokat 9 csoportra bontottuk), ezért összesen a 9 csoportból kiválasztható $9 \cdot 36 = 324$ darab szám, amelyek összege osztható 36-tal.

(2 pont)

■

Második megoldás. Hivatalból

(2 pont)

a) Mivel összesen 8 évfolyam van és $2025 : 8 = 253$, maradék 1, a skatulyaelv miatt létezik olyan évfolyam, amelyre legalább 254 diák jár. **(2 pont)**

Mivel egy évfolyamra legfeljebb 5 iskolából járnak tanulók és $254 : 5 = 50$, maradék 4, van olyan iskola, ahol egy évfolyamon legalább 51 tanuló jár. **(4 pont)**

Így az 51 tanulóból legalább 26 lány vagy legalább 26 fiú. **(2 pont)**

b) Osszuk a 2025 számot 36 csoportba (maradékosztályba) aszerint, hogy mennyi a 36-tal való osztási maradékuk ($0, 1 \dots 35$ maradékok szerint). Mivel $2025 : 36 = 56$, maradék 9, a skatulyaelv alapján létezik olyan csoport, amely legalább 57 elemet tartalmaz. **(2 pont)**

Ebből a csoportból válasszunk ki 36 tetszőleges számot, legyenek ezek $x_1, x_2, \dots, x_{36}$. Mivel mindegyiknek 36-tal ugyanaz a maradéka, ezért $x_i = 36k_i + r$, ahol $i \in \{1, 2, \dots, 36\}$, tehát

$$\sum_{i=1}^{36} x_i = \sum_{i=1}^{36} (36k_i + r) = 36 \sum_{i=1}^{36} k_i + 36r,$$

ami osztható 36-tal. Vagyis a kiválasztott 36 szám összege osztható 36-tal. **(2 pont)**

Távolítsuk el ezt a 36 számot. Marad 1989 szám. Ismét osszuk ezeket el 36 csoportba a 36-tal való osztási maradékok alapján. Mivel $1989 : 36 = 55$, a maradék 9, van olyan csoport, amely legkevesebb 56 számot tartalmaz. Ha ebből ismét kiválasztunk 36 tetszőleges számot, akkor azok összege osztható 36-tal. **(2 pont)**

Az előbbi két lépést megismételhetjük még 7 alkalommal. A legutolsó esetben 1733 számból lesz egy maradékosztály, ahol 49 elem van. Ezekből választhatjuk ki az utolsó 36-os csoportot. Így kiválasztottunk 9 egyenként 36 elemű számcsoporthat, amelyek mindegyikének összege osztható 36-tal. Ennek a 9 csoportnak az összege is osztható lesz 36-tal, tehát kiválasztottunk $36 \cdot 9 = 324$ számot, amelyeknek az összege osztható 36-tal. **(4 pont)**

■

10. osztály

1. feladat (30 pont). a) Az a és b pozitív valós számok teljesítik az

$$a^2 + b^2 = 2024ab$$

összefüggést. Igazold, hogy

$$\lg \frac{a+b}{\sqrt{2026}} = \frac{\lg a + \lg b}{2}.$$

b) Igazold, hogy ha $x, y, z, w > 1$ tetszőleges valós számok, akkor

$$\log_w \left(\frac{x+y+z}{3} \right)^3 - \log_{\frac{1}{w}} \left(\frac{xy+yz+zx}{3} \right)^3 \geq 2 \cdot \log_w (xyz \cdot \sqrt{xyz}).$$

Forgács István, Szatmárnémeti

Megoldás. Hivatalból

(3 pont)

a) A megadott

$$a^2 + b^2 = 2024ab$$

egyenlőség mindkét oldalához adjunk $2ab$ -t, hogy a bal oldalon kialakítsuk az $(a+b)$ teljes négyzetét:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2024ab + 2ab \iff$$

$$(a+b)^2 = 2026ab. \quad \textbf{(3 pont)}$$

Elosztva az egyenlet mindkét oldalát 2026-tal, azt kapjuk, hogy:

$$\frac{(a+b)^2}{2026} = ab \iff \lg \left(\frac{(a+b)^2}{2026} \right) = \lg(ab). \quad \textbf{(3 pont)}$$

Alkalmazzuk a logaritmus tulajdonságait, a bal oldalon a kifejezést felírhatjuk egyetlen teljes négyzetként, a jobb oldalon pedig használjuk a szorzat logaritmusára vonatkozó összefüggést:

$$\lg \left(\frac{a+b}{\sqrt{2026}} \right)^2 = \lg a + \lg b \iff 2 \cdot \lg \frac{a+b}{\sqrt{2026}} = \lg a + \lg b \iff \quad \textbf{(3 pont)}$$

$$\lg \frac{a+b}{\sqrt{2026}} = \frac{\lg a + \lg b}{2}. \quad \textbf{(3 pont)}$$

b) A logaritmus tulajdonságait használva a következő átalakításokat végezzük:

$$\log_w \left(\frac{x+y+z}{3} \right)^3 - \log_{\frac{1}{w}} \left(\frac{xy+yz+zx}{3} \right)^3 \geq 2 \cdot \log_w (xyz \cdot \sqrt{xyz}) \iff$$

$$3 \log_w \left(\frac{x+y+z}{3} \cdot \frac{xy+yz+zx}{3} \right) \geq 2 \cdot \log_w (xyz \cdot \sqrt{xyz}) \quad \textbf{(3 pont)}$$

A jobb oldalt is egyszerűbb alakra hozva azt kapjuk, hogy:

$$3 \log_w \left(\frac{x+y+z}{3} \cdot \frac{xy+yz+zx}{3} \right) \geq 2 \cdot \frac{3}{2} \log_w (xyz) \iff$$

$$3 \log_w \left(\frac{x+y+z}{3} \cdot \frac{xy+yz+zx}{3} \right) \geq 3 \log_w(xyz) \iff \quad (3 \text{ pont})$$

$$\frac{x+y+z}{3} \cdot \frac{xy+yz+zx}{3} \geq xyz. \quad (3 \text{ pont})$$

Felhasználva a számtani és mértani középértékek közötti egyenlőtlenséget, a következő összefüggéseket írhatjuk fel:

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} \quad \text{és} \quad \frac{xy+yz+zx}{3} \geq \sqrt[3]{(xyz)^2}. \quad (3 \text{ pont})$$

A két egyenlőtlenséget összeszorozva megkapjuk a kért egyenlőtlenséget:

$$\frac{x+y+z}{3} \cdot \frac{xy+yz+zx}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} \cdot \sqrt[3]{(xyz)^2} \iff \frac{x+y+z}{3} \cdot \frac{xy+yz+zx}{3} \geq xyz. \quad (3 \text{ pont})$$

■

Megjegyzés. A b) alpont a következő módon is befejezhető: az

$$\frac{x+y+z}{3} \cdot \frac{xy+yz+zx}{3} \geq xyz$$

egyenlőtlenség a műveletek elvégzése és átrendezés után a vele ekvivalens

$$x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2 \geq 6xyz$$

egyenlőtlenségre vezetődik vissza, amelyet elosztva az $xyz > 0$ kifejezéssel, az

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) \geq 6$$

igaz egyenlőtlenséghez jutunk.

2. feladat (30 pont). Adott az $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^*$,

$$f(n) = \sum_{k=-n^3}^{n^3} \left[\sqrt[3]{k} \right], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

függvény, ahol $[a]$ az a valós szám egész részét jelöli.

a) Igazold, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$f(n) = n - n^3.$$

b) Tanulmányozd az f függvény injektivitását és szürjektivitását!

Szilágyi Judit, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból

(3 pont)

$$\text{a) } f(n) = \sum_{k=-n^3}^{-1} [\sqrt[3]{k}] + [\sqrt[3]{0}] + \sum_{k=1}^{n^3} [\sqrt[3]{k}] = \sum_{k=1}^{n^3} ([\sqrt[3]{-k}] + [\sqrt[3]{k}]). \quad (3 \text{ pont})$$

Ha $k \in \mathbb{N}^*$ köbszám, akkor $\exists a \in \mathbb{N}^*$, amelyre $k = a^3$.

$$\text{Ekkor } [\sqrt[3]{-k}] + [\sqrt[3]{k}] = [\sqrt[3]{-a^3}] + [\sqrt[3]{a^3}] = -a + a = 0. \quad (3 \text{ pont})$$

Ha $k \in \mathbb{N}^*$ nem köbszám, akkor $\exists a \in \mathbb{N}^*$ amelyre $a^3 < k < (a+1)^3$.

$$\text{Ekkor } a^3 < k < (a+1)^3 \Rightarrow a < \sqrt[3]{k} < a+1 \Rightarrow [\sqrt[3]{k}] = a. \quad (3 \text{ pont})$$

$$a^3 < k < (a+1)^3 \Rightarrow -(a+1)^3 < -k < -a^3 \Rightarrow -(a+1) < \sqrt[3]{-k} < -a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a-1 < \sqrt[3]{-k} < -a \Rightarrow [\sqrt[3]{-k}] = -a-1.$$

$$\text{Tehát } [\sqrt[3]{-k}] + [\sqrt[3]{k}] = -a-1 + a = -1. \quad (3 \text{ pont})$$

1-től n^3 -ig n köbszám van. A többi $n^3 - n$ szám nem köbszám.

$$\text{Tehát } f(n) = 0 \cdot n + (-1) \cdot (n^3 - n) = n - n^3, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (3 \text{ pont})$$

b) Legyen $a, b \in \mathbb{N}^*$ úgy, hogy $f(a) = f(b)$.

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\iff a - a^3 = b - b^3 \iff b^3 - a^3 - b + a = 0 \iff \\ &\iff (b-a)(b^2 + ab + a^2) - (b-a) = 0 \iff (b-a)(b^2 + ab + a^2 - 1) = 0 \end{aligned} \quad (3 \text{ pont})$$

Mivel $b^2 + ab + a^2 - 1 \geq 1^2 + 1 \cdot 1 + 1^2 - 1 = 2$, $\forall a, b \in \mathbb{N}^*$ esetén, a második zárójel nem lehet nulla.

$$\text{Tehát } f(a) = f(b) \iff b - a = 0 \iff a = b \Rightarrow f \text{ injektív.} \quad (3 \text{ pont})$$

$$f(2) = 2 - 2^3 = -6 \text{ és } f \text{ szigorúan csökkenő} \Rightarrow f(n) \leq -6, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2 \text{ esetén} \quad (3 \text{ pont})$$

$$f(1) = 0 \text{ és } f(n) \leq -6, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2 \text{ esetén} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nexists n \in \mathbb{N}^*, \text{ amelyre } f(n) = -1 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^* \Rightarrow f \text{ nem szürjektív.} \quad (3 \text{ pont})$$

■

Megjegyzés. Az injektivitás a következőképpen is igazolható:

$$\begin{aligned} f(n+1) - f(n) &= n+1 - (n+1)^3 - (n-n^3), \\ &= 1 + n^3 - (n^3 + 3n^2 + 3n + 1), \\ &= -3n^2 - 3n. \end{aligned}$$

Mivel $-3n^2 - 3n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén $\Rightarrow f$ szigorúan csökkenő $\Rightarrow f$ injektív.

Megjegyzés. A b) alpont a következő módon is befejezhető: Az

$$f(n) = n - n^3 = -n(n^2 - 1) = -(n-1) \cdot n \cdot (n+1), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

összefüggésből következik, hogy minden $f(n)$ páros szám (sőt, 6-tal osztható), így f nem lehet szürjektív, hiszen a $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^*$ halmazban vannak páratlan számok is.

3. feladat (20 pont). Az a , b és c komplex számokra fennállnak a

$$|a| = |b| = |c| = 1 \quad \text{és} \quad |a + b - c|^2 + |b + c - a|^2 + |c + a - b|^2 = 12$$

összefüggések. Igazold, hogy az a , b és c affixumú pontok egy egyenlő oldalú háromszög csúcspontjai!

Matlap 9/2025, L:3936

Első megoldás. Hivatalból

(2 pont)

Legyen $p = \frac{a+b+c}{2}$. Ekkor $a + b - c = 2p - 2c$; $b + c - a = 2p - 2a$; $c + a - b = 2p - 2b$.

(2 pont)

Ekkor az eredeti $|a + b - c|^2 + |b + c - a|^2 + |c + a - b|^2 = 12$ egyenlőség, rendre a következő ekvivalens alakba írható:

$$|2p - 2c|^2 + |2p - 2a|^2 + |2p - 2b|^2 = 12 \quad (2 \text{ pont})$$

$$|p - c|^2 + |p - a|^2 + |p - b|^2 = 3 \quad (2 \text{ pont})$$

$$(p - c)(\bar{p} - \bar{c}) + (p - a)(\bar{p} - \bar{a}) + (p - b)(\bar{p} - \bar{b}) = 3 \quad (2 \text{ pont})$$

$$p \cdot \bar{p} - p \cdot \bar{c} - c \cdot \bar{p} + c \cdot \bar{c} + p \cdot \bar{p} - p \cdot \bar{a} - a \cdot \bar{p} + a \cdot \bar{a} + p \cdot \bar{p} - p \cdot \bar{b} - b \cdot \bar{p} + b \cdot \bar{b} = 3$$

$$3 \cdot p \cdot \bar{p} - p \cdot (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) - \bar{p} \cdot (a + b + c) + a \cdot \bar{a} + b \cdot \bar{b} + c \cdot \bar{c} = 3 \quad (2 \text{ pont})$$

$$3 \cdot |p|^2 - p \cdot (2 \cdot \bar{p}) - \bar{p} \cdot (2p) + 3 = 3 \quad (2 \text{ pont})$$

$$|p|^2 = 0 \iff |p| = 0 \iff |a + b + c| = 0 \iff a + b + c = 0. \quad (2 \text{ pont})$$

Tekintsük a komplex sík $A(a)$, $B(b)$ és $C(c)$ pontjait, ahol a, b, c a fenti komplex számok, melyekre fennáll az $a + b + c = 0$ egyenlőség. Igazoljuk, hogy az ABC háromszög, egy egyenlő oldalú háromszög. Mivel $a + b + c = 0 \Rightarrow b + c = -a \iff |b + c| = |-a| \iff |b + c| = 1 \iff |\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 1 \iff |\overrightarrow{OD}| = 1$, ahol $OBDC$ paralelogramma. (2 pont)

Tehát $OB \equiv OD \equiv BD$, azaz az OBD háromszög minden oldalának hossza 1, az OBD egyenlő oldalú háromszög. Tehát a DOB szög mértéke 60° . Hasonlóan igazolható, hogy az ODC háromszög egyenlő oldalú háromszög, ahonnan következik, hogy a BOC szög mértéke 120° . Ekkor a BOA szög is és a AOC szög mértéke is 120° . Ugyanakkor $OA = OB = OC = 1 \Rightarrow AOB_\Delta \equiv BOC_\Delta \equiv COA_\Delta \Rightarrow AB = BC = CA \Rightarrow ABC_\Delta$ egy egyenlő oldalú háromszög. (2 pont)

■

Megjegyzés. A megoldás a következőképpen is befejezhető: Ha $a + b + c = 0 \implies$ az a, b, c affixumú háromszög súlypontja egybeesik a köré írható körének középpontjával, tehát az a, b, c affixumú pontok egy egyenlő oldalú háromszög csúcsai.

Második megoldás. Hivatalból

(2 pont)

$$\begin{aligned} |a + b - c|^2 &= (a + b - c) \cdot (\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}) = a\bar{a} + a\bar{b} - a\bar{c} + b\bar{a} + b\bar{b} - b\bar{c} - c\bar{a} - c\bar{b} + c\bar{c} = \\ &= |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + a\bar{b} + \bar{a}b - (b\bar{c} + \bar{b}c) - (a\bar{c} + \bar{a}c) = \\ &= 3 + 2 \cdot \operatorname{Re}(a\bar{b}) - 2 \cdot \operatorname{Re}(b\bar{c}) - 2 \cdot \operatorname{Re}(a\bar{c}) \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

Hasonlóképpen: $|b + c - a|^2 = 3 + 2 \cdot \operatorname{Re}(b\bar{c}) - 2 \cdot \operatorname{Re}(a\bar{b}) - 2 \cdot \operatorname{Re}(a\bar{c})$

$|c + a - b|^2 = 3 + 2 \cdot \operatorname{Re}(a\bar{c}) - 2 \cdot \operatorname{Re}(a\bar{b}) - 2 \cdot \operatorname{Re}(b\bar{c})$

Tehát: $|a + b - c|^2 + |b + c - a|^2 + |c + a - b|^2 = 9 - 2 \cdot \operatorname{Re}(a\bar{b}) - 2 \cdot \operatorname{Re}(b\bar{c}) - 2 \cdot \operatorname{Re}(a\bar{c})$

$9 - 2 \cdot \operatorname{Re}(a\bar{b}) - 2 \cdot \operatorname{Re}(b\bar{c}) - 2 \cdot \operatorname{Re}(a\bar{c}) = 12 \Rightarrow -2 \cdot \operatorname{Re}(a\bar{b}) - 2 \cdot \operatorname{Re}(b\bar{c}) - 2 \cdot \operatorname{Re}(a\bar{c}) = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(a\bar{b}) + \operatorname{Re}(b\bar{c}) + \operatorname{Re}(a\bar{c}) = -\frac{3}{2} \quad (2 \text{ pont})$

Jelölje $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi)$ az a, b illetve c argumentumát.

$$a\bar{b} = (\cos \alpha + i \sin \alpha)[\cos(-\beta) + i \sin(-\beta)] = \cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta) \Rightarrow \operatorname{Re}(a\bar{b}) = \cos(\alpha - \beta)$$

$$\text{Hasonlóképpen: } \operatorname{Re}(a\bar{c}) = \cos(\alpha - \gamma), \operatorname{Re}(b\bar{c}) = \cos(\beta - \gamma) \quad (2 \text{ pont})$$

$$\text{Tehát } \cos(\alpha - \beta) + \cos(\beta - \gamma) + \cos(\alpha - \gamma) = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Az általánosság elvesztése nélkül feltételezhetjük, hogy } \alpha \geq \beta \geq \gamma, \text{ mert a koszinusz páros függvény.}$$

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\beta - \gamma) + \cos(\alpha - \gamma) = -\frac{3}{2} \iff 2 \cos \frac{\alpha - \gamma}{2} \cos \frac{\alpha + \gamma - 2\beta}{2} + 2 \cos^2 \frac{\alpha - \gamma}{2} - 1 = -\frac{3}{2} \quad (2 \text{ pont})$$

$$\text{Legyen } x = \frac{\alpha - \gamma}{2} \text{ és } y = \frac{\alpha + \gamma - 2\beta}{2}.$$

$$2 \cos x \cos y + 2 \cos^2 x - 1 = -\frac{3}{2} \iff 2 \cos^2 x + 2 \cos x \cos y + \frac{1}{2} = 0 \iff$$

$$\iff 4 \cos^2 x + 4 \cos x \cos y + 1 = 0 \iff 4 \cos^2 x + 4 \cos x \cos y + \cos^2 y + \sin^2 y = 0 \iff$$

$$\iff (2 \cos x + \cos y)^2 + \sin^2 y = 0 \iff 2 \cos x + \cos y = 0 \text{ és } \sin y = 0 \quad (2 \text{ pont})$$

$$\alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi), \alpha \geq \beta \geq \gamma \Rightarrow \alpha - \beta, \beta - \gamma \in [0, 2\pi) \Rightarrow (\alpha - \beta) - (\beta - \gamma) \in (-2\pi, 2\pi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha + \gamma - 2\beta \in (-2\pi, 2\pi) \Rightarrow y \in (-\pi, \pi) \quad (2 \text{ pont})$$

$$\sin y = 0, y \in (-\pi, \pi) \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 2 \cos x + \cos 0 = 0 \Rightarrow 2 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \quad (2 \text{ pont})$$

$$\alpha, \gamma \in [0, 2\pi), \alpha \geq \gamma \Rightarrow \alpha - \gamma \in [0, 2\pi) \Rightarrow x \in [0, \pi)$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}, x \in [0, \pi) \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{\alpha - \gamma}{2} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \alpha - \gamma = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \gamma + \frac{4\pi}{3}$$

$$y = 0 \Rightarrow \frac{\alpha + \gamma - 2\beta}{2} = 0 \Rightarrow \alpha + \gamma - 2\beta = 0 \Rightarrow 2\gamma + \frac{4\pi}{3} - 2\beta = 0 \Rightarrow \beta = \gamma + \frac{2\pi}{3} \quad (2 \text{ pont})$$

Jelölje A, B és C az a, b illetve c affixumú pontot.

$$\alpha - \beta = \frac{2\pi}{3}, \beta - \gamma = \frac{2\pi}{3}, \alpha - \gamma = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = \frac{2\pi}{3}$$

de $OA = OB = OC = 1 \Rightarrow AOB_{\Delta} \equiv BOC_{\Delta} \equiv COA_{\Delta} \Rightarrow AB = BC = CA \Rightarrow ABC_{\Delta}$ egy egyenlő oldalú háromszög. (2 pont) ■

4. feladat (20 pont). Egy játékban 6 játékos vesz részt. Bármely két játékos vagy szövetségese vagy riválisa egymásnak. Bizonyítsd be, hogy biztosan kiválasztható a hat játékos közül három olyan, akik páronként vagy mind szövetségeseik egymással, vagy mind riválisok egymással!

Megoldás. Hivatalból (2 pont)

Nevezzük A -nak az egyik játékost. A skatulyaelv alapján az A játékosnak vagy van legalább 3 szövetségese, vagy van legalább 3 riválisa. (4 pont)

Tárgyaljuk azt az esetet, amikor az A játékosnak van legalább 3 szövetségese. Nevezzünk közülük hármat B -nek, C -nek, D -nek. Ha közülük ketten, például B és C szövetségesei, akkor A, B és C páronként egymás szövetségesei. (6 pont)

Ha B, C és D között nincs két egymással szövetséges, akkor B, C és D páronként egymás riválisai. (4 pont)

Hasonlóképpen tárgyaljuk azt az esetet, amikor az A játékosnak van legalább 3 riválisa. Nevezzünk közülük hármat B -nek, C -nek és D -nek. Ha közülük ketten, például B és C riválisok, akkor A, B és C páronként egymás riválisai. Ha B, C és D között nincs két egymással rivális, akkor B, C és D páronként egymás szövetségesei. (4 pont) ■

Megjegyzés. A megoldás a következőképpen is megadható.

Képzeld el a 6 játékost egy szabályos hatszög csúcsaiként. Bármely két játékos közötti kapcsolatot egy, a két játékost összekötő, szakasszal jelöljük. Ha két játékos szövetséges, a szakasz színe legyen zöld, ha pedig riválisok, a szakasz színe legyen piros. A hatszög minden csúcsát kössük össze az összes többi csúccsal.

Válasszunk ki egy tetszőleges játékost, jelöljük őt A -val. Mivel rajta kívül még 5 játékos van, A -ból összesen 5 szakasz indul ki a többiekhez.

Mivel ezt az 5 szakaszt 2 színnel (zöld és piros) színezzük, a skatulyaelv alapján legalább 3 szakasznak ugyanolyan színűnek kell lennie. Tételezzük fel, hogy A-ból legalább 3 zöld szakasz indul ki. Ez azt jelenti, hogy A-nak van legalább 3 szövetségese, jelöljük őket B-vel, C-vel és D-vel.

Most vizsgáljuk a B, C és D egymás közötti kapcsolatát. Két eset lehetséges:

- Ha B, C és D közül bármelyik kettő szövetséges (például B és C között zöld szakasz van), akkor A, B és C mindhárman szövetségesei egymásnak. Ekkor az 1. kijelentés igaz.
- Ha B, C és D közül senki sem szövetségese a másiknak (vagyis B, C és D között minden szakasz piros), akkor ők hárman mindannyian riválisai egymásnak. Ekkor az 2. kijelentés igaz.

Mivel a két szín felcserélhető hasonlóképpen tárgyaljuk ha A-ból legalább három piros szakasz indul ki.

Mivel minden esetben találtunk legalább 3 olyan embert, akik vagy mind szövetségesek, vagy mind riválisok, az eredeti állítás igaz.

11. osztály

1. feladat (30 pont). Adott az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = U$ mátrixegyenlet, ahol $X, U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Igazold, hogy az $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix esetén nincs megoldása az egyenletnek!

b) Add meg az összes olyan $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixot, amelyre az egyenletnek végtelen sok megoldása van!

Miklós Dóra, Lövéte

Megoldás. Hivatalból

(3 pont)

a) Legyen $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, amelyre az egyenlet

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = U &\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x + 2z & y + 2t \\ 2x + 4z & 2y + 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad \textbf{(3 pont)}$$

Innen kapjuk az

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 2t = 2 \\ 2x + 4z = 3 \\ 2y + 4t = 5 \end{cases}$$

egyenletrendszer, melynek nincs megoldása. Tehát a megadott U esetén valóban nincs megoldása az egyenletnek. **(6 pont)**

b) Az a) alpont alapján, ha $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, akkor

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} x + 2z & y + 2t \\ 2x + 4z & 2y + 4t \end{pmatrix},$$

vagyis az $U = \begin{pmatrix} m & n \\ 2m & 2n \end{pmatrix}$, $m, n \in \mathbb{R}$ alakú mátrixok esetén lesz megoldása az egyenletnek.

(6 pont)

Vizsgáljuk, hogy ezek közül melyik esetben lesz végtelen sok megoldás. Rögzített $m, n \in \mathbb{R}$ esetén az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} m & n \\ 2m & 2n \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & n \\ 2m & 2n \end{pmatrix}$$

egyenlet megoldásait a következőképpen határozzuk meg:

$$\begin{cases} x + 2z = m \\ y + 2t = n \end{cases} \implies \begin{cases} x = m - 2\alpha \\ y = n - 2\beta \\ z = \alpha \\ t = \beta \end{cases},$$

ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ paraméterek.

(9 pont)

Minden rögzített $m, n \in \mathbb{R}$ esetén az $X = \begin{pmatrix} m-2\alpha & n-2\beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ mátrix megoldása az egyenletnek, bármely $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén, vagyis az $U = \begin{pmatrix} m & n \\ 2m & 2n \end{pmatrix}$, $m, n \in \mathbb{R}$ alakú mátrixok esetén van végtelen sok megoldása az egyenletnek.

(3 pont)

■

Második megoldás. Hivatalból

(3 pont)

a) Az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ egyenlőségből kapjuk, hogy

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \cdot \det(X) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \iff 0 \cdot \det(X) = -1 \iff 0 = -1,$$

ami nem lehet. Tehát az megadott egyenletnek $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ esetén nincs megoldása.

(9 pont)

■

2. feladat (30 pont). Az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozatot az

$$a_1 = \sqrt{5} \quad \text{és} \quad a_{n+1} = \frac{2a_n + 3[a_n] + 6}{5}, \quad \forall n \geq 1,$$

rekurzióval értelmezzük, ahol $[x]$ az x valós szám egész részét jelöli.

a) Számítsd ki a sorozat általános tagjának $[a_n]$ egész részét!

b) Igazold, hogy létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ határérték és határozd meg az értékét!

c) Igazold, hogy létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n^2}$ határérték és számítsd ki az értékét!

Mastan Eliza, Nagybánya

Megoldás. Hivatalból

(3 pont)

a) Kiszámítjuk a sorozat első néhány tagjának egész részét. Ha $n = 1$, akkor $[a_1] = [\sqrt{5}] = 2$. Ha $n = 2$, akkor a rekurzió alapján

$$a_2 = \frac{2a_1 + 3 \cdot 2 + 6}{5} = \frac{2a_1 + 12}{5} = \frac{2\sqrt{5} + 12}{5}.$$

Mivel $2 < \sqrt{5} < 3$, ezért $3 < \frac{16}{5} < a_2 = \frac{2\sqrt{5}+12}{5} < \frac{18}{5} < 4$, ahonnan $[a_2] = 3$. Sejtésünk a következő:

$$[a_n] = n + 1, \quad \forall n \geq 1. \quad (6 \text{ pont})$$

Ezt matematikai indukcióval igazoljuk. Ha $n = 1$, akkor teljesül az összefüggés, mert $[a_1] = 2$. A továbbiakban feltételezzük, hogy $[a_k] = k + 1$ és igazoljuk, hogy $[a_{k+1}] = k + 2$. Mivel $a_k \geq [a_k]$, felírhatjuk, hogy

$$a_{k+1} = \frac{2a_k + 3[a_k] + 6}{5} \geq \frac{5[a_k] + 6}{5} = k + 1 + \frac{6}{5} > k + 2. \quad (3 \text{ pont})$$

Másrészt pedig $a_k < [a_k] + 1$, így

$$a_{k+1} = \frac{2a_k + 3[a_k] + 6}{5} < \frac{2([a_k] + 1) + 3[a_k] + 6}{5} = \frac{5[a_k] + 8}{5} = k + 1 + \frac{8}{5} < k + 3.$$

Mivel $k + 2 < a_{k+1} < k + 3$, következik, hogy $[a_{k+1}] = k + 2$. Tehát $[a_n] = n + 1$, bármely $n \geq 1$ esetén. (3 pont)

b) Ismert, hogy $a_n \geq [a_n]$ és az a) alpontban igazoltak alapján $[a_n] = n + 1$, ezért $a_n \geq n + 1$, bármely $n \geq 1$ esetén. (3 pont)

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + 1) = +\infty$, (3 pont)

ezért az (a_n) sorozat divergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$. (3 pont)

c) Mivel $[a_k] \leq a_k < [a_k] + 1$ és az a) alpont alapján $[a_k] = k + 1$, ezért $k + 1 \leq a_k < k + 2$, bármely $k \geq 1$ esetén. Összegezve a megfelelő oldalakat 1-től n -ig kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (k + 1) &\leq \sum_{k=1}^n a_k < \sum_{k=1}^n (k + 2), \\ \frac{n(n+1)}{2} + n &\leq \sum_{k=1}^n a_k < \frac{n(n+1)}{2} + 2n, \\ \frac{n^2 + 3n}{2} &\leq \sum_{k=1}^n a_k < \frac{n^2 + 5n}{2}. \end{aligned}$$

Tehát

$$\frac{n^2 + 3n}{2n^2} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n^2} < \frac{n^2 + 5n}{2n^2}. \quad (3 \text{ pont})$$

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+3n}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+5n}{2n^2} = \frac{1}{2}$, a fogó tétel alapján létezik a kért határérték és az értéke

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n^2} = \frac{1}{2}. \quad (3 \text{ pont})$$

■

3. feladat (20 pont). Adott egy $(x_n)_{n \geq 1}$ valós számsorozat, amelyre teljesülnek a következő feltételek:

$$x_n > 1 \quad \text{és} \quad x_{n+1}^3 < 3x_n - 2, \quad \forall n \geq 1.$$

Igazold, hogy a sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!

Matlap 8/2025, L:3924

Megoldás. Hivatalból

(2 pont)

Vizsgáljuk a sorozat monotonitását, melyhez tanulmányozzuk az $x_{n+1}^3 - x_n^3$ különbséget. A megadott egyenlőtlenség felhasználásával

$$x_{n+1}^3 - x_n^3 < 3x_n - 2 - x_n^3. \quad (2 \text{ pont})$$

Az egyenlőtlenség jobb oldalát szorzótényezőre bontva

$$3x_n - 2 - x_n^3 = -(x_n - 1)^2(x_n + 2). \quad (2 \text{ pont})$$

Mivel $x_n > 1$, ezért $-(x_n - 1)^2(x_n + 2) < 0$, bármely $n \geq 1$ esetén, ahonnan $x_{n+1}^3 < x_n^3$, bármely $n \geq 1$ esetén. (2 pont)

Köbgyököt vonva az egyenlőtlenség mindkét oldalából, következik, hogy $x_{n+1} < x_n$, bármely $n \geq 1$ esetén, tehát az $(x_n)_{n \geq 1}$ sorozat szigorúan csökkenő. (2 pont)

Tudva, hogy $x_n > 1$, bármely $n \geq 1$ esetén, a sorozat alulról korlátos, (2 pont)

így a Weierstrass-tétel alapján az $(x_n)_{n \geq 1}$ sorozat konvergens. (2 pont)

Legyen $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ a sorozat véges határértéke. A megadott egyenlőtlenségben határértékre térve következik, hogy $l^3 \leq 3l - 2$. (2 pont)

Ez egyenértékű az $(l - 1)^2(l + 2) \leq 0$ egyenlőtlenséggel, ahonnan $l \in (-\infty, -2] \cup \{1\}$. (2 pont)

Mivel $x_n > 1$, minden $n \geq 1$ esetén, ezért $l \geq 1$. Innen következik, hogy $l = 1$ az egyedüli megoldása az egyenlőtlenségnek. Tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$. (2 pont)

■

4. feladat (20 pont). Egy $n \times n$ -es négyzetrácsos táblán véletlenszerűen kijelölünk két különböző mezőt (vagyis 1×1 -es négyzetet). Határozd meg annak a valószínűségét, hogy a kijelölt mezők középpontjait összekötő szakasz felezőpontja is egy mező középpontja legyen!

Hasas Tünde, Nagyvárad

Megoldás. Hivatalból

(2 pont)

A szakasz felezőpontja akkor lesz egy mező középpontja, ha a két kijelölt mező sorindexei azonos paritásúak, illetve oszlopindexei is azonos paritásúak. (4 pont)

Külön tárgyaljuk, ha n páros vagy páratlan.

1. eset. Ha $n = 2k$, akkor az összesen $(2k)^2 = 4k^2$ mezőből két különböző mezőt $C_{4k^2}^2 = \frac{4k^2(4k^2-1)}{2}$ -féleképpen választhatunk ki, amely a lehetséges esetek száma. (2 pont)

Továbbá négyféle sorindex-oszlopindex paritáspár van: páros-páros, páros-páratlan, páratlan-páros, páratlan-páratlan. Ekkor k darab páros, illetve k darab páratlan indexű sor van. Hasonlóan k darab páros, illetve k darab páratlan indexű oszlop van. Mind a négy paritáspárú mezőből k^2 van. Két azonos paritáspárú mezőt $C_{k^2}^2 = \frac{k^2(k^2-1)}{2}$ -féleképpen tudunk kiválasztani. Így a kedvező esetek száma $4 \cdot \frac{k^2(k^2-1)}{2}$. Tehát páros $n = 2k$ esetén a valószínűség

$$P = \frac{4C_{k^2}^2}{C_{4k^2}^2} = \frac{4k^2(k^2-1)}{4k^2(4k^2-1)} = \frac{k^2-1}{4k^2-1} = \frac{n^2-4}{4(n^2-1)}. \quad (4 \text{ pont})$$

2. eset. Ha $n = 2k + 1$, akkor a lehetséges esetek száma

$$C_{(2k+1)^2}^2 = \frac{(2k+1)^2[(2k+1)^2 - 1]}{2} = \frac{(2k+1)^2(2k+2) \cdot 2k}{2} = 2k(k+1)(2k+1)^2. \quad (2 \text{ pont})$$

Mivel k páros és $k+1$ páratlan sor, illetve oszlop van, vizsgáljuk a lehetséges paritáspárok számát:

- k^2 mezőnek van páros sor- és oszlopindexe. Ezekből két különböző mezőt $C_{k^2}^2 = \frac{k^2(k^2-1)}{2}$ módon választhatunk ki.

- $k(k+1)$ mezőnek van páros sor- és páratlan oszlopindexe. Ezekből két különböző mezőt $C_{k(k+1)}^2 = \frac{(k^2+k)(k^2+k-1)}{2}$ módon választhatunk ki.

- Szintén $k(k+1)$ mezőnek van páratlan sor- és páros oszlopindexe. Ezekből két különböző mezőt $C_{k(k+1)}^2 = \frac{(k^2+k)(k^2+k-1)}{2}$ módon választhatunk ki.

- Végül $(k+1)^2$ mezőnek lesz páratlan a sor- és oszlopindexe. Ezekből két különböző mezőt $C_{(k+1)^2}^2 = \frac{(k^2+2k+1)(k^2+2k)}{2}$ módon választhatunk ki. (4 pont)

Összeadva, megkapjuk a kedvező esetek számát:

$$\begin{aligned} C_{k^2}^2 + 2C_{k(k+1)}^2 + C_{(k+1)^2}^2 &= \frac{k^2(k^2-1)}{2} + \frac{2 \cdot (k^2+k)(k^2+k-1)}{2} + \frac{(k^2+2k+1)(k^2+2k)}{2} \\ &= \frac{4k^4 + 8k^3 + 4k^2}{2} = 2k^2(k+1)^2. \end{aligned}$$

Így páratlan $n = 2k + 1$ esetén a valószínűség

$$P = \frac{2k^2(k+1)^2}{2k(k+1)(2k+1)^2} = \frac{k(k+1)}{(2k+1)^2} = \frac{n^2-1}{4n^2}. \quad (2 \text{ pont})$$

Megjegyzés. Ha az eredményt csak a k , vagy csak az n függvényében adja meg, akkor is teljes értékű a megoldás. ■

12. osztály

1. feladat (30 pont). Ha x és y olyan tetszőleges valós számok, amelyekre $xy \neq -1$, legyen $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$, valamint tekintsük a $G = (-1, 1)$ halmazt.

a) Igazold, hogy „ $*$ ” művelet a G -n és $(G, *)$ kommutatív csoport!

b) Számítsd ki az $(x_n)_{n \geq 1}$ sorozat határértékét, ahol $x \in G$ adott csoportelem és $x_n = \underbrace{x * x * \dots * x}_{n\text{-szer}}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

Matlap 10/2025, L:3958

Megoldás. Hivatalból

(3 pont)

a) A $(G, *)$ Abel-féle (kommutatív) csoport, ha teljesül a következő öt feltétel:

1) Zárttság. Igazoljuk, hogy bármely $x, y \in (-1, 1)$ esetén, $x * y \in (-1, 1)$.

$$\begin{aligned} 1 - (x * y)^2 &= 1 - \left(\frac{x+y}{1+xy} \right)^2 = \frac{(1+xy)^2 - (x+y)^2}{(1+xy)^2} \\ &= \frac{1 + 2xy + x^2y^2 - x^2 - 2xy - y^2}{(1+xy)^2} = \frac{1 - x^2 - y^2 + x^2y^2}{(1+xy)^2} \\ &= \frac{(1-x^2)(1-y^2)}{(1+xy)^2}. \end{aligned}$$

Mivel $x, y \in (-1, 1)$, ezért $1 - x^2 > 0$ és $1 - y^2 > 0$, továbbá $(1+xy)^2 > 0$, tehát $1 - (x * y)^2 > 0$, azaz $(x * y)^2 < 1$ innen következik, hogy $x * y \in (-1, 1)$. Tehát a G halmaz zárt a „ $*$ ” műveletre nézve. (3 pont)

2) Asszociativitás. A „ $*$ ” művelet asszociatív a G halmazon, ha $(x * y) * z = x * (y * z)$, bármely $x, y, z \in G$ esetén. Ekkor

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy} \cdot z} = \frac{x + y + z + xyz}{1 + xy + xz + yz}, \\ x * (y * z) &= \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x \cdot \frac{y+z}{1+yz}} = \frac{x + y + z + xyz}{1 + xy + xz + yz}. \end{aligned}$$

A két kifejezés megegyezik, mivel a valós számok összeadása és szorzása kommutatív műveletek, tehát $(x * y) * z = x * (y * z)$, bármely $x, y, z \in G$ esetén, vagyis a művelet asszociatív. (3 pont)

3) Kommutativitás. A „ $*$ ” művelet kommutatív a G halmazon, ha $x * y = y * x$, bármely $x, y \in G$. Mivel

$$x * y = \frac{x+y}{1+xy} = \frac{y+x}{1+yx} = y * x, \forall x, y \in G,$$

ezért a művelet kommutatív.

(3 pont)

Megjegyzés. Ha valaki előbb a kommutativitást igazolva, majd az $(x * y) * z$ kifejezés szimmetriájára és a kommutativitásra hivatkozva következtet a művelet asszociativitására, akkor is maximális pont jár!

4) Semleges elem. A " $*$ " műveletre nézve létezik semleges elem, ha létezik $e \in G$, melyre $e * x = x * e = x$, bármely $x \in G$ esetén. Mivel a " $*$ " művelet kommutatív, ezért

$$x * e = x \iff \frac{x+e}{1+xe} = x \iff x+e = x+x^2e \iff e(1-x^2) = 0.$$

Mivel $x \in (-1, 1)$, ezért $1-x^2 \neq 0$, így szükségképpen $e = 0$, a művelet semleges eleme. **(3 pont)**

5) Szimmetrikus elem. Bizonyítjuk, hogy a G halmaz minden eleme szimmetrizálható, vagyis bármely $x \in G$ esetén létezik olyan $x^{-1} \in G$, melyre $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$. Mivel a " $*$ " művelet kommutatív és a semleges eleme a 0 ezért

$$\begin{aligned} x * x^{-1} = 0 &\iff \frac{x+x^{-1}}{1+xx^{-1}} = 0 \iff x+x^{-1} = 0 \\ &\iff x^{-1} = -x \in (-1, 1), \quad \text{ha } x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

Tehát minden $x \in (-1, 1)$ elem szimmetrizálható és $x^{-1} = -x$. Mivel a fenti öt feltétel teljesül következik, hogy $(G, *)$ kommutatív csoport. **(3 pont)**

Megjegyzés. A feladat a) alpontja így is megoldható:

A $\psi : (0, \infty) \rightarrow (-1, 1)$, $\psi(t) = \frac{t-1}{t+1}$ függvény bijektív (ezt igazolni kell).

Emiatt bármely $x, y \in G$ esetén létezik $t_1, t_2 \in (0, \infty)$ úgy, hogy $x = \psi(t_1)$ és $y = \psi(t_2)$. Továbbá ellenőrizhető, hogy

$$x * y = \psi(t_1) * \psi(t_2) = \psi(t_1 \cdot t_2), \forall x, y \in G,$$

tehát a ψ függvény átviszi a csoportstruktúrát a $(0, \infty)$ halmazról a G -re, vagyis $(G, *)$ is kommutatív csoport.

b) Tekintjük a

$$\varphi : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \frac{1+t}{1-t}$$

leképezést. Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{1+(x*y)}{1-(x*y)} &= \frac{1+\frac{x+y}{1+xy}}{1-\frac{x+y}{1+xy}} = \frac{\frac{1+xy+x+y}{1+xy}}{\frac{1+xy-x-y}{1+xy}} = \frac{1+x+y+xy}{1-x-y+xy} \\ &= \frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} = \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{1+y}{1-y}. \end{aligned}$$

Vagyis

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) \varphi(y).$$

Legyen $a = \varphi(x) = \frac{1+x}{1-x} > 0$. Mivel $x_n = \underbrace{x * \dots * x}_{n\text{-szer}}$, ezért a matematikai indukció alapján következik, hogy

$$\varphi(x_n) = \varphi^n(x) = a^n.$$

Innen x_n kifejezhető:

$$\frac{1+x_n}{1-x_n} = a^n \iff 1+x_n = a^n(1-x_n) \iff x_n(1+a^n) = a^n - 1,$$

tehát

$$x_n = \frac{a^n - 1}{a^n + 1}, \quad \text{ahol} \quad a = \frac{1+x}{1-x}. \quad \textbf{(6 pont)}$$

Vizsgáljuk az x_n sorozat határértékét:

Ha $x \in (-1, 0)$, akkor $0 < a < 1$, így $a^n \rightarrow 0$, tehát

$$x_n = \frac{a^n - 1}{a^n + 1} \rightarrow \frac{-1}{1} = -1.$$

Ha $x = 0$, akkor $a = 1$, így minden n -re

$$x_n = \frac{1^n - 1}{1^n + 1} = 0.$$

Ha $x \in (0, 1)$, akkor $a > 1$, így $a^n \rightarrow +\infty$, tehát

$$x_n = \frac{a^n - 1}{a^n + 1} \rightarrow 1.$$

Tehát:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} -1, & \text{ha } x \in (-1, 0), \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ 1, & \text{ha } x \in (0, 1). \end{cases} \quad (6 \text{ pont})$$

Megjegyzés. Az első feladat b) alpontja így is megoldható:

$$x * x = \frac{x + x}{1 + x \cdot x} = \frac{2x}{1 + x^2} = \frac{C_2^1 x}{C_2^0 + C_2^2 x^2}.$$

$$x * x * x = \left(\frac{2x}{1 + x^2} \right) * x = \frac{\frac{2x}{1+x^2} + x}{1 + \frac{2x}{1+x^2} \cdot x} = \frac{2x + x + x^3}{1 + x^2 + 2x^2} = \frac{3x + x^3}{1 + 3x^2} = \frac{C_3^1 x + C_3^3 x^3}{C_3^0 + C_3^2 x^2}.$$

$$x * x * x * x = \frac{\frac{3x+x^3}{1+3x^2} + x}{1 + \frac{3x+x^3}{1+3x^2} \cdot x} = \frac{3x + x^3 + x + 3x^3}{1 + 3x^2 + 3x^2 + x^4} = \frac{4x + 4x^3}{1 + 6x^2 + x^4} = \frac{C_4^1 x + C_4^3 x^3}{C_4^0 + C_4^2 x^2 + C_4^4 x^4}.$$

Indukciós feltétel:

$$\underbrace{x * x * \dots * x}_n = \frac{\sum_{k \geq 0} C_n^{2k+1} x^{2k+1}}{\sum_{k \geq 0} C_n^{2k} x^{2k}}.$$

Következtetés:

$$\underbrace{x * x * \dots * x}_{n+1} = \frac{\sum_{k \geq 0} C_{n+1}^{2k+1} x^{2k+1}}{\sum_{k \geq 0} C_{n+1}^{2k} x^{2k}}.$$

$$\begin{aligned} \underbrace{x * x * \dots * x}_{n+1} &= \left(\underbrace{x * x * \dots * x}_n \right) * x = \frac{\frac{\sum_{k \geq 0} C_n^{2k+1} x^{2k+1}}{\sum_{k \geq 0} C_n^{2k} x^{2k}} + x}{1 + \frac{\sum_{k \geq 0} C_n^{2k+1} x^{2k+1}}{\sum_{k \geq 0} C_n^{2k} x^{2k}} \cdot x} \\ &= \frac{\sum_{k \geq 0} C_n^{2k+1} x^{2k+1} + \sum_{k \geq 0} C_n^{2k} x^{2k+1}}{\sum_{k \geq 0} C_n^{2k} x^{2k} + \sum_{k \geq 0} C_n^{2k+1} x^{2k+2}} \\ &= \frac{\sum_{k \geq 0} (C_n^{2k+1} + C_n^{2k}) x^{2k+1}}{C_n^0 + \sum_{k \geq 1} (C_n^{2k} + C_n^{2k-1}) x^{2k}} \\ &= \frac{\sum_{k \geq 0} C_{n+1}^{2k+1} x^{2k+1}}{C_{n+1}^0 + \sum_{k \geq 0} C_{n+1}^{2k} x^{2k}} = \frac{\sum_{k \geq 0} C_{n+1}^{2k+1} x^{2k+1}}{\sum_{k \geq 0} C_{n+1}^{2k} x^{2k}} \end{aligned}$$

$$= \frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{(1+x)^n + (1-x)^n}.$$

Ha $x \in (-1, 0) \Rightarrow 1+x \in (0, 1)$ és $1-x \in (1, 2)$. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x)^n \left[\left(\frac{1+x}{1-x} \right)^n - 1 \right]}{(1-x)^n \left[\left(\frac{1+x}{1-x} \right)^n + 1 \right]} = -\frac{1}{1} = -1.$$

Ha $x = 0 \Rightarrow \frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{(1+x)^n + (1-x)^n} = 0$.

Ha $x \in (0, 1) \Rightarrow 1+x \in (1, 2)$ és $1-x \in (0, 1)$. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+x)^n \left[1 - \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n \right]}{(1+x)^n \left[1 + \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n \right]} = 1.$$

$$\text{Tehát } \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{x * x * \dots * x}_n = \begin{cases} -1, & \text{ha } x \in (-1, 0), \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ 1, & \text{ha } x \in (0, 1). \end{cases}$$

■

2. feladat (30 pont). Számítsd ki a következő határozatlan integrálokat:

a)

$$\int \frac{1}{x(x^{2025} + 2026)} dx, \quad x > 0.$$

b)

$$\int \frac{a \sin x + b \cos x}{b \sin x + a \cos x} dx, \quad a, b > 0, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Hivatalból

(3 pont)

a) Bővítjük a törtet x^{2024} -gyel:

$$\int \frac{1}{x(x^{2025} + 2026)} dx = \int \frac{x^{2024}}{x^{2025}(x^{2025} + 2026)} dx.$$

Legyen

$$t = x^{2025} \implies dt = 2025x^{2024} dx \implies x^{2024} dx = \frac{dt}{2025}. \quad \textbf{(3 pont)}$$

Ekkor

$$\int \frac{x^{2024}}{x^{2025}(x^{2025} + 2026)} dx = \int \frac{1}{t(t + 2026)} \cdot \frac{dt}{2025} = \frac{1}{2025} \int \frac{1}{t(t + 2026)} dt = \quad \textbf{(3 pont)}$$

$$= \frac{1}{2025} \int \frac{1}{t(t + 2026)} dt = \frac{1}{2025 \cdot 2026} \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t + 2026} \right) dt \quad \textbf{(3 pont)}$$

$$= \frac{1}{2025 \cdot 2026} (\ln |t| - \ln |t + 2026|) + C. \quad \textbf{(3 pont)}$$

Visszahelyettesítve $t = x^{2025}$ kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{x(x^{2025} + 2026)} dx = \frac{1}{2025 \cdot 2026} \ln \left(\frac{x^{2025}}{x^{2025} + 2026} \right) + C. \quad (3 \text{ pont})$$

b) Legyen $\varphi(x) = b \sin x + a \cos x$, ekkor $\varphi'(x) = b \cos x - a \sin x$. Keresünk $A, B \in \mathbb{R}$ számokat úgy, hogy

$$a \sin x + b \cos x = A \cdot \varphi(x) + B \cdot \varphi'(x), \quad \forall x > 0.$$

Azaz

$$A \cdot (b \sin x + a \cos x) + B \cdot (b \cos x - a \sin x) = (Ab - Ba) \cdot \sin x + (Aa + Bb) \cdot \cos x, \quad \forall x > 0.$$

Ez akkor egyezik $a \sin x + b \cos x$ -szel, ha

$$\begin{cases} Ab - Ba = a, \\ Aa + Bb = b. \end{cases}$$

Megoldva az egyenletrendszert kapjuk, hogy:

$$A = \frac{2ab}{a^2 + b^2}, \quad B = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}. \quad (6 \text{ pont})$$

Így

$$\frac{a \sin x + b \cos x}{b \sin x + a \cos x} = \frac{A \cdot \varphi(x) + B \cdot \varphi'(x)}{\varphi(x)} = A + B \cdot \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}.$$

Tehát

$$\int \frac{a \sin x + b \cos x}{b \sin x + a \cos x} dx = \int \left(A + B \cdot \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \right) dx = A \cdot x + B \cdot \ln |\varphi(x)| + C.$$

Mivel $a, b > 0$ és $x \in (0, \pi/2)$ esetén $\sin x, \cos x > 0$, ezért $\varphi(x) > 0$, így elhagyható az abszolútérték, azaz

$$\begin{aligned} & \int \frac{a \sin x + b \cos x}{b \sin x + a \cos x} dx = \\ &= \frac{2ab}{a^2 + b^2} x + \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \ln(b \sin x + a \cos x) + C. \end{aligned} \quad (6 \text{ pont})$$

■

3. feladat (20 pont). Számítsd ki az $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény minimumát, ha

$$F(x) = \max \left\{ x^2 + \frac{2026}{x}, 2027x \right\}, \quad \forall x > 0.$$

Csapó Hajnalka, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból

(2 pont)

Ha $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \frac{2026}{x}$, $g(x) = 2027x$, $\forall x > 0$, akkor

$$F(x) = \max(f(x), g(x)).$$

Megoldjuk az $f(x) = g(x)$ egyenletet:

$$x^2 + \frac{2026}{x} = 2027x.$$

Ekvivalens átalakításokkal kapjuk, hogy

$$x^3 - 2027x^2 + 2026 = 0,$$

ami egyenértékű azzal, hogy

$$(x - 1)(x^2 - 2026x - 2026) = 0.$$

Az egyenlet pozitív megoldásai:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1013 + \sqrt{1013 \cdot 1015}. \quad (4 \text{ pont})$$

Mivel az f és g függvények folytonosak a $(0, \infty)$ értelmezési tartományon, elégséges a $(0, x_1)$, $[x_1, x_2)$ és $[x_2, \infty)$ intervallumok egy-egy belső pontjában ellenőrizni, hogy melyik függvény nagyobb.

Ha $x \in (0, 1)$, például $x = \frac{1}{2}$ esetén

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2026}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} + 4052, \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = 2027 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2027}{2},$$

tehát $f\left(\frac{1}{2}\right) > g\left(\frac{1}{2}\right)$, vagyis $f(x) > g(x)$ minden $x \in (0, 1)$ esetén.

Ezért itt $F(x) = f(x)$.

(2 pont)

Ha $x \in [1, x_2)$, például $x = 2$ esetén

$$f(2) = 4 + \frac{2026}{2} = 1017, \quad g(2) = 2027 \cdot 2 = 4054,$$

tehát $g(2) > f(2)$, vagyis $g(x) > f(x)$ minden $x \in [1, x_2)$ esetén.

Ezért itt $F(x) = g(x)$.

(2 pont)

Ha $x \geq x_2$, akkor például $x = 2027$ -re

$$f(2027) = 2027^2 + \frac{2026}{2027}, \quad g(2027) = 2027 \cdot 2027 = 2027^2,$$

tehát $f(2027) > g(2027)$, vagyis $f(x) > g(x)$ minden $x \in [x_2, \infty)$ esetén.

Ezért itt $F(x) = f(x)$. Tehát:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, 1), \\ g(x), & x \in [1, x_2), \\ f(x), & x \in [x_2, \infty). \end{cases} \quad (2 \text{ pont})$$

Az $[1, x_2)$ intervallumban $F(x) = g(x) = 2027x$, ami szigorúan növekvő, ezért

$$\min_{x \in [1, x_2]} F(x) = g(1) = 2027. \quad (2 \text{ pont})$$

A $(0, 1)$ és $[x_2, \infty)$ intervallumban $F(x) = f(x)$, deriválva az f függvényt kapjuk, hogy:

$$f'(x) = 2x - \frac{2026}{x^2} = \frac{2x^3 - 2026}{x^2}.$$

Ha $x \in (0, 1)$, akkor $2x^3 < 2 < 2026$, tehát $2x^3 - 2026 < 0$, így $f'(x) < 0$, vagyis f csökkenő a $(0, 1)$ intervallumon. Következésképpen $f(x) > f(1) = 2027$ minden $x \in (0, 1)$ esetén, tehát ezen a részen

$$F(x) > 2027.$$

(2 pont)

Ha $x \in [x_2, \infty)$, akkor $2x^3 > 2 \cdot 2026^3 > 2026$, így itt f növekvő. Következésképpen

$$\min_{x \in [x_2, \infty)} F(x) = f(x_2) = x_2^2 + \frac{2026}{x_2} > x_2^2 > 2026^2 > 2027. \quad (2 \text{ pont})$$

Mivel $x = 1$ esetén

$$f(1) = 1 + \frac{2026}{1} = 2027, \quad g(1) = 2027 \cdot 1 = 2027,$$

ezért $F(1) = 2027$.

Tehát a keresett minimumérték 2027, és ezt az F függvény $x = 1$ -nél éri el.

(2 pont)

Megjegyzés. A gondolatmenet rövidebben is leírható. Észrevehető, hogy $x = 1$ -ben $f(1) = g(1) = 2027$. Mivel a feladat csak F minimumát kéri, ezért elég belátni, hogy minden más helyen legalább az egyik függvény legalább 2027-et vesz fel (így a maximumfüggvény konkrét meghatározása nem is szükséges). Az világos, hogy ha $x > 1$, akkor $2027x > 2027$. Még azt kell meggondolni, hogy ha $0 < x < 1$, akkor

$$f = x^2 + \frac{2026}{x} > 2027 \iff x^3 - 2027x + 2026 = (1-x)(2026 - x^2 - x) > 0,$$

ami nyilvánvalóan teljesül, ha $0 < x < 1$, mert így mindkét tényező pozitív. Tehát F az $x = 1$ pontban 2027-et vesz fel, és azt kaptuk, hogy minden más helyen nagyobb, tehát tényleg ez a minimum.

■

4. feladat (20 pont). Egy $n \times n$ -es táblázat mezőibe beírjuk az $1, 2, \dots, n^2$ számokat sorfolytonosan (balról jobbra, fentről lefelé).

1	2	3	...		n
$n+1$	$n+2$	$n+3$	...		$2n$
			$\vdots$	...	
			...		n^2

Legyen $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ (rögzített). Egy k -blokk alatt a táblázat egy olyan részét értjük, amelyet úgy kapunk, hogy a táblázaton belül a rácsvonalak mentén kijelölünk egy k egymásutáni sorból és k egymásutáni oszlopból álló, összefüggő, négyzet alakú tartományt.

a) Hány k -blokk van?

b) Határozd meg az összes lehetséges k -blokkösszeg legnagyobb közös osztóját, ha blokkösszeg alatt a blokkban lévő számok összegét értjük!

Csapó Hajnalka, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból

(2 pont)

a) Egy k -blokk bal felső sarkát úgy választhatjuk meg, hogy a blokk még beleférjen a táblába. A bal felső sarok sorindexe lehet $1, 2, \dots, n - k + 1$, tehát $n - k + 1$ lehetőség, és ugyanígy az oszlopindexre is $n - k + 1$ lehetőség van. Ezért a blokkok száma:

$$(n - k + 1)^2. \quad (4 \text{ pont})$$

b) Jelölje $S_{i,j}$ annak a k -bloknak az összegét, amelynek bal felső sarka az i -edik sor j -edik oszlopában van ($1 \leq i, j \leq n - k + 1$).

Tegyük fel, hogy $k < n$, különben csak egyetlen blokk lenne. Ha egy blokkot egy mezővel jobbra tolunk, akkor minden sorban a blokk jobb szélén egy szám belép, bal szélén egy szám kilép, a különbség minden sorban k , és k sor van, tehát

$$S_{i,j+1} - S_{i,j} = k^2. \quad (2 \text{ pont})$$

Ha egy blokkot egy mezővel lefele tolunk, akkor minden oszlopban a blokk alsó szélén egy szám belép, felső szélén egy szám kilép, a különbség minden oszlopban kn , és k oszlop van, tehát

$$S_{i+1,j} - S_{i,j} = nk^2. \quad (2 \text{ pont})$$

Következésképp minden $S_{i,j}$ ugyanazt a maradékot adja modulo k^2 , vagyis

$$S_{i,j} \equiv S_{1,1} \pmod{k^2},$$

ez azt jelenti, hogy az összes blokkösszeg legnagyobb közös osztója

$$\text{lko}(S_{i,j}) = \text{lko}(k^2, S_{1,1}). \quad (2 \text{ pont})$$

A bal felső k -blokk elemei:

$$\begin{aligned} &1, 1 + 1, 1 + 2, \dots, 1 + k - 1 \\ &1 + n, 1 + n + 1, 1 + n + 2, \dots, 1 + n + k - 1 \\ &1 + 2n, 1 + 2n + 1, 1 + 2n + 2, \dots, 1 + 2n + k - 1 \\ &\dots \\ &1 + (k - 1)n, 1 + (k - 1)n + 1, 1 + (k - 1)n + 2, \dots, 1 + (k - 1)n + k - 1 \end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{aligned} S_{1,1} &= k \cdot \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{k \text{ darab}} + k \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + k - 1) + k \cdot (n + 2n + \dots + (k - 1)n) \\ &= k^2 + k \cdot \frac{(k - 1)k}{2} \cdot (n + 1) = \\ &= k^2 \left(1 + \frac{(k - 1)(n + 1)}{2} \right). \quad (2 \text{ pont}) \end{aligned}$$

Legyen $t = (k - 1)(n + 1)$.

Ha t páros, akkor $\frac{t}{2}$ egész, így $S_{1,1}$ osztható k^2 -tel, tehát $\text{lko}(k^2, S_{1,1}) = k^2$.

Ha t páratlan, akkor $S_{1,1} = k^2 \left(1 + \frac{t}{2} \right)$ nem osztható k^2 -tel, viszont osztható $\frac{k^2}{2}$ -vel, és ekkor a

legnagyobb közös osztó, tehát $\text{lko}(k^2, S_{1,1}) = \frac{k^2}{2}$.

Mivel t pontosan akkor páratlan, ha k páros és n páros, ezért ha $k < n$, akkor

$$\text{lko}(S_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq n - k + 1) = \begin{cases} k^2, & \text{ha } k \text{ páratlan vagy } n \text{ páratlan,} \\ \frac{k^2}{2}, & \text{ha } k \text{ páros és } n \text{ páros.} \end{cases} \quad (4 \text{ pont})$$

Ha $k = n$, akkor csak egyetlen blokk van, így az lko maga az összeg:

$$\text{lko}(S_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq n - k + 1) = 1 + 2 + \dots + n^2 = \frac{n^2(n^2 + 1)}{2}. \quad (2 \text{ pont})$$

Megjegyzés. Ha valaki a bizonyítást csak egy sajátos esetben végzi el például $k = 2$ blokkok esetén, akkor erre 6 pont adható, de ez nem adható össze a javítókulcsnak az erre a feladatra vonatkozó többi pontjával!

■

Országos döntő - I. forduló

5. osztály

1. feladat (30 pont). A gyűrűk ura a műhelyében varázsgyűrűt készít, amelyeket majd a boltjában elad, darabját 10 petákért. Gyűrűket csak munkanapokon készít, de boltja a hét minden napján nyitva van. Hétfő reggel belépett az üres boltjába, nekifogott és készített néhány gyűrűt. Kedden háromszor annyit készített, mint hétfőn, és eladott a hétfőn készített gyűrűkből 12 darabot. Szerdán feleannyi gyűrűt készített, mint hétfőn és eladta a kedden készített gyűrűk felét, amelyekért 240 petákat kapott. Csütörtökön és pénteken is ugyanannyi gyűrűt készített és adott el, mint kedden. Hány petákat érnek a hétvégére a boltban maradt gyűrűk?

Bíró Gabriella, Nagyvárad

Megoldás. Hivatalból

(3 pont)

Szerdán 240 petákat kapott, tehát $240 : 10 = 24$ gyűrűt adott el.

(3 pont)

Kedden ennek a kétszeresét, tehát $24 \cdot 2 = 48$ darab gyűrűt készített.

(3 pont)

Hétfőn ennek a harmadát készítette, tehát $48 : 3 = 16$ gyűrűt készített.

(3 pont)

Szerdán feleannyit készített, mint hétfőn, tehát $16 : 2 = 8$ gyűrűt készített.

(3 pont)

Csütörtökön és pénteken 48–48 darab gyűrűt készített és 12–12 darab gyűrűt adott el.

(3 pont)

Így összesen $16 + 48 + 8 + 48 + 48 = 168$ darab gyűrűt készített.

(3 pont)

$12 + 24 + 12 + 12 = 60$ darab gyűrűt adott el.

(3 pont)

$168 - 60 = 108$ darab gyűrű maradt a boltban, ami $108 \cdot 10 = 1080$ peták.

(6 pont)



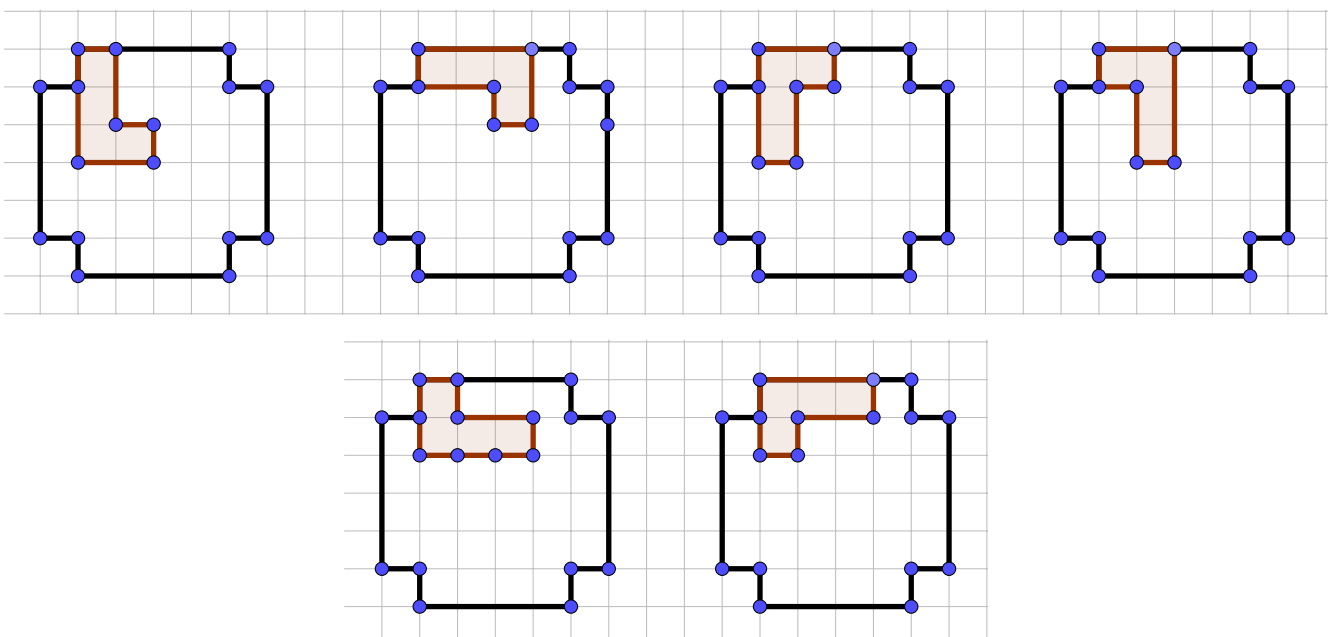
2. feladat (30 pont). Egy 6x6-os tábla négy sarkát kivágtuk. A maradékot L-alakú, négy egység-négyzetből álló darabokkal szeretnénk teljesen lefedni úgy, hogy a darabok egymást ne fedjék. A darabok tetszőlegesen elhelyezhetők a táblán, de minden darabnak pontosan 4 kis négyzetecskét kell fednie. Keresd meg az összes lehetséges lefedést!

András Szilárd, Csíkdelye

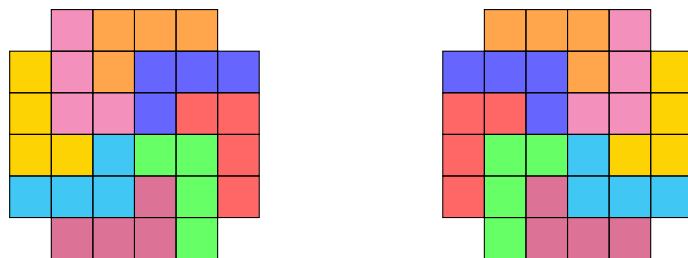
Megoldás. Hivatalból

(3 pont)

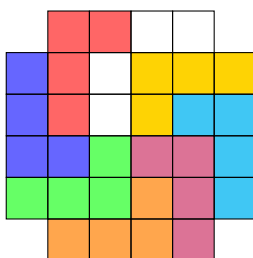
Nézzük a felső bal sarok melletti mezőt. Ezt az alábbi hat módon lehet lefedni (úgy, hogy folytatható legyen a lefedés):



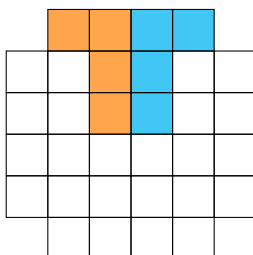
Az első és a második ábrát lépésről lépésre csak a következő ábrának megfelelően lehet folytatni (a két kitöltés egymás tükörképe):



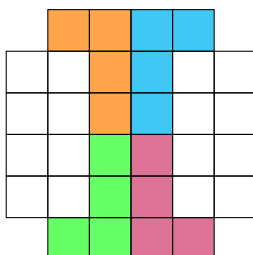
A harmadik kezdési lehetőség esetén a következő 6 darabot el lehet helyezni egyértelműen, de az utolsó darab nem helyezhető el.



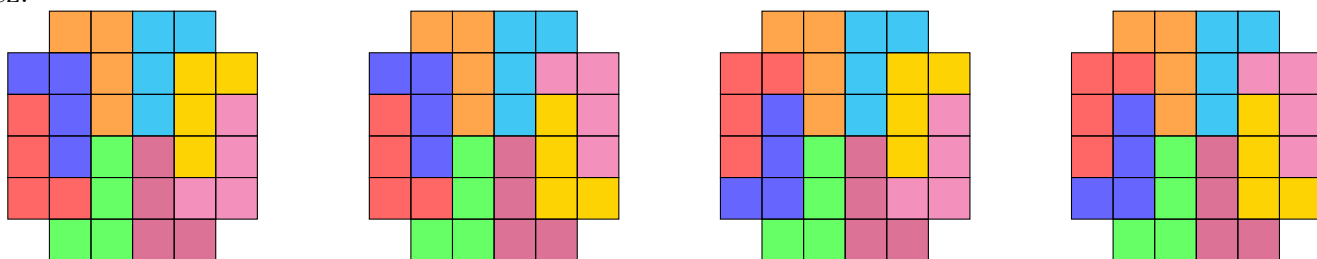
A negyedik kezdési lehetőség esetén ahhoz, hogy elkerüljük az előbbi lehetetlen esetet, a felső sort csak az ábrának megfelelően lehet lefedni.



Ezután az alsó sorban is csak az ábrának megfelelő lefedés folytatható (különben valamelyik korábban más vizsgált esettel ellentmondásba keverednénk).

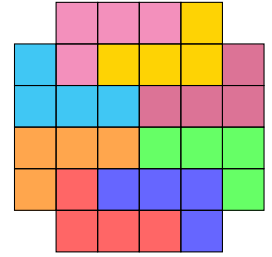
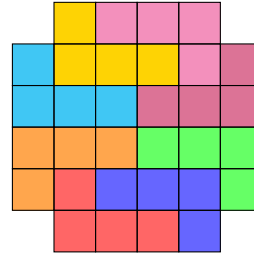
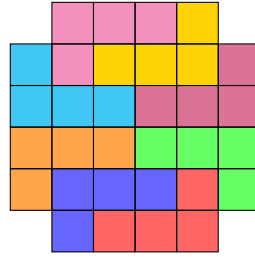
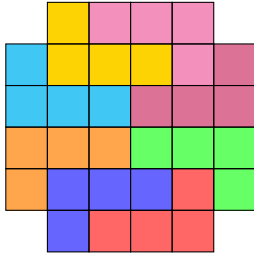


A megmaradt két 2×4 -es darab mindegyike kétféle módon fedhető le, ez összesen 4 lefedést eredményez.



Az ötödik és hatodik kezdési lehetőségből az előbbi négy lefedés elforgatott változatait kapjuk meg,

tehát összesen 10 lefedés lehetséges.



Pontozás. A három lényegesen különböző (tehát szimmetriával vagy forgatással nem egymásba vihető) lefedés lerajzolása (ez három 6-6 pontos részre bontható aszerint, hogy ezekből hány lefedést adott meg a megoldó). **(18 pont)**

Valamilyen logika szerinti magyarázat. **(3 pont)**

A további lefedések lerajzolása vagy megemléltése. **(6 pont)**



3. feladat (20 pont). Adott az $n = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2025}$ természetes szám.

- Igazold, hogy n egy páratlan szám!
- Határozd meg n utolsó számjegyét!
- Igazold, hogy n osztható 11-gyel!

*Czeplédi Csilla-Ilona, Arad
Kiss Sándor, Nagykároly*

Megoldás. Hivatalból

(2 pont)

- Az n szám 2025 darab páratlan szám összegéből áll, ezért n páratlan.

(2 pont)

- A 3 hatványainak utolsó számjegyei lehetnek:

$$u(3^1) = 3, \quad u(3^2) = 9, \quad u(3^3) = 7, \quad u(3^4) = 1, \quad \textbf{(2 pont)}$$

amelyek négyenként ismétlődnek. Az n szám 2025 tagból áll, így felbontható 506 darab 4-es csoportra és egy maradék tagra:

$$n = (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + (3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8) + \dots + (3^{2021} + 3^{2022} + 3^{2023} + 3^{2024}) + 3^{2025}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Kiemelve a közös tényezőt:

$$n = 3(1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^5(1 + 3 + 3^2 + 3^3) + \dots + 3^{2021}(1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^{2025}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

$$n = (1 + 3 + 3^2 + 3^3)(3 + 3^5 + 3^9 + \dots + 3^{2021}) + 3^{2025}.$$

Mivel $1 + 3 + 9 + 27 = 40$, ezért $n = 40(3 + 3^5 + 3^9 + \dots + 3^{2021}) + 3^{2025}$. **(2 pont)**

Így az utolsó számjegy:

$$u(n) = u(40(3 + 3^5 + 3^9 + \dots + 3^{2021})) + u(3^{2025}) = 0 + 3 = 3. \quad \textbf{(2 pont)}$$

c) Észrevesszük, hogy ha összeadjuk az első 5 tagot, $3 + 9 + 27 + 81 + 243 = 363$, ami 11-nek többszöröse. (2 pont)

Ezért az összeget ötösével csoportosítjuk:

$$n = (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5) + (3^6 + 3^7 + 3^8 + 3^9 + 3^{10}) + \dots + (3^{2021} + 3^{2022} + 3^{2023} + 3^{2024} + 3^{2025}). \quad (2 \text{ pont})$$

Minden egyes csoportból kiemeljük a közös tényezőt:

$$n = 3(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^6(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{2021}(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4).$$

Mivel $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 121$, ezért $n = 121(3 + 3^6 + \dots + 3^{2021})$.

Mivel $121 = 11^2$, ezért n osztható 11-gyel. (2 pont)



4. feladat (20 pont). Az a természetes számot „mágikus” számnak nevezzük, ha felírható két, egymástól és nullától is különböző négyzetszám összegeként.

a) Határozd meg a kétjegyű „mágikus” számok számát!

b) Mennyi lehet egy kétjegyű „mágikus” prímszám 4-gyel való osztási maradéka?

c) Igazold, hogy 26^n „mágikus” szám, bármely $n \geq 1$ természetes szám esetén!

Faluvégi Melánia, Zilah

Megoldás. Hivatalból

(2 pont)

a) A nullától különböző 100-nál kisebb négyzetszámok: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81. (2 pont)

Észrevesszük, hogy $1 + 4 = 5$ az „mágikus” szám, de nem kétjegyű, ezért nem vesszük figyelembe. (2 pont)

$1 + 9 = 10$	$4 + 9 = 13$	$9 + 16 = 25$
$1 + 16 = 17$	$4 + 16 = 20$	$9 + 25 = 34$
$1 + 25 = 26$	$4 + 25 = 29$	$9 + 36 = 45$
$1 + 36 = 37$	$4 + 36 = 40$	$9 + 49 = 58$
$1 + 49 = 50$	$4 + 49 = 53$	$9 + 64 = 73$
$1 + 64 = 65$	$4 + 64 = 68$	$9 + 81 = 90$
$1 + 81 = 82$	$4 + 81 = 85$	

$16 + 25 = 41$	$25 + 36 = 61$	$36 + 49 = 85$
$16 + 36 = 52$	$25 + 49 = 74$	
$16 + 49 = 65$	$25 + 64 = 89$	
$16 + 64 = 80$		
$16 + 81 = 97$		

A fenti felsorolásból 29 megoldást kaptunk, de észrevettük, hogy a 65 és 85 kétszer szerepel, ezért csak 27 „mágikus” szám marad. **(6 pont)**

b) Az előbb felsorolt számok közt a „mágikus” prímszámok a 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97. Ezeknek a 4-gyel való osztási maradéka 1. **(2 pont)**

c)

$$26^1 = 26 = 1 + 25 = 1^2 + 5^2$$

$$26^2 = 676 = 576 + 100 = 24^2 + 10^2 \quad \textbf{(2 pont)}$$

$$26^3 = 26 \cdot 26^2 = 25 \cdot 26^2 + 1 \cdot 26^2 = 5^2 \cdot 26^2 + 1^2 \cdot 26^2 = (5 \cdot 26)^2 + (1 \cdot 26)^2$$

$$26^4 = 676 \cdot 26^2 = 24^2 \cdot 26^2 + 10^2 \cdot 26^2 = (24 \cdot 26)^2 + (10 \cdot 26)^2 \quad \textbf{(2 pont)}$$

Hasonlóan járunk el minden páratlan, illetve páros hatványkitevő esetén. Ha n páros és legalább 4, akkor létezik k természetes szám, amelyre $n = 2k + 2$.

$$26^{2k+2} = 676 \cdot 26^{2k} = 24^2 \cdot 26^{2k} + 10^2 \cdot 26^{2k} = (24 \cdot 26^k)^2 + (10 \cdot 26^k)^2$$

Ha n páratlan és legalább 3, akkor létezik k természetes szám, amelyre $n = 2k + 1$.

$$26^{2k+1} = 26 \cdot 26^{2k} = 25 \cdot 26^{2k} + 1 \cdot 26^{2k} = 5^2 \cdot 26^{2k} + 1^2 \cdot 26^{2k} = (5 \cdot 26^k)^2 + (1 \cdot 26^k)^2$$

Mivel mindkét esetben a 26^n szám felírható két négyzetszám összegeként következik, hogy 26^n „mágikus” szám. **(2 pont)**

■

6. osztály

1. feladat (30 pont). Határozd meg azokat az $\overline{abac}$ alakú természetes számokat, amelyeket 77-tel osztva a hányados $\overline{ac}$, a maradék pedig a c számjegy négyszerese!

Papp Ilonka, Brassó

Megoldás. Hivatalból (3 pont)

Az adatok alapján felírható, hogy $\overline{abac} : 77 = \overline{ac}$, $m = 4c$, ahol a, b, c számjegyek, $a \neq 0$ és $4c < 77$.

A maradékos osztás tétele alapján:

$$\overline{abac} = 77 \cdot \overline{ac} + 4c, \quad (3 \text{ pont})$$

ahonnan:

$$1000a + 100b + 10a + c = 77 \cdot (10a + c) + 4c \quad (3 \text{ pont})$$

$$1010a + 100b + c = 770a + 77c + 4c$$

$$240a + 100b = 80c.$$

Az egyenlőség mindkét oldalát elosztva 20-szal kapjuk, hogy

$$12a + 5b = 4c. \quad (3 \text{ pont})$$

Mivel $4 \mid (12a)$ és $4 \mid (4c)$, ezért $4 \mid (5b)$, de $(4; 5) = 1$, így $4 \mid b$. Ezért a b számjegyre igaz, hogy $b \in \{0; 4; 8\}$. (3 pont)

I. eset: Ha $b = 0$, akkor $12a = 4c$, azaz $c = 3a$. (3 pont)

$$a = 1 \implies c = 3 \implies \overline{abac} = 1013,$$

$$a = 2 \implies c = 6 \implies \overline{abac} = 2026,$$

$$a = 3 \implies c = 9 \implies \overline{abac} = 3039,$$

$$a = 4 \implies c = 12 > 9. \quad (3 \text{ pont})$$

II. eset: Ha $b = 4$, akkor $12a + 20 = 4c$, azaz $c = 3a + 5$.

$$a = 1 \implies c = 8 \implies \overline{abac} = 1418,$$

$$a = 2 \implies c = 11 > 9. \quad (3 \text{ pont})$$

III. eset: Ha $b = 8$, akkor $12a + 40 = 4c$, azaz $c = 3a + 10 > 9$. De $c \leq 9$, vagyis ebben az esetben nincs a feltételnek megfelelő szám. (3 pont)

Az előbbi négy szám mindegyike teljesíti a feltételeket (mert az átalakítások visszafele is elvégezhetők), ezért a keresett négyjegyű természetes számok: 1013, 1418, 2026, 3039. (3 pont)

■

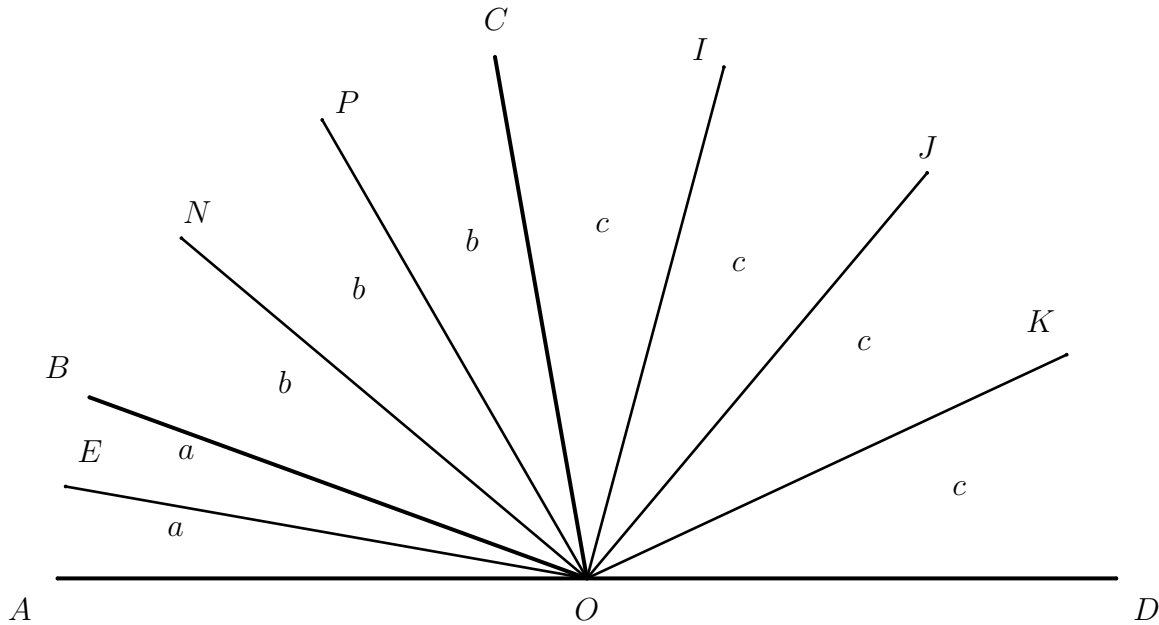
2. feladat (30 pont). Az AOB és BOC egymás melletti szögek, a BOC és COD is egymás melletti szögek és a három szög mértékének összege 180° . Vegyük fel az O pontból kiinduló OE, ON, OP, OI, OJ és OK félegyeneseiket az adott szögek belső tartományáiban úgy, hogy $\widehat{AOE} = \widehat{EOB}$, $\widehat{BON} = \widehat{NOP} = \widehat{POC}$ és $\widehat{COI} = \widehat{IOJ} = \widehat{JOK} = \widehat{KOD}$. Tudjuk, hogy $\widehat{AOP} = 60^\circ$ és $\widehat{BOK} = 135^\circ$.

- a) Határozd meg az AOB , BOC és COD szögek mértékét!
 b) Igazold, hogy a BOP és IOK szögek szögfelezői merőlegesek egymásra!

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból

(3 pont)



(3 pont)

- a) Legyen $\widehat{AOE} = \widehat{EOB} = a$, $\widehat{BON} = \widehat{NOP} = \widehat{POC} = b$ és $\widehat{COI} = \widehat{IOJ} = \widehat{JOK} = \widehat{KOD} = c$.
 Ekkor felírhatjuk, hogy

$$2a + 3b + 4c = 180^\circ. \quad (1)$$

(3 pont)

Viszont

$$\widehat{AOP} = 2a + 2b = 60^\circ,$$

$$\widehat{BOK} = 3b + 3c = 135^\circ.$$

(3 pont)

Így $2a + 2b = 60^\circ$ és $b + c = 45^\circ$, ahonnan

$$2a + 3b + c = 105^\circ. \quad (2)$$

(3 pont)

Az (1) és (2) alapján $3c = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$, azaz $c = 25^\circ$.

(3 pont)

Mivel $b + c = 45^\circ$, következik, hogy $b = 20^\circ$.

Ugyanakkor $2a + 2b = 60^\circ$, azaz $a + b = 30^\circ$, tehát $a = 10^\circ$.

(3 pont)

Tehát $\widehat{AOB} = 2a = 20^\circ$, $\widehat{BOC} = 3b = 60^\circ$ és $\widehat{COD} = 4c = 100^\circ$.

(3 pont)

b) A $\widehat{BOP}$ szögfelezője az ON félegyenes, az $\widehat{IOK}$ szögfelezője pedig az OJ félegyenes, tehát meg kell határozni az $\widehat{NOJ}$ szög mértékét.

(3 pont)

Ekkor $\widehat{NOJ} = \widehat{NOC} + \widehat{COJ} = 2b + 2c = 2 \cdot 20^\circ + 2 \cdot 25^\circ = 90^\circ$, azaz $ON \perp OJ$.

(3 pont)



3. feladat (20 pont). A Salamon Ernő Gimnáziumban az idei tanévben 540 diák tanul. Az iskolában három szakkör működik: a nemezelés, a fafaragás és a jégkorong. Minden diák jár legalább egy szakkörre. A tanulók 45%-a jégkorongozni jár, egyharmada nemezeléssel foglalkozik. A tanulók egytizede jégkorongozás és nemezelés szakkörre is jár, 30%-a jégkorongozik is és fafaragást is tanul, míg 15%-a nemezeléssel is és fafaragással is foglalkozik. Az iskola tanulóinak 5%-a mindhárom szakkörön részt vesz.

a) Hány tanuló vesz részt mind a három szakkörön?

b) Az iskola tanulóinak hány százaléka jár legtöbb egy szakkörre?

c) Hány tanuló nem jár sem jégkorongozni sem nemezelni?

Hodgyai Edit, Micske

Megoldás. Hivatalból

(2 pont)

a) A tanulók 5%-a jár mindhárom szakkörre, ezért $\frac{540 \cdot 5}{100} = 27$ tanuló jégkorongozik, nemezel és fát is farag.

(2 pont)

b) A tanulók egytizede jégkorongozni és nemezelni is jár, ez 54 gyereket jelent. Mivel 27 tanuló mindhárom szakkört látogatja, ezért a csak jégkorongozók és nemezelők száma $54 - 27 = 27$ tanuló.

(2 pont)

Ugyanígy számoljuk ki a csak jégkorongozni és fafaragásra járó tanulók számát: a tanulók 30%-a jégkorongozást és a fafaragást tanul, ami $\frac{540 \cdot 30}{100} = 162$ tanulót jelent. Csak erre a két szakkörre

$162 - 27 = 135$ tanuló jár. (2 pont)

A tanulók 15%-a jár nemezelni és fát faragni, ami $\frac{540 \cdot 15}{100} = 81$ tanulót jelent. Mivel 27 tanuló mind a három szakkört látogatja, ezért csak a nemezelés és a fafaragás szakkörre $81 - 27 = 54$ tanuló jár. A tanulók közül pontosan két szakkört $27 + 135 + 54 = 216$ tanuló látogat. (2 pont)

Tehát a tanulók közül legtöbb egy szakkörre $540 - 27 - 216 = 297$ tanuló jár. (2 pont)

$$540 \dots\dots 100\%$$

$$297 \dots\dots x\%$$

Tehát $x = \frac{297 \cdot 100}{540} = 55$, vagyis a 297 tanuló az iskola tanulóinak 55%-át jelenti. (2 pont)

c) Azoknak a tanulóknak a számát keressük, akik nem járnak jégkorongozási vagy nemezelési szakkörre. Ők azok, akik csak a fafaragó szakkört látogatják. (2 pont)

A tanulók 45%-a jégkorongozni jár, ez $\frac{540 \cdot 45}{100} = 243$ tanulószámot jelent. Így $243 - (135 + 27 + 27) = 54$ tanuló csak a jégkorong szakkört látogatja.

A tanulók egyharmada nemezelni jár, $\frac{540 \cdot 1}{3} = 180$ tanuló. Közülük $180 - (27 + 27 + 54) = 72$ csak a nemezelő szakkörre jár. (2 pont)

Mivel összesen 297 tanuló látogat egy szakkört és közülük 54 tanuló csak jégkorongozni és 72 tanuló csak nemezelni jár, következik, hogy $297 - (54 + 72) = 171$ tanuló jár csak fafaragó szakkörre. (2 pont)

Ellenőrzés: három szakkörre jár 27 tanuló, pontosan két szakkörre jár $27 + 135 + 54 = 216$ tanuló, csak egy szakkörre jár $54 + 72 + 171 = 297$ tanuló. Így $27 + 216 + 297 = 540$ tanuló jár a Salamon Ernő Gimnáziumba az idei tanévben.



4. feladat (20 pont). Az a és b természetes számok legkisebb közös többszörösének és a számok kétszeresének az összege egyenlő a számok legnagyobb közös osztójának az 50-szeresével. Határozd meg ezeket az a és b számokat, ha összegük legfeljebb 50.

Mátéfi István, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból (2 pont)

A feladat feltételeiből kapjuk, hogy $[a; b] + 2a + 2b = 50 \cdot (a; b)$. (2 pont)

Legyen $d = (a; b)$, ekkor felírhatjuk, hogy $a = d \cdot x$ és $b = d \cdot y$, ahol x, y relatív prímelek. A legkisebb közös többszörös értelmezéséből és tulajdonságaiból következik, hogy $[a; b] = d \cdot x \cdot y$. Így az egyenlet átírható

$$d \cdot x \cdot y + 2 \cdot d \cdot x + 2 \cdot d \cdot y = 50 \cdot d. \quad (4 \text{ pont})$$

Mivel $d \neq 0$, egyszerűsíthetünk vele és kapjuk, hogy $xy + 2x + 2y = 50$. Bal oldalra felírhatjuk, hogy $xy + 2x + 2y = (x + 2)(y + 2) - 4$. Tehát $(x + 2)(y + 2) = 54$. **(4 pont)**

Az 54-et felírva két osztójának szorzataként $54 = 1 \cdot 54 = 2 \cdot 27 = 3 \cdot 18 = 6 \cdot 9$.

Tudjuk, hogy $x, y \geq 1$, így $x + 2 \geq 3$ és $y + 2 \geq 3$, ahonnan az $(x + 2)$ és $(y + 2)$ lehetséges értékei

$$(x + 2, y + 2) \in \{(3, 18), (18, 3), (6, 9), (9, 6)\},$$

vagyis

$$(x, y) \in \{(1, 16), (16, 1), (4, 7), (7, 4)\}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

A számpárok tagjai relatív prímek, így ezek az (x, y) számpár összes lehetséges értéke.

Most mindegyik számpár esetén meg kell határozzuk a d szám lehetséges értékeit úgy, hogy $d \cdot (x + y) \leq 50$.

Az első két számpár esetén az összeg $x + y = 1 + 16 = 17$, így a $17d \leq 50$ egyenlőtlenségből $d \in \{1, 2\}$.

Vagyis

$$(a, b) \in \{(1, 16), (16, 1), (2, 32), (32, 2)\}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Az utolsó két számpár esetén az összeg $x + y = 4 + 7 = 11$, így a $11d \leq 50$ egyenlőtlenségből $d \in \{1, 2, 3, 4\}$. Vagyis

$$(a, b) \in \{(4, 7), (7, 4), (8, 14), (14, 8), (12, 21), (21, 12), (16, 28), (28, 16)\}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Tehát az összes lehetséges (a, b) számpár:

$$(1, 16), (16, 1), (2, 32), (32, 2), (4, 7), (7, 4), (8, 14), (14, 8), (12, 21), (21, 12), (16, 28), (28, 16)$$

(2 pont)



7. osztály

1. feladat (30 pont). Határozd meg az $A = \left\{ \overline{abc} \mid \sqrt{\overline{abc} + \sqrt{c}} \in \mathbb{N} \right\}$ halmazt, elemei felsorolásával!

Faluvégi Melánia, Zilah

Megoldás. Hivatalból

(3 pont)

$$\sqrt{\overline{abc} + \sqrt{c}} \in \mathbb{N}$$

egyenértékű azzal, hogy

$$\overline{abc} + \sqrt{c} = k^2, \quad \text{ahol } k \in \mathbb{N}. \quad \textbf{(3 pont)}$$

Mivel c számjegy és $\sqrt{c} \in \mathbb{N}$, következik, hogy $c = m^2$, amiből $c \in \{0, 1, 4, 9\}$. **(3 pont)**

Így $\sqrt{c} \in \{0, 1, 2, 3\}$, viszont $\sqrt{c} \neq 1$ és $\sqrt{c} \neq 3$ mert ezekben az esetekben k^2 utolsó számjegye 2 lenne és teljes négyzet utolsó számjegye nem lehet 2. **(3 pont)**

Marad tehát leellenőrizni a $c \in \{0, 4\}$ eseteket.

1. eset: $c = 0$

$$\overline{ab0} = k^2,$$

következik, hogy $\overline{ab0}$ osztható 10-zel. De mivel $\overline{ab0}$ négyzetszám, $\overline{ab0}$ osztható 100-zal, tehát $\overline{ab0} \in \{100, 400, 900\}$. **(3 pont)**

(3 pont)

2. eset: $c = 4$

Innen következik $\sqrt{c} = 2$, ebből pedig k^2 utolsó számjegye 6, tehát **(3 pont)**

$\overline{ab6} = k^2$ és k utolsó számjegye 4 vagy 6 lehet. **(3 pont)**

Így $\overline{ab6} \in \{196, 256, 576, 676\}$, és így $\overline{abc} \in \{194, 254, 574, 674\}$. **(3 pont)**

Az 1. és 2. esetekből tehát $A = \{100, 194, 254, 400, 574, 674, 900\}$. **(3 pont)**

■

2. feladat (30 pont). Marci leírta a $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{30}$ számokat különböző oszlopokba úgy, hogy bármelyik két oszlopot választja ki, legyen az oszlopoknak egy-egy eleme, amit össze tud adni. Marci a $\sqrt{a}$ és $\sqrt{b}$ számokat pontosan akkor tudja összeadni, ha a gyökök alól ki tud emelni természetes számokat úgy, hogy a gyökök alatt ugyanaz maradjon mindkét számban. Például a $\sqrt{2}$ és a $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ számokat Marci össze tudja adni, de a $\sqrt{2}$ és $\sqrt{6}$ számokat nem tudja összeadni.

a) Határozd meg hány összeadható számokból álló számpár képezhető, amelyben a tagok különbözőek?

b) Legfeljebb hány oszlopot tud Marci képezni a megengedett szabályok szerint? Válaszodat indokold!

Köncse Balázs, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból

(3 pont)

a) Megnézzük, legfeljebb hány számpár van, amely összeadható számokból áll a $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{30}$ számok között.

Összeadhatóak a $\sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt{16}, \sqrt{25}$ számok (teljes négyzetek), ezekből összesen 10 számpár képezhető. **(3 pont)**

Összeadhatóak a $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}$ számok, ezekből összesen 3 számpár képezhető.

Összeadhatóak a $\sqrt{3}, \sqrt{12}, \sqrt{27}$ számok, ezekből összesen 3 számpár képezhető. **(3 pont)**

Összeadhatóak a $(\sqrt{5}, \sqrt{20}), (\sqrt{6}, \sqrt{24}), (\sqrt{7}, \sqrt{28})$ számpárok tagjai, ami további $1 + 1 + 1 = 3$ számpár. Ez összesen: $10 + 3 + 3 + 3 = 19$ számpár. **(3 pont)**

b) Egy lehetséges táblázat:

1. oszlop	2. oszlop	3. oszlop	4. oszlop	5. oszlop	6. oszlop
$\sqrt{1}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{9}$	$\sqrt{16}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt{2}$
$\sqrt{8}$	$\sqrt{18}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{27}$	$\sqrt{28}$	$\sqrt{3}$
					$\sqrt{5}$
					$\sqrt{6}$
					$\sqrt{7}$

A fennmaradó számokat bárhova beírhatjuk. Így egy helyes kitöltést kapunk 6 oszlop esetén.

(12 pont)

Megjegyzés. Ha 5 oszlop teljesíti a feltételt, akkor 3 pont jár, ha pedig 5 oszlop teljesíti és a 6. oszlop részlegesen, akkor 6 pont jár.

Ha létezne egy 7 oszlopos kitölthető táblázat, akkor bármely két oszlophoz tartozna legalább egy olyan számpár, amelyet összeadható számok alkotnak. Az oszlopokat számozzuk meg balról jobbra 1-től 7-ig. Az első oszlophoz 6 másik oszlopot párosíthatunk, a másodikhoz további 5-öt, a harmadikhoz további 4-et és így tovább. **(3 pont)**

Összesen tehát

$$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$$

különböző összegre lenne szükség. Mivel azonban az adott számokból csak 19 különböző összeadható tagú számpár hozható létre, így egy 7 oszlopos táblázat nem tölthető ki az adott feltétel betartásával. Tehát legfeljebb 6 oszlopos táblázat alakítható ki. **(3 pont)**



3. feladat (20 pont). Adottak az x és y nullától különböző természetes számok, amelyek teljesítik a következő összefüggést:

$$\frac{2026}{2027} < \frac{x}{y} < \frac{2027}{2028}.$$

- a) Igazold, hogy az x és y nem egymás utáni számok!
- b) Mennyi az $x + y$ legkisebb értéke, ha $y = x + a$ és $a \in \mathbb{N}^*$?

Gáspár Edit, Zilah
Hasas Tünde, Nagyvárád

Megoldás. Hivatalból

(2 pont)

- a) Tegyük fel, hogy x és y egymást követő természetes számok, ekkor $y = x + 1$.
Az egyenlőtlenség így írható:

(2 pont)

$$\frac{2026}{2027} < \frac{x}{x+1} < \frac{2027}{2028}.$$

Külön vizsgálva a két egyenlőtlenséget:

$$\frac{2026}{2027} < \frac{x}{x+1} \quad \text{és} \quad \frac{x}{x+1} < \frac{2027}{2028}. \quad (2 \text{ pont})$$

Átalakítva:

$$x > 2026 \quad \text{és} \quad x < 2027.$$

Ez lehetetlen, mivel x természetes szám.

(4 pont)

Tehát a feltevés hamis, vagyis x és y nem egymás utáni természetes számok.

(2 pont)

- b) Legyen $y = x + a$, ahol $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$ (mivel az $a = 1$ esetet tárgyaltuk az a) alpontban). Ekkor az egyenlőtlenség így alakul:

$$\frac{2026}{2027} < \frac{x}{x+a} < \frac{2027}{2028}.$$

Az előző módszerrel eljárva kapjuk:

$$2026a < x < 2027a. \quad (4 \text{ pont})$$

Ha $a = 2$, akkor

$$4052 < x < 4054,$$

amiből $x = 4053$. Ekkor $y = 4055$.

(2 pont)

Így $x + y = 4053 + 4055 = 8108$. Ha a értékét növeljük, akkor $x + y$ csak nagyobb lesz, tehát a legkisebb összeg: 8108.

(2 pont)



A b) alpont második megoldása. Mivel $\frac{x}{y}$ valódi tört, ezért $x < y$. Az adott egyenlőtlenség felírható a következő alakban:

$$1 - \frac{1}{2027} < \frac{x}{y} < 1 - \frac{1}{2028}. \quad (2 \text{ pont})$$

A megfelelő átalakításokat elvégezve kapjuk, hogy

$$2027 < \frac{y}{y-x} < 2028. \quad (2 \text{ pont})$$

Vizsgáljuk a $y - x$ lehetséges értékeit. Ha $y - x = 1$, akkor $2027 < y < 2028$, ami lehetetlen. Ha $y - x = 2$, akkor $4054 < y < 4056$, amiből $y = 4055$, így $x = 4053$. Ekkor $x + y = 4053 + 4055 = 8108$. (2 pont)

Ha $y - x \geq 3$, akkor y és x értéke is tovább növekszik, ezért az $x + y$ összeg is nagyobb lesz. Tehát az $x + y$ legkisebb értéke: 8108. (2 pont)



4. feladat (20 pont). Az A , B és C középpontú körök páronként kívülről érintik egymást az M , N és P pontokban úgy, hogy $M \in AB$, $N \in BC$ és $P \in AC$. Legyen K az NM egyenesnek az A középpontú körrel való második metszéspontja. Az A és C középpontú körökben vedd fel rendre a PF és NE átmérőket!

- Bizonyítsd be, hogy $KA \parallel BC$!
- Igazold, hogy a K , P és E pontok kollineárisak!
- Mutasd ki, hogy a KE és FM egyenesek által alkotott szög kongruens az MPN szöggel!

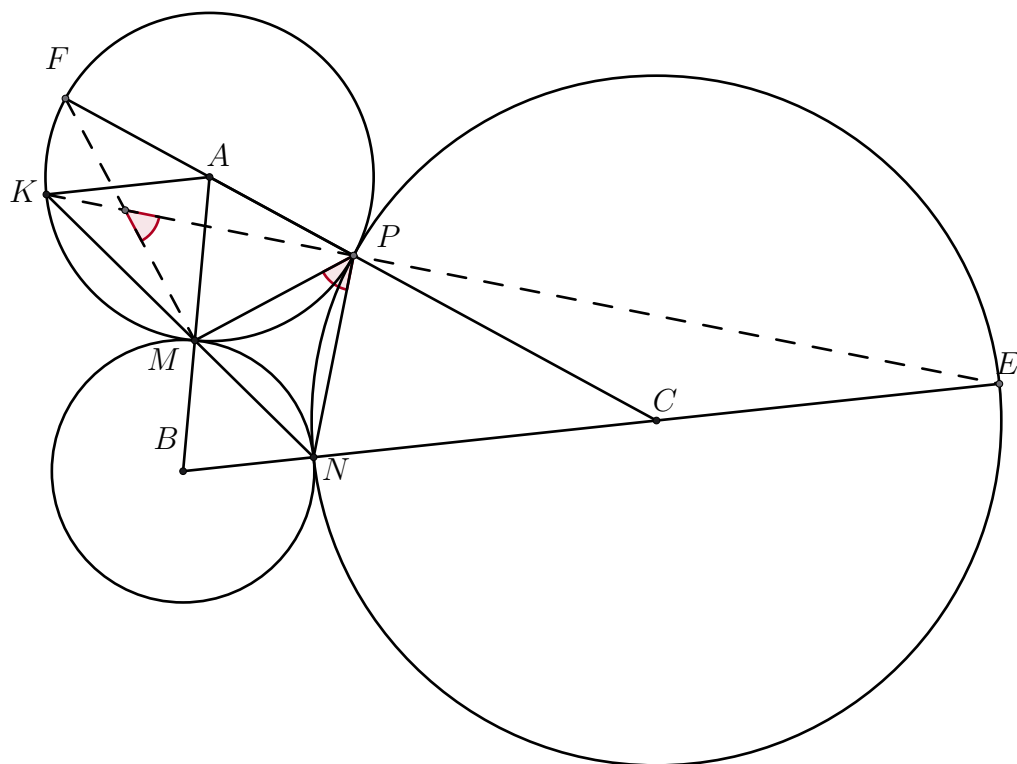
Simon József, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból (2 pont)

- A BMN és AMK egyenlő szárú háromszögek, mert $BM = BN$ és $AM = AK$ sugarak. (2 pont)
Mivel $\widehat{BMN} = \widehat{AMK} \Rightarrow \widehat{BNK} = \widehat{AKN}$, amelyek belső váltószögek, (2 pont)
ezért $KA \parallel BC$. (2 pont)

- Mivel $KA \parallel CE$, ezért $\widehat{KAC} = \widehat{ACE}$ (belső váltószögek) (2 pont)
és az AKP illetve CEP egyenlő szárú háromszögek, ezért $\widehat{APK} = \widehat{CPE}$. (2 pont)
Mivel A , P és C kollineáris pontok, ezért K , P és E pontok is kollineárisak. (2 pont)

- Mivel a PNE félkörbe írt háromszög, ezért $NP \perp KE$. (2 pont)
És FMP is egy félkörbe írt háromszög, ezért $PM \perp FM$. (2 pont)
Tehát $(\widehat{KE, FM}) = \widehat{MPN}$, mert merőleges szárú szögek. (2 pont)



■

8. osztály

1. feladat (30 pont). a) Határozd meg azokat az $(x; y)$ egész számpárokat, amelyekre:

$$(x^2 - 4x + 6)(2y^2 - 2y + 1) = 3.$$

b) Határozd meg azokat az x és y valós számokat, amelyekre

$$(x^2 - 4x + 6)(2y^2 - 2y + 1) = 1.$$

Mátéfi István, Marosvásárhely

Első megoldás. Hivatalból

(3 pont)

a) A megadott egyenletet beszorozva kettővel az $(x^2 - 4x + 6)(4y^2 - 4y + 2) = 6$ egyenletet kapjuk. Ekkor a tényezőkben kialakíthatunk teljes négyzeteket:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 6 &= x^2 - 4x + 4 + 2 = (x - 2)^2 + 2 \geq 2 \\ 4y^2 - 4y + 2 &= 4y^2 - 4y + 1 + 1 = (2y - 1)^2 + 1 \geq 1. \end{aligned} \quad \textbf{(3 pont)}$$

Mivel x, y egészek, a szorzat mindkét tényezője pozitív, így mindkét tényező természetes is. Tehát a következő eseteket kell megvizsgálni:

I. eset: $(x - 2)^2 + 2 = 2, (2y - 1)^2 + 1 = 3$

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 + 2 &= 2 \implies (x - 2)^2 = 0 \implies x = 2 \\ (2y - 1)^2 + 1 &= 3 \implies (2y - 1)^2 = 2 \implies y \notin \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad \textbf{(3 pont)}$$

II. eset: $(x - 2)^2 + 2 = 3, (2y - 1)^2 + 1 = 2$

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 + 2 &= 3 \implies (x - 2)^2 = 1 \implies x \in \{1; 3\} \\ (2y - 1)^2 + 1 &= 2 \implies (2y - 1)^2 = 1 \implies y \in \{0; 1\}. \end{aligned} \quad \textbf{(3 pont)}$$

III. eset: $(x - 2)^2 + 2 = 6, (2y - 1)^2 + 1 = 1$

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 + 2 &= 6 \implies (x - 2)^2 = 4 \implies x \in \{0; 4\} \\ (2y - 1)^2 + 1 &= 1 \implies (2y - 1)^2 = 0 \implies y \notin \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad \textbf{(3 pont)}$$

Tehát $(x; y) \in \{(1; 0), (1; 1), (3; 0), (3; 1)\}$.

(3 pont)

b) A megadott egyenletet beszorozva kettővel a következő egyenletet kapjuk:

$$(x^2 - 4x + 6)(4y^2 - 4y + 2) = 2$$

$$((x - 2)^2 + 2)((2y - 1)^2 + 1) = 2 \quad \textbf{(3 pont)}$$

$$(x - 2)^2(2y - 1)^2 + (x - 2)^2 + 2(2y - 1)^2 + 2 = 2$$

$$((x - 2)(2y - 1))^2 + (x - 2)^2 + 2(2y - 1)^2 = 0, \quad \textbf{(3 pont)}$$

de minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$((x-2)(2y-1))^2 \geq 0, (x-2)^2 \geq 0, 2(2y-1)^2 \geq 0,$$

tehát

$$((x-2)(2y-1))^2 = 0, (x-2)^2 = 0, 2(2y-1)^2 = 0, \quad (3 \text{ pont})$$

azaz $x-2=0$ és $2y-1=0$.

$$\text{Vagyis } x-2=0 \implies x=2, 2y-1=0 \implies y=\frac{1}{2}. \quad (3 \text{ pont})$$

■

Második megoldás. Hivatalból (3 pont)

a) Ha $x, y \in \mathbb{Z}$, akkor $x^2 - 4x + 6, 2y^2 - 2y + 1 \in \mathbb{Z}$. Észrevehető, hogy $x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2$, így $x^2 - 4x + 6 \geq 2$, tehát a 3-nak csak a $3 \cdot 1$ felbontását kell megvizsgálnunk. (6 pont)

Ez a következő esetet jelenti:

$$x^2 - 4x + 6 = 3 \implies x^2 - 4x + 3 = 0 \implies x_1 = 1; x_2 = 3 \quad (3 \text{ pont})$$

$$2y^2 - 2y + 1 = 1 \implies 2y^2 - 2y = 0 \implies y^2 - y = 0 \implies y_1 = 0; y_2 = 1. \quad (3 \text{ pont})$$

Ebből következik, hogy a megoldások: $(x; y) \in \{(1; 0), (1; 1), (3; 0), (3; 1)\}$. (3 pont)

b) Az a) alponthoz hasonlóan $x^2 - 4x + 6 \geq 2$.

Beszorozva kettővel az $2y^2 - 2y + 1$ kifejezést kapjuk, hogy $4y^2 - 4y + 2 = (2y-1)^2 + 1 \geq 1$.

Innen következik, hogy $(x^2 - 4x + 6)(4y^2 - 4y + 2) \geq 2 \cdot 1$ minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén. (6 pont)

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x^2 - 4x + 6 = 2$ és $4y^2 - 4y + 2 = 1$, vagyis $(x-2)^2 = 0$ és $(2y-1)^2 = 0$. Ez csak $x=2$ és $y=\frac{1}{2}$ esetén lehetséges, tehát a $(2; \frac{1}{2})$ számpár az egyetlen megoldás. (6 pont)

■

2. feladat (30 pont). Adott a $VABCD$ szabályos négyoldalú gúla. Az alapban az átlók metszéspontja O , a P pont pedig az O pont vetülete a VBC síkra.

a) Igazold, hogy a P magasságpont a VBC háromszögben!

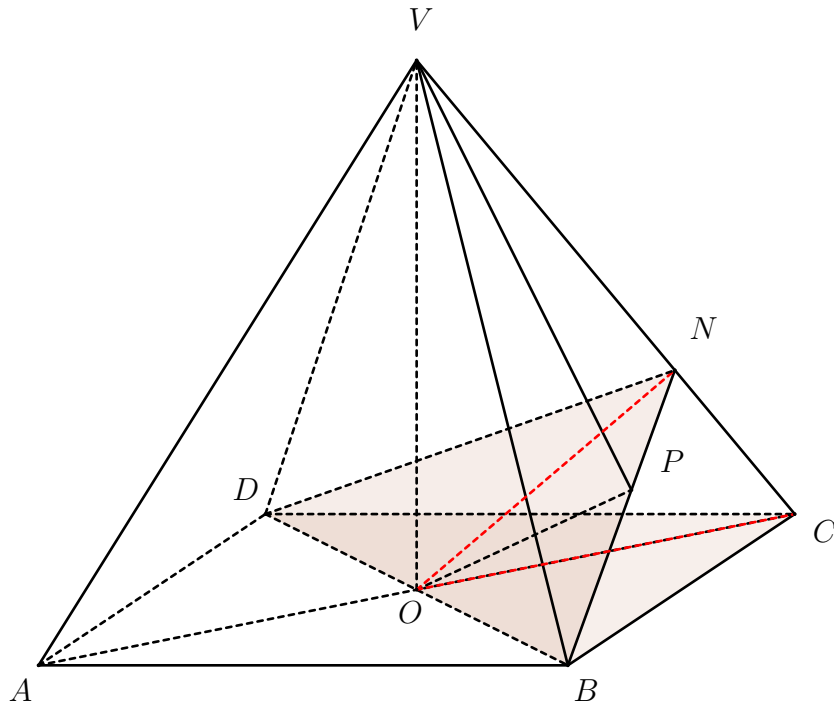
b) Legyen $AB = 2a$ és $VA = 3a$, illetve $BP \cap VC = \{N\}$. Határozd meg a BND sík és az alapsík által közrezárt szög koszinuszát!

Hamar Erzsébet, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból (3 pont)

a)

b)



A BND háromszögben szimmetria miatt $BN = DN$ vagyis a háromszög egyenlő szárú. Az O a BD szakasz felezőpontja, tehát $NO \perp BD$. Mivel O az alapsíkban a négyzet átlóinak metszéspontja, ezért $CO \perp BD$.

Mivel $(BND) \cap (DBC) = BD$, valamint $NO \perp BD, NO \subset (BND)$ és $CO \perp BD, CO \subset (DBC)$ így

$$\left(\widehat{(BND), (DBC)} \right) = (\widehat{NO, CO}) = \widehat{NOC}. \quad (3 \text{ pont})$$

Az (a) alpont alapján $BN \perp VC$, de a szimmetria miatt $DN \perp VC$, valamint $BN, DN \subset (BND)$ és $BN \cap DN = \{N\}$, így

$$VC \perp (BND) \text{ és } ON \subset (BND) \implies VC \perp ON \implies \widehat{ONC} = 90^\circ \implies \cos(\widehat{NOC}) = \frac{ON}{OC}. \quad (3 \text{ pont})$$

A VOC derékszögű háromszögben $\widehat{VOC} = 90^\circ$, ahonnan

$$\begin{aligned} VC^2 &= VO^2 + OC^2 \\ 9a^2 &= VO^2 + 2a^2 \\ VO^2 &= 7a^2 \\ VO &= a\sqrt{7}. \end{aligned} \quad (3 \text{ pont})$$

A VOC derékszögű háromszögben ON magasság, ahonnan

$$ON = \frac{VO \cdot OC}{VC} = \frac{a\sqrt{7} \cdot a\sqrt{2}}{3a} = \frac{a\sqrt{14}}{3}. \quad (3 \text{ pont})$$

$$\text{Tehát } \cos(\widehat{NOC}) = \frac{ON}{OC} = \frac{\frac{a\sqrt{14}}{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{3}. \quad (3 \text{ pont})$$

■

3. feladat (20 pont). Marcika leírta a $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{50}$ számokat különböző oszlopokba úgy, hogy bármelyik két oszlopot választja ki, legyen az oszlopoknak legalább egy-egy eleme, amit össze lehet adni. Marcika a $\sqrt{a}$ és $\sqrt{b}$ számokat pontosan akkor tudja összeadni, ha a gyökök alól ki tud emelni természetes számokat úgy, hogy a gyökök alatt ugyanaz maradjon mindkét számban. Például a $\sqrt{2}$ és a $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ számokat össze tudja adni, de a $\sqrt{2}$ és a $\sqrt{6}$ számokat nem.

a) Igazold, hogy a számok beírhatóak 9 oszlopba a fenti szabályok szerint!

b) Igazold, hogy a számok nem írhatóak be 10 oszlopba a fenti szabályok szerint!

Köncse Balázs, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból

(2 pont)

a) Összeadhatóak a $\sqrt{2}, \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \sqrt{18} = 3\sqrt{2}, \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ és a $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ számok.

Összeadhatóak a $\sqrt{3}, \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ és a $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ számok.

Összeadhatóak a $\sqrt{5}, \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ és a $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ számok.

Összeadhatóak a $(\sqrt{6}, \sqrt{24} = 2\sqrt{6}), (\sqrt{7}, \sqrt{28} = 2\sqrt{7}), (\sqrt{10}, \sqrt{40} = 2\sqrt{10}), (\sqrt{11}, \sqrt{44} = 2\sqrt{11})$ számpárok tagjai.

(2 pont)

Illetve összeadhatóak a természetes számok. A számok között van hét darab természetes szám a $\sqrt{1} = 1, \sqrt{4} = 2, \sqrt{9} = 3, \sqrt{16} = 4, \sqrt{25} = 5, \sqrt{36} = 6, \sqrt{49} = 7$. Ha ezeket mind külön oszlopokba írjuk be, akkor ezen hét oszlop közül bármelyik kettőből össze lehet adni két számot. Legyenek ezek például az 1-7 számú oszlopok.

(2 pont)

Ekkor a többi számot úgy kell beírunk a táblázatba, hogy a 8. és a 9. számú oszlopokhoz bármelyik oszlopot választva legyenek összeadható számok úgy, hogy az egyik az egyik oszlopban van, a másik szám pedig a másik oszlopban.

Megjegyzés. A továbbiakban azt mondjuk, hogy egy oszlop *le van fedve*, ha a többi oszlop közül bármelyikkel választva van összeadható pár. Továbbá összeadható pár alatt olyan párt értünk, amelynek a tagjai összeadhatóak.

A 8. és a 9. oszlopba is kell egy összeadható pár, legyen mondjuk a $\sqrt{2}$ -t tartalmazók. Ekkor a még szabad három $\sqrt{2}$ -t tartalmazó számot beírjuk például az 1., 2. és 3. oszlopba. Így az 1., 2. és 3. oszlop le van fedve.

(2 pont)

Ezután szintén a 8. és 9. oszlopba írjunk egy-egy $\sqrt{3}$ -t tartalmazó számot és a még szabad két $\sqrt{3}$ -t tartalmazó számot beírjuk például a 4. és 5. oszlopba. Így a 4. és 5. oszlop le van fedve.

(2 pont)

Ismét a 8. és 9. oszlopba írjunk egy-egy $\sqrt{5}$ -t tartalmazó számot és a még szabad $\sqrt{5}$ -t tartalmazó számot beírjuk például a 6. oszlopba. Így a 6. oszlop is le van fedve.

(2 pont)

Mivel már csak közös gyököt tartalmazó számpárok maradtak így ezeket párosával kell írunk úgy, hogy az egyiket a 8. és a 9. oszlop valamelyikébe, a másikat a 7. oszlopba. Például a $\sqrt{6}$ -ot tartalmazó számpárt beírjuk a 7. és a 8. oszlopokba, a $\sqrt{7}$ -et tartalmazó számpárt pedig beírjuk a 7. és a 9. oszlopokba. Így az összes oszlop le van fedve.

(2 pont)

A következő felírás megfelelő:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
$\sqrt{1}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{9}$	$\sqrt{16}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt{36}$	$\sqrt{49}$		
$\sqrt{2}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{18}$					$\sqrt{32}$	$\sqrt{50}$
			$\sqrt{3}$	$\sqrt{12}$			$\sqrt{27}$	$\sqrt{48}$
					$\sqrt{5}$		$\sqrt{20}$	$\sqrt{45}$
						$\sqrt{6}$	$\sqrt{24}$	
						$\sqrt{7}$		$\sqrt{28}$

A fennmaradó számokat bárhova beírhatjuk.

Megjegyzés. A táblázat helyes kitöltésére csak 8 pont kapható a 12 pontból, amennyiben a leírásból nem derül ki, hogy a kitöltés valóban teljesíti a feltételeket.

b) Ha létezne egy 10 oszlopos kitölthető táblázat, akkor bármely két oszlophoz tartozna legalább egy olyan számpár, amelyet összeadható számok alkotnak. Az oszlopokat számozzuk meg balról jobbra 1-től 10-ig. Az első oszlophoz 9 másik oszlopot párosíthatunk, a másodikhoz további 8-at, a harmadikhoz további 7-et és így tovább. **(2 pont)**

Összesen tehát

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$$

különböző számpárra lenne szükség.

(2 pont)

Másrészt megszámloljuk az összeadható párokat. A $\sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt{16}, \sqrt{25}, \sqrt{36}, \sqrt{49}$ számok összeadhatók, ezekből összesen $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ számpár képezhető.

Összeadhatóak a $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \sqrt{50}$ számok, ezekből összesen $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ számpár képezhető.

Összeadhatóak a $\sqrt{3}, \sqrt{12}, \sqrt{27}, \sqrt{48}$ számok, ezekből összesen $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ számpár képezhető.

Összeadhatóak a $\sqrt{5}, \sqrt{20}, \sqrt{45}$ számok, amelyekből $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ számpár képezhető.

Valamint összeadhatóak a $(\sqrt{6}, \sqrt{24}), (\sqrt{7}, \sqrt{28}), (\sqrt{10}, \sqrt{40}), (\sqrt{11}, \sqrt{44})$ számpárok, ami további 4 számpár.

Ez összesen:

$$21 + 10 + 6 + 3 + 4 = 44$$

számpár, ami kevesebb, mint a számunkra szükséges 45 számpár, ezért nem lehetséges a kitöltés.

(2 pont)

■

4. feladat (20 pont). a) Adott az $ABCD A' B' C' D'$ kocka, amelynek az éle a . Határozd meg az A' pont távolságát az $AB' D'$ síktól!

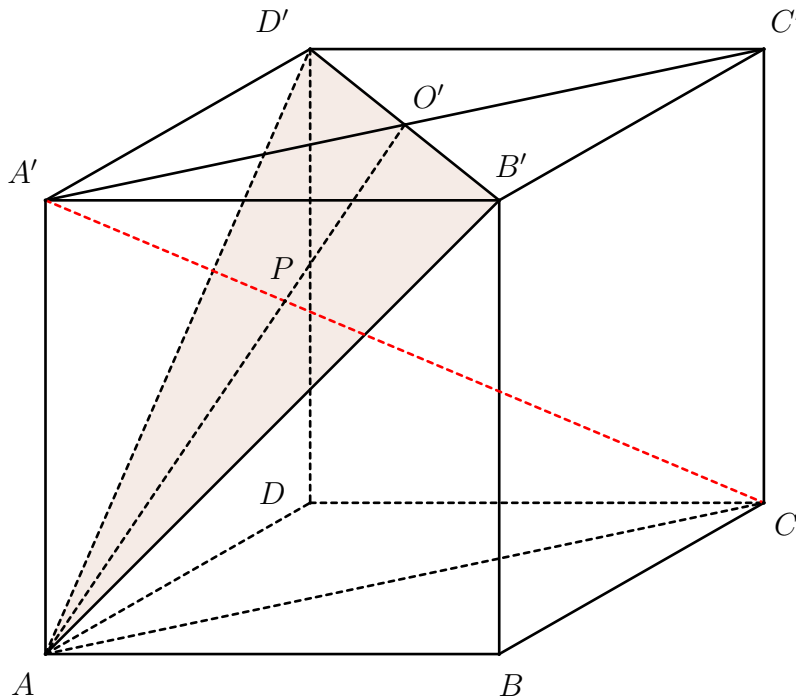
b) Adott az $ABCD A'B'C'D'$ téglatest. Igazold, hogy az $ABCD A'B'C'D'$ téglatest akkor és csak akkor kocka, ha $A'C \perp (AB'D')$.

Simon József, Csíkszereda

Első megoldás. Hivatalból

(2 pont)

a)



Legyen O' az $A'B'C'D'$ középpontja és P az A' vetülete az AO' -re. Így

$$A'P \perp AO'. \quad (3)$$

(2 pont)

Tudjuk, hogy $AA' \perp (A'B'C')$ és $B'D' \subset (A'B'C')$, ezért $AA' \perp B'D'$.

Másrészt $B'D' \perp AA'$ és $B'D' \perp A'O'$, valamint $A'O' \cap AA' = \{A'\}$, $A'O', AA' \subset (A'AO')$, tehát $B'D' \perp (A'AO')$.

Emellett $A'P \subset (A'AO')$, ezért

$$B'D' \perp A'P. \quad (4)$$

(2 pont)

Mivel $AO' \cap B'D' = \{O'\}$ és $AO', B'D' \subset (AB'D')$, az (3) és (4) alapján $A'P \perp (AB'D')$.

Ahonnan $d(A', (AB'D')) = A'P$.

(2 pont)

Ezen kívül $A'O' \parallel AC$, ahonnan $A'PO'_\Delta \sim CPA_\Delta$, így:

$$\begin{aligned}\frac{A'P}{CP} &= \frac{PO'}{PA} = \frac{A'O'}{CA} \\ \frac{A'P}{CP} &= \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\ \frac{A'P}{A'C - A'P} &= \frac{1}{2} \implies A'P = \frac{a\sqrt{3}}{3}\end{aligned}\quad (2 \text{ pont})$$

b) „ $\Rightarrow$ ”

Feltételezzük, hogy $ABCD A'B'C'D'$ kocka. $B'D' \perp A'C'$ és $B'D' \perp AA'$, ezért $B'D' \perp (AC'A')$. Mivel $A'C \subset (AC'A')$, ezért $B'D' \perp A'C$, azaz

$$A'C \perp B'D' \quad (5)$$

Az $AA'O'_\Delta \sim CAA'_\Delta$, mert $\frac{AA'}{AC} = \frac{A'O'}{AA'}$ és $\widehat{O'A'A} = \widehat{A'AC}$, ezért $\widehat{A'AO'} = \widehat{ACA'}$. (2 pont)

Mivel $A'O' \parallel AC$, létezik az $A'C \cap AO' = \{P\}$ pont.

Mivel $\widehat{PA'A} + \widehat{A'AP} = \widehat{CA'A} + \widehat{ACA'} = 90^\circ$, következik, hogy

$$A'C \perp AO' \quad (6)$$

Mivel $B'D' \cap AO' = \{O'\}$, így az (5) és (6) alapján következik, hogy $A'C \perp (AB'D')$. (2 pont)

„ $\Leftarrow$ ”

Feltételezzük, hogy $ABCD A'B'C'D'$ téglalest és $A'C \perp (AB'D')$.

Mivel $B'D' \subset (AB'D')$, ezért

$$A'C \perp B'D'. \quad (7)$$

Továbbá $AA' \perp (A'B'D')$ és $B'D' \subset (A'B'D')$, ezért

$$AA' \perp B'D'. \quad (8)$$

Mivel $A'C \cap AA' = \{A'\}$, így a (7) és (8) alapján $B'D' \perp (AC'A')$. Ekkor mivel $A'C' \subset (AC'A')$, ezért $B'D' \perp A'C'$. Az $A'B'C'D'$ téglalapban az átlók merőlegesek, tehát $A'B'C'D'$ négyzet. Emiatt:

$$A'B' = A'D' \quad (9)$$

(2 pont)

Mivel $CD \perp (ADD')$ és $AD' \subset (ADD')$, ezért

$$CD \perp AD'. \quad (10)$$

Mivel $A'C \perp (AB'D')$ és $AD' \subset (AB'D')$, ezért

$$AD' \perp A'C. \quad (11)$$

Mivel $CD \cap A'C = \{C\}$, így a (10) és a (11) alapján $AD' \perp (A'DC)$, de $A'D \subset (A'DC)$, ezért $AD' \perp A'D$. Így az $ADD'A'$ téglalap is négyzet, tehát

$$A'A = A'D'. \quad (12)$$

(2 pont)

A (9) és a (12) alapján az $ABCD A'B'C'D'$ kocka.

(2 pont)

■

a) alpont második megoldása.

Jelölje d az A' pont távolságát az $(AB'D')$ síktól. Ekkor az $A'AB'D'$ gúla térfogatát felírhatjuk mint

$$V = \frac{1}{3}d \cdot T_{AB'D'} = \frac{1}{3}(A'D') \cdot T_{A'B'A}. \quad (4 \text{ pont})$$

Az $AB'D'$ háromszög egyenlő oldalú, és oldalhossza $AB\sqrt{2}$. Ekkor

$$d \cdot \frac{(AB\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{AB^3}{2}. \quad (2 \text{ pont})$$

Tehát $d = AB\frac{\sqrt{3}}{3}$, vagyis $d = a\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2 pont)

■

b) alpont második megoldása.

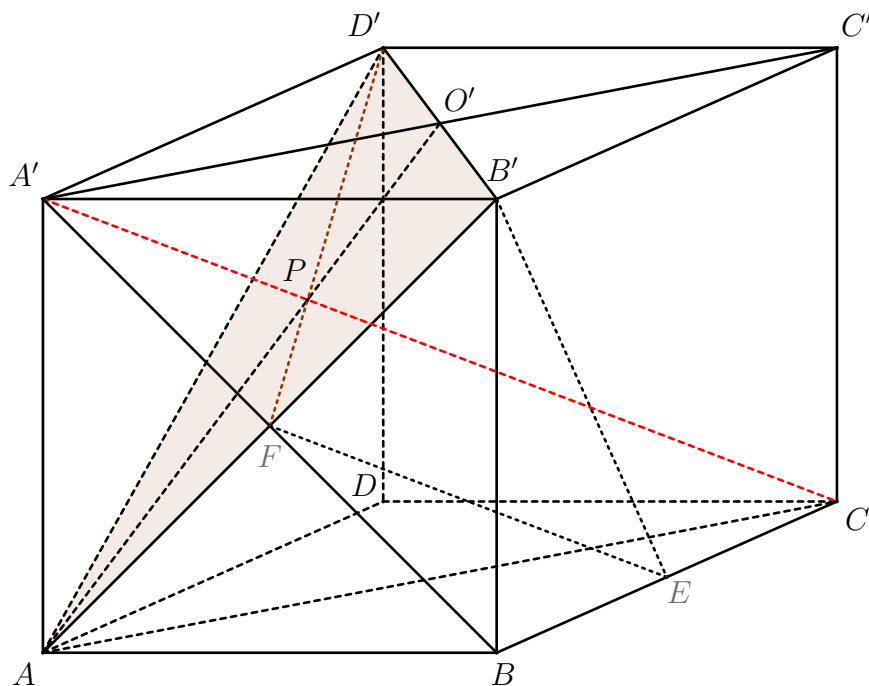
„ $\Rightarrow$ ”

Feltételezzük, hogy $ABCD A'B'C'D'$ kocka. Az $A'AB'D'$ szabályos háromoldalú gúla, mert az $AB'D'_\Delta$ egyenlő oldalú és $A'A = A'B' = A'D'$. Így az A' -ből húzott magasság P talppontja az $AB'D'_\Delta$ súlypontjába esik. (2 pont)

Ugyanígy a $CAB'D'$ is szabályos háromoldalú gúla (a C -ből húzott magasság szintén a P pontba esik).

Ekkor $A'P \perp (AB'D')$, és $CP \perp (AB'D')$, ezért A', P, C pontok kollineárisak, így $A'C \perp (AB'D')$.

(2 pont)



„ $\Leftarrow$ ”

Feltételezzük, hogy $ABCD A' B' C' D'$ téglatest és $A'C \perp (AB'D')$. Legyen E a BC él felezőpontja, F pedig az $ABB'A'$ lap középpontja (így F az AB' átló felezőpontja). Ekkor EF a $BA'C_{\Delta}$ középvonala, tehát $EF \parallel A'C$. Mivel $A'C \perp AB'$, ezért $EF \perp AB'$.

Mivel F az AB' szakasz felezőpontja, ezért $FA = FB'$. Így az EAB'_{Δ} egyenlő szárú, ezért $EA = EB'$. Következik, hogy $EBA_{\Delta} \equiv EBB'_{\Delta}$ (átfogó-befogó eset), tehát

$$AB = BB'. \quad (13)$$

(2 pont)

Mivel $A'C \perp (AB'D')$ és $EF \parallel A'C$, ezért $EF \perp (AB'D')$, tehát $EF \perp FD'$.

Ezért $\widehat{EFB} + \widehat{D'FA'} = 90^\circ$, így $\widehat{EFB} = \widehat{FD'A'}$ és $\widehat{EBF} = \widehat{FA'D'}$, tehát $EBF_{\Delta} \sim FA'D'_{\Delta}$.

A hasonlóságból $\frac{EB}{FA'} = \frac{BF}{A'D'} \Rightarrow EB \cdot A'D' = FA' \cdot BF$. (2 pont)

Továbbá E felezőpont, ezért $EB = \frac{BC}{2} = \frac{AD}{2} = \frac{A'D'}{2}$, és az (1) miatt az $ABB'A'$ lap négyzet, így

$BF = FA' = \frac{AA'\sqrt{2}}{2}$. Behelyettesítve:

$$\frac{A'D'}{2} \cdot A'D' = \frac{AA'\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{AA'\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A'D' = AA'. \quad (14)$$

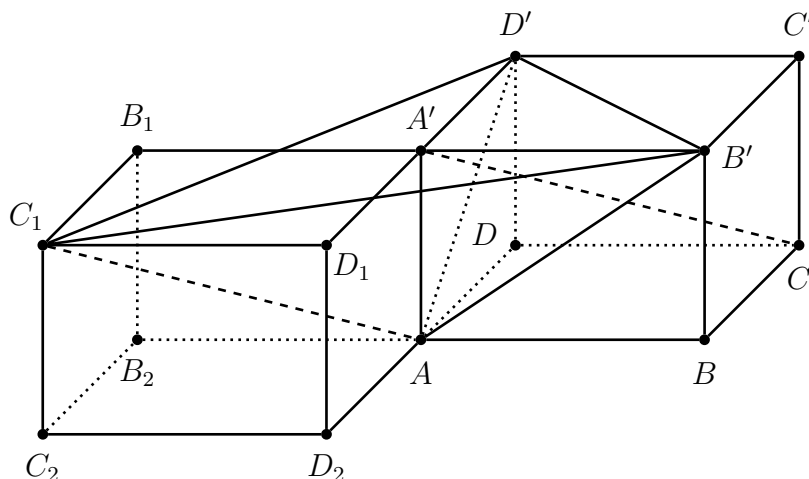
A (13) és a (14) alapján az $ABCD A' B' C' D'$ kocka.

(2 pont)

■

b) alpont harmadik megoldása.

Szerkesszük meg az $AB_2C_2D_2 A' B_1 C_1 D_1$ téglatestet úgy, hogy az eredeti téglatest párhuzamos eltolása legyen az AC oldalátló mentén (lásd ábra). (2 pont)



Ekkor az $A'C$ egyenes párhuzamos az C_1A egyenessel, tehát $A'C$ merőleges az $(AB'D')$ síkra pontosan akkor ha $C_1A \perp AD'$ és $C_1A \perp AB'$. (2 pont)

Ezek a merőlegességek pontosan akkor teljesülnek ha rendre $(C_1D')^2 - (AD')^2 - (AC_1)^2 = 0$ és $(C_1B')^2 - (AB')^2 - (AC_1)^2 = 0$. (2 pont)

Jelöljük az AB , AD , AA' oldalak hosszát rendre x , y , z -vel. Ekkor a téglatest átlójának hosszára

felírhatjuk, hogy $(C_1A)^2 = x^2 + y^2 + z^2$. A megfelelő oldallapok átlóinak hosszára kapjuk, hogy $(AB')^2 = x^2 + z^2$, $(AD')^2 = y^2 + z^2$. Továbbá az C_1B_1B' és C_1D_1D' derékszögű háromszögek alapján $(C_1D')^2 = x^2 + (2y)^2$ és $(C_1B')^2 = y^2 + (2x)^2$. Ekkor

$$\begin{aligned}(C_1D')^2 - (AD')^2 - (AC_1)^2 &= x^2 + (2y)^2 - (y^2 + z^2) - (x^2 + y^2 + z^2) = 2(y^2 - z^2), \\ (C_1B')^2 - (AB')^2 - (AC_1)^2 &= y^2 + (2x)^2 - (x^2 + z^2) - (x^2 + y^2 + z^2) = 2(x^2 - z^2).\end{aligned}\quad (2 \text{ pont})$$

Tehát $C_1A \perp AD'$ és $C_1A \perp AB'$ pontosan akkor ha, rendre $y = x$ és $x = z$; vagyis az $ABCD A'B'C'D'$ téglatest egy kocka. (2 pont)

■

b) alpont negyedik megoldása.

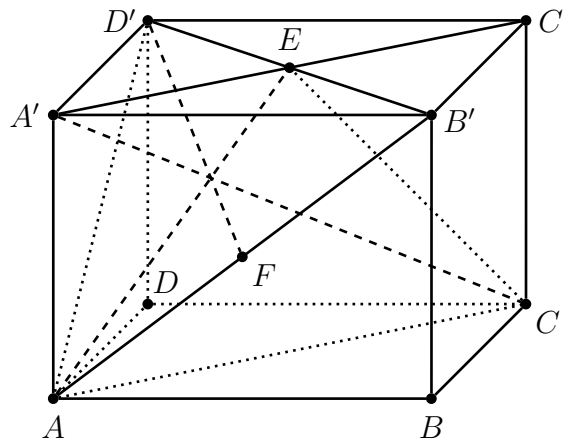
Jelölje E , F rendre az $A'B'C'D'$, illetve az $A'B'BA$ oldallapok átlóinak metszéspontját. Ekkor $(AB'D') \cap (A'C'CA) = AE$, és $A'C$ egyenes metszi AE egyenest.

Hasonlóan $(AB'D') \cap (A'D'CB) = D'F$ és $A'C$ metszi a $D'F$ egyenest.

(2 pont)

Ekkor $A'C$ merőleges az $(AB'D')$ síkra pontosan akkor ha $A'C \perp AE$ és $A'C \perp DF$.

(2 pont)



Az $A'ECA$ trapéz átlói: $A'C$, AE pontosan akkor merőlegesek egymásra ha a trapéz szemközti oldalainak négyzetösszege megegyezik, vagyis $A'E^2 + AC^2 = A'A^2 + EC^2$. (2 pont)

Számítások egyszerűsítése végett, jelölje x , y , z rendre az AB , AD , AA' oldalak hosszait. Ekkor felírhatjuk, hogy $A'E^2 = \frac{(A'C')^2}{4} = \frac{x^2 + y^2}{4}$, $AC^2 = x^2 + y^2$, $EC^2 = C'E^2 + C'C^2 = \frac{x^2 + y^2}{4} + z^2$.

Tehát az $A'ECA$ trapéz ortodiagonális pontosan akkor ha

$$\frac{x^2 + y^2}{4} + x^2 + y^2 = z^2 + \frac{x^2 + y^2}{4} + z^2,$$

vagyis $x^2 + y^2 = 2z^2$. Hasonlóan számolva, az $A'D'CF$ trapéz ortodiagonális ha

$$y^2 + \frac{x^2 + z^2}{4} + y^2 = \frac{x^2 + z^2}{4} + x^2 + z^2,$$

vagyis $x^2 + z^2 = 2y^2$.

(2 pont)

Tehát $A'C$ merőleges az $(AB'D')$ síkra pontosan akkor ha $x^2 + z^2 = 2y^2$ és $x^2 + y^2 = 2z^2$. A kapott egyenletrendszer ekvivalensen átalakíthatjuk. A másodikból kivonva az első írtatjuk, hogy $y^2 - z^2 = 2(z^2 - y^2)$, vagyis $z = y$. Az első egyenlet így átírva $x^2 + y^2 = 2y^2$, vagyis $x = y$.

Következésképpen $A'C$ merőleges az $(AB'D')$ pontosan akkor, ha $z = y$ és $x = y$, vagyis a téglatest egy kocka. **(2 pont)**



9. osztály

1. feladat (30 pont). Oldd meg a valós számok halmazán a

$$\sqrt{x + 2\sqrt{2x - 4}} + \sqrt{x + 6 - 4\sqrt{2x - 4}} = (x - 3)\sqrt{2}$$

egyenletet!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

Első megoldás. Hivatalból

(3 pont)

Az egyenletben megjelenő kifejezések létezési feltétele alapján:

$$2x - 4 \geq 0, \quad x + 6 - 4\sqrt{2x - 4} \geq 0 \quad \text{és} \quad x - 3 \geq 0,$$

ahonnan $x \in [3, \infty)$.

(3 pont)

Ha az $y = \sqrt{2x - 4}$ helyettesítést alkalmazzuk, akkor $x = \frac{y^2 + 4}{2}$ és bármely $x \geq 3$ esetén $y \geq \sqrt{2}$.

(3 pont)

Az egyenlet y -ban

$$\sqrt{\frac{y^2 + 4}{2}} + 2y + \sqrt{\frac{y^2 + 4}{2} + 6 - 4y} = \left(\frac{y^2 + 4}{2} - 3\right)\sqrt{2},$$

(3 pont)

ami átírható

$$\sqrt{\frac{(y + 2)^2}{2}} + \sqrt{\frac{(y - 4)^2}{2}} = \frac{y^2 - 2}{\sqrt{2}}$$

(3 pont)

alakba, vagyis

$$y + 2 + |y - 4| = y^2 - 2.$$

(3 pont)

Ha $y \in [\sqrt{2}, 4]$, akkor $x \in [3, 10]$ és az egyenlet

$$y + 2 - y + 4 = y^2 - 2$$

(3 pont)

alakba írható, ahonnan $y^2 = 8$ és így $x = 6 \in [3, 10]$ az adott egyenlet egyik megoldása.

(3 pont)

Ha $y \in (4, \infty)$, akkor

$$y + 2 + y - 4 = y^2 - 2,$$

vagyis $y^2 - 2y = 0$, ahonnan $y = 0 \notin (4, \infty)$ vagy $y = 2 \notin (4, \infty)$.

(3 pont)

Tehát az egyenlet egyetlen megoldása $x = 6$.

(3 pont)

■

Második megoldás. Az egyenletben megjelenő kifejezések létezési feltétele alapján:

$$2x - 4 \geq 0, \quad x + 6 - 4\sqrt{2x - 4} \geq 0 \quad \text{és} \quad x - 3 \geq 0,$$

ahonnan $x \in [3, \infty)$.

(3 pont)

Legyen

$$A = \sqrt{x + \sqrt{8x - 16}} \quad \text{és} \quad B = \sqrt{x + 6 - \sqrt{32x - 64}}.$$

Felhasználjuk az összetett gyök azonosságát: minden $a, b \geq 0$ és $a^2 - b \geq 0$ esetén

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

Az $A = \sqrt{x + \sqrt{8x - 16}}$ esetén $a = x$ és $b = 8x - 16$, így

$$c = \sqrt{a^2 - b} = \sqrt{x^2 - 8x + 16} = \sqrt{(x - 4)^2} = |x - 4|,$$

ezért a fenti képlet alapján

$$A = \sqrt{\frac{x + |x - 4|}{2}} + \sqrt{\frac{x - |x - 4|}{2}}. \quad (3 \text{ pont})$$

Hasonlóan, $B = \sqrt{x + 6 - \sqrt{32x - 64}}$ esetén $a = x + 6$ és $b = 32x - 64$, így

$$c = \sqrt{a^2 - b} = \sqrt{(x + 6)^2 - (32x - 64)} = \sqrt{(x - 10)^2} = |x - 10|,$$

ezért a fenti képlet alapján

$$B = \sqrt{\frac{x + 6 + |x - 10|}{2}} - \sqrt{\frac{x + 6 - |x - 10|}{2}}. \quad (3 \text{ pont})$$

Az egyenlet átírható, mint $A + B = (x - 3)\sqrt{2} \iff$

$$\sqrt{\frac{x + |x - 4|}{2}} + \sqrt{\frac{x - |x - 4|}{2}} + \sqrt{\frac{x + 6 + |x - 10|}{2}} - \sqrt{\frac{x + 6 - |x - 10|}{2}} = (x - 3)\sqrt{2}. \quad (6 \text{ pont})$$

I. eset. Ha $x \in [3, 4)$, akkor $|x - 4| = 4 - x$, $|x - 10| = 10 - x$, ezért

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{x + 4 - x}{2}} + \sqrt{\frac{x - (4 - x)}{2}} = \sqrt{2} + \sqrt{x - 2}, \\ B &= \sqrt{\frac{x + 6 + 10 - x}{2}} - \sqrt{\frac{x + 6 - (10 - x)}{2}} = 2\sqrt{2} - \sqrt{x - 2}. \end{aligned}$$

Így $A + B = 3\sqrt{2}$, tehát $3\sqrt{2} = (x - 3)\sqrt{2}$, ahonnan $x = 6$, de $6 \notin [3, 4)$, tehát ebben az esetben nincs megoldás. (3 pont)

II. eset. Ha $x \in [4, 10)$, akkor $|x - 4| = x - 4$, $|x - 10| = 10 - x$, ezért

$$A = \sqrt{\frac{x + x - 4}{2}} + \sqrt{\frac{x - (x - 4)}{2}} = \sqrt{x - 2} + \sqrt{2} \quad \text{és} \quad B = 2\sqrt{2} - \sqrt{x - 2}.$$

Ismét $A + B = 3\sqrt{2}$, tehát $3\sqrt{2} = (x - 3)\sqrt{2}$, ahonnan $x = 6$, és $6 \in [4, 10)$, tehát megoldás.

(3 pont)

III. eset. Ha $x \in [10, \infty)$, akkor $|x - 4| = x - 4$, $|x - 10| = x - 10$, ezért

$$A = \sqrt{x - 2} + \sqrt{2} \quad \text{és} \quad B = \sqrt{\frac{x + 6 - 10 + x}{2}} - \sqrt{\frac{x + 6 - x + 10}{2}} = \sqrt{x - 2} - 2\sqrt{2}.$$

Tehát

$$A + B = 2\sqrt{x-2} - \sqrt{2} \iff 2\sqrt{x-2} - \sqrt{2} = (x-3)\sqrt{2} \iff 2\sqrt{x-2} = (x-2)\sqrt{2}.$$

Mivel $\sqrt{x-2} > 0$, ezért $\sqrt{x-2} = \sqrt{2}$, ahonnan $x = 4$, de $4 \notin [10, \infty)$, tehát ebben az esetben nincs megoldás. **(3 pont)**

Összegezve, az egyenlet egyedüli megoldása $x = 6$. **(3 pont)** ■

2. feladat (30 pont). Igazold, hogy ha $x \geq 1$ és $\sqrt{x} \notin \mathbb{Z}$, akkor

$$\frac{1}{[\sqrt{x} + 2026] - 2026} + \frac{1}{\{\sqrt{x} + 2026\}} \geq \frac{8}{x+1}.$$

Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. Hivatalból **(3 pont)**

Mivel

$$\begin{aligned} [\sqrt{x} + 2026] - 2026 &= [\sqrt{x}] + 2026 - 2026 = [\sqrt{x}] \\ \{\sqrt{x} + 2026\} &= \{\sqrt{x}\} \neq 0, \end{aligned} \quad \textbf{(6 pont)}$$

ezért

$$\frac{1}{[\sqrt{x} + 2026] - 2026} + \frac{1}{\{\sqrt{x} + 2026\}} = \frac{1}{[\sqrt{x}]} + \frac{1}{\{\sqrt{x}\}} = \frac{[\sqrt{x}] + \{\sqrt{x}\}}{[\sqrt{x}] \cdot \{\sqrt{x}\}} = \frac{\sqrt{x}}{[\sqrt{x}] \cdot \{\sqrt{x}\}}. \quad \textbf{(6 pont)}$$

Továbbá a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alapján

$$[\sqrt{x}] \cdot \{\sqrt{x}\} \leq \left(\frac{[\sqrt{x}] + \{\sqrt{x}\}}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{x}}{2} \right)^2 = \frac{x}{4}. \quad \textbf{(6 pont)}$$

A fenti összefüggések alapján

$$\frac{\sqrt{x}}{[\sqrt{x}] \cdot \{\sqrt{x}\}} \geq \frac{\sqrt{x}}{\frac{x}{4}} = \frac{4}{\sqrt{x}}. \quad \textbf{(3 pont)}$$

Még igazolni kell, hogy

$$\frac{4}{\sqrt{x}} \geq \frac{8}{x+1},$$

ami egyenértékű azzal, hogy

$$(\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0,$$

mely állítás igaz. **(6 pont)** ■

3. feladat (20 pont). Igazold, hogy bármely $x, y, z > 0$ valós számok esetén teljesül a következő egyenlőtlenség

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) + (y^2 + 1)(z^2 + 1) + (z^2 + 1)(x^2 + 1) \geq 4 \cdot (3xyz - x - y - z).$$

Barta Zágoni Csongor, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból

(2 pont)

Legyen $A = (x^2 + 1)(y^2 + 1) + (y^2 + 1)(z^2 + 1) + (z^2 + 1)(x^2 + 1)$. A következő átalakítást végezzük:

$$\begin{aligned}(x^2 + 1)(y^2 + 1) &= x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 \\ &= (x^2y^2 - 2xy + 1) + (x^2 + y^2 + 2xy) \\ &= (xy - 1)^2 + (x + y)^2.\end{aligned}$$

(4 pont)

Felhasználva, hogy bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a^2 + b^2 \geq 2ab$ kapjuk, hogy

$$(xy - 1)^2 + (x + y)^2 \geq 2(xy - 1)(x + y) = 2(x^2y + y^2x - x - y). \quad (2 \text{ pont})$$

Hasonlóan

$$\begin{aligned}(y^2 + 1)(z^2 + 1) &\geq 2(y^2z + z^2y - y - z), \\ (z^2 + 1)(x^2 + 1) &\geq 2(z^2x + x^2z - z - x).\end{aligned} \quad (4 \text{ pont})$$

Összeadva a fenti egyenlőtlenségeket

$$A \geq 2(x^2y + y^2x + y^2z + z^2y + z^2x + x^2z - 2x - 2y - 2z). \quad (2 \text{ pont})$$

Még igazolni kell, hogy

$$2(x^2y + y^2x + y^2z + z^2y + z^2x + x^2z - 2x - 2y - 2z) \geq 4 \cdot (3xyz - x - y - z), \quad (2 \text{ pont})$$

ami egyenértékű azzal, hogy

$$x^2y + y^2x + y^2z + z^2y + z^2x + x^2z \geq 6xyz. \quad (2 \text{ pont})$$

Ezt elosztva $xyz > 0$ -val következik, hogy

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} \geq 6,$$

ami igaz, mert $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, bármely $a, b > 0$ esetén.

(2 pont)



Második megoldás. Ahhoz, hogy az eredeti egyenlőtlenséget igazoljuk, először belátjuk a következő összefüggést:

$$\begin{aligned}&(x^2 + 1)(y^2 + 1) + (y^2 + 1)(z^2 + 1) + (z^2 + 1)(x^2 + 1) + 4(x + y + z) \\ &\quad \geq 2[xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x)] \\ \iff &x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 3 + 4(x + y + z) \geq 2[xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x)].\end{aligned} \quad (4 \text{ pont})$$

Igazolható, hogy $x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 + 2(x + y) \geq 2xy(x + y)$, amely egyenértékű a következő egyenlőtlenségekkel

$$\begin{aligned}x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 + 2(x + y) - 2xy(x + y) &\geq 0, \\ (xy - 1)^2 + (x + y)^2 + 2(x + y)(1 - xy) &\geq 0, \\ (1 - xy + x + y)^2 &\geq 0.\end{aligned} \quad (4 \text{ pont})$$

A szimmetria miatt hasonlóan igazolható, hogy

$$y^2z^2 + y^2 + z^2 + 1 + 2(y + z) \geq 2yz(y + z)$$

és

$$z^2x^2 + z^2 + x^2 + 1 + 2(z + x) \geq 2zx(z + x). \quad (2 \text{ pont})$$

Ezek összeadásával kapjuk a megoldás elején kijelentett egyenlőtlenséget:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 3 + 4(x + y + z) \geq 2[xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x)]. \quad (A)$$

Ennek az egyenlőtlenségnek a jobb oldalára elég igazolni, hogy

$$2[xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x)] \geq 12xyz, \quad (B)$$

vagyis

$$xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) \geq 6xyz. \quad (4 \text{ pont})$$

Ez pedig egyenértékű azzal, hogy

$$\frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{y}{z} \geq 6,$$

ami igaz, mert $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, bármely $a, b > 0$ esetén.

Az (A) és (B) egyenlőtlenségekből következik a kért egyenlőtlenség. (4 pont)

Megjegyzés. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha

$$1 + x + y = xy, \quad 1 + x + z = xz, \quad 1 + y + z = yz, \quad x = y = z.$$

Ebből következik, hogy $x^2 - 2x - 1 = 0$, azaz $x = 1 + \sqrt{2}$ vagy $x = 1 - \sqrt{2}$. Mivel a feltétel szerint $x, y, z > 0$, ezért $x = y = z = 1 + \sqrt{2}$. ■

4. feladat (20 pont). Az $ABCD$ konvex négyszög oldalait meghosszabbítjuk úgy, hogy $B' \in (AB, BB' = AB, C' \in (BC, CC' = 2BC, D' \in (CD, DD' = 3CD$ és $A' \in (DA, AA' = 4DA$.

a) Igazold, hogy A az $A'B'C'D'$ négyszög súlypontja!

b) Bizonyítsd be, hogy $T_{A'B'C'D'} > 12T_{ABCD}$.

*Csapó Hajnalka, Csíkszereda
András Szilárd, Csíkdélne*

Első megoldás. Hivatalból

(2 pont)

a) Legyen O egy tetszőleges pont a síkban. Kiszámítjuk a feladatban szereplő pontoknak a helyzetvektorát. A feltételek alapján

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB} \implies \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \implies \overrightarrow{OB'} = 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \quad (2 \text{ pont})$$

$$\overrightarrow{CC'} = 2\overrightarrow{BC} \implies \overrightarrow{OC'} - \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OB} \implies \overrightarrow{OC'} = 3\overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OB} \quad (2 \text{ pont})$$

$$\overrightarrow{DD'} = 3\overrightarrow{CD} \implies \overrightarrow{OD'} - \overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OD} - 3\overrightarrow{OC} \implies \overrightarrow{OD'} = 4\overrightarrow{OD} - 3\overrightarrow{OC} \quad (2 \text{ pont})$$

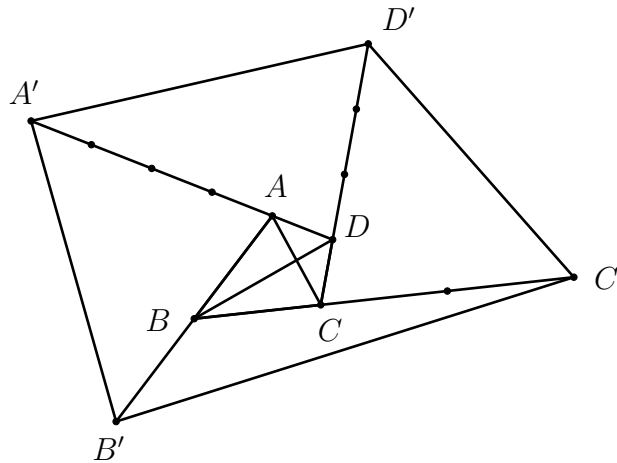
$$\overrightarrow{AA'} = 4\overrightarrow{DA} \implies \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA} = 4\overrightarrow{OA} - 4\overrightarrow{OD} \implies \overrightarrow{OA'} = 5\overrightarrow{OA} - 4\overrightarrow{OD}. \quad (2 \text{ pont})$$

Ezek alapján

$$\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = 4\overrightarrow{OA},$$

tehát A az $A'B'C'D'$ súlypontja.

(2 pont)



$$b) T_{DD'A'} = \frac{5AD \cdot 3DC}{2} \cdot \sin(\widehat{D}) = 15 \cdot \frac{AD \cdot DC}{2} \cdot \sin(\widehat{D}) = 15T_{ADC}.$$

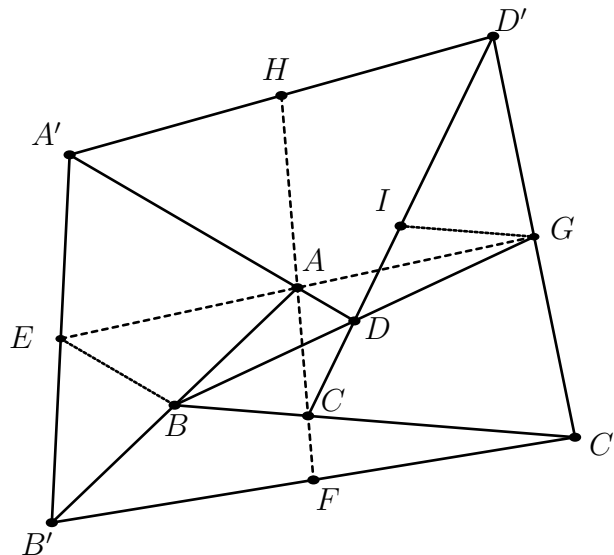
Hasonló módon kapjuk, hogy

$$T_{AA'B'} = 8T_{ABD}, \quad (2 \text{ pont})$$

$$T_{BB'C'} = 3T_{ABC}, \quad T_{CC'D'} = 8T_{BCD}. \quad (2 \text{ pont})$$

Tehát

$$\begin{aligned} T_{A'B'C'D'} &= T_{AA'B'} + T_{BB'C'} + T_{CC'D'} + T_{DD'A'} + T_{ABCD} \\ &= 8(T_{BCD} + T_{ABD}) + 3(T_{ABC} + T_{ADC}) + T_{ABCD} + 12T_{ADC} \\ &= 12T_{ABCD} + 12T_{ADC} \\ &> 12T_{ABCD}. \end{aligned} \quad (4 \text{ pont})$$



■

Második megoldás. a) Ha E, F, G, H rendre az $A'B', B'C', C'D', D'A'$ szakaszok felezőpontjai és I a C pontnak a D pont szerinti szimmetrikusa, akkor IG középvonal a $D'CC'$ háromszögben, tehát az IG szakasz párhuzamos és egyenlő a BC szakasszal. Ennek alapján $IGCB$ paralelogramma, amelynek a BG átlója áthalad az IC átló D felezőpontján. (4 pont)

Ugyanakkor az EB szakasz középvonal a $B'AA'$ háromszögben, tehát

$$EB = \frac{1}{2}A'A = \frac{1}{2}(4AD) = 2AD. \quad (2 \text{ pont})$$

Mivel D felezi a BG szakaszt és $AD \parallel EB$, ezért az AD szakasz az EBG háromszög középvonala, tehát A az EG felezőpontja. (2 pont)

A HG az $A'C'D'$, az EF az $A'C'B'$ háromszögek középvonalai, ezért $HGFE$ paralelogramma. Eből következik, hogy az A pont a HF szakasz felezőpontja is, amiből következik, hogy az A pont $A'B'C'D'$ négyszög súlypontja. (2 pont)

b) Ha bevezetjük a következő jelöléseket:

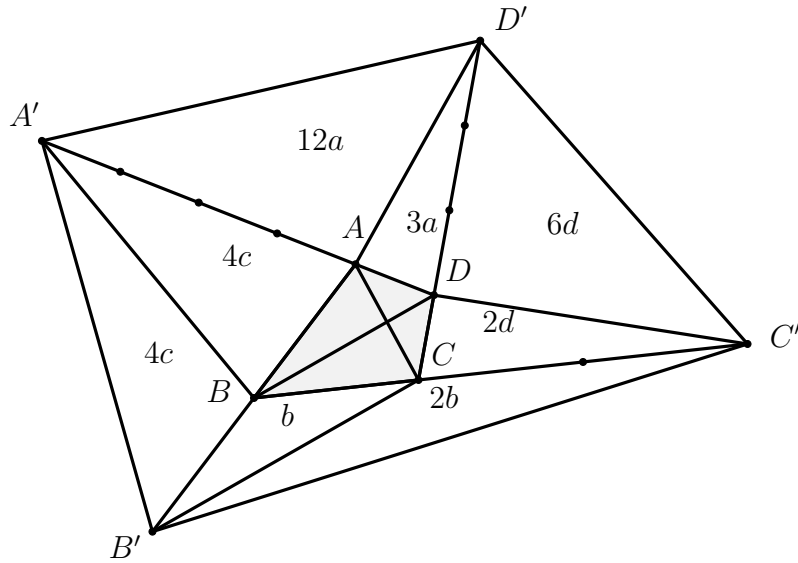
$$T_{ADC} = a, \quad T_{ABC} = b, \quad T_{ADB} = c, \quad T_{DBC} = d,$$

az alábbi összefüggésekhez jutunk:

$$\begin{aligned} T_{ABCD} &= T_{ACD} + T_{ABC} = a + b \quad \text{és} \\ T_{ABCD} &= T_{ABD} + T_{DCB} = c + d, \end{aligned}$$

Mivel $DD' = 3DC$, ezért

$$T_{ADD'} = 3T_{ADC} = 3a. \quad (2 \text{ pont})$$



Hasonlóan a további részterületek:

$$T_{AD'A'} = 4T_{AD'D} = 4 \cdot 3a = 12a,$$

$$T_{ABA'} = 4T_{ABD} = 4c,$$

$$T_{A'BB'} = T_{A'BA} = 4c,$$

$$T_{BCB'} = T_{BCA} = b,$$

$$T_{B'CC'} = 2T_{B'CB} = 2b,$$

$$T_{CDC'} = 2T_{CDB} = 2d,$$

$$T_{C'DD'} = 3T_{C'DC} = 3 \cdot 2d = 6d.$$

(4 pont)

Összegezve

$$\begin{aligned} T_{A'B'C'D'} &= T_{ADD'} + T_{AD'A'} + T_{ABA'} + T_{A'BB'} + T_{BCB'} + T_{B'CC'} + T_{CDC'} + T_{C'DD'} + T_{ADC} + T_{ABC} \\ &= 3a + 12a + 4c + 4c + b + 2b + 2d + 6d + a + b \\ &= 16a + 4b + 8c + 8d \\ &= 4(a + b) + 8(c + d) + 12a \\ &= 4T_{ABCD} + 8T_{ABCD} + 12a \\ &= 12T_{ABCD} + 12a \\ &= 12T_{ABCD} + 12T_{ADC} \\ &> 12T_{ABCD}. \end{aligned}$$

(2 pont)

■

10. osztály

1. feladat (30 pont). Határozd meg az x valós számokat, amelyekre teljesül az alábbi egyenlőség:

$$2026^{x-\frac{\pi}{4}} + 2026^{\frac{\pi}{4}-x} = \sqrt{2} \cdot (\sin x + \cos x).$$

*Szilágyi Judit, Kolozsvár
Forgács István, Szatmárnémeti*

Megoldás. Hivatalból

(3 pont)

A bal oldalon a következő átalakításokat végezzük:

$$2026^{x-\frac{\pi}{4}} + 2026^{\frac{\pi}{4}-x} = 2026^{x-\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2026^{x-\frac{\pi}{4}}} \geq 2, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

mert $a = 2026^{x-\frac{\pi}{4}} > 0$ és $a + \frac{1}{a} \geq 2$, minden $a > 0$ esetén.

(6 pont)

Tehát a $2026^{x-\frac{\pi}{4}} + 2026^{\frac{\pi}{4}-x}$ kifejezés minimális értéke 2, amit az $a = 1$ vagyis $x = \frac{\pi}{4}$ -re vesz fel.

(3 pont)

A jobb oldalon a következő átalakításokat végezzük:

$$\sqrt{2} \cdot (\sin x + \cos x) = 2 \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right). \quad \textbf{(6 pont)}$$

Mivel a szinusz maximális értéke 1, így

$$\sqrt{2} \cdot (\sin x + \cos x) \leq 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad \textbf{(3 pont)}$$

A fentiekből következik, hogy az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha mindkét oldal pontosan 2. A baloldal csak $x = \frac{\pi}{4}$ -re veszi fel a 2 értéket.

(3 pont)

Ha $x = \frac{\pi}{4}$, akkor

$$2 \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 2. \quad \textbf{(3 pont)}$$

Tehát az egyenlet egyetlen megoldása $x = \frac{\pi}{4}$.

(3 pont)



2. feladat (30 pont). Tekintsük az $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(z) = \varepsilon^{2026} z + \varepsilon^{2027} \bar{z}$$

függvényt, ahol ε harmadrendű egységgyök és $\varepsilon \neq 1$.

a) Igazold, hogy bármely $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$f(z) = 2 \cdot \operatorname{Re}(\varepsilon z) \quad \text{és} \quad f(z) + f(\bar{z}) = -2 \cdot \operatorname{Re}(z),$$

ahol $\operatorname{Re}(z)$ a z komplex szám valós részét jelöli!

b) Igazold, hogy az f függvény szürjektív, de nem injektív!

Szilágyi Judit, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból

(3 pont)

a) Mivel $\varepsilon^3 = 1$, így $\varepsilon^{2025} = \varepsilon^{3 \cdot 675} = 1$, ahonnan

$$\varepsilon^{2026} = \varepsilon \quad \text{és} \quad \varepsilon^{2027} = \varepsilon^2. \quad (3 \text{ pont})$$

Továbbá $\varepsilon \neq 1$ harmadrendű egységgyök, ezért $\varepsilon^3 = 1$, ahonnan $\varepsilon^2 = \frac{1}{\varepsilon}$, illetve modulust véve $|\varepsilon^3| = |\varepsilon|^3 = 1$, ahonnan $|\varepsilon| = 1$. Ezekből következik, hogy

$$\frac{1}{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}.$$

Az $\varepsilon^3 = 1$ alapján $(\varepsilon - 1)(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) = 0$, ahonnan az $\varepsilon \neq 1$ alapján

$$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0. \quad (3 \text{ pont})$$

Ezekből következik, hogy

$$f(z) = \varepsilon z + \varepsilon^2 \bar{z} = \varepsilon z + \frac{1}{\varepsilon} \bar{z} = \varepsilon z + \bar{\varepsilon} \bar{z} = \varepsilon z + \overline{\varepsilon z} = 2 \operatorname{Re}(\varepsilon z). \quad (3 \text{ pont})$$

Az z helyett $\bar{z}$ -t helyettesítve

$$f(\bar{z}) = \varepsilon \bar{z} + \bar{\varepsilon} z. \quad (3 \text{ pont})$$

Összeadva a fenti két összefüggést, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(z) + f(\bar{z}) &= \varepsilon z + \bar{\varepsilon} \bar{z} + \varepsilon \bar{z} + \bar{\varepsilon} z \\ &= z(\varepsilon + \bar{\varepsilon}) + \bar{z}(\varepsilon + \bar{\varepsilon}) \\ &= (z + \bar{z})(\varepsilon + \bar{\varepsilon}) \\ &= 2 \operatorname{Re} z (\varepsilon + \varepsilon^2) \\ &= 2 \operatorname{Re} z \cdot (-1) \\ &= -2 \operatorname{Re} z. \end{aligned} \quad (3 \text{ pont})$$

b) Vizsgáljuk a függvény injektivitását.

A függvény nem injektív, ha létezik $z_1 \neq z_2 \in \mathbb{C}$ úgy, hogy $f(z_1) = f(z_2)$ azaz $\operatorname{Re}(\varepsilon z_1) = \operatorname{Re}(\varepsilon z_2)$ Legyen $\varepsilon z_1 = a + bi$ és $\varepsilon z_2 = a + ci$, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $b \neq c$.Ekkor $\operatorname{Re}(\varepsilon z_1) = \operatorname{Re}(\varepsilon z_2)$ és $z_1 = \bar{\varepsilon}a + \bar{\varepsilon}bi$ és $z_2 = \bar{\varepsilon}a + \bar{\varepsilon}ci$. Mivel $b \neq c$ esetén a $z_1 \neq z_2$, de $f(z_1) = f(z_2)$, tehát a függvény nem injektív. (6 pont)

Vizsgáljuk a függvény szürjektivitását.

Vizsgáljuk meg, hogy minden $y \in \mathbb{R}$ esetén létezik-e $z \in \mathbb{C}$ úgy, hogy $f(z) = y$. Ekkor

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re}(\varepsilon z) = y &\iff \varepsilon \cdot z = \frac{y}{2} + ai, \quad a \in \mathbb{R} \\ &\iff z = \frac{y}{2} \cdot \bar{\varepsilon} + a \cdot \bar{\varepsilon} \cdot i. \end{aligned} \quad (3 \text{ pont})$$

Az egyenértékű átalakítások miatt minden valós y esetén a fenti $z \in \mathbb{C}$ teljesíti az $y = f(z)$ összefüggést, tehát a függvény szürjektív. (3 pont)

■

3. feladat (20 pont). Igazold, hogy

$$\sqrt[3]{1 - \log_{abc} a} + \sqrt[3]{1 - \log_{abc} b} + \sqrt[3]{1 - \log_{abc} c} \geq \sqrt[3]{2 - 2 \log_{abc} ab} + \sqrt[3]{2 - 2 \log_{abc} bc} + \sqrt[3]{2 - 2 \log_{abc} ca},$$

bármely $a, b, c \in (1, +\infty)$ esetén!

Kiss Csongor, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból

(2 pont)

A logaritmus tulajdonságait felhasználva a következő egyenértékű átalakításokat végezzük:

$$\sqrt[3]{1 - \log_{abc} a} = \sqrt[3]{\log_{abc} abc - \log_{abc} a} = \sqrt[3]{\log_{abc} \frac{abc}{a}} = \sqrt[3]{\log_{abc} bc}.$$

Hasonló átalakításokat végzünk a bal oldali kifejezés többi tagjára is:

$$\sqrt[3]{1 - \log_{abc} b} = \sqrt[3]{\log_{abc} ac}, \quad \sqrt[3]{1 - \log_{abc} c} = \sqrt[3]{\log_{abc} ab}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

A jobb oldalon pedig a következő átalakításokat végezzük.

$$\sqrt[3]{2 - 2 \log_{abc} ab} = \sqrt[3]{2 \cdot (1 - \log_{abc} ab)} = \sqrt[3]{2 \cdot (\log_{abc} c)}.$$

Hasonlóan járunk el a jobb oldali összeg többi tagjával is:

$$\sqrt[3]{2 - 2 \log_{abc} bc} = \sqrt[3]{2 \cdot (\log_{abc} a)}, \quad \sqrt[3]{2 - 2 \log_{abc} ca} = \sqrt[3]{2 \cdot (\log_{abc} b)}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Az átalakítások elvégzése után az egyenlőtlenség a következő alakba írható:

$$\sqrt[3]{\log_{abc} ab} + \sqrt[3]{\log_{abc} bc} + \sqrt[3]{\log_{abc} ca} \geq \sqrt[3]{\log_{abc} a^2} + \sqrt[3]{\log_{abc} b^2} + \sqrt[3]{\log_{abc} c^2}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Beszorozva az egyenlőtlenség mindkét oldalát $\sqrt[3]{(\lg abc)} > 0$ -val, azt kapjuk, hogy

$$\sqrt[3]{\lg a + \lg b} + \sqrt[3]{\lg b + \lg c} + \sqrt[3]{\lg c + \lg a} \geq \sqrt[3]{2 \lg a} + \sqrt[3]{2 \lg b} + \sqrt[3]{2 \lg c}. \quad \textbf{(4 pont)}$$

Használva az $x = \lg a$, $y = \lg b$, $z = \lg c$ ($x, y, z > 0$) jelöléseket írhatjuk, hogy:

$$\sqrt[3]{x+y} + \sqrt[3]{y+z} + \sqrt[3]{z+x} \geq \sqrt[3]{2} (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}). \quad \textbf{(2 pont)}$$

Elosztva az egyenlőtlenséget $\sqrt[3]{2}$ -vel, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{\frac{x+y}{2}} + \sqrt[3]{\frac{y+z}{2}} + \sqrt[3]{\frac{z+x}{2}} \geq \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} \\ \iff & \sqrt[3]{\frac{x+y}{2}} + \sqrt[3]{\frac{y+z}{2}} + \sqrt[3]{\frac{z+x}{2}} \geq \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \frac{\sqrt[3]{y}}{2} \right) + \left(\frac{\sqrt[3]{y}}{2} + \frac{\sqrt[3]{z}}{2} \right) + \left(\frac{\sqrt[3]{z}}{2} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2} \right). \end{aligned} \quad \textbf{(2 pont)}$$

Tehát elegendő bizonyítani, hogy

$$\sqrt[3]{\frac{u+v}{2}} \geq \frac{\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}}{2}, \quad \forall u, v > 0. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Az egyenlőtlenség bizonyítható, felhasználva, hogy az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ függvény konkáv a $(0, +\infty)$ intervallumon, ezért a Jensen-egyenlőtlenség alapján:

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) \geq \frac{f(u) + f(v)}{2} \iff \sqrt[3]{\frac{u+v}{2}} \geq \frac{\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}}{2}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Megjegyzés. Az egyenlőtlenség bizonyítható elvégezve a következő egyenértékű átalakításokat:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\frac{u+v}{2}} &\geq \frac{\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}}{2}, \\ \frac{u+v}{2} &\geq \frac{u+v + 3\sqrt[3]{uv}(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v})}{8}, \\ 3(u+v) &\geq 3\sqrt[3]{uv}(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}).\end{aligned}$$

Elosztva az egyenlőtlenséget $3(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}) > 0$ -val, azt kapjuk, hogy:

$$\sqrt[3]{u^2} - \sqrt[3]{uv} + \sqrt[3]{v^2} \geq \sqrt[3]{uv} \iff (\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v})^2 \geq 0,$$

mely állítás igaz bármely $u, v > 0$ esetén.

■

4. feladat (20 pont). a) Legyen O a komplex számsík kezdőpontja (origója), B és C a sík két olyan pontja, amelyre az OBC háromszög pozitív körbejárású. Igazold, hogy az OBC háromszög H magasságpontjának affixuma

$$h = i \cdot (b - c) \cdot \operatorname{ctg}(\alpha),$$

ahol b és c a B , illetve a C pont affixuma, és α a BOC szög mértéke!

b) Az $ABCD$ konvex négyszög átlói nem merőlegesek egymásra és az O pontban metszik egymást. Legyen S_1 az OAB és S_2 az OCD háromszög súlypontja, illetve H_1 az OBC , H_2 pedig az OAD háromszög magasságpontja. Igazold, hogy

$$S_1S_2 \perp H_1H_2.$$

Dávid Géza, Székelyudvarhely

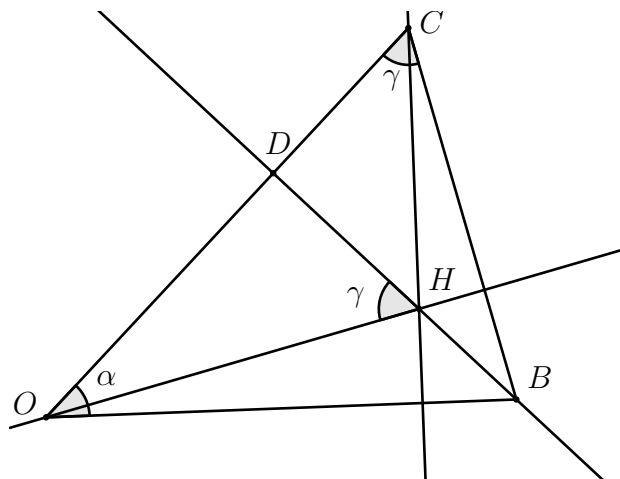
Megoldás. Hivatalból

(2 pont)

a) I. Ha $\alpha = 90^\circ$, akkor H egybeesik az O ponttal, és ezért

$$h = 0 = i \cdot (b - c) \cdot \operatorname{ctg} 90^\circ.$$

II. Ha $\alpha < 90^\circ$, akkor tekintsük a következő ábrát:



Legyen BD szakasz a háromszög magassága, ahol $D \in OC$. Legyen $\widehat{BOC} = \alpha$ és $\widehat{OCB} = \widehat{OHD} = \gamma$. Felírjuk a szinusztételt az OBC háromszögben:

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{OB}{\sin \gamma}. \quad (2 \text{ pont})$$

Az ODH háromszögben

$$OD = OH \cdot \sin \gamma.$$

A BDO háromszögben

$$OD = OB \cos \alpha. \quad (2 \text{ pont})$$

Innen kapjuk, hogy

$$OH = \frac{OD}{\sin \gamma} = \frac{OB \cdot \cos \alpha}{\sin \gamma} = \frac{BC}{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha = BC \cdot \operatorname{ctg} \alpha.$$

Tehát

$$OH = BC \cdot \operatorname{ctg} \alpha. \quad (2 \text{ pont})$$

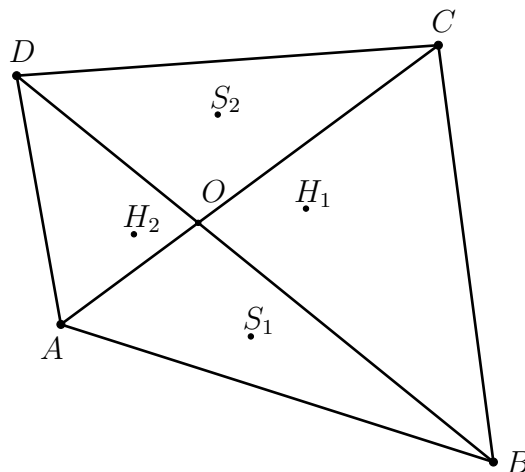
Mivel $OH \perp BC$ a BC vektort -90° -kal kell elforgatni a B pont körül, ahhoz, hogy annak képe a $\overrightarrow{BC'}$ és az $\overrightarrow{OH}$ azonos irányításúak legyenek, ezért

$$h = -i \cdot (c - b) \cdot \operatorname{ctg} \alpha = i \cdot (b - c) \cdot \operatorname{ctg} \alpha. \quad (2 \text{ pont})$$

III. Abban az esetben, ha $\alpha > 90^\circ$, akkor

$$h = i \cdot (c - b) \cdot |\operatorname{ctg} \alpha| = i \cdot (c - b) \cdot (-\operatorname{ctg} \alpha) = i \cdot (b - c) \operatorname{ctg} \alpha.$$

Tehát h mindhárom esetben a $h = i \cdot (b - c) \operatorname{ctg} \alpha$ képlettel adható meg. (2 pont)



b)

Legyen az átlók metszéspontja az O , a koordinátarendszer kezdőpontja. Jelöljük a négyszög csúcsainak affixumait a megfelelő kisbetűkkel, azaz a, b, c, d -vel, a súlypontokét s_1, s_2 -vel, a magasságpontokét pedig h_1, h_2 -vel.

A súlypontok affixumai:

$$s_1 = \frac{a + b}{3}, \quad s_2 = \frac{d + c}{3}. \quad (2 \text{ pont})$$

A magasságpontok affixumai az a) alpontban bizonyított összefüggés alapján:

$$h_1 = i(\operatorname{ctg} \alpha)(b - c), \quad h_2 = i(\operatorname{ctg} \alpha)(d - a)$$

ahol α az BOC szög mértéke.

(2 pont)

Ekkor

$$\frac{h_2 - h_1}{s_2 - s_1} = \frac{i \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot (d - a) - i \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot (b - c)}{\frac{d+c}{3} - \frac{a+b}{3}} = \frac{3 \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot i}{1} \cdot \frac{d - a - b + c}{d + c - a - b} = 3 \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot i.$$

(2 pont)

Tehát $\frac{h_2 - h_1}{s_2 - s_1} = 3 \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot i$, ami tiszta imaginárius szám, és ez azt jelenti, hogy:

$$H_1 H_2 \perp S_1 S_2. \quad (2 \text{ pont})$$

Megjegyzés. A fenti összefüggésből azt kapjuk, hogy

$$\frac{|h_2 - h_1|}{|s_2 - s_1|} = 3 \cdot |\operatorname{ctg} \alpha|, \quad \text{azaz, hogy} \quad H_1 H_2 = 3 \cdot |\operatorname{ctg} \alpha| \cdot S_1 S_2.$$

■

11. osztály

1. feladat (30 pont). Az $(x_n)_{n \geq 1}$ pozitív tagú számsorozat esetén $x_1 = \frac{2}{3}$ és

$$(n+1)^2 \cdot x_{n+1} = n^2 \cdot x_n + \frac{1}{3}, \quad \forall n \geq 1.$$

- a) Határozd meg a sorozat általános tagjának képletét!
- b) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$ határértéket!

Tóth Viktória, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból

(3 pont)

- a) Az általános tag meghatározásához számítsuk ki a sorozat első néhány tagját:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{3} = \frac{2}{3 \cdot 1^2} \\ x_2 &= \frac{1}{4} = \frac{3}{3 \cdot 2^2} \\ x_3 &= \frac{4}{27} = \frac{4}{3 \cdot 3^2} \\ x_4 &= \frac{5}{48} = \frac{5}{3 \cdot 4^2}. \end{aligned} \quad \textbf{(3 pont)}$$

Ezek alapján a sejtésünk a következő:

$$x_n = \frac{n+1}{3n^2}, \quad \forall n \geq 1. \quad \textbf{(3 pont)}$$

Ezt matematikai indukcióval igazoljuk. Ha $n = 1$, akkor

$$x_1 = \frac{2}{3} = \frac{1+1}{3 \cdot 1^2},$$

tehát igaz. Tegyük fel, hogy $k \geq 1$ esetén teljesül az

$$x_k = \frac{k+1}{3k^2}$$

összefüggés és igazoljuk az indukciós állítást $(k+1)$ -re. A rekurzió alapján

$$(k+1)^2 x_{k+1} = k^2 x_k + \frac{1}{3}, \quad \textbf{(3 pont)}$$

ahonnan

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{1}{(k+1)^2} \left(k^2 \cdot \frac{k+1}{3k^2} + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{(k+1)^2} \left(\frac{k+1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{k+2}{3(k+1)^2}. \end{aligned}$$

Tehát az állítás állítás igaz $(k+1)$ -re, ezért

$$x_n = \frac{n+1}{3n^2}, \quad \forall n \geq 1. \quad \textbf{(3 pont)}$$

b) A keresett határértéket az alábbiak szerint alakítjuk:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_n}{\frac{1}{n^n}}}. \quad (3 \text{ pont})$$

A D’Alambert-kritérium alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_n}{\frac{1}{n^n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_n x_{n+1}}{\frac{1}{(n+1)^{n+1}}} \cdot \frac{\frac{1}{n^n}}{x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \quad (3 \text{ pont})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} \cdot (n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \quad (3 \text{ pont})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3(n+1)^2} \cdot (n+1) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (3 \text{ pont})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3(n+1)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot e = \frac{e}{3}.$$

Tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \frac{e}{3}. \quad (3 \text{ pont})$$

Az a) alpont második megoldása. a) Legyen $y_n = n^2 x_n$, bármely $n \geq 1$ esetén. A rekurziós képlet alapján

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{3}, \quad n \geq 1,$$

vagyis az $(y_n)_{n \geq 1}$ sorozat egy számtani haladvány, ahol $y_1 = \frac{2}{3}$ és $r = \frac{1}{3}$. Így az általános tag képlete

$$y_n = y_1 + (n-1) \cdot r = \frac{2}{3} + (n-1) \cdot \frac{1}{3} = \frac{n+1}{3}, \quad \forall n \geq 1.$$

Ezt felhasználva, az $(x_n)_{n \geq 1}$ sorozat általános tagjának képlete

$$x_n = \frac{y_n}{n^2} = \frac{n+1}{3n^2}, \quad \forall n \geq 1. \quad (12 \text{ pont})$$

■

■

2. feladat (30 pont). Az $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix főátlón levő elemeinek összegét $\text{Tr}A$ -val jelöljük.

a) Igazold, hogy a $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $P(x) = \det(A - xI_2)$ függvényre $P(x) = x^2 - \text{Tr}A \cdot x + \det A$, $\forall x \in \mathbb{C}$.

b) Bizonyítsd be, hogy $\det(A^2 + A + I_2) \geq \frac{3}{4} + 3 \cdot \text{Tr}A \cdot \det A$.

dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Hivatalból

(3 pont)

a) Legyen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tetszőleges mátrix. Ekkor

$$P(x) = \det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} = (a-x)(d-x) - bc \quad (3 \text{ pont})$$

$$= x^2 - (a+d) \cdot x + ad - bc \quad (3 \text{ pont})$$

$$= x^2 - \text{Tr}A \cdot x + \det A. \quad (3 \text{ pont})$$

b) Legyen $P(x) = \det(A - xI_2) = x^2 - ax + b$, ahol $a = \text{Tr}A$ és $b = \det A$. (3 pont)

Mivel $A^2 + A + I_2 = (A - \varepsilon I_2)(A - \varepsilon^2 I_2)$, ahol $\varepsilon^3 = 1$, $\varepsilon \neq 1$,
ezért (3 pont)

$$\det(A^2 + A + I_2) = \det((A - \varepsilon I_2)(A - \varepsilon^2 I_2)) = \det(A - \varepsilon I_2) \cdot \det(A - \varepsilon^2 I_2) = P(\varepsilon) \cdot P(\varepsilon^2). \quad (3 \text{ pont})$$

Vagyis

$$\det(A^2 + A + I_2) = (\varepsilon^2 - a\varepsilon + b)(\varepsilon - \varepsilon^2 a + b) = a^2 + ab + b^2 + a - b + 1 \quad (3 \text{ pont})$$

$$= (a-b)^2 + (a-b) + 1 + 3ab = \left(a - b + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} + 3ab \quad (3 \text{ pont})$$

$$\geq \frac{3}{4} + 3ab = \frac{3}{4} + 3 \cdot (\text{Tr}A) \cdot (\det A). \quad (3 \text{ pont})$$

■

3. feladat (20 pont). Az $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ mátrixok teljesítik az $A + B = A \cdot B$ összefüggést.

a) Igazold, hogy $A \cdot B = B \cdot A$.

b) Bizonyítsd be, hogy ha $\det(A + B) > 0$ és $\det[(AB)^2 - 5AB + 5I_n] > 0$, akkor $\det(A^5 + B^5) > 0$.

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Megoldás. Hivatalból (2 pont)

a) Ha $A + B = AB$, akkor $AB - A - B + I_n = I_n$, vagyis $(A - I_n)(B - I_n) = I_n$. (2 pont)

Ez alapján $(A - I_n)$ és $(B - I_n)$ egymás inverzei, (2 pont)

tehát $(B - I_n)(A - I_n) = I_n$. Innen következik, hogy $BA = A + B = AB$. (2 pont)

b) Az a) alpont alapján $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$. (2 pont)

Vezessük be a $C = AB$ jelölést. Ekkor $A^2 + B^2 = (A + B)^2 - 2AB = C^2 - 2C$. (2 pont)

Továbbá

$$A^4 + B^4 = (A^2 + B^2)^2 - 2(AB)^2 = (C^2 - 2C)^2 - 2C^2 = C^4 - 4C^3 + 2C^2. \quad (2 \text{ pont})$$

Ugyanakkor

$$A^5 + B^5 = (A + B)(A^4 - A^3B + A^2B^2 - AB^3 + B^4) \quad (2 \text{ pont})$$

$$= C(C^4 - 4C^3 + 2C^2 - C^3 + 2C^2 + C^2)$$

$$= C^3(C^2 - 5C + 5I_n). \quad (2 \text{ pont})$$

Mivel $\det(A + B) = \det C > 0$ és $\det((AB)^2 - 5AB + 5I_n) > 0$, következik, hogy

$$\det(A^5 + B^5) = (\det C)^3 \cdot \det(C^2 - 5C + 5I_n) > 0. \quad (2 \text{ pont})$$



Megjegyzés. Mivel $\det(A+B) = \det(AB) = \det(A)\det(B) > 0$ így a B mátrix invertálható. Ekkor felírhatjuk, hogy

$$\det(A - xB) = (\det B)^n \det((AB^{-1} - xI_n)) = (\det B)^n P_{AB^{-1}}(x) =: q(x),$$

ahol $q(x)$ egy valós együtthatós n -ed fokú polinom. Legyen $\varepsilon \neq 1$ egy ötödrendű egységgyök, vagyis $x^5 + 1 = (x+1)(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)(x-\varepsilon^3)(x-\varepsilon^4)$. Ekkor

$$\begin{aligned} \det(A^5 + B^5) &= \det(A+B)\det(A-\varepsilon B)\det(A-\varepsilon^2 B)\det(A-\varepsilon^3 B)\det(A-\varepsilon^4 B) \\ &= \det(A+B)q(\varepsilon)q(\varepsilon^2)q(\varepsilon^3)q(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

Az $\varepsilon, \varepsilon^2$ komplex számok konjugáltjai rendre $\varepsilon^4, \varepsilon^3$. Tudva, hogy $q(x)$ valós együtthatós, mondhatjuk, hogy $q(\varepsilon), q(\varepsilon^2)$ komplex számok konjugáltjai rendre $q(\varepsilon^4), q(\varepsilon^3)$. Ekkor

$$\det(A^5 + B^5) = \det(A+B)|q(\varepsilon)q(\varepsilon^2)|^2 > 0.$$

4. feladat (20 pont). Az $(x_n)_{n \geq 1}$ valós számsorozat esetén $x_1 \in (0, 1)$ és

$$x_{n+1} = x_n \cdot \cos(x_n), \quad \forall n \geq 1.$$

a) Igazold, hogy az $(x_n)_{n \geq 1}$ sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!

b) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot x_n$ határértékét!

c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\operatorname{tg} x_k}{x_k} \right)^2 \right)$ határértékét!

Loga Patrik, Zilah

Megoldás. Hivatalból

(2 pont)

a) Mivel $x_1 \in (0, 1)$, így $\cos x_1 \in (0, 1)$ és $x_2 = x_1 \cos x_1 \in (0, 1)$. Indukcióval kapjuk, hogy $x_n \in (0, 1)$, vagyis a sorozat korlátos. **(2 pont)**

Mivel $x_n \in (0, 1)$ esetén $0 < \cos x_n < 1$, következik, hogy $x_{n+1} = x_n \cos x_n < x_n$. Tehát a sorozat szigorúan csökkenő és alulról korlátos, így konvergens. **(2 pont)**

Legyen a határértéke ℓ . A rekurzióban n -nel a végtelenbe tartva kapjuk az $\ell = \ell \cos \ell$ összefüggést, ahonnan $\ell(1 - \cos \ell) = 0$. Az egyetlen lehetséges ($\ell \in [0, 1)$) határérték $\ell = 0$. **(2 pont)**

b) A $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot x_n^2$ határértékét a Cesàro–Stolz-tétel segítségével számoljuk ki, ahol a számláló sorozata $a_n = n$, a nevezőé $b_n = \frac{1}{x_n^2}$. Mivel $(b_n)_{n \geq 1}$ szigorúan monoton és a végtelenbe tart, a tétel alkalmazható, tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x_n^2 \cos^2 x_n} - \frac{1}{x_n^2}}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

A nevezőt a következőképpen alakítjuk át:

$$\frac{1}{x_n^2 \cos^2 x_n} - \frac{1}{x_n^2} = \frac{1 - \cos^2 x_n}{x_n^2 \cos^2 x_n} = \frac{\sin^2 x_n}{x_n^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x_n}. \quad (2 \text{ pont})$$

Mivel $x_n \rightarrow 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$, így a nevező határértéke:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x_n} = 1^2 \cdot \frac{1}{1^2} = 1.$$

Tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n x_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}} = \frac{1}{1} = 1,$$

ahonnan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} x_n = 1. \quad (2 \text{ pont})$$

c) Alakítsuk át az összeg általános tagját a rekurzió és a $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$ azonosság felhasználásával:

$$\left(\frac{\operatorname{tg} x_k}{x_k} \right)^2 = \frac{1}{x_k^2} \left(\frac{1}{\cos^2 x_k} - 1 \right) = \frac{1}{x_k^2 \cos^2 x_k} - \frac{1}{x_k^2} = \frac{1}{x_{k+1}^2} - \frac{1}{x_k^2}. \quad (2 \text{ pont})$$

Tehát a keresett összeg teleszkopikus:

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{\operatorname{tg} x_k}{x_k} \right)^2 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{x_{k+1}^2} - \frac{1}{x_k^2} \right) = \frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_1^2}. \quad (2 \text{ pont})$$

Mivel a b) pont alapján $n x_{n+1}^2 \rightarrow 1$ (mert $n x_n^2 \rightarrow 1$ és $x_n \rightarrow 0$), kapjuk, hogy a keresett határérték

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\operatorname{tg} x_k}{x_k} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n x_{n+1}^2} - \frac{1}{n x_1^2} \right) = \frac{1}{1} - 0 = 1. \quad (2 \text{ pont})$$

Megjegyzés. A határérték a Cesàro–Stolz-tétel alapján kiszámolható az összeg kiszámolása nélkül is. Az is teljes értékű megoldásnak számít.

■

12. osztály

1. feladat (30 pont). Számítsd ki az

$$\int \frac{\sin 2x}{a + \sin^4 x + \cos^4 x} dx$$

integrált, ahol a olyan valós szám, amelyre $|a| > 1$.

dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Hivatalból

(3 pont)

Ha I -vel jelöljük az integrált, akkor írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin 2x}{a + \sin^4 x + \cos^4 x} dx = \int \frac{\sin 2x}{a + (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{\sin 2x}{a + 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x} dx = \int \frac{2 \sin 2x}{2a + 1 + \cos^2 2x} dx, \end{aligned} \quad (6 \text{ pont})$$

ahonnan a $\cos 2x = u$, $-2 \sin 2x dx = du$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$I = \int \frac{-du}{2a + 1 + u^2}. \quad (3 \text{ pont})$$

Két esetet kell megvizsgálnunk.

1. Ha $a > 1$, akkor $2a + 1 > 0$ és

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{-du}{2a + 1 + u^2} = -\frac{1}{\sqrt{2a + 1}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{2a + 1}} + C \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2a + 1}} \operatorname{arctg} \frac{\cos 2x}{\sqrt{2a + 1}} + C, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (9 \text{ pont})$$

2. Ha $a < -1$, akkor $2a + 1 < -1$ és

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{-du}{2a + 1 + u^2} = \frac{1}{2\sqrt{-2a - 1}} \ln \left| \frac{u - \sqrt{-2a - 1}}{u + \sqrt{-2a - 1}} \right| + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-2a - 1}} \ln \left| \frac{\cos 2x - \sqrt{-2a - 1}}{\cos 2x + \sqrt{-2a - 1}} \right| + C, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (9 \text{ pont})$$

■

2. feladat (30 pont). Jelölje $[x]$ az x valós szám egészrészét, $\{x\}$ pedig a törtrészét. A valós számok halmazán a „ $\circ$ ” műveletet az

$$x \circ y = [x] \cdot [y] + \{\{x\} + \{y\}\}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

szabállyal értelmezzük. (A második tagban a külső kapcsos zárójel az összeg törtrészét jelöli).

a) Határozd meg a valós számok azon legbővebb $M \subset \mathbb{R}$ részhalmazát, amelyre teljesül, hogy $[x] \neq 0$ minden $x \in M$ esetén, és az $(M, \circ)$ pár Abel-csoportot alkot!

b) Legyen $x^{(n)} = \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_n$, ahol $n \in \mathbb{N}^*$. Határozd meg, hány olyan $x \in M$ létezik, amelyre teljesül az $x^{(2026)} = e$ egyenlőség, ahol e a csoport semleges eleme!

Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Hivatalból

(3 pont)

a) A „ $\circ$ ” művelet értelmezése alapján észrevehető, hogy az eredmény egész része és törtrésze szétválasztható. Mivel $\{\{x\} + \{y\}\} \in [0, 1)$, ezért az egész rész $[x \circ y] = [x][y]$, valamint a törtrész $\{x \circ y\} = \{\{x\} + \{y\}\}$.

Kommutativitás: Mivel a valós számok szorzása és összeadása kommutatív felírhatjuk, hogy

$$x \circ y = [x][y] + \{\{x\} + \{y\}\} = [y][x] + \{\{y\} + \{x\}\} = y \circ x.$$

Tehát a művelet kommutatív.

Asszociativitás: Legyenek $x, y, z \in \mathbb{R}$ és jelöljük $\alpha = \{x\}$, $\beta = \{y\}$, $\gamma = \{z\}$. Ekkor

$$(x \circ y) \circ z = [x \circ y][z] + \{\{x \circ y\} + \{z\}\} = ([x][y])[z] + \{\{\alpha + \beta\} + \gamma\},$$

$$x \circ (y \circ z) = [x][y \circ z] + \{\{x\} + \{y \circ z\}\} = [x]([y][z]) + \{\alpha + \{\beta + \gamma\}\}.$$

Az egész részek mindkét esetben $[x][y][z]$. A törtrészek egyenlősége abból következik, hogy tetszőleges u, v valós számok esetén $\{\{u\} + v\} = \{u + v\} = \{u + \{v\}\}$. Tehát

$$\{\{\alpha + \beta\} + \gamma\} = \{\alpha + \beta + \gamma\} = \{\alpha + \{\beta + \gamma\}\}.$$

Tehát $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, azaz a művelet asszociatív.

(3 pont)

Semleges elem: Az $e = 1$ a semleges eleme a „ $\circ$ ” műveletnek. Valóban,

$$x \circ e = x \circ 1 = [x] \cdot [1] + \{\{x\} + \{1\}\} = [x] + \{x\} = x,$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

(3 pont)

Invertálható elemek: Meghatározzuk az invertálható elemeket a „ $\circ$ ” műveletre nézve. Ehhez legyen $x, x' \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $x \circ x' = 1$. Ekkor

$$[x][x'] + \{\{x\} + \{x'\}\} = 1.$$

Az egész rész $[x] \cdot [x'] = 1$ és a törtrész $\{\{x\} + \{x'\}\} = 0$. Mivel $[x], [x']$ egész számok, a szorzatuk 1 pontosan akkor, ha $[x] = [x'] \in \{-1, 1\}$. Így, hogy létezzen inverz eleme x -nek szükséges, hogy $[x] \in \{-1, 1\}$.

A törtrész pontosan akkor nulla, ha $\{x\} + \{x'\} \in \mathbb{Z}$. Figyelembe véve, hogy $0 \leq \{x\} + \{x'\} < 2$, ezért $\{x\} + \{x'\} \in \{0, 1\}$. Ha $\{x\} = 0$, vagyis x egy egész szám, akkor $x = \pm 1$, és ekkor $x' = x$. Ha $\{x\} > 0$, akkor $\{x'\} = 1 - \{x\}$. Tehát $x \in \mathbb{R}$ számnak van inverze a „ $\circ$ ” műveletre nézve, pontosan akkor ha $[x] \in \{-1, 1\}$, és az inverz $x' = x$, ha x egész szám, különben $x' = [x] + 1 - \{x\}$. (6 pont)

A legbővebb Abel-csoport megadása: Az eddigiek alapján az invertálható elemek halmaza $[-1, 0) \cup [1, 2)$, így az M Abel-csoport ennek részhalmaza kell legyen. De ez a halmaz egy Abel-csoport a „ $\circ$ ” műveletre nézve. Valóban, a művelet zárt, hiszen az $[x], [y] = 1$ feltételből $[x \circ y] = [x][y] = 1$. A zártság elég is, mert a többi csoport axiómát már leellenőriztük. Tehát $M = [-1, 0) \cup [1, 2)$. (3 pont)

b) Az $x^{(2026)} = e$ egyenlet megoldásához először levezetjük az $x^{(n)}$ alakját. Kiszámítva az első néhány hatványt.

$$n = 1: x^{(1)} = x = [x] + \{x\}.$$

$$n = 2: x^{(2)} = x \circ x = [x]^2 + \{\{x\} + \{x\}\} = [x]^2 + \{2\{x\}\}.$$

$$n = 3: x^{(3)} = x^{(2)} \circ x = ([x]^2 + \{2\{x\}\}) \circ x = [x]^2 [x] + \{\{2\{x\}\} + \{x\}\} = [x]^3 + \{3\{x\}\}.$$

Ahol felhasználtuk, hogy $\{\{u\} + v\} = \{u + v\}$. (3 pont)

A sejtés az, hogy $x^{(n)} = [x]^n + \{n\{x\}\}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén. Az $n = 1, 2, 3$ esetek teljesülnek, így elég az indukciós lépést igazolnunk. Tegyük fel, hogy $x^{(k)} = [x]^k + \{k\{x\}\}$ igaz minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, valamilyen $k \geq 1$ természetes számra. Ekkor

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} \circ x = ([x]^k + \{k\{x\}\}) \circ x = [x]^k [x] + \{\{k\{x\}\} + \{x\}\}.$$

A törtrész esetén felhasználva, hogy $\{\{u\} + v\} = \{u + v\}$, tovább írhatjuk, hogy

$$x^{(k+1)} = [x]^{k+1} + \{k\{x\} + \{x\}\} = [x]^{k+1} + \{(k+1)\{x\}\}.$$

Tehát teljesül $(k+1)$ esetén is. Így a matematikai indukció elve alapján $x^{(n)} = [x]^n + \{n\{x\}\}$ minden $n \in \mathbb{N}^*$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén. (3 pont)

Tudjuk, hogy $e = 1$, így az $x^{(2026)} = e$ egyenlet ekvivalens az

$$[x]^{2026} + \{2026\{x\}\} = 1$$

egyenlettel. Ez pontosan akkor teljesül, ha $[x]^{2026} = 1$ és $\{2026\{x\}\} = 0$. Mivel 2026 egy páros szám így $[x]^{2026} = 1$ azzal egyenértékű, hogy $[x] \in \{-1, 1\}$; ez két lehetőség. (3 pont)

A törtrész pontosan akkor nulla, ha $2026\{x\}$ egy egész szám. Mivel $0 \leq \{x\} < 1$ így $0 \leq 2026\{x\} < 2026$, vagyis $2026\{x\} \in \{0, 1, \dots, 2025\}$. Tehát $\{2026\{x\}\} = 0$ azzal egyenértékű, hogy

$$\{x\} \in \left\{0, \frac{1}{2026}, \frac{2}{2026}, \dots, \frac{2025}{2026}\right\};$$

ez 2026 lehetőség.

Mivel egy szám egész részét és törtrészét egymástól függetlenül megválaszthatjuk, így az egyenletnek összesen $2 \cdot 2026 = 4052$ megoldása van. (3 pont)



3. feladat (20 pont). Igazold, hogy a $2^x = x^{32}$ egyenletnek pontosan három valós megoldása van! Lásd be azt is, hogy ezek közül pontosan egy racionális!

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Megoldás. Hivatalból (2 pont)

Ha $x > 0$, akkor az egyenlőséget logaritmálva kapjuk, hogy $x \cdot \ln 2 = 32 \cdot \ln x$, vagyis

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{32}.$$

Vizsgáljuk az

$$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{\ln 2}{32}$$

függvény változását.

(2 pont)

A függvény folytonos és deriválható az értelmezési tartományán.

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

tehát $f'(x) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x = e$.

(4 pont)

A deriváltfüggvény előjele pozitív a $(0, e)$ intervallumon, ott a függvény szigorúan növekvő, és az előjele negatív az (e, ∞) intervallumon, ott a függvény szigorúan csökkenő.

(2 pont)

Az $f(1) < 0$, az $f(e) > 0$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) < 0$, ezért az $f(x) = 0$ egyenletnek pontosan egy valós gyöke van a $(0, e)$ intervallumban és pontosan egy másik valós gyöke van az (e, ∞) intervallumban.

(2 pont)

Ha $x < 0$, akkor a $g(x) = 2^x$ szigorúan növekvő, folytonos és $g(0) = 1$, a $h(x) = x^{32}$ függvény pedig szigorúan csökkenő, folytonos és $h(0) = 0$, ezért az adott $2^x = x^{32}$ egyenletnek pontosan egy gyöke van a $(-\infty, 0)$ intervallumban. Tehát az adott egyenletnek pontosan 3 valós megoldása van.

(2 pont)

Valódi tört megoldása az egyenletnek nem lehet, mert akkor 2^x irracionális lenne, és x^{32} pedig racionális lenne, így nem lehetnének egyenlők. Az egyenletnek negatív egész megoldása sem lehet mivel ez esetben $2^x < 1$ és $x^{32} > 1$, így nem lehetnének egyenlők.

(2 pont)

Vizsgáljuk milyen pozitív egész lehet megoldása az egyenletnek. Az 1 nem lehet megoldás és a 2 sem.

A $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{32}$ egyenleten a következő ekvivalens átalakításokat végezhetjük:

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{8 \cdot \ln 2}{8 \cdot 32} \iff \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2^8}{256} \iff \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 256}{256}.$$

(2 pont)

Innen következik, hogy az (e, ∞) intervallumon létező egyértelmű megoldás a 256, és a fentiek alapján ez az egyetlen racionális megoldás, tehát a másik két megoldás irracionális.

(2 pont)

■

4. feladat (20 pont). A $(G, \cdot)$ véges csoportnak A olyan részhalmaza, amely esetén $2|A| > |G|$, ahol $|H|$ -val jelöljük a H halmaz elemeinek számát. Vezessük be az

$$r(g) = |\{(a, b) \in A \times A \mid a \cdot b = g\}|$$

jelölést, ahol $g \in G$ (tehát $r(g)$ azoknak az $(a, b) \in A \times A$ pároknak a száma, amelyekre $a \cdot b = g$).

a) Számítsd ki $\sum_{g \in G} r(g)$ értékét!

b) Bizonyítsd be, hogy $r(g) \geq 2|A| - |G|$, minden $g \in G$ esetén!

c) Határozd meg azokat az A részhalmazokat, amelyekre $r(g) = 2|A| - |G|$, minden $g \in G$ esetén!

Lukács Andor, Kolozsvár

Első megoldás. Hivatalból

(2 pont)

a) Az $S_g = \{(a, b) \in A \times A \mid ab = g\}$ halmazok páronként diszjunktak, és minden (a, b) párhoz pontosan egy $g \in G$ elem tartozik, ezért $\sum_{g \in G} r(g) = |A \times A| = |A|^2$. **(4 pont)**

b) Az $ab = g$ összefüggés pontosan akkor teljesül, ha $a = gb^{-1}$. A $gA^{-1} = \{gb^{-1} \mid b \in A\}$ halmaznak ugyanannyi eleme van, mint az A -nak, mivel a $b \mapsto gb^{-1}$ leképezés bijekció A -ról gA^{-1} -re. **(4 pont)**
Ezért

$$r(g) = |gA^{-1} \cap A| = |A| + |gA^{-1}| - |A \cup gA^{-1}| = |A| + |A| - |A \cup gA^{-1}| \geq 2|A| - |G|. \quad \textbf{(4 pont)}$$

c) Ha minden g esetén $r(g) = 2|A| - |G|$, akkor az előző alpontok alapján következik, hogy

$$|A|^2 = \sum_{g \in G} r(g) = \sum_{g \in G} (2|A| - |G|) = |G|(2|A| - |G|),$$

ahonnan átrendezéssel az $(|A| - |G|)^2 = 0$, vagyis az $A = G$ egyenlőséghez jutunk. **(4 pont)**
Fordítva, ha $A = G$, akkor $r(g) = |G| = 2|A| - |G|$ teljesül minden g esetén, tehát a feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha $A = G$. **(2 pont)**

■

Alternatív megoldás az a) és b) alpontra. Legyen $|A| = k$; $|G| = n$, tehát $2k > n$. Vezessük be az A és G halmazok elemeinek a következő jelölését:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \quad \text{és} \quad G = \{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n\}.$$

a) Ha tekintjük az A halmaz művelet tábláját, vagyis az

$\cdot$	a_1	a_2	$\cdots$	a_k
a_1	$a_1 a_1$	$a_1 a_2$	$\cdots$	$a_1 a_k$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_2	$a_2 a_1$	$a_2 a_2$	$\cdots$	$a_2 a_k$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_k	$a_k a_1$	$a_k a_2$	$\cdots$	$a_k a_k$

táblázatot, akkor tetszőleges $g \in G$ esetén $r(g)$ a táblázatban g előfordulásának száma, tehát a $\sum_{g \in G} r(g)$ tulajdonképpen a táblázatban előforduló számok száma, azaz

$$\sum_{g \in G} r(g) = k^2 = |A|^2. \quad \textbf{(4 pont)}$$

b) Tekintsük a G művelet tábláját:

$\cdot$	a_1	a_2	$\cdots$	a_k	a_{k+1}	$\cdots$	a_n
a_1	$a_1 a_1$	$a_1 a_2$	$\cdots$	$a_1 a_k$	$a_1 a_{k+1}$	$\cdots$	$a_1 a_n$
a_2	$a_2 a_1$	$a_2 a_2$	$\cdots$	$a_2 a_k$	$a_2 a_{k+1}$	$\cdots$	$a_2 a_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_k	$a_k a_1$	$a_k a_2$	$\cdots$	$a_k a_k$	$a_k a_{k+1}$	$\cdots$	$a_k a_n$
a_{k+1}	$a_{k+1} a_1$	$a_{k+1} a_2$	$\cdots$	$a_{k+1} a_k$	$a_{k+1} a_{k+1}$	$\cdots$	$a_{k+1} a_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_n	$a_n a_1$	$a_n a_2$	$\cdots$	$a_n a_k$	$a_n a_{k+1}$	$\cdots$	$a_n a_n$

Egy tetszőleges $g \in G$ elem minden sorban és minden oszlopban pontosan egyszer szerepel, mert G csoport. Így az első k sorban legfeljebb $n - k$ darab g szerepel a $k + 1, \dots, n$ oszlopokban.

(4 pont)

Ez viszont azt jelenti, hogy legalább $k - (n - k)$ darab g szerepel az első k oszlopban és első k sorban, vagyis az $A \times A$ -nak megfelelő részben a G műveletábrájában. Ez pontosan azt jelenti, hogy

$$r(g) \geq 2k - n. \quad (4 \text{ pont})$$

■

Alternatív megoldás a c) alpontra. A b) alpontban egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $|gA^{-1} \cup A| = |G|$, de $gA^{-1} \cup A \subseteq G$, vagyis ha

$$gA^{-1} \cup A = G, \quad \forall g \in G.$$

Legyen $g_1, g_2 \in G$ tetszőleges. Írhatjuk, hogy $g_1 \in g_2 A^{-1} \cup A$. Ha $g_1 \notin A$, akkor a fenti összefüggésből következik, hogy létezik $a \in A$ úgy, hogy $g_1 = g_2 a^{-1}$, vagyis $a = g_1^{-1} g_2 \in A$.

Összefoglalva az előbbi részleteket, következik, hogy minden $g_1, g_2 \in G$ esetén, ha $g_1 \notin A$, akkor $g_1^{-1} g_2 \in A$.

Ennek az észrevételnek a felhasználásával igazoljuk, hogy szükséges és elégséges az $A = G$ feltétel. Valóban, ha létezik $g \in G$ úgy, hogy $g \notin A$, akkor válasszuk a $g_1 = g$ és $g_2 = g^2$ elemeket. Ekkor $g_1^{-1} g_2 = g \in A$, ami ellentmondás. Ezzel igazoltuk, hogy szükséges az $A = G$ feltétel, ami viszont elégséges is, hiszen ha $A = G$, akkor $r(g) = |G| = 2|A| - |G|$ teljesül minden $g \in G$ esetén. (6 pont)

■

Országos döntő - II. forduló

9. osztály

1. feladat (30 pont). Adottak $x, y \in \mathbb{R}^*$ úgy, hogy

$$|x| + \frac{25}{|x|} + 16|y| + \frac{1}{4|y|} \leq \left[2\sqrt{7} + 1\right] + 8,$$

ahol $[a]$ az a szám egész részét jelöli. Mutasd ki, hogy

$$\sqrt{\frac{|x|}{|y|} + 22\left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right) + 27}$$

természetes szám!

*Mastan Eliza, Nagybánya
Fodor Erika, Beszterce*

Első megoldás. Hivatalból

(3 pont)

Az $|x|$ és $\frac{25}{|x|}$ számokra felírva a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget

$$|x| + \frac{25}{|x|} \geq 2\sqrt{|x| \cdot \frac{25}{|x|}} = 10. \quad (3 \text{ pont})$$

Hasonlóan a $16|y|$ és $\frac{1}{4|y|}$ számok esetén

$$16|y| + \frac{1}{4|y|} \geq 2\sqrt{16|y| \cdot \frac{1}{4|y|}} = 4. \quad (3 \text{ pont})$$

Mivel

$$\left[2\sqrt{7} + 1\right] + 8 = \left[\sqrt{28}\right] + 1 + 8 = 5 + 9 = 14, \quad (3 \text{ pont})$$

az eredeti egyenlőtlenség egyenértékű azzal, hogy

$$|x| + \frac{25}{|x|} + 16|y| + \frac{1}{4|y|} \leq 14. \quad (3 \text{ pont})$$

Ugyanakkor láttuk, hogy

$$|x| + \frac{25}{|x|} + 16|y| + \frac{1}{4|y|} \geq 10 + 4 = 14, \quad (3 \text{ pont})$$

ezért

$$|x| + \frac{25}{|x|} + 16|y| + \frac{1}{4|y|} = 14,$$

és az egyenlőség akkor áll fenn, ha

$$|x| = \frac{25}{|x|} \quad \text{és} \quad 16|y| = \frac{1}{4|y|},$$

vagyis $|x| = 5$ és $|y| = \frac{1}{8}$.

(6 pont)

Tehát

$$\sqrt{\frac{|x|}{|y|} + 22 \left(x^2 + \frac{1}{y^2} \right) + 27} = \sqrt{40 + 22(25 + 64) + 27} = \sqrt{40 + 1958 + 27} = \sqrt{2025} = 45.$$

Tehát a kifejezés természetes szám, értéke 45.

(6 pont)



Második megoldás.

$$[2\sqrt{7} + 1] + 8 = [\sqrt{28}] + 1 + 8 = 5 + 9 = 14.$$

(3 pont)

Bevezetjük a következő jelöléseket

$$|x| = a^2, \quad |y| = b^2.$$

Így az egyenlőtlenség átírható, mint

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow a^2 + \frac{25}{a^2} + 16b^2 + \frac{1}{4b^2} - 14 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 - 10 + \frac{25}{a^2} + 16b^2 - 4 + \frac{1}{4b^2} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(a - \frac{5}{a} \right)^2 + \left(4b - \frac{1}{2b} \right)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

(9 pont)

Innen következik, hogy

$$\begin{cases} a - \frac{5}{a} = 0 \\ 4b - \frac{1}{2b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 5 \\ b^2 = \frac{1}{8}. \end{cases}$$

(6 pont)

Tehát $|x| = 5$ és $|y| = \frac{1}{8}$.

(3 pont)

Elvégezve a számítást kapjuk, hogy

$$\sqrt{\frac{|x|}{|y|} + 22 \left(x^2 + \frac{1}{y^2} \right) + 27} = \sqrt{5 \cdot 8 + 22(25 + 64) + 27} = \sqrt{2025} = 45 \in \mathbb{N}.$$

(6 pont)

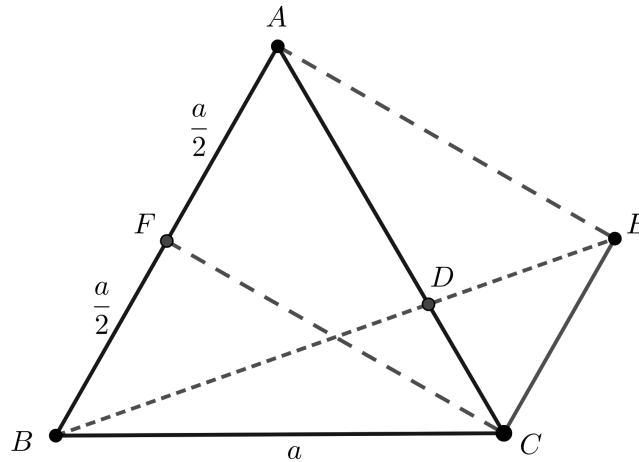


2. feladat (30 pont). Az ABC egyenlő oldalú háromszögben legyen D az AC szakasz belső pontja, amelyre $AD = k \cdot DC$. A BD egyenesen az E pontot úgy vesszük fel, hogy $BE = (k + 1) \cdot DE$ és D a BE szakasz belső pontja. Határozzuk meg a k értékét úgy, hogy AE merőleges legyen az AB egyenesre!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

Első megoldás. Hivatalból

(3 pont)



Az ABC egyenlő oldalú háromszögben legyen $AB = BC = CA = a$. Mivel $BE = (k + 1) \cdot DE$, ezért

$$\frac{BE}{DE} = k + 1.$$

Mivel D a BE szakasz belső pontja, ezért

$$\frac{BD}{DE} = \frac{BE - DE}{DE} = \frac{(k + 1) - 1}{1} = k. \quad (6 \text{ pont})$$

Az $AD = k \cdot DC$ egyenlőségből adódik, hogy $\frac{AD}{DC} = k$, tehát

$$\frac{AD}{DC} = \frac{BD}{DE}.$$

A Thalész fordított tételéből következik, hogy $AB \parallel CE$.

(6 pont)

A hasonlóság alaptétele alapján a DAB háromszög hasonló a DCE háromszöggel, így

$$\frac{AB}{CE} = \frac{AD}{DC} = k,$$

tehát

$$CE = \frac{AB}{k} = \frac{a}{k}. \quad (6 \text{ pont})$$

Legyen F a C pontból az AB oldalra húzott magasság talppontja. Tudjuk, hogy az egyenlő oldalú háromszög magassága egyben oldalfelező is, ezért

$$AF = FB = \frac{a}{2}. \quad (3 \text{ pont})$$

Mivel $FC \perp AB$ és az $AE \perp AB$, ezért $AE \parallel FC$. Másrészt $AB \parallel CE$, következik, hogy az $AFCE$ négyszög téglalap, így

$$AF = CE.$$

Tehát

$$\frac{a}{2} = \frac{a}{k},$$

ahonnan $k = 2$.

A $k = 2$ esetben $CE = \frac{a}{2} = AF$ és $CE \parallel AF$, ezért $AECF$ paralelogramma, amelyben $\widehat{CFA} = 90^\circ$, így $AE \perp AB$. (3 pont)

(3 pont)

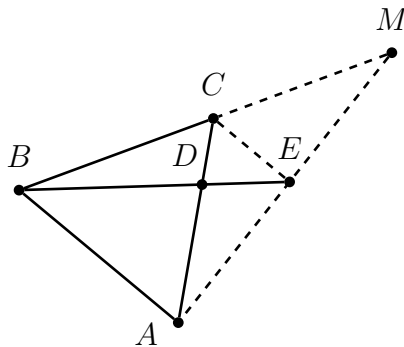


Megjegyzés. Az előző megoldást onnan folytatjuk, hogy $AB \parallel CE$ és $k \cdot CE = AB$.

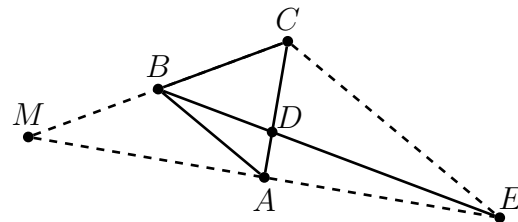
Ha $k = 1$, akkor az $ABCE$ négyszög egy paralelogramma, ekkor $\widehat{BAE} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 120^\circ$.

Feltételezhetjük, hogy $k \neq 1$, ekkor vehetjük az M pontot, ami az AE és BC egyenesek metszete.

Ha $k < 1$, akkor $B \in (MC)$ és $A \in (ME)$, valamint $\widehat{BCE} = 120^\circ$ (belső váltószög $\widehat{ABC}$ -gel). Ekkor az MCE háromszög tompaszögű C -ben, így hegyesszögű az E pontban. Mivel $\widehat{BAE}$ és $\widehat{AEC}$ belső váltószögek, így $\widehat{BAE}$ tompaszög.



$k > 1$ esete



$k < 1$ esete

Ha $k > 1$, akkor $C \in (BM)$ és $E \in (AM)$. Belátjuk, hogy BAM háromszög derékszögű A -ban pontosan akkor, ha C felezőpontja a BM szakasznak. Ha C felezőpont, akkor $AC = BC = CM$, vagyis C az ABM köré írt kör középpontja és BM átmérő, tehát $\widehat{BAE} = 90^\circ$. Fordítva, a BAM háromszögben a szögek rendre $60^\circ, 90^\circ, 30^\circ$, és $AC = BC$. Továbbá $AC = CM$, mert az $\widehat{CAM} = \widehat{CMA} = 30^\circ$.

Az MCE és MBA háromszögek hasonlósága miatt

$$\frac{MC}{MB} = \frac{CE}{AB} = \frac{1}{k}.$$

Tehát C felezőpontja a BM szakasznak pontosan akkor, ha $k = 2$.

(15 pont)



3. feladat (20 pont). Oldd meg a $(2xy - 10)^2 = 4x^2 + y^2$ egyenletet az egész számok halmazán!

*Mastan Eliza, Nagybánya
Tóth Csongor, Szováta*

Megoldás. Hivatalból

(2 pont)

Az egyenlet egyenértékű azzal, hogy

$$4x^2y^2 - 40xy + 100 = 4x^2 + y^2.$$

Mindkét oldalhoz hozzáadva $4xy$ -t, rendre kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 4x^2y^2 - 36xy + 100 &= (2x + y)^2, \\ (2xy - 9)^2 + 19 &= (2x + y)^2, \\ (2xy - 9)^2 - (2x + y)^2 &= -19. \end{aligned}$$

(4 pont)

Legyen $a = 2xy - 9$ és $b = 2x + y$. Ekkor

$$(a - b)(a + b) = -19.$$

Mivel 19 prímszám, lehetséges felbontások:

$$(a - b, a + b) \in \{(-1, 19), (1, -19), (-19, 1), (19, -1)\}.$$

Innen következik, hogy

$$(a, b) \in \{(9, 10), (-9, -10), (-9, 10), (9, -10)\}.$$

(4 pont)

Tehát az alábbi rendszereket kapjuk:

$$\begin{cases} 2xy - 9 = 9 \\ 2x + y = 10 \end{cases} \quad \text{vagy} \quad \begin{cases} 2xy - 9 = -9 \\ 2x + y = -10 \end{cases} \quad \text{vagy} \quad \begin{cases} 2xy - 9 = -9 \\ 2x + y = 10 \end{cases} \quad \text{vagy} \quad \begin{cases} 2xy - 9 = 9 \\ 2x + y = -10. \end{cases}$$

1. eset: Az $xy = 9$ és $2x + y = 10$ egyenletekből a $2x^2 - 10x + 9 = 0$ egyenlethez jutunk. Ennek diszkriminánsa $\Delta = 100 - 72 = 28$ nem négyzetszám, tehát nincs egész megoldás. **(2 pont)**

2. eset: Az $xy = 0$ és $2x + y = -10$ egyenletekből

$$(x, y) \in \{(0, -10), (-5, 0)\}.$$

(2 pont)

3. eset: Az $xy = 0$ és $2x + y = 10$ egyenletekből

$$(x, y) \in \{(0, 10), (5, 0)\}.$$

(2 pont)

4. eset: Az $xy = 9$ és $2x + y = -10$ egyenletekből a $2x^2 + 10x + 9 = 0$ egyenlethez jutunk, amelynek nincs egész megoldása, mert $\Delta = 28$. **(2 pont)**

Az egyenlet megoldásai

$$(x, y) \in \{(0, -10), (0, 10), (-5, 0), (5, 0)\}. \quad (2 \text{ pont})$$



4. feladat (20 pont). a) Igazold, hogy egy konvex négyszög akkor és csakis akkor ortodiagonális (átlói merőlegesek egymásra), ha szemben fekvő oldalainak négyzetösszege megegyezik!

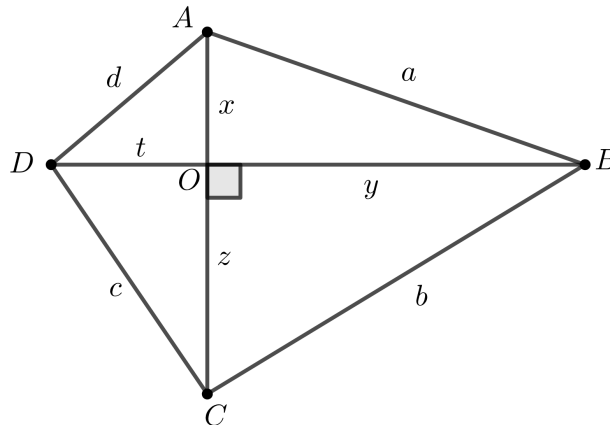
b) Igazold, hogy ha egy kör köré írható négyszög ortodiagonális, akkor deltoid (az egyik átlója a szimmetriatengelye)!

Pálhegyi Farkas László, Nagyvárad

Első megoldás. Hivatalból

(2 pont)

a) $\Rightarrow$ Legyen az $ABCD$ konvex négyszög oldalainak hossza $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ és $AD = d$. Legyen O az átlók metszéspontja és jelöljük az alábbi szakaszokat: $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$ és $OD = t$.



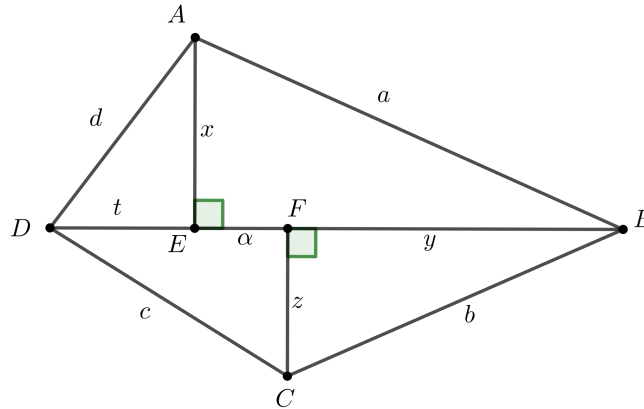
Pitagorasz tételét alkalmazva az AOB , BOC , COD és AOD derékszögű háromszögekben felírhatjuk az alábbi összefüggéseket:

$$a^2 = x^2 + y^2, \quad b^2 = y^2 + z^2, \quad c^2 = z^2 + t^2 \quad \text{és} \quad d^2 = x^2 + t^2$$

Innen beláthatjuk, hogy $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

(4 pont)

$\Leftarrow$ A *reductio ad absurdum* módszerét alkalmazva feltételezzük, hogy $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, de AC és BD nem merőlegesek egymásra.



A mellékelt ábrán látható módon megszerkesztjük az $AE \perp DB$ és $CF \perp BD$ szakaszokat. Jelöljük $AE = x$, $FB = y$, $FC = z$ és $DE = t$, valamint $EF = \alpha$. Pitagorasz tételét alkalmazva az AEB , BFC , CFD és DEA háromszögekben:

$$a^2 = x^2 + (\alpha + y)^2; \quad b^2 = z^2 + y^2; \quad c^2 = (t + \alpha)^2 + z^2; \quad d^2 = x^2 + t^2$$

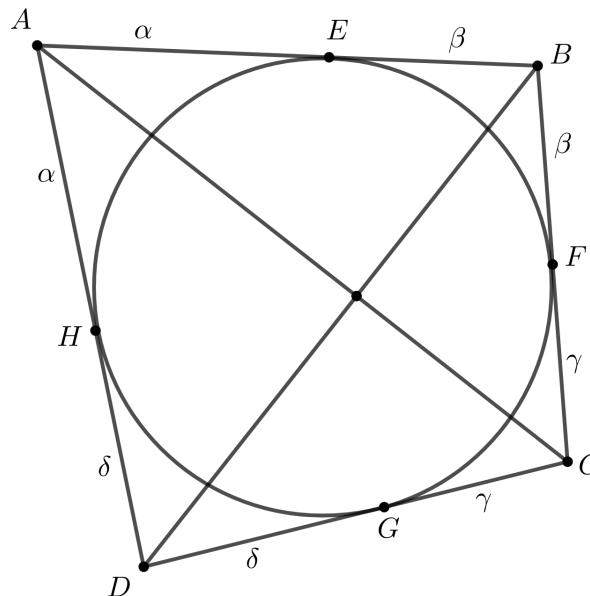
Mivel $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, ezért felírhatjuk, hogy

$$x^2 + \alpha^2 + y^2 + 2\alpha y + t^2 + 2\alpha t + \alpha^2 + z^2 = z^2 + x^2 + y^2 + t^2,$$

ahonnan $\alpha(2\alpha + 2y + 2t) = 0$, tehát $\alpha = 0$, vagyis az E és F pontok egybeesnek, ezért $AC \perp BD$.

(4 pont)

b) A négyszög AB, BC, CD és DA oldalai a kört rendre az E, F, G és H pontban érintik.



Jelöljük $AE = AH = \alpha$, $EB = BF = \beta$, $FC = CG = \gamma$ és $GD = DH = \delta$. Ha az $ABCD$ négyszög ortodiagonális, akkor az a) alpont alapján szemben fekvő oldalainak négyzetösszege egyenlő, tehát

$$(\alpha + \beta)^2 + (\gamma + \delta)^2 = (\alpha + \delta)^2 + (\beta + \gamma)^2, \quad (2 \text{ pont})$$

ahonnan $\alpha\beta + \gamma\delta = \alpha\delta + \beta\gamma$, ezt pedig átrendezve kapjuk, hogy

$$\alpha(\beta - \delta) - \gamma(\beta - \delta) = 0 \implies (\alpha - \gamma)(\beta - \delta) = 0, \quad (2 \text{ pont})$$

tehát $\alpha = \gamma$ vagy $\beta = \delta$.

(2 pont)

Ha $\alpha = \gamma$, akkor az ABC és ADC háromszögek egyenlő szárúak, tehát BD szimmetriatengelye az $ABCD$ négyszögnek, tehát $ABCD$ deltoid. Hasonlóan ha $\beta = \delta$, akkor AC szimmetriatengelye az $ABCD$ négyszögnek, tehát $ABCD$ deltoid.

(4 pont)



5. feladat (20 pont). a) Igazold, hogy az $A = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2\}$ halmaznak van két olyan negyelemű diszjunkt részhalmaza, amelyek elemeinek összege egyenlő!

b) Igazold, hogy a $B = \{1^2, 2^2, 3^2, \dots, 2024^2\}$ halmaznak van két olyan B_1 és B_2 diszjunkt részhalmaza, amelyekre $B_1 \cup B_2 = B$ és B_1 elemeinek összege egyenlő a B_2 elemeinek összegével!

Kocsis Attila, Déva
Németi Mónika, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból

(2 pont)

a) Az A halmaz elemeinek összege

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = 204,$$

tehát a két részhalmazban levő számok összege 102, páros szám. Ezért vagy négy ugyanolyan paritású szám kell legyen egy részhalmazban (ez nem elégíti ki a feltételt), vagy két páros és két páratlan szám kell legyen egy részhalmazban. Mivel $1^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2$, ezért a két halmaz $\{1^2, 4^2, 6^2, 7^2\}$ és $\{2^2, 3^2, 5^2, 8^2\}$.

(6 pont)

b) Felhasználjuk az a) alpontban kapott eredményt, így

$$1^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2.$$

Mindkét oldalhoz hozzáadva $4 \cdot (8k)^2 + 36 \cdot (8k)$ -t, azt kapjuk, hogy

$$(8k+1)^2 + (8k+4)^2 + (8k+6)^2 + (8k+7)^2 = (8k+2)^2 + (8k+3)^2 + (8k+5)^2 + (8k+8)^2. \quad (6 \text{ pont})$$

Mivel 2024 osztható 8-cal, ezért az első 2024 nemnulla négyzetszámot 8-as csoportokba osztjuk, majd a nyolcas csoportokból az előbbi azonosságban a bal oldalon megjelenő 4 számot a B_1 -be, a jobb oldalon megjelenő 4 számot a B_2 -be soroljuk:

$$\begin{aligned} B_1 &= \{(8k+1)^2, (8k+4)^2, (8k+6)^2, (8k+7)^2 \mid k = \overline{0, 252}\}, \\ B_2 &= \{(8k+2)^2, (8k+3)^2, (8k+5)^2, (8k+8)^2 \mid k = \overline{0, 252}\}. \end{aligned} \quad (6 \text{ pont})$$



6. feladat (20 pont). Egy négyzetrácsos lapra rajzolt tetszőleges rácstéglalap felbontása alatt azt értjük, hogy olyan négyzetekre bontjuk, melyek csúcsai rácspontok, oldalaik pedig párhuzamosak a téglalap oldalaival, és amelyek belsejei diszjunktak. A téglalap minden ilyen lehetséges felbontása mellé odaírjuk a felbontásban szereplő legkisebb négyzet oldalhosszát.

Rajzolhat-e Norbi olyan $m \times n$ -es téglalapot, amely esetén a leírt számok közül a legnagyobb szám a 2025, illetve az m és n számok legnagyobb közös osztója:

- a) 2026, b) 2025, c) 1.

Megoldás. Hivatalból

(2 pont)

a) Nem rajzolhat. Feltételezzük, hogy az m és n számok legnagyobb közös osztója 2026. Mivel $2026 \mid m$ és $2026 \mid n$, ezért létezik ilyen felbontás. Ebben a legkisebb oldalhosszúság, amit használunk az 2026, így ennek is szerepelnie kell a lapon, tehát nem lehet 2025 a Norbi által leírt legnagyobb szám. (4 pont)

b) Igen. Például legyen $m = 2025$, $n = 4050$. Két darab 2025×2025 -ös négyzetre felbontható a téglalap, ebben az esetben 2025 a legkisebb oldalhosszúság, amelyet felhasználunk, tehát 2025 valóban szerepel a lapon. Ennél nagyobb négyzetet azonban nem használhatunk, hiszen $m = 2025$, így az kilógna a téglalapon kívülre. Tehát ekkor valóban 2025 a lapon szereplő legnagyobb szám és $\text{lko}(2025, 4050) = 2025$. (4 pont)

c) Igen, rajzolhat. Például legyen $k = 2025$, $m = k + (k + 1) = 2k + 1$ és $n = k(k + 1)$. Az eredeti $m \times n$ -es téglalapot felbontjuk két téglalagra: egy fenti $k \times k(k + 1)$ -es téglalagra és egy lenti $(k + 1) \times k(k + 1)$ -es téglalagra. Tekintsük azt a felbontást, ahol a fenti $k \times k(k + 1)$ -es téglalaphoz kizárólag $k \times k$ méretű négyzeteket használunk (van ilyen, hiszen $k \mid k$ és $k \mid k(k + 1)$). Analóg módon pedig az alsó $(k + 1) \times k(k + 1)$ -es téglalaphoz csak $(k + 1) \times (k + 1)$ -est használunk. Ekkor a legkisebb oldalhosszúság, amit használunk, az k , tehát ez valóban szerepel a lapon. (4 pont)
Lássuk be a reductio ad absurdum módszerével, hogy

$$\text{lko}(2k + 1, k(k + 1)) = 1.$$

Legyen p egy olyan prím, melyre $p \mid 2k + 1$ és $p \mid k(k + 1)$, ezért $p \mid [2k(k + 1) - k(2k + 1)]$, ahonnan $p \mid k$, így $p \mid 2k$, de $p \mid 2k + 1$, ellentmondás, tehát

$$\text{lko}(2k + 1, k(k + 1)) = 1. \quad (4 \text{ pont})$$

Ha lenne k -nél nagyobb szám a lapon, akkor lenne olyan felbontás, ahol minden négyzet oldalhosszúsága legalább $k + 1$. Ugyanakkor a nagy téglalaprak összesen $2k + 1$ sora van, így ez csak úgy lehetséges, ha csak $(2k + 1) \times (2k + 1)$ -es négyzeteket használunk, ezért

$$2k + 1 \mid k(k + 1),$$

de az előbb beláttuk, hogy

$$\text{lko}(2k + 1, k(k + 1)) = 1,$$

ez ellentmondás. Tehát valóban k a legnagyobb szám a lapon ez esetben, és $\text{lko}(m, n) = 1$, ha pedig $k = 2025$ -t helyettesítünk, adódik a feladat állítása. (2 pont)

Megjegyzés. A c) alpontban a versenyző meg kell adjon egy $m \times n$ -es téglalapot, amelyről ellenőriznie kell, hogy

1. $\text{lko}(m, n) = 1$, (2 pont)
2. van olyan felbontása, amelyben a legkisebb négyzet oldalhossza 2025, (4 pont)
3. bármely felbontása esetén a leírt számok közül a legnagyobb 2025. (4 pont)



10. osztály

1. feladat (30 pont). Az A halmaz az olyan nyolcjegyű pozitív egész számok halmaza, amelyek első öt számjegyének a szorzata 2025 és az utolsó négy számjegyének a szorzata is 2025. Határozd meg az A halmaz elemeinek számát!

Péter Róbert, Gyergyóremete

Megoldás. Hivatalból

(3 pont)

A 2025 szorzattá bontható az 1, 3, 5 és 9 számjegyekkel ($2025 = 3^4 \cdot 5^2$). Megvizsgáljuk, hogy hányféleképpen tudjuk kialakítani a 2025-ös szorzatot öt, illetve négy számjegy felhasználásával.

(3 pont)

A következő számjegyek segítségével alakíthatjuk ki a 2025 szorzatot:

- 1. csoportosítás: 1, 5, 5, 9, 9,
- 2. csoportosítás: 3, 3, 5, 5, 9,
- 3. csoportosítás: 5, 5, 9, 9.

(6 pont)

A számban szereplő ötödik számjegy szerepel az első öt és utolsó négy számjegy között, ezért csak az 5-ös vagy a 9-es lehet az ötödik számjegy.

(3 pont)

Az alábbi eseteket tárgyalhatjuk:

1. eset: Az 1. csoportosítást társítjuk a 3. csoportosítással. Akár az 5-ös, akár a 9-es az ötödik számjegy, az első négy számjegyet $4 \cdot 3 = 12$ -féleképpen lehet elrendezni. Az utolsó három számjegyet 3-féleképpen lehet elrendezni. Összesen $2 \cdot 3 \cdot 12 = 72$ ilyen nyolcjegyű szám van.

(6 pont)

2. eset: A 2. csoportosítást társítjuk a 3. csoportosítással. Ha az 5-ös az ötödik számjegy, akkor az első négy számjegyet $4 \cdot 3 = 12$ -féleképpen lehet elrendezni. Ha a 9-es az ötödik számjegy, akkor az első négy számjegyet $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ -féleképpen lehet elrendezni. Az utolsó három számjegyet 3-féleképpen lehet elrendezni. Összesen $(12 + 6) \cdot 3 = 54$ ilyen nyolcjegyű szám van.

(6 pont)

A két esetet összesítve $72 + 54 = 126$ nyolcjegyű számot kapunk, tehát az A halmaz elemeinek száma 126.

(3 pont)



2. feladat (30 pont). Az $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ függvényt a következőképpen értelmezzük: $f(a)$ az a legkisebb négyzetszám, amelyre teljesül, hogy $a \mid f(a)$ (például $f(3) = 9$, $f(8) = 16$).

a) Határozd meg az összes olyan n számot, amelyre $f(n) = 2025$.

b) Hány megoldása van az $f(n) - n = 2025$ egyenletnek?

Barta Zágoni Csongor, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból

(3 pont)

a) A 2025 prímfelbontása: $3^4 \cdot 5^2$. Az f függvény az a prímfelbontásában minden páratlan kitevőhöz hozzáad egyet, a páros kitevőket pedig változatlanul hagyja. Az így kapott szám valóban négyzet-szám, osztható a -val és a legkisebb ilyen tulajdonságú. (3 pont)

Tehát a és $f(a)$ prímtényezői megegyeznek. Ha $f(n) = 2025$, akkor az n prímtényezői 3 és 5.

(3 pont)

Az n prímfelbontásában a 3 a harmadik vagy a negyedik, míg az 5 az első vagy a második kitevőn szerepelhet, ez pontosan 4 lehetőség. Tehát a keresett számok:

$$3^3 \cdot 5^1 = 135, \quad 3^4 \cdot 5^1 = 405, \quad 3^3 \cdot 5^2 = 675, \quad 3^4 \cdot 5^2 = 2025. \quad (6 \text{ pont})$$

b) Igazoljuk, hogy $f(n) - n$ akkor és csak akkor négyzetszám, ha n négyzetszám.

Ha n négyzetszám, akkor $f(n) = n$, tehát $f(n) - n = 0$, ami valóban egy teljes négyzet.

(3 pont)

Ha n nem négyzetszám, akkor n -nek van olyan prímosztója, amely páratlan kitevőn szerepel a felbontásában, legyen ez p^{2k+1} . Ekkor mivel $n \mid f(n)$, ezért $p^{2k+1} \mid f(n)$, továbbá $f(n)$ négyzetszám, tehát p páros kitevőn szerepel a felbontásában, így $p^{2k+2} \mid f(n)$. (6 pont)

Ezeket összegezve azt kapjuk, hogy az $f(n) - n$ osztható p^{2k+1} -nel, de nem osztható p^{2k+2} -nel, ezért a prímfelbontásában a p páratlan kitevőn szerepel, vagyis nem lehet négyzetszám.

Tehát az $f(n) - n = 0$ vagy $f(n) - n$ nem négyzetszám, ezért nincs olyan pozitív egész n szám, amelyre $f(n) - n = 2025$. (6 pont)

A b) alpont második megoldása. Ha a p prímszám osztja a -t, akkor p osztja az $f(a)$ -t is, minden $a \in \mathbb{N}^*$ esetén. (3 pont)

Így ha $p \mid n$, akkor $p \mid f(n) - n = 2025$, tehát p páratlan. (3 pont)

Azt kaptuk, hogy a n és $f(n)$ minden prímtényezői páratlanok, tehát n és $f(n)$ páratlanok, (6 pont)

ami ellentmond az $f(n) - n = 2025$ feltételnek, ezért nincs megoldása az egyenletnek. (3 pont)

■

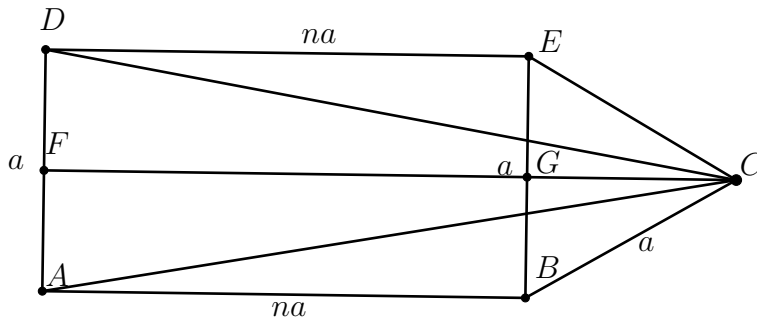
■

3. feladat (20 pont). Az $ABCD$ konvex négyszögben $\widehat{DAB} = 90^\circ$, $\widehat{ABC} = 150^\circ$, $AD = BC = a$, $AB = n \cdot a$, ahol $n \in (0, \infty)$ változó. Számítsd ki a $\frac{CD}{BD}$ arány legnagyobb értékét!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

Megoldás. Hivatalból

(2 pont)



A feladat megoldását nem befolyásolja, ha a rajzot az n egy sajátos értékére készítjük el (jelen esetben $n = 2$).

Megrajzoljuk az $ABED$ téglalapot. Ekkor $AD = BE = a$ és tudjuk, hogy $BC = a$, így $BE = BC$. Tehát a BCE háromszög egyenlő szárú, amelyben

$$\widehat{EBC} = \widehat{ABC} - \widehat{ABE} = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ,$$

tehát BCE egyenlő oldalú háromszög ($BE = EC = BC = a$).

A segédszerkesztés alapján $DE = AB = n \cdot a$, $EC = BC = a$,

$$\widehat{DEC} = \widehat{DEB} + \widehat{BEC} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ = \widehat{ABC},$$

ezért $DEC_\Delta \equiv ABC_\Delta$. Innen kapjuk, hogy $CD = CA$, így a CDA háromszög egyenlő szárú, amelyben a CF magasság ($F \in AD$) egyben oldalfelező is, tehát

$$AF = FD = \frac{AD}{2} = \frac{a}{2}.$$

Ha FC a BE egyenest G pontban metszi, akkor GC a BCE egyenlő oldalú háromszög magassága ($FC \perp AD$, $AD \parallel BE$, ahonnan $FC \perp BE$), s mivel $BC = a$, $BG = \frac{a}{2}$, ezért

$$GC = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

így

$$FC = FG + GC = AB + GC = an + \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a(2n + \sqrt{3})}{2}.$$

Az FCD derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján

$$CD^2 = FD^2 + FC^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a(2n + \sqrt{3})}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \cdot (1 + 4n^2 + 4n\sqrt{3} + 3) = a^2 \cdot (n^2 + n\sqrt{3} + 1). \quad (8 \text{ pont})$$

Az ABD derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = (an)^2 + a^2 = a^2 \cdot (n^2 + 1), \quad (2 \text{ pont})$$

így

$$\frac{CD^2}{BD^2} = \frac{a^2 \cdot (n^2 + n\sqrt{3} + 1)}{a^2 \cdot (n^2 + 1)} = 1 + \frac{n\sqrt{3}}{n^2 + 1}. \quad (4 \text{ pont})$$

Az $(n - 1)^2 \geq 0$ egyenlőtlenségből következik $n^2 + 1 \geq 2n$ (egyenlőség $n = 1$ esetén), így $\frac{1}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{2n}$ és

$$\frac{n\sqrt{3}}{n^2 + 1} \leq \frac{n\sqrt{3}}{2n} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{és} \quad 1 + \frac{n\sqrt{3}}{n^2 + 1} \leq 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}.$$

Ezek alapján $\frac{CD^2}{BD^2} \leq \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$, ahonnan $\frac{CD}{BD} \leq \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}}$, az egyenlőség $n = 1$ esetén áll fenn. (4 pont)

Megjegyzés. A CD szakasz hossza többféleképpen is kiszámolható. Minden esetben a helyes kiszámolás 4 pontot ér.

Megjegyzés. A $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$ kifejezés az összetett gyökképlettel egyszerűbb alakra hozható, ugyanis

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt{\frac{2-1}{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2},$$

ezért írhatjuk, hogy $\frac{CD}{BD} \leq \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, bármely $n \in (0, \infty)$ esetén.

Tehát a $\frac{CD}{BD}$ arány legnagyobb értéke $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, amelyet az $n = 1$ esetén kapunk.

Megjegyzés. Az $f(n) = \frac{n\sqrt{3}}{n^2+1}$, $n > 0$ kifejezés maximumát úgy is megkaphatjuk, hogy azt vizsgáljuk, hogy az $f(n) = y$ egyenletnek mely y értékek esetén van megoldása.

$$f(n) = y \iff \frac{n\sqrt{3}}{n^2+1} = y \iff yn^2 - n\sqrt{3} + y = 0.$$

Ha $y = 0$, akkor $n = 0$. Ha $y \neq 0$, akkor

$$\Delta = 3 - 4y^2 \geq 0 \iff y \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \cap (0, +\infty) = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right].$$

Tehát az $f(n)$ maximuma $\frac{\sqrt{3}}{2}$, amit az $n = 1$ esetén vesz fel. Tehát a $\frac{CD}{BD}$ maximális értéke:

$$\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{(1+\sqrt{3})^2}{2^2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

■

4. feladat (20 pont). Adott 15 darab nemnulla, egymástól különböző, 987-nél kisebb természetes szám. Bizonyítsd be, hogy ezek között létezik három olyan szám, amelyek egy háromszög oldalhosszai lehetnek!

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Hivatalból

(2 pont)

Tegyük fel, hogy a 15 természetes szám között nem létezik három olyan, amely egy háromszög oldala lehetne. Legyenek a megadott számok $a_1 < a_2 < \dots < a_{15}$ növekvő sorrendben.

(2 pont)

A háromszög-egyenlőtlenség alapján három szám ($a < b < c$) akkor lehet egy háromszög oldalainak hossza, ha $a + b > c$.

Ha nem létezik olyan háromszög, amely oldalhosszai a kiválasztott számok között vannak, akkor minden $i \geq 3$ esetén fenn kell állnia az $a_i \geq a_{i-1} + a_{i-2}$ összefüggésnek.

(6 pont)

Mivel a számok pozitív természetes számok, a legkisebb lehetséges értékeik a következők:

$$\begin{aligned}
 a_1 &\geq 1, \\
 a_2 &\geq 2, \\
 a_3 &\geq a_1 + a_2 \geq 1 + 2 = 3, \\
 a_4 &\geq a_2 + a_3 \geq 2 + 3 = 5, \\
 a_5 &\geq a_3 + a_4 \geq 3 + 5 = 8, \\
 a_6 &\geq a_4 + a_5 \geq 5 + 8 = 13, \\
 a_7 &\geq a_5 + a_6 \geq 8 + 13 = 21, \\
 a_8 &\geq a_6 + a_7 \geq 13 + 21 = 34, \\
 a_9 &\geq a_7 + a_8 \geq 21 + 34 = 55, \\
 a_{10} &\geq a_8 + a_9 \geq 34 + 55 = 89, \\
 a_{11} &\geq a_9 + a_{10} \geq 55 + 89 = 144, \\
 a_{12} &\geq a_{10} + a_{11} \geq 89 + 144 = 233, \\
 a_{13} &\geq a_{11} + a_{12} \geq 144 + 233 = 377, \\
 a_{14} &\geq a_{12} + a_{13} \geq 233 + 377 = 610, \\
 a_{15} &\geq a_{13} + a_{14} \geq 377 + 610 = 987.
 \end{aligned}
 \tag{8 pont}$$

Tehát $a_{15} \geq 987$, ami ellentmond annak, hogy minden szám kisebb 987-nél.

Tehát a kezdeti feltételezésünk hamis volt, vagyis a 15 szám között valóban léteznie kell három olyanak, amelyek egy háromszög oldalhosszai. (2 pont)



5. feladat (20 pont). Az $ABCD$ konvex négyszögben $\widehat{ABD} = 2\widehat{ACD}$ és a BD egyenes az ABC háromszög köré írt kört az E pontban metszi.

a) Igazold, hogy a D pont az ABC háromszög köré írt kör belsejében található!

b) Igazold, hogy $AB = DB$ akkor és csakis akkor, ha AD az $\widehat{EAC}$ szögfelezője!

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Megoldás. Hivatalból

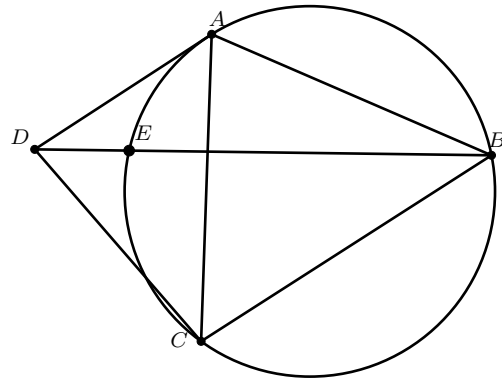
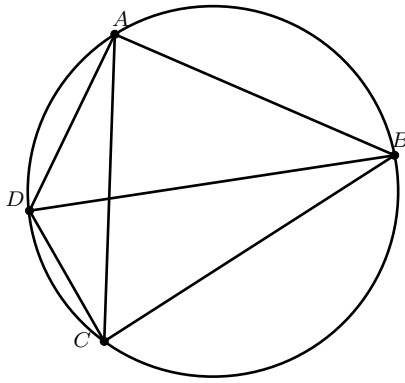
(2 pont)

a) Ha a D rajta van az ABC háromszög köré írt körön, akkor

$$\widehat{ABD} = \frac{m(\widehat{AD})}{2} = \widehat{ACD} \neq 2 \cdot \widehat{ACD}.$$

Tehát D nem lehet a körön.

(2 pont)



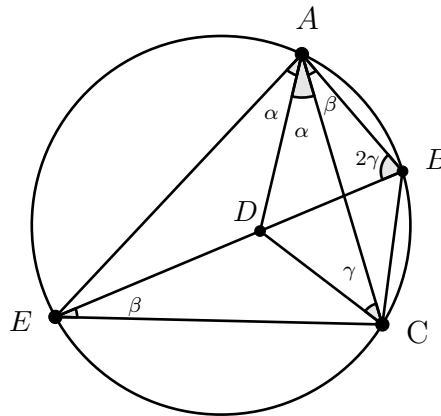
Ha D az ABC háromszög köré írt kör külső tartományában található, akkor ACD szög szárai közé eső körívnek belső pontja lesz az E pont, innen azt kapjuk, hogy

$$\widehat{ACD} > \frac{m(\widehat{AE})}{2} = \widehat{ABE} = \widehat{ABD} = 2 \cdot \widehat{ACD},$$

tehát $\widehat{ACD} > 2 \cdot \widehat{ACD}$, ami ellentmondás.

Tehát a D pont csakis az ABC háromszög köré írt kör belső tartományában található. **(2 pont)**

b) Igazoljuk, hogy ha AD az EAC szögfelezője, akkor $AB = DB$.



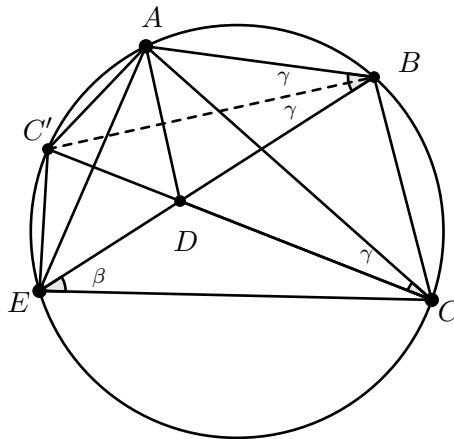
Ha AD az EAC szögfelezője, akkor legyen $\widehat{CAD} = \widehat{DAE} = \alpha$ és $\widehat{DCA} = \gamma$.

Mivel $\widehat{ECA} = \widehat{EBA}$, következik, hogy $\widehat{ECD} = \gamma$, tehát DC a ECA szögfelezője. Így D az AEC háromszögbe írt kör középpontja. A $\widehat{DEC} = \beta$ esetén $\widehat{DAB} = \widehat{DAC} + \widehat{CAB} = \alpha + \beta$. **(2 pont)**

Az AEB háromszög szögeinek összege $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ$, ezért a belső szögek összege alapján

$$\begin{aligned} \widehat{ADB} &= 180^\circ - \widehat{DAB} - \widehat{ABD} \\ &= 180^\circ - (\alpha + \beta) - 2\gamma \\ &= 2\alpha + 2\beta + 2\gamma - \alpha - \beta - 2\gamma \\ &= \alpha + \beta. \end{aligned}$$

Ezek szerint $\widehat{ADB} = \widehat{DAB}$, tehát az ADB háromszög egyenlő szárú, vagyis $AB = DB$. **(4 pont)**



Igazoljuk, hogy, ha $AB = DB$, akkor AD az $\widehat{EAC}$ szögfelezője.

Legyen C' az ABC háromszög köré írt körének a DC egyenessel való metszéspontja. Mivel $\widehat{DCA} = \gamma$ és $\widehat{DBA} = 2\gamma$, következik, hogy C' az AE körív felezőpontja, tehát BC' az $\widehat{ABD}$ szögfelezője.

(2 pont)

Mivel az ABD háromszög egyenlő szárú, következik, hogy $AD \perp BC'$, tehát $ABDC'$ négyszög deltoid. Innen $C'A = C'D = C'E$, azaz CC' az $\widehat{ACE}$ szögfelezője.

(2 pont)

Az $ABDC'$ deltoid tulajdonsága miatt $\widehat{AC'B} = \widehat{BC'C}$, amiből következik, hogy $AB = BC$, vagyis EB az $\widehat{AEC}$ szögfelezője.

(2 pont)

Így a D pont az AEC háromszög szögfelezőinek metszéspontja, amiből következik, hogy AD az $\widehat{EAC}$ szögfelezője.

(2 pont)



6. feladat (20 pont). A $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ halmaz egy A részhalmazára teljesül, hogy az A bármely három a, b, c eleme esetén az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek nincs egész gyöke. Legtöbb hány eleme lehet az A halmaznak?

Barta Zágoni Csongor, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból

(2 pont)

Belátjuk, hogy az A halmaznak legkebbe 5 eleme lehet, és erre megfelelő példa az $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

(2 pont)

Előbb igazoljuk, hogy az A részhalmaz megfelel a feltételeknek. Belátjuk, hogy ha a, b, c mind páratlanok, akkor az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek nincs egész gyöke. Két esetünk van:

(2 pont)

1. Ha n páratlan egész, akkor an^2 , bn , c három páratlan szám, így az összegük páratlan, tehát nem lehet 0.

(2 pont)

2. Ha n páros egész, akkor az an^2 , bn páros, míg a c páratlan, így az összegük páratlan, tehát nem lehet 0.

(2 pont)

Tehát mindkét esetben nincs egyetlen olyan n egész szám sem, amire $an^2 + bn + c = 0$. Tehát az A halmaz tartalmazhatja a B összes páratlan elemét, így az $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ valóban egy megfelelő halmaz. **(2 pont)**

Indirekt módon tegyük fel, hogy A -nak lehet legalább 6 eleme is. Vegyük észre, hogy ha $a, b, c \in A$ elemekre teljesül, hogy $a + c = b$, akkor a -1 egész gyök lesz, hiszen $a(-1)^2 + b(-1) + c = a - b + c = 0$. Ebből adódik, hogy az A -ban nem lehet olyan számhármass, amely teljesíti ezt a feltételt. **(4 pont)**

Két esetet különböztetünk meg.

1. Ha $1 \in A$, akkor $(2, 3), (4, 5), (6, 7), (8, 9)$ számpároknak legfennebb az egyik eleme lehetne benne az A halmazban, ez legfeljebb 5 elem, ami ellentmond annak, hogy minimum 6 eleme van az A halmaznak. **(2 pont)**
2. Ha $1 \notin A$, akkor a $(2, 4, 6)$ és $(3, 5, 8)$ szárhármasok elemei közül legtöbb két-két elem lehet eleme az A halmaznak, így ahhoz, hogy legalább 6 eleme legyen A -nak, a 7 és a 9 biztosan eleme kell legyen az A halmaznak, a számhármassokból pedig két-két elem. Mivel $2 + 7 = 9$ ezért $2 \notin A$, ahonnan $4, 6 \in A$. A $3 + 4 = 7$ és $5 + 4 = 9$ egyenlőségek miatt $3, 5 \notin A$ és így az A halmaznak ismét legfeljebb 5 eleme van, ami ellentmondás. **(2 pont)**

■

11-12. osztály

1. feladat (30 pont). Határozd meg az összes olyan (x, y) egész számpárt, amelyre

$$x(x+1)(x+2)(x+3) + 12 = y^2.$$

Megoldás. Hivatalból

(3 pont)

Végezzük el a következő ekvivalens átalakításokat az egyenleten:

$$\begin{aligned} x(x+1)(x+2)(x+3) + 12 &= y^2, \\ (x^2+3x)(x^2+3x+2) + 12 &= y^2, \\ (x^2+3x+1)^2 - 1 + 12 &= y^2, \\ (x^2+3x+1)^2 + 11 &= y^2, \\ y^2 - (x^2+3x+1)^2 &= 11, \\ ((y-x^2-3x-1))(y+x^2+3x+1) &= 11. \end{aligned}$$

(9 pont)

Vezessük be a $z = x^2 + 3x + 1$ jelölést, ekkor a fenti egyenlet átalakul az

$$(y-z)(y+z) = 11$$

alakra.

(6 pont)

Mivel 11 prímszám, az utóbbi összefüggés pontosan akkor teljesül, ha

$$(y-z, y+z) \in \{(1, 11), (-1, -11), (11, 1), (-11, -1)\}.$$

(3 pont)

Felhasználva, hogy $z = \frac{(y+z)-(y-z)}{2}$ és $y = \frac{(y+z)+(y-z)}{2}$, a szimmetria miatt következik, hogy pontosan azok a (z, y) számpárok a megoldások, amelyekre $z \in \{5, -5\}$ és $y \in \{6, -6\}$.

(3 pont)

Mivel $z = x^2 + 3x + 1$, a $z = 5$ esetben az $x^2 + 3x - 4 = 0$ egyenletet kell megoldanunk, amelynek gyökei $x = -4$ és $x = 1$. A $z = -5$ esetben az $x^2 + 3x + 6 = 0$ egyenletet kell megoldanunk, amelynek nincs valós gyöke. Ezért a keresett megoldások $(-4, 6), (-4, -6), (1, 6), (1, -6)$.

(6 pont)



2. feladat (30 pont). Az ABC háromszögben $AB = AC$. Legyen $D \in (AC)$ egy mozgó pont és $E \in (BC)$ olyan pont, hogy $C \in (BE)$ és $BD = CE$. Igazold, hogy a BDE háromszög köréírt köre átmegy egy B -től különböző rögzített ponton!

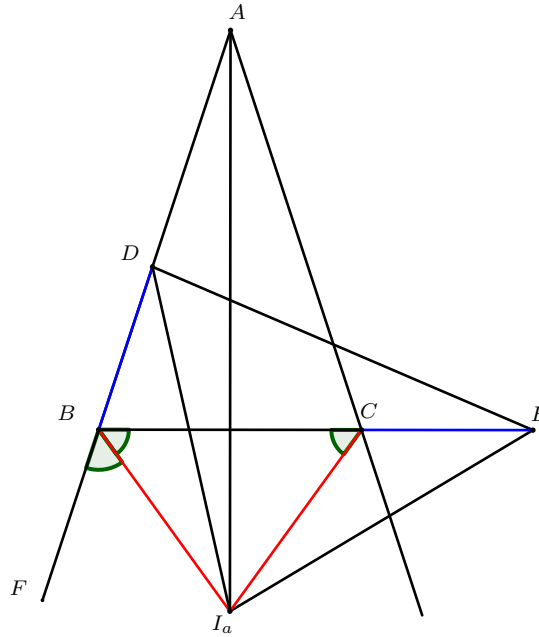
Rákóczi Erik, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból

(3 pont)

Tekintsük a mellékelt ábrát.

(3 pont)



Igazolni kell, hogy a $BDEI_a$ négyszög húrnégyszög. Mivel $AB = AC$ és az AI_a egyenes szögfelező, ezért

$$BI_a = CI_a \quad \text{és} \quad \widehat{FBI_a} = \widehat{I_aBC} = \widehat{BCI_a}. \quad (9 \text{ pont})$$

Innen

$$\widehat{I_aBD} = \widehat{I_aCE} = 180^\circ - \widehat{FBI_a}.$$

Ugyanakkor $BD = CE$, tehát a $DBI_{a\Delta} \equiv ECI_{a\Delta}$, (9 pont)

amiből következik, hogy $\widehat{BDI_a} = \widehat{CEI_a}$. Ezért a $BDEI_a$ négyszög húrnégyszög, azaz I_a rajta van a BDE háromszög köréírt körén. (6 pont)

■

3. feladat (20 pont). Igazold, hogy ha $a, b, x, y > 0$ valós számok, akkor

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{x+y}{xa+yb} + \frac{x+y}{xb+ya} \geq \frac{4}{a+b}.$$

dr. Bencze Mihály, Brassó

Első megoldás. Hivatalból

(2 pont)

Átalakítjuk a középső tagot:

$$\frac{x+y}{xa+yb} + \frac{x+y}{xb+ya} = \frac{(x+y)(xa+yb+xb+ya)}{(xa+yb)(xb+ya)} = \frac{(x+y)^2(a+b)}{(xa+yb)(xb+ya)} \quad (4 \text{ pont})$$

Előbb vegyük a baloldali egyenlőtlenséget. A következő ekvivalens átalakításokat végezzük:

$$\frac{a+b}{ab} \geq \frac{(x+y)^2(a+b)}{(xa+yb)(xb+ya)} \Leftrightarrow \frac{1}{ab} \geq \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2ab+xya^2+xyb^2+y^2ab} \Leftrightarrow$$

$$x^2ab+xya^2+xyb^2+y^2ab \geq abx^2+2abxy+aby^2 \Leftrightarrow xy(a^2-2ab+b^2) \geq 0 \Leftrightarrow xy(a-b)^2 \geq 0,$$

(6 pont)

ami nyilvánvalóan igaz.

A jobboldali egyenlőtlenségen a következő ekvivalens átalakításokat végezzük:

$$\frac{(x+y)^2(a+b)}{(xa+yb)(xb+ya)} \geq \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow [(x+y)(a+b)]^2 \geq 4(xa+yb)(xb+ya) \Leftrightarrow$$

$$(xa+xb+ya+yb)^2 \geq 4(xa+yb)(xb+ya) \Leftrightarrow [(xa+yb) + (xb+yb)]^2 \geq 4(xa+yb)(xb+ya) \Leftrightarrow$$

$$[(xa+yb) - (xb+yb)]^2 \geq 0,$$

ami szintén igaz.

(8 pont)



Második megoldás. Hivatalból

(2 pont)

Legyen $\frac{x}{x+y} = \lambda$, $\frac{y}{x+y} = 1 - \lambda$, $\lambda \in [0, 1]$, ekkor

$$\lambda a + (1 - \lambda)b = b - \lambda(b - a) \quad \text{és} \quad \lambda b + (1 - \lambda)a = a + \lambda(b - a).$$

Vezessük be az $s = \lambda(b - a)$ jelölést.

Így a bizonyítandó egyenlőtlenségek az alábbi alakba írhatók:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{1}{b-s} + \frac{1}{a+s} \geq \frac{4}{a+b}.$$

Az első egyenlőtlenség egyenértékű azzal, hogy

$$\frac{a+b}{ab} \geq \frac{a+b}{(b-s)(a+s)} = \frac{a+b}{ab + s(b-a) - s^2},$$

(6 pont)

ami egyenértékű azzal, hogy $s(b-a) \geq s^2$, ami igaz, mert $b-a \geq s$.

(4 pont)

A számtani és harmonikus közép közti egyenlőtlenség alapján

$$\frac{\frac{1}{b-s} + \frac{1}{a+s}}{2} \geq \frac{2}{(b-s) + (a+s)} = \frac{2}{a+b}.$$

Tehát

$$\frac{1}{b-s} + \frac{1}{a+s} \geq \frac{4}{a+b}.$$

(8 pont)



Harmadik megoldás az első egyenlőtlenségre. Az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény konvex, ezért a Jensen-egyenlőtlenség alapján

$$\frac{1}{\frac{x}{x+y}a + \frac{y}{x+y}b} \leq \frac{x}{x+y} \cdot \frac{1}{a} + \frac{y}{x+y} \cdot \frac{1}{b},$$

(4 pont)

vagyis

$$\frac{x+y}{xa+yb} \leq \frac{x}{x+y} \cdot \frac{1}{a} + \frac{y}{x+y} \cdot \frac{1}{b}.$$

Hasonlóan

$$\frac{x+y}{xb+ya} \leq \frac{x}{x+y} \cdot \frac{1}{b} + \frac{y}{x+y} \cdot \frac{1}{a}. \quad (2 \text{ pont})$$

Összeadva a két egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy

$$\frac{x+y}{xa+yb} + \frac{x+y}{xb+ya} \leq \frac{x}{x+y} \cdot \frac{1}{a} + \frac{y}{x+y} \cdot \frac{1}{b} + \frac{x}{x+y} \cdot \frac{1}{b} + \frac{y}{x+y} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}. \quad (4 \text{ pont})$$

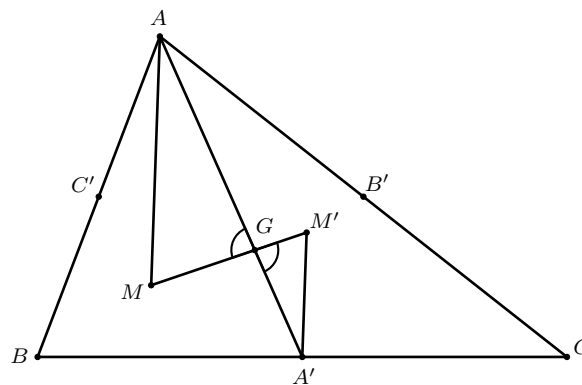
■

4. feladat (20 pont). Az ABC háromszög AB , BC , CA oldalának felezőpontjai C' , A' , B' és legyen M egy pont a síkban. Ha a az A' ponton át az AM egyenessel párhuzamosan húzott egyenes, b a B' ponton át az BM egyenessel párhuzamosan húzott egyenes és c a C' ponton át az CM egyenessel párhuzamosan húzott egyenes, akkor igazold, hogy az a , b , c egyenesek egy pontban futnak össze!

Szilágyi Zsolt, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból

(2 pont)



Tekintsük az ábrát!

(2 pont)

Legyen G az ABC háromszög súlypontja. Ha $M = G$, akkor az a, b, c egyenesek a háromszög oldalfelezői, így a G súlypontban futnak össze.

(2 pont)

Tegyük fel, hogy $M \neq G$. Legyen M' az MG egyenes azon pontja, amelyre G az M és M' pontok között van és $MG = 2M'G$.

(4 pont)

Ekkor $AGM_{\Delta} \sim A'GM'_{\Delta}$, mert $\widehat{AGM} \equiv \widehat{A'GM'}$ (csúcsszögek), $\frac{MG}{GM'} = \frac{AG}{GA'} = 2$.

(4 pont)

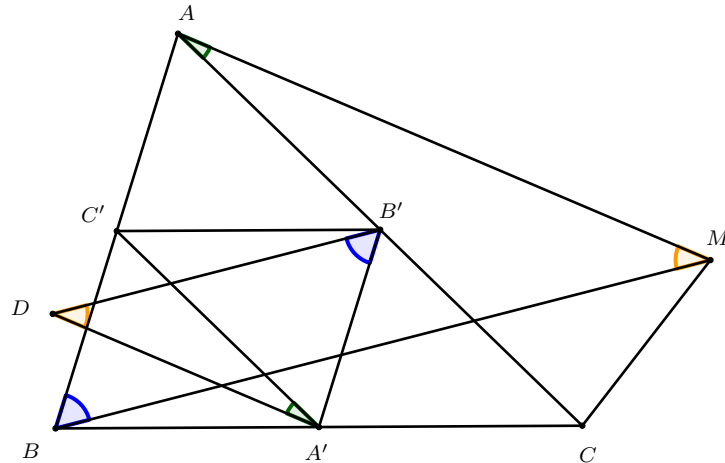
Így $\widehat{MAG} \equiv \widehat{GA'M'}$, ahonnan $AM \parallel A'M'$, tehát $A'M' = a$. Hasonlóan belátható, hogy $M'B' = b$ és $M'C' = c$. Tehát M' az a, b, c egyenesek összefutási pontja.

(6 pont)

■

Második megoldás. Hivatalból

(2 pont)



Tekintsük az ábrát!

(2 pont)

Legyen az a és b egyenes metszéspontja D . Igazolni fogjuk, hogy $D \in c$, azaz $C'D \parallel CM$. (4 pont)

A feladat feltételei alapján $A'D \parallel AM$, $B'D \parallel BM$ és $A'B' \parallel AB$, mert $A'B'$ középvonal az ABC háromszögben. Innen következik, hogy $A'B'D_{\Delta} \sim ABM_{\Delta}$, amiből

$$\frac{A'D}{AM} = \frac{B'D}{BM} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{2}.$$

(4 pont)

Mivel $A'D \parallel AM$ és $A'C' \parallel AC$, mert $A'C'$ középvonal, következik, hogy $\widehat{DA'C'} = \widehat{CAM}$, mert párhuzamos szárú szögek. Az $A'DC'_{\Delta}$ és AMC_{Δ} háromszögekben

$$\widehat{DA'C'} = \widehat{CAM} \quad \text{és} \quad \frac{A'D}{AM} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{1}{2},$$

ezért $A'DC'_{\Delta} \sim AMC_{\Delta}$.

(6 pont)

Innen a megfelelő oldalak párhuzamossága miatt adódik, hogy

$$C'D \parallel CM,$$

vagyis $D \in c$. Tehát az a , b , c egyenesek egy pontban metszik egymást.

(2 pont)

■

5. feladat (20 pont). Angelico felírt a táblára néhány 2026-nál nem nagyobb, legfeljebb 2026 db, nem feltétlenül különböző pozitív egész számot. Ezután mindegyik számot egyenként a 2026. hatványra emelte, majd a kapott számokat összeadta. Az így kapott eredmény $9^{1014} \cdot 11^{2028}$. Hány számot írhatott fel Angelico?

Barta Zágoni Csongor, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból

(2 pont)

A feladat feltételéből:

$$a_1^{2026} + a_2^{2026} + \dots + a_s^{2026} = 9^{1014} \cdot 11^{2028},$$

ahol mi az s -t szeretnénk meghatározni. Mivel a felírt számok mindegyike kisebb, mint 2027, és 2027 prímszám, ezért mind relatív prímek a 2027-tel.

(4 pont)

Alkalmazva a kis Fermat-tételt, a_i^{2026} minden i -re 1-et ad maradékul 2027-tel osztva. (4 pont)

Mivel s legfeljebb 2026, ezért az összeg 2027-es maradéka pontosan annyi, ahány számot összeadunk, tehát s . (4 pont)

Vegyük észre, hogy

$$9^{1014} \cdot 11^{2028} = 3^{2028} \cdot 11^{2028} = 33^{2028} = 33^{2026} \cdot 1089,$$

és mivel a kis Fermat-tételből 33^{2026} 2027-es maradéka 1, így az összegé 1089. Tehát $s = 1089$ darab számot írt fel Angelico a táblára. (4 pont)

Ha 1089 darab 33-as van a táblán, akkor ténylegesen ezt az összeget kapjuk. (2 pont) ■

6. feladat (20 pont). Ali és Baba egy $1 \times 4n$ mezőből álló, sakktáblaszerűen színezett táblán játszik ($n \geq 2$). A játékosok felváltva lépnek, Ali kezd. Egy lépésben a soron lévő játékos két tetszőleges mező színét felcseréli, azzal a megkötéssel, hogy egy adott mezőpár cseréjére a játék teljes ideje alatt legfeljebb egyszer kerülhet sor. A játék akkor ér véget, ha az összes lehetséges párt megcserélték. Ali célja, hogy a játék bármely fázisában megjelenjen a táblán egy minél hosszabb egyszínű szakasz, Baba pedig ezt próbálja megakadályozni. Mekkora az a leghosszabb egyszínű szakasz, amit Ali a játék kimenetelétől függetlenül, átmenetileg is képes előállítani?

*Bodor Ádám, Csíkszereda
Ercse Ferenc, Sepsiszentgyörgy
Sajter Klaus, Csíkszereda*

Megoldás. Hivatalból (2 pont)

Állítsuk párba a mezőket, úgy, hogy az i . és az $i + 1$. mező van párban, ahol $1 \leq i < 4n$ páratlan szám. Az $2i + 1$. és $2i + 2$. mezőt tartalmazó párt nevezzük az i . párnak, $0 \leq i \leq 2n - 1$. Ha Ali a k . és az m . párból cserél ki két mezőt, Baba cserélje ki ezen párok fennmaradó egy-egy mezőjét. (4 pont)

Ha Ali egy páron belül cserél, Baba egy másik páron belül cserél (ezt mindig megteheti, mert $\frac{4n}{2} = 2n$, avagy páros számú pár van). (2 pont)

Ilyen módon Baba lépése után (és az első lépés előtt) bármelyik párban pontosan egy fekete és pontosan egy fehér mező lesz. (2 pont)

Ekkor bármely 4 egymást követő mező közül legfeljebb 3 lehet azonos színű Baba bármely lépése után (mivel 4 egymásutáni mező tartalmaz legalább egy párt), így Ali 4 azonos színű mezőt elérhet a következő körében, de többet biztos, hogy nem. (4 pont)

Könnyen igazolható példával, hogy Ali 4-et mindig el tud érni Baba stratégiájától függetlenül (pl. egy 8 hosszú sorozaton belül), így a leghosszabb egyszínű szakasz, amit Ali elő tud állítani 4 hosszú. (6 pont) ■