



MINISTERUL EDUCAȚIEI



VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

V. osztály

1. feladat. Egy sportosztályban kézilabdázók, futók és röplabdázók vannak, és minden gyerek csak egy sportot űz. Tudjuk, hogy a kézilabdázók és a futók összesen kétszer annyian vannak, mint a röplabdázók; a kézilabdázók és a röplabdázók számának összege kétszerese a futók számának; a futók és a röplabdázók együtt 8-cal többen vannak, mint a kézilabdázók. Hány kézilabdázó, futó, illetve röplabdázó van külön-külön a sportosztályban?

2. feladat. a) Határozd meg azt a legkisebb, nullától különböző k természetes számot, amelyre a $k \cdot 2024$ szám felírható három egymás utáni természetes szám szorzataként!

b) Két természetes szám összege 2024, és az egyiknek a másikkal való osztási maradéka 6. Melyek ezek a számok?

3. feladat. Adott a következő számsorozat: 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, ...

a) Milyen szabály szerint követik egymást a számok a sorozatban? Írd fel a sorozat további öt tagját!

b) Határozd meg a számsorozat 2024. tagját!

c) Hányadik tagja a sorozatnak az 1010110011 szám?

4. feladat. Roli 2024. január 1-én olyan karórát szeretett volna vásárolni, amelyik azt is mutatja, hogy az aktuális nap a hónap hányadik napja. A vásárolt óra számlapján egy számláló 1-től 31-ig változik, és minden éjfélkor eggyel növekszik, majd a 31-es után ismét 1-esre vált. A hónapok különböző hosszúsága miatt ez az óra legtöbbször téves számot mutat. Újév napján az óra helyesen járt, azaz 1-est mutatott.

a) A 2024-es szökőévben hány nap fogja a helyes számot mutatni az óra?

b) 2024. december 31-én hányast fog mutatni az óra? Hát 2025. december 31-én?

c) A 2028-as szökőévben melyik lesz az első olyan nap, amikor a helyes számot mutatja az óra?

2024

Január

Hé	Ke	Sz	Cs	Pé	Sz	Va
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Február

Hé	Ke	Sz	Cs	Pé	Sz	Va
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29			

Március

Hé	Ke	Sz	Cs	Pé	Sz	Va
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

Április

Hé	Ke	Sz	Cs	Pé	Sz	Va
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

Május

Hé	Ke	Sz	Cs	Pé	Sz	Va
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

Június

Hé	Ke	Sz	Cs	Pé	Sz	Va
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

Július

Hé	Ke	Sz	Cs	Pé	Sz	Va
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Augusztus

Hé	Ke	Sz	Cs	Pé	Sz	Va
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Szeptember

Hé	Ke	Sz	Cs	Pé	Sz	Va
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30						

Október

Hé	Ke	Sz	Cs	Pé	Sz	Va
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

November

Hé	Ke	Sz	Cs	Pé	Sz	Va
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	

December

Hé	Ke	Sz	Cs	Pé	Sz	Va
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					



MINISTERUL EDUCAȚIEI



VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

VI. osztály

1. feladat. Adottak a következő halmazok, ahol $u(p)$ a p szám utolsó számjegyét jelöli:

$$\begin{aligned}A &= \{1 + u(1^{2024}); 2 + u(2^{2024}); 3 + u(3^{2024}); 5 + u(5^{2024})\}, \\B &= \{x \in \mathbb{N} \mid x = u(a), a \in A\}, \\C &= \{b \in \mathbb{N} \mid b = u(y^2), y \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

- a) Határozd meg az A, B, C halmazokat az elemeik felsorolásával!
- b) Határozd meg az $[(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] \cap [(A \cup C) \setminus B]$ halmaz elemeinek számát!

2. feladat. Egy téglalap alakú papírlapot az oldalakkal párhuzamos egyenesekkel vízszintesen 5 és függőlegesen 60 egyenlő részre osztunk. Így egy négyzethálós lapot kapunk. Igazold, hogy ha egy ugyanakkora méretű papírlapot az oldalakkal párhuzamos egyenesekkel vízszintesen 14, míg függőlegesen 168 egyenlő részre osztunk, akkor az így keletkezett háló kis téglalapjai négyzetek!

3. feladat. Adott az O középpontú és AB átmérőjű kör, F pedig az AO szakasznak egy tetszőleges belső pontja. Vedd fel az AF átmérőjű és C középpontú kört, majd a BC átmérőjű és E középpontú kört! Legyen a két kör sugara $AC = r$ és $EB = R$.

- a) Számítsd ki az OE és OC szakaszok hosszát R és r segítségével!
- b) Ha $OE = OF$, határozd meg az $\frac{AC}{CB}$ arány értékét!
- c) Ha az F pont egybeesik az O ponttal, számítsd ki az $\frac{AC}{CB}$ arány értékét!

4. feladat. Az $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = n \cdot (64^{12} + 81^9 + 125^8) : (8^{24} + 27^{12} + 625^6), n \leq 2024, n \in \mathbb{N}^*\}$ halmaz összes elemét felírjuk a táblára. Letörölünk két számot, majd helyette felírjuk, a letörölt két szám összegének 11-gyel való osztási maradékát. Ezeket a lépéseket ismételve egy idő múlva a táblán az 1003 és még egy szám maradt.

- a) Legyen s az A halmaz elemeinek összege. Határozd meg az s osztóinak számát!
- b) Melyik szám maradt az 1003 mellett a táblán?

VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

VII. osztály

1. feladat. Az x, y, z szigorúan pozitív racionális számok esetén fennállnak az

$$\frac{x}{y+z} = \frac{y}{x+z} = \frac{z}{x+y}$$

egyenlőségek. Mutasd ki, hogy

- a) $\sqrt{\frac{x+y}{x+2y+3z} + \frac{y+z}{y+2z+3x} + \frac{z+x}{z+2x+3y}} \in \mathbb{Q}$;
b) $\sqrt{\frac{xy}{z(2x-y)} + \frac{yz}{x(2y-z)} + \frac{zx}{y(2z-x)}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2. feladat. Határozd meg azokat az $\overline{abc}$ alakú háromjegyű természetes számokat, amelyekre egyidőben teljesül, hogy $\sqrt{\overline{a,b(bc)} + \overline{b,c(ca)} + \overline{c,a(ab)}} \in \mathbb{Q}$, illetve az a számjegy a $2b$ és $3c$ számok számtani közepe! Az a, b és c számjegyek nem feltétlen különbözöek.

3. feladat. Egy baráti társaságban vívók, úszók és távugrók vannak. Minden személy csak egy sportot űz. Közülük egy vívó megállapítja, hogy az úszók és távugrók összesen hétszer annyian vannak, mint az ő vívó barátai. Egy úszó úgy számolja, hogy a vívók és távugrók összesen háromszor annyian vannak, mint az ő úszó barátai. Egy távugró pedig azt állítja, hogy az ő távugró barátai annyian vannak, mint a vívók és úszók összesen.

Hány vívó, hány úszó és hány távugró van a baráti társaságban?

4. feladat. Az A csúcsában derékszögű ABC háromszög BM és CN szögfelezői az I pontban metszik egymást, $M \in AC$, $N \in AB$. Legyenek P és Q az M , illetve N pontokból a BC oldalra húzott merőlegesek talppontjai. Továbbá legyen D az MQ szakasz felezőpontja, és E az I pont BC egyenes szerinti szimmetrikusa.

- a) Igazold, hogy I az APQ háromszög köréírt körének középpontja!
b) Igazold, hogy $ID \perp BC$!
c) Igazold, hogy $IPEQ$ négyzet!



MINISTERUL EDUCAȚIEI



VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

VIII. osztály

1. feladat. Az x, y, z egész számok esetén $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + 2y - 3z)$. Határozd meg az x, y, z számok számtani közepének a lehetséges legkisebb, illetve legnagyobb értékét!

2. feladat. Egy asztalra egymás mellé pálcikákat helyezünk. Anna és Petra felváltva vesz el legalább 1 és legfeljebb 6 pálcikát. Mindig Petra kezd. Az a nyertes, aki az utolsó pálcikát is el tudja venni.

a) Létezik-e Petrának nyerő stratégiája, ha kezdetben az asztalon 2024 pálcika van? Indokold!

b) Hány pálcikát helyezünk kezdetben az asztalra ahhoz, hogy Annának legyen nyerő stratégiája? Indokold!

3. feladat. Az A -ban derékszögű ABC háromszögben $\widehat{B} = 60^\circ$. Az AC oldalon felvesszük a D pontot úgy, hogy $AD = 5$ cm. Legyen $DE \perp BC$, $E \in BC$ és a DE szakasz hossza 3 cm.

a) Határozd meg a BD szakasz hosszát!

b) A $(DE$ félegyenesen felvesszük az F pontot úgy, hogy $\widehat{DBF} = 60^\circ$. Határozd meg az ABE és DBF háromszögek területeinek arányát!

4. feladat. Az $ABCD A'B'C'D'$ szabályos négyoldalú hasámban $AA' = 12$ cm. Az E és F pontok az AC , illetve az $A'C$ szakaszok felezőpontjai. Az AF egyenes merőleges az $A'E$ egyenesre.

a) Igazold, hogy $ABCD A'B'C'D'$ kocka!

b) Számítsd ki a D pont távolságát az AF egyenestől!



CONSILIUL
JUDEȚEAN
MARAMUREȘ



MINISTERUL EDUCAȚIEI



VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

IX. osztály – I. forduló

1. feladat. Ha az a, b és c pozitív valós számok szorzata 1, igazold, hogy

$$\frac{a^{2025} + a^{2024}}{1 + bc} + \frac{b^{2025} + b^{2024}}{1 + ac} + \frac{c^{2025} + c^{2024}}{1 + ab} \geq 3.$$

2. feladat. Igazold, hogy tetszőleges a és b valós számok esetén a következő egyenletek közül legalább egynek van valós megoldása:

$$x^2 + 2ax + 2b = 0;$$

$$x^2 + 2bx + 2a = 0;$$

$$x^2 + 4x - ab = 0.$$

3. feladat. Az $ABCD$ egyenlő szárú trapézban $AB \parallel CD$. A trapéz kör köré írható, és jelölje E, F, G és H rendre a trapézba írt kör és az AB, BC, CD valamint DA oldalak érintési pontjait. Legyen J, K, L és M rendre az EGH, EFH, EFG és FGH háromszög súlypontja.

a) Igazold, hogy $JK \parallel GF$!

b) Bizonyítsd be, hogy az $EFGH$ és $JKLM$ négyszögek súlypontjai egybeesnek! (Egy négyszög súlypontja az átlói felezőpontját összekötő szakasz felezőpontja.)

c) Legyen N a KL és MJ egyenesek metszéspontja. Ha J az NM szakasz felezőpontja és $AB = 4$, számítsd ki a $JKLM$ négyszög területét!

4. feladat. Az $ABCD$ konvex négyszögben E és F rendre az AC és BD átlók felezőpontja, G és H rendre az AD és BC oldalak felezőpontja, illetve fennáll a $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EF}$ egyenlőség.

a) Bizonyítsd be, hogy az E és F pontok egybeesnek!

b) Bizonyítsd be, hogy a G, E és H pontok kollineárisak!

c) Ha M a CD egyenes azon pontja, amelyre $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ és P az AH és BM egyenesek metszéspontja, akkor határozd meg az $\frac{AP}{PH}$ és $\frac{BP}{PM}$ arányok értékét!



MINISTERUL EDUCAȚIEI



VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

X. osztály – I. forduló

1. feladat. a) Igazold, hogy $\frac{1}{\log_b a} + \frac{1}{\log_c a} \geq \log_{\frac{a^2+4}{4}} b + \log_{\frac{a^2+4}{4}} c$, ahol $a, b, c \in (1, \infty)$!

b) Mutasd ki, hogy $\log_{bc} \frac{a^2+4}{4} + \log_{ca} \frac{b^2+4}{4} + \log_{ab} \frac{c^2+4}{4} \geq \frac{3}{2}$, ahol $a, b, c \in (1, \infty)$!

c) Határozd meg az a, b, c egynél nagyobb természetes számokat úgy, hogy

$$\log_{bc} \frac{4bc}{a^2+4} + \log_{ca} \frac{4ca}{b^2+4} + \log_{ab} \frac{4ab}{c^2+4} \geq \frac{3}{2}.$$

2. feladat. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$5(\sqrt[3]{5x-9} + 1) = (x-1)^3 + 9.$$

3. feladat. a) Határozd meg az $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ szürjektív függvényt, ha

$$f(x) \cdot f(f(x)) + f(f(x)) = f(x) - 1,$$

minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ esetén!

b) Értelmezzük a $h_n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\text{-szer } f}$ függvényeket, ahol $n \in \mathbb{N}^*$. Határozd meg a h_{2024} függvényt!

4. feladat. Az ABC egyenlő oldalú háromszög köré írt kör egységnyi sugarú. A kör tetszőleges M pontja esetén igazold a következő egyenlőtlenségeket:

a) $MA \cdot MB \cdot MC \leq 2\sqrt{2}$;

b) $\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$.



MINISTERUL EDUCAȚIEI



VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

XI. osztály – I. forduló

1. feladat. Az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot a következőképpen értelmezzük:

$$a_0 = a_1 = 1 \quad \text{és} \quad 17^{a_{n+2}} = 15^{a_{n+1}} + 8^{a_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- a) Igazold, hogy az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens!
b) Számítsd ki az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat határértékét!

2. feladat. Ha $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ igazold, hogy

$$\det(A^2 + A + I_2) = \left(\frac{1}{2} + \operatorname{tr} A\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \det A\right)^2 + \operatorname{tr} A \cdot \det A + \frac{1}{2},$$

ahol $\operatorname{tr} A$ az A mátrix főátlóján lévő elemeinek összege (az A mátrix nyoma).

3. feladat. Az $(x_n)_{n \geq 1}$ sorozatot az $x_{n+1} = x_n^2 - (2a-1) \cdot x_n + a^2$ rekurziós összefüggéssel értelmezzük, ahol $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ és $x_1 \in \mathbb{R}$.

- a) Ha $x_1 = a + 1$, igazold, hogy az

$$y_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k - a + 1} \right)^{x_{n+1} - a}, \quad \forall n \geq 1$$

általános tagú sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!

- b) Ha $x_1 \in (a-1, a)$, igazold, hogy a

$$z_n = (x_n - a + 1)^n, \quad \forall n \geq 1$$

általános tagú sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!

4. feladat. Tekintjük az $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mátrixokat. Jelölje $\operatorname{tr} M$ az M mátrix főátlóján lévő elemek összegét (az M mátrix nyomát).

- a) Ha $B \neq O_3$, igazold, hogy az $f: \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(X) = \operatorname{tr}(B \cdot X)$ függvény szürjektív!
b) Ha $\operatorname{tr}(A \cdot X) = 0$, minden $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ esetén, akkor mutasd ki, hogy $A = O_3$!



MINISTERUL EDUCAȚIEI



VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

XII. osztály – I. forduló

1. feladat. Határozd meg az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{e^{2x}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{e^{2x}}{1 + e^x + e^{2x}}$$

függvény primitív függvényeit!

2. feladat. Adott a $(G, \cdot)$ csoport és az $f: G \rightarrow G$ függvény úgy, hogy

$$f(xf(y)) = f(x) \cdot y, \text{ bármely } x, y \in G \text{ esetén.}$$

a) Igazold, hogy f csoportautomorfizmus!

b) Határozd meg az f függvényt, ha a G csoportnak öt eleme van!

3. feladat. Határozd meg azokat az $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ és $g: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ függvényeket, amelyek egyszerre teljesítik a következő feltételeket:

a) az $F: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $F(x) = f(x) \cdot e^{-x}$ függvény a g függvény primitív függvénye;

b) a $G: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $G(x) = g(x) \cdot e^{-x}$ függvény az f függvény primitív függvénye;

c) $f(x) > g(x)$, bármely $x \in (0, +\infty)$ esetén!

4. feladat. A $(G, \cdot)$ véges csoportnak $2n$ eleme van. Legyen $H = \{x \in G \mid x^2 = e\}$, ahol e a $(G, \cdot)$ csoport semleges eleme. Jelölje $|H|$ a H halmaz számosságát.

a) Igazold, hogy ha $|H| \geq n + 1$ és $x \cdot y \in H$, bármely $x, y \in H$ esetén, akkor a $(G, \cdot)$ Abel-féle csoport!

b) Igazold, hogy ha n páratlan, akkor $|H| \leq n + 1$.



MINISTERUL EDUCAȚIEI



VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

IX. osztály – II. forduló

- 1. feladat.** a) Hány oldala van annak a konvex sokszögnek, amelynek 350 átlója van?
b) Van-e olyan konvex sokszög amelynek $2024^m + 2$ átlója van, ahol $m \in \mathbb{N}$?
- 2. feladat.** Az A -ban derékszögű ABC háromszögben $AB = \sqrt{2}$, E és D rendre az AB és BC oldal felezőpontja. Az AD és CE egyenesek merőlegesek egymásra és az F pontban metszik egymást.
- a) Igazold, hogy az AFC háromszög területe egyenlő a $BDFE$ négyszög területével!
b) Számítsd ki a BF szakasz hosszát!

- 3. feladat.** Az $(a_n)_{n \geq 1}$ pozitív tagú sorozatról tudjuk, hogy $a_1 = 1$, és teljesül az alábbi összefüggés:

$$\sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{a_k \cdot a_{k+1}} = 1 - \frac{1}{a_{n+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- a) Határozd meg a sorozat általános tagját!

- b) Bizonyítsd be, hogy $\sum_{k=1}^n k \cdot a_k = \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} \right)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$

- c) Igazold, hogy $\sum_{k=1}^n \frac{a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2}}{k^3 + 3k^2 + 2k} = \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{a_k} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n+2} \sqrt{a_k} \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$

- 4. feladat.** Határozd meg azokat az x, y, z valós számokat, amelyekre

$$(x - 2y - 3)^2 + (x + y - z)^2 + (2x - y - z)^2 = 3.$$

- 5. feladat.** Az ABC háromszögben a BAC szög mértéke 120° és AP, BQ, CR az ABC háromszög szögfelezői, $P \in BC, Q \in CA, R \in AB$.

- a) Igazold, hogy $AP = \frac{bc}{b+c}$, ahol $b = AC$ és $c = AB$.

- b) Bizonyítsd be, hogy $QP \perp PR$.

- 6. feladat.** Lúdas Matyinak van 31 lúdja, 33 kacsája és 35 tyúkjá. Találkozik a vásárban Döbrögivel, akinek 27 lúdja, 33 kacsája és 39 tyúkjá van. Megegyeznek, hogy cserélni fognak a következő szabály szerint: két darab, különböző fajtajú szárnyasért cserébe a másik ad két szárnyast a harmadik fajtából, vagy fordítva, két ugyanolyan szárnyasért egy-egy darabot a másik két fajtából.

- a) Sikerülhet-e Döbröginek úgy csereberélnie, hogy a végén minden fajta szárnyasból ugyanannyi darabja legyen?
b) Sikerülhet-e Lúdas Matyinak úgy csereberélnie, hogy a végén minden fajta szárnyasból ugyanannyi darabja legyen?

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 4 óra.



MINISTERUL EDUCAȚIEI



VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

X. osztály – II. forduló

1. feladat. a) Igazold, hogy $3^p + 2^p$ osztható 5-tel, bármely $p \geq 1$ páratlan természetes szám esetén!

b) Mutasd ki, hogy $3^{12m+1} + 2^{12n+5}$ osztható 5-tel, bármely m és n természetes számok esetén!

2. feladat. Adott az $E(n) = 9^n + 3^{n+1} + 4^n + 3 \cdot 2^n + 2 \cdot 6^n + 2$ kifejezés, ahol $n \in \mathbb{N}$. Tanulmányozd, hogy létezik-e olyan n természetes szám, amelyre

a) $E(n)$ prímszám;

b) $E(n)$ teljes négyzet;

c) $E(n) = 210$.

3. feladat. Oldd meg a valós számok halmazán az

$$(x^2 - 2x)(x^2 - x - 6)(x^2 - 3x - 4) + 36 = 0$$

egyenletet!

4. feladat. Egy kincskereső egy egyenlő oldalú háromszög alakú területet tár fel, amelynek oldala 5 egység. A terület fel van osztva kongruens egyenlő oldalú háromszögekre, amelyek oldalai 1 egység hosszúak és párhuzamosak az eredeti háromszög oldalaival. Minden egyes kis háromszögben egy kincs rejlik. A feltárást a kincskereső bármely kis háromszögben elkezdheti, ezután viszont egy háromszögből csak vele oldalszomszédos háromszögbe mehet át, egy háromszögbe nem térhet vissza és nem hagyhatja el a nagy háromszög területét.

Maximálisan hány kincset gyűjthet be a kincskereső? Adj meg egy útvonalat, amely mentén haladva ez elérhető!

5. feladat. Az ABC háromszög köré írt kör középpontja O , átmérője AM és $N \in AM$ úgy, hogy $BN \perp AM$.

a) Számítsd ki az AOB és BNM háromszögek területének az arányát, ha $\widehat{C} = 105^\circ$.

b) Mekkora az ABC háromszög C szögének a mértéke, ha $3 \cdot T_{AOB\Delta} = 2 \cdot T_{BNM\Delta}$ és $\widehat{C} > 90^\circ$?

6. feladat. Robi felírt a táblára 100 darab egyest. Ezután minden lépésben letöröl egy x számot a tábláról, és helyette felírja az $\frac{x}{2}, \frac{x}{3}, \frac{x}{6}$ számokat. Dávid észrevette, hogy akárhányszor ismétli meg ezt Robi, minden lépés után kiválasztható egy olyan szám, amely legalább 34-szer szerepel a táblán. Bizonyítsd be, hogy Dávid észrevétele helyes!



MINISTERUL EDUCAȚIEI



VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

XI-XII. osztály – II. forduló

1. feladat. Határozd meg az összes olyan természetes számot, amelynek pontosan hat pozitív osztója van, és pozitív valódi osztóinak összege 2024-gyel egyenlő!

2. feladat. Oldd meg a valós számok halmazán a

$$\begin{cases} \log_5(22+x) = \log_3(12-y) \\ \log_5(22+y) = \log_3(12-z) \\ \log_5(22+z) = \log_3(12-x) \end{cases}$$

egyenletrendszert!

3. feladat. Az $ABCD$ húrnégyszög átlói merőlegesen egymásra, E az átlók metszéspontja. A négyszög köré írható kör középpontja O és M az AB oldal felezőpontja.

a) Igazold, hogy $EM \perp CD$!

b) Igazold, hogy $OM = \frac{CD}{2}$!

4. feladat. Az $1, 2, 3, \dots, 4n$ számokat szétosztjuk n darab halmazba. Igazold, hogy bármely szétosztás esetén létezik az n darab halmaz valamelyikében három olyan szám, amely egy háromszög oldalainak mérőszáma!

5. feladat. Az ABC háromszögben fennáll a

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C + \sqrt{3} \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{5}{4}$$

összefüggés. Igazold, hogy az ABC háromszög egyenlő oldalú!

6. feladat. Tekintsük az $(S_n)_{n \geq 1}$ sorozatot, ahol S_n az első n darab prímszám összegét jelöli ($S_1 = 2, S_2 = 5, S_3 = 10, \dots$). Igazold, hogy a sorozatnak nem lehet két egymás utáni tagja négyzetszám!



MINISTERUL EDUCAȚIEI



VI. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXIII. EMMV

országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

V. osztály

1. feladat (10 pont). Egy sportosztályban kézilabdázók, futók és röplabdázók vannak, és minden gyerek csak egy sportot űz. Tudjuk, hogy a kézilabdázók és a futók összesen kétszer annyian vannak, mint a röplabdázók; a kézilabdázók és a röplabdázók számának összege kétszerese a futók számának; a futók és a röplabdázók együtt 8-cal többen vannak, mint a kézilabdázók. Hány kézilabdázó, futó, illetve röplabdázó van külön-külön a sportosztályban?

Simon József, Csíkszereda

Első megoldás. Hivatalból (1 pont)

Mivel a kézilabdázók és a futók összesen kétszer annyian vannak, mint a röplabdázók, ezért a sportosztályban levők száma háromszorosa a röplabdázók számának. (2 pont)

Mivel a kézilabdázók és a röplabdázók számának összege kétszerese a futók számának, ezért a sportosztályban levők száma a futók számának is háromszorosa. (2 pont)

A fenti két állítás alapján, a röplabdázók száma megegyezik a futók számával, (1 pont)

ugyanakkor a kézilabdázók száma is egyenlő a futók számával, (2 pont)

tehát a különböző sportokat űzők száma megegyezik. (1 pont)

Mivel a futók és a röplabdázók számának összege 8-cal több a kézilabdázók számánál, de a különböző sportokat űzők száma megegyezik, ezért 8 kézilabdázó, 8 futó és 8 röplabdázó van a sportosztályban. (1 pont)



Második megoldás. Hivatalból (1 pont)

Jelöljük a kézilabdázók, a futók, illetve a röplabdázók számát rendre k , f , illetve r betűkkel.

A feladatban szereplő állítások alapján $k + f = 2r$, $k + r = 2f$ és $f + r = k + 8$. (3x1 pont)

Az első két összefüggésből azt kapjuk, hogy $k + f + r = 3r = 3f$, (2x1 pont)

ahonnan $r = f$. (1 pont)

Figyelembe véve, hogy $k + r = 2f$, következik, hogy $k = f$, (1 pont)

tehát $k = r = f$. (1 pont)

Az $f + r = k + 8$ összefüggést is felhasználva, $k = r = f = 8$ lesz, (1 pont)

tehát 8 kézilabdázó, 8 futó és 8 röplabdázó van a sportosztályban. ■

2. feladat (10 pont). a) Határozd meg azt a legkisebb, nullától különböző k természetes számot, amelyre a $k \cdot 2024$ szám felírható három egymás utáni természetes szám szorzataként!

b) Két természetes szám összege 2024, és az egyiknek a másikkal való osztási maradéka 6. Melyek ezek a számok?

Pálhegyi Farkas László, Nagyvárád

Nagy Örs, Kolozsvár

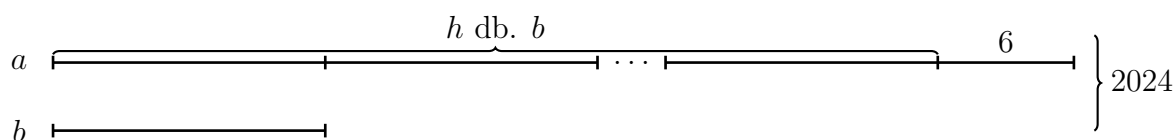
Megoldás. Hivatalból (1 pont)

a) Mivel a 2024 prímtényezős felbontása $2^3 \cdot 11 \cdot 23$, (1 pont)

ezért a szorzat valamelyik tényezője a 23 többszöröse kell legyen, így a legkisebb nem nulla szorzatban az egyik tényező a 23. (1 pont)

Ilyen felbontás a $22 \cdot 23 \cdot 24 = 6 \cdot 2024$, ahonnan $k = 6$. (1 pont)

b) Legyen az egyik szám a , a másik pedig b . Ekkor $a + b = 2024$ és $a = b \cdot h + 6$, ahol $b > 6$. (1 pont)



Ezek alapján $2024 - 6 = 2018$ a b szám többszöröse, pontosan $(h + 1)$ -szerese. (1 pont)

Mivel $2018 = 1 \cdot 2018 = 2 \cdot 1009$, és $b > 6$, (1 pont)

ezért a b szám csak 1009 vagy 2018 lehet. (1 pont)

Ha $b = 1009$, akkor $a = 1 \cdot 1009 + 6 = 1015$. (1 pont)

Ha $b = 2018$, akkor $a = 0 \cdot 2018 + 6 = 6$. (1 pont)



3. feladat (10 pont). Adott a következő számsorozat: 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, ...

a) Milyen szabály szerint követik egymást a számok a sorozatban? Írd fel a sorozat további öt tagját!

b) Határozd meg a számsorozat 2024. tagját!

c) Hányadik tagja a sorozatnak az 1010110011 szám?

*Mátyás Beáta, Szatmárnémeti
Nagy Örs, Kolozsvár*

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

a) A sorozat tagjai a 0, 1, 2, 3, ... természetes számok 2-es számrendszerben felírt alakjai. (1 pont)

A következő 5 tag: 111, 1000, 1001, 1010, 1011 (2 pont)

b) A sorozat 2024. tagja a 2023-as szám lesz, (1 pont)

aminek a 2-es számrendszerben felírt alakja 11111100111. (2 pont)

c) A 2-es számrendszerbeli 1010110011 szám tízes számrendszerben felírva

$$1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2 + 1 = 691. \quad (2 \text{ pont})$$

Ez a szám a sorozat 692. tagja. (1 pont)



4. feladat (10 pont). Roli 2024. január 1-én olyan karórát szeretett volna vásárolni, amelyik azt is mutatja, hogy az aktuális nap a hónap hányadik napja. A vásárolt óra számlapján egy számláló 1-től 31-ig változik, és minden éjfélkor eggyel növekszik, majd a 31-es után ismét 1-esre vált. A hónapok különböző hosszúsága miatt ez az óra legtöbbször téves számot mutat. Újév napján az óra helyesen járt, azaz 1-est mutatott.

a) A 2024-es szökőévben hány nap fogja a helyes számot mutatni az óra?

b) 2024. december 31-én hányast fog mutatni az óra? Hát 2025. december 31-én?

c) A 2028-as szökőévben melyik lesz az első olyan nap, amikor a helyes számot mutatja az óra?

Bartha-Zágoni Csongor, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a) Mivel a vásárolt óra 2024. január 1-én helyes számot mutat, ezért január hónap minden napján helyes számot fog mutatni.

(1 pont)

Tudjuk, hogy az óra a 31-es után 1-esre vált és január 31 napos, ezért februárban is minden nap helyes számot fog mutatni.

(1 pont)

2024-ben február 29 napos, az óra viszont 31 után vált 1-esre, ezért márciusban 2-vel marad el a helyes értéktől, és március 1-től kezdve 2024 végéig az óra nem mutat helyes számot. Tehát 2024-ben összesen $31+29=60$ nap mutatja a helyes értéket.

(1 pont)

b) Az óra minden 30 napos hónapban (április, június, szeptember, november) további 1-1 nappal marad le a helyes értéktől,

(1 pont)

ezért 2024. december 31-én összesen 6 nap lesz az eltérés a helyes értéktől, és ekkor az óra $31-6=25$ -öt fog mutatni.

(1 pont)

Az óra 2025 februárjában $31-28=3$ napot, míg a 30 napos hónapokban rendre 1-1 napot marad le a helyes értéktől. Tehát 2025. december 31-én összesen $6+7=13$ napot marad le a helyes számtól, azaz $31-13=18$ -at mutat.

(1 pont)

c) Az előző alpontok gondolatmenetét folytatva 2026 és 2027-ben újabb 7-7 napot marad le az óra.

(1 pont)

2028 szökőév, így februárban még 2 napot, áprilisban és júniusban pedig 1-1 napot marad le az óra. Ez összesen $6+7+7+7+2+1+1=31$ nap lemaradás,

(1 pont)

így 2028. július 1-én éppen 1-esre vált és a helyes számot fogja mutatni.

(1 pont)





MINISTERUL EDUCAȚIEI



VI. Országos Magyar Matematikaolimpia XXXIII. EMMV

országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

VI. osztály

1. feladat (10 pont). Adottak a következő halmazok, ahol $u(p)$ a p szám utolsó számjegyét jelöli:

$$A = \{1 + u(1^{2024}); 2 + u(2^{2024}); 3 + u(3^{2024}); 5 + u(5^{2024})\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = u(a), a \in A\},$$

$$C = \{b \in \mathbb{N} \mid b = u(y^2), y \in \mathbb{N}\}.$$

a) Határozd meg az A, B, C halmazokat az elemeik felsorolásával!

b) Határozd meg az $[(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] \cap [(A \cup C) \setminus B]$ halmaz elemeinek számát!

*Hodgyai Edit, Micske
Máthé Attila-István, Sepsiszentgyörgy*

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a) Mivel

$$1 + u(1^{2024}) = 2,$$

$$2 + u(2^{2024}) = 8,$$

$$3 + u(3^{2024}) = 4,$$

$$5 + u(5^{2024}) = 10,$$

(1 pont)

(1 pont)

$$\text{ezért } A = \{2; 4; 8; 10\} \Rightarrow B = \{0; 2; 4; 8\}$$

(1 pont)

$$A \text{ négyzetszámok utolsó számjegyei } 0; 1; 4; 5; 6; 9, \text{ ezért } C = \{0; 1; 4; 5; 6; 9\}.$$

(1 pont)

b) Elvégezve a halmazok közötti szükséges műveleteket kapjuk, hogy

$$A \setminus B = \{10\},$$

$$B \setminus A = \{0\},$$

$$A \cup C = \{0; 1; 2; 4; 5; 6; 8; 9; 10\},$$

(1 pont)

ahonnan

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{0, 10\},$$

(1 pont)

$$(A \cup C) \setminus B = \{1; 5; 6; 9; 10\},$$

(1 pont)

$$[(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] \cap [(A \cup C) \setminus B] = \{10\},$$

(1 pont)

így a kért halmaz elemeinek a száma 1.

(1 pont)

■

2. feladat (10 pont). Egy téglalap alakú papírlapot az oldalakkal párhuzamos egyenesekkel vízszintesen 5 és függőlegesen 60 egyenlő részre osztunk. Így egy négyzethálós lapot kapunk. Igazold, hogy ha egy ugyanakkora méretű papírlapot az oldalakkal párhuzamos egyenesekkel vízszintesen 14, míg függőlegesen 168 egyenlő részre osztunk, akkor az így keletkezett háló kis téglalapjai négyzetek!

Hodgyai Edit, Micske

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

Legyen az első esetben kapott négyzetháló kis négyzeteinek oldalhossza x . Ekkor a papírlap oldalainak hossza $5x$, illetve $60x$. (1 pont)

A második felosztás során a kis téglalap oldalainak hossza legyen u és v . Így a papírlap oldalainak hossza $14u$, illetve $168v$. (1 pont)

Mivel mindkét esetben a papírlapok megegyező méretűek, ezért felírható, hogy:

$$5x = 14u \Rightarrow \frac{x}{u} = \frac{14}{5} \quad (2 \text{ pont})$$

$$60x = 168v \Rightarrow \frac{x}{v} = \frac{14}{5} \quad (2 \text{ pont})$$

azaz

$$\frac{x}{u} = \frac{x}{v}, \quad (1 \text{ pont})$$

ami akkor lehetséges, ha $u = v$. (1 pont)

Tehát a második esetben kapott téglalapok négyzetek. (1 pont)



3. feladat (10 pont). Adott az O középpontú és AB átmérőjű kör, F pedig az AO szakasznak egy tetszőleges belső pontja. Vedd fel az AF átmérőjű és C középpontú kört, majd a BC átmérőjű és E középpontú kört! Legyen a két kör sugara $AC = r$ és $EB = R$.

a) Számítsd ki az OE és OC szakaszok hosszát R és r segítségével!

b) Ha $OE = OF$, határozd meg az $\frac{AC}{CB}$ arány értékét!

c) Ha az F pont egybeesik az O ponttal, számítsd ki az $\frac{AC}{CB}$ arány értékét!

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

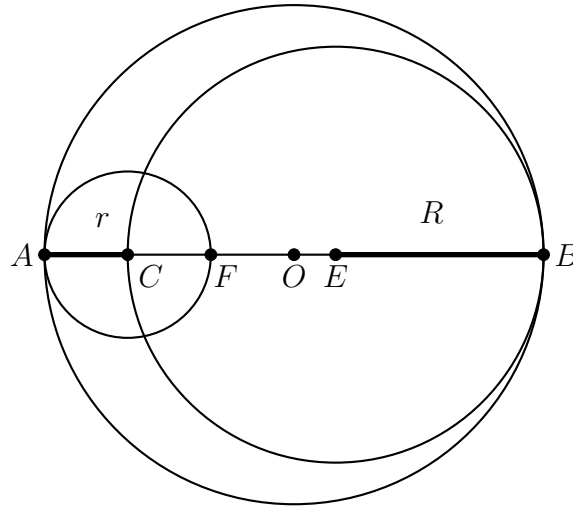
a) Mivel

$$AB = 2R + r \Rightarrow OB = \frac{2R + r}{2} \quad (1 \text{ pont})$$

így

$$OE = OB - EB = \frac{2R + r}{2} - R = \frac{r}{2}, \quad (1 \text{ pont})$$

$$OC = OA - CA = \frac{2R + r}{2} - r = \frac{2R - r}{2}. \quad (1 \text{ pont})$$



b) Mivel

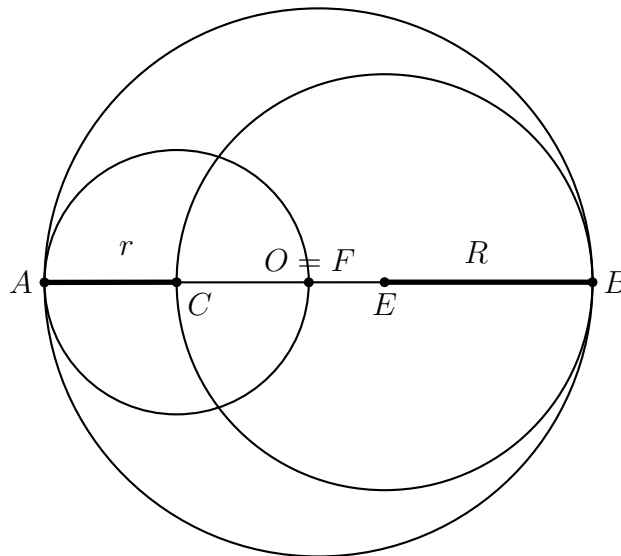
$$OF = OA - FA = \frac{2R + r}{2} - 2r = \frac{2R - 3r}{2} \quad (1 \text{ pont})$$

és

$$OE = OF \Leftrightarrow \frac{r}{2} = \frac{2R - 3r}{2} \Leftrightarrow R = 2r. \quad (1 \text{ pont})$$

Így

$$CB = 4r \Rightarrow \frac{AC}{CB} = \frac{r}{4r} = \frac{1}{4}. \quad (1 \text{ pont})$$



c) *Első megoldás.* Felhasználva az a) pontban kapott eredményt és tudva, hogy $OC = r$ kapjuk, hogy

$$OC = \frac{2R - r}{2} = r. \quad (1 \text{ pont})$$

Tehát

$$2R - r = 2r \Rightarrow r = \frac{2}{3}R \quad (1 \text{ pont})$$

Így

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\frac{2}{3}R}{2R} = \frac{1}{3}. \quad (1 \text{ pont})$$

c) *Második megoldás.* Mivel

$$AC = CO = r \Rightarrow AB = 4r, \quad (1 \text{ pont})$$

$$CB = AB - AC = 3r. \quad (1 \text{ pont})$$

Így

$$\frac{AC}{CB} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}. \quad (1 \text{ pont})$$

■

4. feladat (10 pont). Az $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = n \cdot (64^{12} + 81^9 + 125^8) : (8^{24} + 27^{12} + 625^6), n \leq 2024, n \in \mathbb{N}^*\}$ halmaz összes elemét felírjuk a táblára. Letörölünk két számot, majd helyette felírjuk, a letörölt két szám összegének 11-gyel való osztási maradékát. Ezeket a lépéseket ismételve egy idő múlva a táblán az 1003 és még egy szám maradt.

a) Legyen s az A halmaz elemeinek összege. Határozd meg az s osztóinak számát!

b) Melyik szám maradt az 1003 mellett a táblán?

Hamar Erzsébet, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a)

$$x = n \cdot (64^{12} + 81^9 + 125^8) : (8^{24} + 27^{12} + 625^6) \quad (1 \text{ pont})$$

$$x = n \cdot (2^{72} + 3^{36} + 5^{24}) : (2^{72} + 3^{36} + 5^{24}) \quad (1 \text{ pont})$$

$$x = n \Rightarrow A = \{1; 2; 3; \dots; 2024\} \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{Így } s = 1 + 2 + 3 + \dots + 2024 = 2025 \cdot 1012 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 11^1 \cdot 23^1, \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{tehát az összeg osztóinak száma: } d_s = (2 + 1) \cdot (4 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 180. \quad (1 \text{ pont})$$

b) Ez előző alpont alapján kezdetben a táblán lévő számok összege $s = 2025 \cdot 1012$, ami osztható 11-gyel. (1 pont)

Ha két számot letörölünk és visszaírjuk azok 11-el való osztási maradékát, a táblán lévő számok összegének 11-gyel való osztási maradéka nem változik. (1 pont)

Valóban, ha a két letörölt szám a és b és ezek összegének 11-gyel való osztási maradéka m , akkor

$$a + b = 11c + m$$

ahol $c \in \mathbb{N}$, így $m - (a + b)$ osztható 11-gyel, tehát az új összeg egy 11-gyel osztható számmal módosult a régihez képest. (2 pont)

Mivel 1003 nem egy 11-gyel való osztási maradék ($1003 \notin \{0, 1, 2, \dots, 12\}$), ezért a táblán maradt másik szám biztosan az. Viszont az 1003 szám 11-gyel való osztási maradéka 2, és az összeg osztható 11-gyel, ezért a másik szám 9. (1 pont)

■

VI. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXIII. EMMV

országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

VII. osztály

1. feladat (10 pont). Az x, y, z szigorúan pozitív racionális számok esetén fennállnak az

$$\frac{x}{y+z} = \frac{y}{x+z} = \frac{z}{x+y}$$

egyenlőségek. Mutasd ki, hogy

a) $\sqrt{\frac{x+y}{x+2y+3z} + \frac{y+z}{y+2z+3x} + \frac{z+x}{z+2x+3y}} \in \mathbb{Q};$

b) $\sqrt{\frac{xy}{z(2x-y)} + \frac{yz}{x(2y-z)} + \frac{zx}{y(2z-x)}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$

Zákány Mónika, Nagybánya

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a) Az $\frac{x}{y+z} = \frac{y}{x+z} = \frac{z}{x+y}$ egyenlőségekből az aránypárok származtatási tulajdonságát használva (számlálókát hozzáadjuk a nevezőkhöz) kapjuk, hogy

$$\frac{x}{x+(y+z)} = \frac{y}{y+(x+z)} = \frac{z}{z+(x+y)}, \quad (2 \text{ pont})$$

ahonnan adódik, hogy $x = y = z$.

(1 pont)

Innen

$$\sqrt{\frac{x+y}{x+2y+3z} + \frac{y+z}{y+2z+3x} + \frac{z+x}{z+2x+3y}} = \sqrt{\frac{2x}{6x} + \frac{2x}{6x} + \frac{2x}{6x}} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \sqrt{1} = 1 \in \mathbb{Q}. \quad (2 \text{ pont})$$

b) Felhasználva, hogy $x = y = z$ kapjuk:

$$\sqrt{\frac{xy}{z(2x-y)} + \frac{yz}{x(2y-z)} + \frac{zx}{y(2z-x)}} = \sqrt{\frac{x \cdot x}{x(2x-x)} + \frac{x \cdot x}{x(2x-x)} + \frac{x \cdot x}{x(2x-x)}} = \quad (2 \text{ pont})$$

$$= \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \quad (2 \text{ pont})$$

■

2. feladat (10 pont). Határozd meg azokat az $\overline{abc}$ alakú háromjegyű természetes számokat, amelyekre egyidőben teljesül, hogy $\sqrt{\overline{a,b(bc)} + \overline{b,c(ca)} + \overline{c,a(ab)}} \in \mathbb{Q}$, illetve az a számjegy a $2b$ és $3c$ számok számtani közepe! Az a, b és c számjegyek nem feltétlen különbözőek.

Papp Ilonka, Brassó
Spier Tünde, Arad

Megoldás. Hivatalból (1 pont)
 Átalakítjuk az $\overline{a,b(bc)}$ számot:

$$\overline{a,b(bc)} = a + \frac{\overline{bbc} - b}{990} = \frac{990a + 109b + c}{990}. \quad (1 \text{ pont})$$

Hasonlóan átalakítva a $\overline{b,c(ca)}$ és $\overline{c,a(ab)}$ tizedes számokat kapjuk, hogy

$$\overline{b,c(ca)} = \frac{990b + 109c + a}{990} \quad \text{és} \quad \overline{c,a(ab)} = \frac{990c + 109a + b}{990}.$$

Tehát a három szám összege:

$$S = \frac{1}{990} (990a + 109b + c + 990b + 109c + a + 990c + 109a + b) = \frac{1100(a + b + c)}{990} = \frac{10 \cdot (a + b + c)}{9}. \quad (2 \text{ pont})$$

Ekkor

$$\sqrt{S} = \sqrt{\frac{10 \cdot (a + b + c)}{9}} \in \mathbb{Q} \iff a + b + c = 10p^2,$$

ahol $p \in \mathbb{N}$. (1 pont)

Figyelembe véve, hogy a, b, c számjegyek és $a \neq 0$, következik, hogy

$$1 \leq a + b + c \leq 27.$$

Az $a + b + c = 10p^2$ és $1 \leq a + b + c \leq 27$ alapján $p = 1$, tehát

$$a + b + c = 10. \quad (1 \text{ pont})$$

Mivel a feltétel szerint $a = \frac{2b + 3c}{2}$, ezért

$$\frac{2b + 3c}{2} + b + c = 10 \iff 4b + 5c = 20. \quad (1 \text{ pont})$$

Észrevesszük, hogy $5c$ és 20 is osztható 5 -tel és $(4, 5) = 1$, ezért b osztható 5 -tel. Innen $b = 0$ vagy $b = 5$. (1 pont)

I. eset. Ha $b = 0$, akkor $c = 4$ és $a = 6$, így $\overline{abc} = 604$. (1 pont)

II. eset. Ha $b = 5$, akkor $c = 0$ és $a = 5$, így $\overline{abc} = 550$. (1 pont)

Összegezve, a keresett $\overline{abc}$ alakú számok a 604 és 550 . ■

3. feladat (10 pont). Egy baráti társaságban vívók, úszók és távugrók vannak. Minden személy csak egy sportot űz. Közülük egy vívó megállapítja, hogy az úszók és távugrók összesen kétszer annyian vannak, mint az ő vívó barátai. Egy úszó úgy számolja, hogy a vívók és távugrók összesen háromszor annyian vannak, mint az ő úszó barátai. Egy távugró pedig azt állítja, hogy az ő távugró barátai annyian vannak, mint a vívók és úszók összesen.

Hány vívó, hány úszó és hány távugró van a baráti társaságban?

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Jelöljük a vívók számát v -vel, az úszók számát u -val és a távugrók számát pedig t -vel.

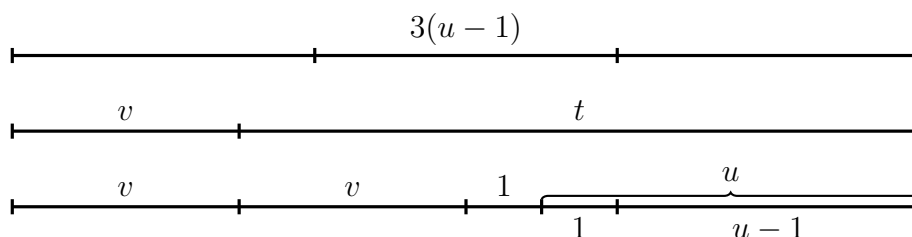
A távugrónak a távugró-barátai $(t-1)$ -en vannak, mivel ő nem számolódik bele a saját barátai közé, így állítása szerint

$$u + v = t - 1 \iff t = u + v + 1, \quad (1 \text{ pont})$$

vagyis a távugrók eggyel többen vannak, mint az úszók és a vívók összesen.

Az úszónak az úszó-barátai $(u-1)$ -en vannak, így állítása szerint

$$v + t = 3 \cdot (u - 1). \quad (1 \text{ pont})$$



A távugrók számát behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} v + (u + v + 1) &= 3 \cdot (u - 1) \iff 2v + u + 1 = 3u - 3 \iff 2v + 1 = 2u - 3 \iff \\ &\iff 2v + 4 = 2u \iff v + 2 = u, \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

vagyis az úszók kettővel többen vannak, mint a vívók. Innen kapjuk, hogy a távugrók száma

$$t = u + v + 1 = (v + 2) + v + 1 = 2v + 3. \quad (1 \text{ pont})$$

A vívónak a vívó-barátai $(v-1)$ -en vannak, így állítása szerint

$$u + t = 7 \cdot (v - 1). \quad (1 \text{ pont})$$

Az úszók és vívók, illetve távugrók és vívók száma közötti összefüggéseket használva a vívók számára a következő összefüggést kapjuk:

$$(v + 2) + (2v + 3) = 7 \cdot (v - 1) \iff 3v + 5 = 7v - 7 \iff 12 = 4v \iff 3 = v, \quad (1 \text{ pont})$$

tehát 3 vívó van.

Az úszók száma $u = v + 2 = 3 + 2 = 5$,

(1 pont)

és a távugrók száma $t = 2v + 3 = 2 \cdot 3 + 3 = 9$.

(1 pont)



4. feladat (10 pont). Az A csúcsában derékszögű ABC háromszög BM és CN szögfelezői az I pontban metszik egymást, $M \in AC$, $N \in AB$. Legyenek P és Q az M , illetve N pontokból a BC oldalra húzott merőlegesek talppontjai. Továbbá legyen D az MQ szakasz felezőpontja, és E az I pont BC egyenes szerinti szimmetrikusa.

a) Igazold, hogy I az APQ háromszög köréírt körének középpontja!

b) Igazold, hogy $ID \perp BC$!

c) Igazold, hogy $IPEQ$ négyzet!

Mátyás Mátyás, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a) A BM félegyenes az $\widehat{ABC}$ szögfelezője, tehát $\widehat{ABM} \equiv \widehat{CBM}$. Mivel $\widehat{BAM} = \widehat{BPM} = 90^\circ$, $\widehat{ABM} = \widehat{PBM}$, MB pedig közös oldal, következik, hogy $ABM_\Delta \equiv PBM_\Delta$ (derékszögű háromszögek átfogó-hegyesszög kongruencia esete alapján). Ezért $AM \equiv PM$ és $\widehat{AMB} \equiv \widehat{PMB}$. Az $AM \equiv PM$, $\widehat{AMI} \equiv \widehat{PMI}$, MI közös oldal állítások alapján $AMI_\Delta \equiv PMI_\Delta$ (oldal-szög-oldal kongruencia eset), tehát

$$AI \equiv PI. \quad (1)$$

(1 pont)

A CN félegyenes az $\widehat{ACB}$ szögfelezője, azaz $\widehat{ACN} \equiv \widehat{BCN}$. A $\widehat{CAN} = \widehat{CQN} = 90^\circ$, $\widehat{ACN} \equiv \widehat{QCN}$, CN közös oldal állításokból (a derékszögű háromszögek átfogó-hegyesszög kongruencia esete alapján) kapjuk, hogy $ACN_\Delta \equiv QCN_\Delta$, amiből következik, hogy $AN \equiv QN$ és $\widehat{ANC} \equiv \widehat{QNC}$. Mivel $AN \equiv QN$, $\widehat{ANI} \equiv \widehat{QNI}$, NI közös oldal, ezért $ANI_\Delta \equiv QNI_\Delta$ (oldal-szög-oldal kongruencia eset alapján), tehát

$$AI \equiv QI. \quad (2)$$

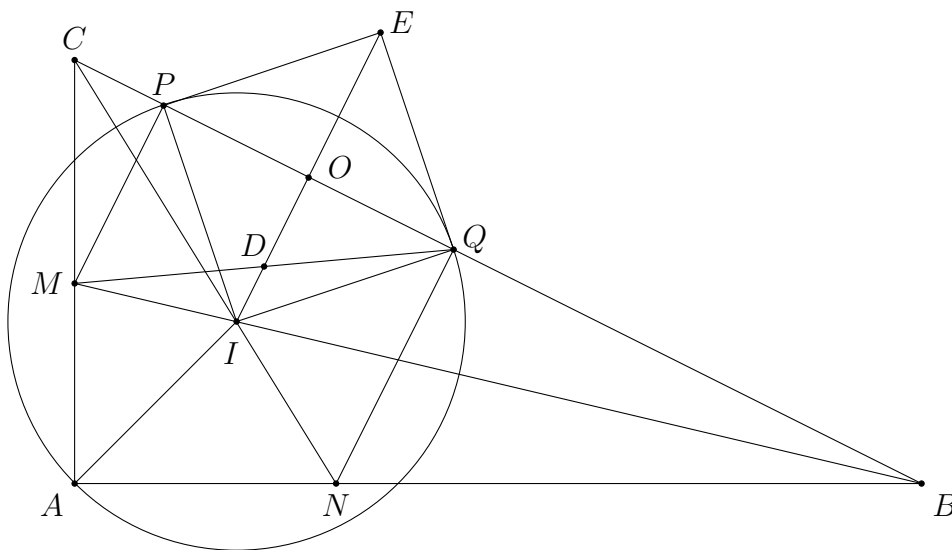
(1 pont)

Az (1) és (2) összefüggésekből kapjuk, hogy

$$AI \equiv PI \equiv QI,$$

tehát I az APQ háromszög köréírt körének középpontja.

(1 pont)



b) Legyen O a PQ szakasz felezőpontja. Az IPQ egyenlő szárú háromszögben az IO oldalfelező egyben magasság is, vagyis

$$IO \perp BC. \quad (3)$$

(1 pont)

Az MPQ háromszögben DO középvonal, ezért $DO \parallel MP$, de mivel $MP \perp BC$, következik, hogy

$$DO \perp BC \quad (4)$$

(1 pont)

A (3) és (4) összefüggésekből következik, hogy I, D, O pontok kollineárisak és $ID \perp BC$. (1 pont)

c) Tudva, hogy E az I pont BC egyenes szerinti szimmetrikusa, és O az I pontból a BC egyenesre húzott merőleges talppontja, kapjuk, hogy $IE \perp BC$, $O \in IE$, $IO \equiv EO$. Az $IPEQ$ négyszög átlói felezik egymást és merőlegesek egymásra, tehát $IPEQ$ rombusz. **(1 pont)**

Az ABC háromszögben AI szögfelező, vagyis $\widehat{IAN} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = 45^\circ$. Az ANI és QNI háromszögek kongruenciájából kapjuk, hogy $\widehat{IAN} \equiv \widehat{IQN}$, ezért $\widehat{IQN} = 45^\circ$. De

$$\widehat{PQI} = \widehat{PQN} - \widehat{IQN} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ.$$

Az IPQ egyenlő szárú háromszögben $\widehat{PIQ} = 180^\circ - 2\widehat{PQI} = 90^\circ$. **(1 pont)**

Az $IPEQ$ rombuszban $\widehat{PIQ} = 90^\circ$, tehát $IPEQ$ négyzet. **(1 pont)**





MINISTERUL EDUCAȚIEI



VI. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXIII. EMMV

országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

VIII. osztály

1. feladat (10 pont). Az x, y, z egész számok esetén $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + 2y - 3z)$. Határozd meg az x, y, z számok számtani közepének a lehetséges legkisebb, illetve legnagyobb értékét!

*Faluvégi Melánia, Zilah**Megoldás.* Hivatalból

(1 pont)

A megadott összefüggés egyenértékű az $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z = 0$ összefüggéssel. Hozzáadva 14-et mindkét oldalhoz azt kapjuk, hogy

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 6z + 9 = 14, \quad (1 \text{ pont})$$

ahonnan

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 14. \quad (1 \text{ pont})$$

Mivel x, y, z egész számok, ezért a fenti egyenlőség csak akkor áll fenn, ha

$$((x - 1)^2, (y - 2)^2, (z + 3)^2) \in \{(1, 4, 9), (1, 9, 4), (4, 1, 9), (4, 9, 1), (9, 1, 4), (9, 4, 1)\}. \quad (2 \text{ pont})$$

Ha $((x - 1)^2, (y - 2)^2, (z + 3)^2) = (1, 4, 9)$, akkor $x \in \{0, 2\}$, $y \in \{0, 4\}$ és $z \in \{-6, 0\}$.

Ha $((x - 1)^2, (y - 2)^2, (z + 3)^2) = (1, 9, 4)$, akkor $x \in \{0, 2\}$, $y \in \{-1, 5\}$ és $z \in \{-5, -1\}$.

Ha $((x - 1)^2, (y - 2)^2, (z + 3)^2) = (4, 1, 9)$, akkor $x \in \{-1, 3\}$, $y \in \{1, 3\}$ és $z \in \{-6, 0\}$.

Ha $((x - 1)^2, (y - 2)^2, (z + 3)^2) = (4, 9, 1)$, akkor $x \in \{-1, 3\}$, $y \in \{-1, 5\}$ és $z \in \{-4, -2\}$.

Ha $((x - 1)^2, (y - 2)^2, (z + 3)^2) = (9, 1, 4)$, akkor $x \in \{-2, 4\}$, $y \in \{1, 3\}$ és $z \in \{-5, -1\}$.

Ha $((x - 1)^2, (y - 2)^2, (z + 3)^2) = (9, 4, 1)$, akkor $x \in \{-2, 4\}$, $y \in \{0, 4\}$ és $z \in \{-4, -2\}$. (3 pont)

A számtani közép legkisebb értéke -2 , legnagyobb értéke pedig 2 . (2 pont)

Megjegyzés. Az $\frac{x+y+z}{3}$ kifejezés szimmetrikus a változóiban, ezért a számítás a végén leegyszerűsíthető.



2. feladat (10 pont). Egy asztalra egymás mellé pálcikákat helyezünk. Anna és Petra felváltva vesz el legalább 1 és legfeljebb 6 pálcikát. Mindig Petra kezd. Az a nyertes, aki az utolsó pálcikát is el tudja venni.

a) Létezik-e Petrának nyerő stratégiája, ha kezdetben az asztalon 2024 pálcika van? Indokold!

b) Hány pálcikát helyezünk kezdetben az asztalra ahhoz, hogy Annának legyen nyerő stratégiája? Indokold!

*Nagy Enikő, Nagyvárad
Tóth Csongor, Szováta*

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a) Igen, létezik. Petra akkor nyer, ha az utolsó előtti lépésében, miután elvett valamennyi pálcikát, az asztalon 7 marad. (2 pont)

Minden körben, amikor mindkét lány valamennyi pálcikát elvesz az asztalról, az első által elvett pálcikák száma biztosan 7-re (annál többre nem) kerekíthető a második játékos által. (2 pont)

2024 nem osztható 7-tel, tehát a kezdő játékos pontosan annyi pálcikát vesz el, hogy a maradék osztható legyen 7-tel. (1 pont)

A mi esetünkben ez a szám az 1-es, mivel 2023 osztható 7-tel. (1 pont)

Tehát Petra kezd, elvesz 1 pálcikát. Anna bármennyit vesz el, Petra 7-re egészíti ki. Ez megismétlődik az utolsó előtti lépésig, amikor 7 marad. Anna bármennyit vesz el, Petra nyer. (1 pont)

b) Ha az asztalon lévő pálcikák száma osztható 7-tel, akkor Anna a nyerő stratégiát követve megnyeri a játékot. (1 pont)

Akárhány pálcikát vegyen el Petra, ezt követően Anna mindig annyi pálcikát fog elvenni, hogy az asztalon maradt pálcikák száma osztható legyen 7-tel. Ezzel a stratégiával nyilvánvaló, hogy az utolsó pálcikát Anna fogja elvenni, tehát nyer. (1 pont)

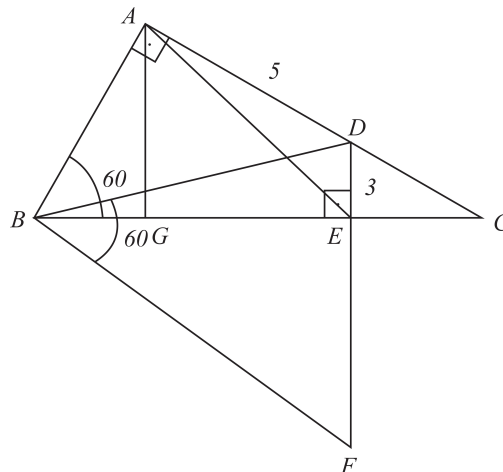
■

3. feladat (10 pont). Az A -ban derékszögű ABC háromszögben $\widehat{B} = 60^\circ$. Az AC oldalon felvesszük a D pontot úgy, hogy $AD = 5$ cm. Legyen $DE \perp BC$, $E \in BC$ és a DE szakasz hossza 3 cm.

a) Határozd meg a BD szakasz hosszát!

b) A $(DE$ félegyenesen felvesszük az F pontot úgy, hogy $\widehat{DBF} = 60^\circ$. Határozd meg az ABE és DBF háromszögek területeinek arányát!

Tóth Csongor, Szováta
Császár Sándor, Csíkszereda



Megoldás. Hivatalból (1 pont)

a) A DEC derékszögű háromszögben $\widehat{C} = 30^\circ$, $DE = 3$ cm, tehát $DC = 6$ cm. Továbbá $AC = AD + DC = 11$ cm. (1 pont)

Az ABC derékszögű háromszögben $\operatorname{tg} C = \frac{AB}{AC}$, ahonnan $AB = \frac{11\sqrt{3}}{3}$ cm. (1 pont)

Az ABD derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele alapján $BD^2 = AB^2 + AD^2$, innen azt kapjuk, hogy $BD = \frac{14\sqrt{3}}{3}$ cm. (1 pont)

b) Az $ABED$ négyszögben $\widehat{A} = \widehat{E} = 90^\circ$, tehát a négyszög körbeírható. (1 pont)

Innen az következik, hogy $\widehat{BAE} = \widehat{BDE}$. (1 pont)

Az ABE és BDF háromszögekben $\widehat{ABD} = \widehat{DBF} = 60^\circ$ és $\widehat{BAE} = \widehat{BDE}$, tehát a két háromszög hasonló. (2 pont)

A területek aránya

$$\frac{T_{ABE}}{T_{DBF}} = \left(\frac{AB}{BD}\right)^2 = \left(\frac{\frac{11}{\sqrt{3}}}{\frac{14}{\sqrt{3}}}\right)^2 = \frac{121}{196}. \quad (2 \text{ pont})$$

Megjegyzés. A b) alpont a következőképpen is megoldható. Legyen $AG \perp BE$, $G \in BE$. Ekkor

$$\frac{T_{ABE}}{T_{DBF}} = \frac{\frac{BE \cdot AG}{2}}{\frac{DF \cdot BE}{2}} = \frac{AG}{DF}. \quad (2 \text{ pont})$$

Kiszámítjuk az AG és DF szakaszok hosszát. Az AGC derékszögű háromszögben $\widehat{C} = 30^\circ$, így $AG = \frac{AC}{2} = \frac{11}{2}$ cm. (1 pont)

Az BAD és BEF háromszögekben $\widehat{BAD} = \widehat{BEF} = 90^\circ$ és $\widehat{ABD} = \widehat{EBF} = 60^\circ - \widehat{DBE}$, tehát a két háromszög hasonló, ezért $\frac{AB}{BE} = \frac{AD}{EF}$. (1 pont)

Innen következik, hogy

$$EF = \frac{BE \cdot AD}{AB} = \frac{65}{11} \text{ cm}.$$

Továbbá $DF = DE + EF = 3 + \frac{65}{11} = \frac{98}{11}$ cm. (1 pont)

Visszatérve a területek arányára

$$\frac{T_{ABE}}{T_{DBF}} = \frac{AG}{DF} = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{98}{11}} = \frac{121}{196}. \quad (1 \text{ pont})$$

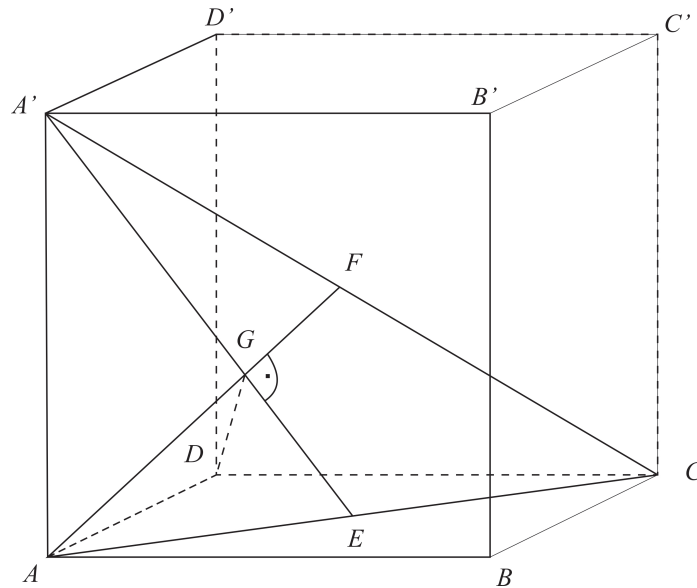
■

4. feladat (10 pont). Az $ABCD A' B' C' D'$ szabályos négyoldalú hasábian $AA' = 12$ cm. Az E és F pontok az AC , illetve az $A'C$ szakaszok felezőpontjai. Az AF egyenes merőleges az $A'E$ egyenesre.

a) Igazold, hogy $ABCD A' B' C' D'$ kocka!

b) Számítsd ki a D pont távolságát az AF egyenestől!

Császár Sándor, Csíkszereda



Első megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a) Igazoljuk, hogy $AA' = AB$. Legyen $A'E \cap AF = \{G\}$, $GF = a$ és $GE = b$. Mivel G az $A'AC$ háromszög súlypontja, ezért $AG = 2a$ és $A'G = 2b$. (1 pont)

Másrészt az $A'AC$ háromszög A -ban derékszögű, tehát $A'F = AF = FC = 3a$. (1 pont)

Az $A'GF$ háromszögben Pitagorasz tételét alkalmazva $A'F^2 = a^2 + 4b^2$, ahonnan $9a^2 = a^2 + 4b^2$, azaz $b^2 = 2a^2$. (1 pont)

Az $A'GA$ derékszögű háromszögben Pitagorasz tételét alkalmazva $144 = 4b^2 + 4a^2$. Felhasználva, hogy $b^2 = 2a^2$ azt kapjuk, hogy $144 = 8a^2 + 4a^2$, ahonnan $a = 2\sqrt{3}$ cm, valamint $b = a\sqrt{2} = 2\sqrt{6}$ cm. (1 pont)

A kocka testátlója $A'C = 2A'F = 6a = 12\sqrt{3}$ cm. Az $A'AC$ derékszögű háromszögben Pitagorasz tételét alkalmazva $AC^2 = A'C^2 - AA'^2$, ahonnan $AC = 12\sqrt{2}$ és $AB = 12$ cm. Tehát $ABCDA'B'C'D'$ kocka. (1 pont)

b) Mivel $DE \perp AC$ és $DE \perp AA'$, valamint $AC, AA' \subset (AA'C)$, ezért $DE \perp (AA'C)$. (1 pont)

Továbbá $DE \perp (AA'C)$ és $EG \perp AF$, valamint $EG, AF \subset (AA'C)$, így a három merőleges tétele alapján $DG \perp AF$. (1 pont)

Tehát a D pont távolságát az AF egyenestől a DG szakasz hossza adja meg. A DEG derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele alapján írhatjuk, hogy $DG^2 = DE^2 + GE^2$. (1 pont)

Mivel $DB = 12\sqrt{2}$ cm, ezért $DE = 6\sqrt{2}$ cm. Ez alapján $DG^2 = (6\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{6})^2$, innen pedig $DG = 4\sqrt{6}$ cm. (1 pont)

■

Második megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a) Legyen $AB = l$, ekkor $AC = l\sqrt{2}$. Az $A'AC$ derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele alapján $A'C = \sqrt{144 + 2l^2}$. Mivel F az $A'C$ felezőpontja, ezért $AF = \frac{\sqrt{144 + 2l^2}}{2}$. (1 pont)

Másrészt G az $A'AC$ háromszög súlypontja, így $GF = \frac{\sqrt{144 + 2l^2}}{6}$. (1 pont)

Továbbá az $A'AE$ derékszögű háromszögben Pitagorasz tételét alkalmazva kapjuk, hogy

$$A'E = \frac{\sqrt{576 + 2l^2}}{2}.$$

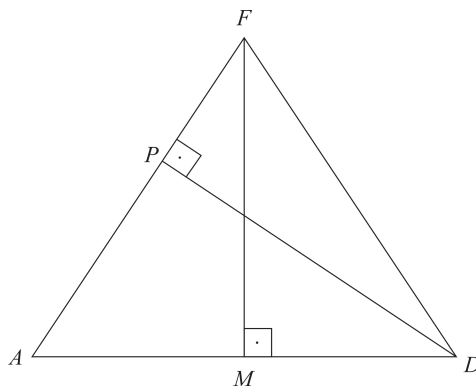
Felhasználva, hogy G súlypontja a háromszögnek $GE = \frac{\sqrt{576+2l^2}}{6}$. (1 pont)

Mivel FE középvonal $A'AC$ háromszögben az következik, hogy $FE = \frac{A'A}{2} = 6$ cm. Az FGE derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele szerint $GF^2 + GE^2 = FE^2$. (1 pont)

A számítások elvégzése után kapjuk, hogy $l = 12$ cm. Tehát $ABCD A'B'C'D'$ kocka. (1 pont)

b) Felhasználva, hogy $l = 12$ cm következik, hogy $AC = 12\sqrt{2}$ cm, $A'C = 12\sqrt{3}$ cm, $AF = 6\sqrt{3}$ cm és $GF = 2\sqrt{3}$ cm. (1 pont)

Másrészt F a kocka középpontja, ezért $FA = FD = 6\sqrt{3}$ cm. Legyen FM és DP az FAD egyenlő szárú háromszög magasságai, ahol $M \in AD$ és $P \in AF$.



Az FMA derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele alapján $FM^2 = FA^2 - AM^2$, ahonnan $FM = 6\sqrt{2}$ cm. (1 pont)

Az FAD háromszög területét kétféleképpen felírva

$$\frac{AD \cdot FM}{2} = \frac{AF \cdot DP}{2}, \quad (1 \text{ pont})$$

innen kapjuk, hogy

$$DP = \frac{AD \cdot FM}{AF} = 4\sqrt{6} \text{ cm.}$$

Tehát a D pont távolsága az AF egyenestől $DP = 4\sqrt{6}$ cm. (1 pont)

Megjegyzés. Belátható, hogy a $PF = GF = 2\sqrt{3}$ cm, tehát a P és G pontok egybeesnek.

■

VI. Országos Magyar Matematikaolimpia XXXIII. EMMV

országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

IX. osztály – I. forduló

1. feladat (10 pont). Ha az a, b és c pozitív valós számok szorzata 1, igazold, hogy

$$\frac{a^{2025} + a^{2024}}{1 + bc} + \frac{b^{2025} + b^{2024}}{1 + ac} + \frac{c^{2025} + c^{2024}}{1 + ab} \geq 3.$$

Koczinger Éva, Szatmárnémeti

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

$$\frac{a^{2025} + a^{2024}}{1 + bc} = \frac{a^{2025} + a^{2024}}{1 + \frac{1}{a}} \quad (1 \text{ pont})$$

$$= \frac{a^{2024}(a + 1)}{\frac{a + 1}{a}} \quad (1 \text{ pont})$$

$$= a^{2025} \quad (1 \text{ pont})$$

Hasonlóan $\frac{b^{2025} + b^{2024}}{1 + ac} = b^{2025}$ és $\frac{c^{2025} + c^{2024}}{1 + ab} = c^{2025}$. (1 pont)

A feladatbeli egyenlőtlenség egyenértékű az $a^{2025} + b^{2025} + c^{2025} \geq 3$ (1) egyenlőtlenséggel. (1 pont)

$$a^{2025} + b^{2025} + c^{2025} = (a^{675})^3 + (b^{675})^3 + (c^{675})^3 \quad (1 \text{ pont})$$

Az $x = a^{675}$, $y = b^{675}$ és $z = c^{675}$ jelölésekkel $xyz = 1$ és $x, y, z > 0$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz + (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = \quad (1 \text{ pont})$$

$$= 3xyz + (x + y + z) \cdot \frac{1}{2}((x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2) \quad (1 \text{ pont})$$

$$x + y + z > 0 \text{ és } ((x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2) \geq 0$$

$$\text{Tehát } x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz = 3, \text{ azaz } a^{2025} + b^{2025} + c^{2025} \geq 3 \quad (1 \text{ pont})$$

Megjegyzés. Bizonyítás nélkül is ismertnek tekintjük az $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$ egyenlőtlenséget.

Megjegyzés. Az $a^{2025} + b^{2025} + c^{2025} \geq 3$ egyenlőtlenség bizonyítható a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség felhasználásával is: (1 pont)

$$\frac{a^{2025} + b^{2025} + c^{2025}}{3} \geq \sqrt[3]{a^{2025} \cdot b^{2025} \cdot c^{2025}} \Leftrightarrow \quad (1 \text{ pont})$$

$$\frac{a^{2025} + b^{2025} + c^{2025}}{3} \geq \sqrt[3]{(abc)^{2025}} \Leftrightarrow \quad (1 \text{ pont})$$

$$a^{2025} + b^{2025} + c^{2025} \geq 3. \quad (1 \text{ pont})$$

■

2. feladat (10 pont). Igazold, hogy tetszőleges a és b valós számok esetén a következő egyenletek közül legalább egynek van valós megoldása:

$$x^2 + 2ax + 2b = 0;$$

$$x^2 + 2bx + 2a = 0;$$

$$x^2 + 4x - ab = 0.$$

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

A Reductio ad absurdum módszerét használjuk. Feltételezzük, hogy egyik egyenletnek sincs valós megoldása. (1 pont)

Az $x^2 + 2ax + 2b = 0$ egyenletnek akkor és csak akkor nincs valós megoldása, ha $\Delta_1 = 4a^2 - 8b < 0$. (1 pont)

Az $x^2 + 2bx + 2a = 0$ egyenletnek akkor és csak akkor nincs valós megoldása, ha $\Delta_2 = 4b^2 - 8a < 0$. (1 pont)

Az $x^2 + 4ax - 2ab = 0$ egyenletnek akkor és csak akkor nincs valós megoldása, ha $\Delta_3 = 16 + 4ab < 0$. (1 pont)

A fentiek alapján $S = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 < 0$. (1)

Ugyanakkor $S = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 4a^2 - 8b + 4b^2 - 8a + 16 + 4ab = 2(a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 4a + 4 + b^2 - 4b + 4) =$

$2((a+b)^2 + (a-2)^2 + (b-2)^2)$ (2 pont)

Tehát mivel $(a+b)^2 \geq 0$, $(a-2)^2 \geq 0$ és $(b-2)^2 \geq 0$, következik, hogy $S \geq 0$ (2). (1 pont)

Az (1) és (2) ellentmond egymásnak, tehát legalább az egyik egyenletnek van valós megoldása. (1 pont)

■

3. feladat (10 pont). Az $ABCD$ egyenlő szárú trapézban $AB \parallel CD$. A trapéz kör köré írható, és jelölje E, F, G és H rendre a trapézba írt kör és az AB, BC, CD valamint DA oldalak érintési pontjait. Legyen J, K, L és M rendre az EGH, EFH, EFG és FGH háromszög súlypontja.

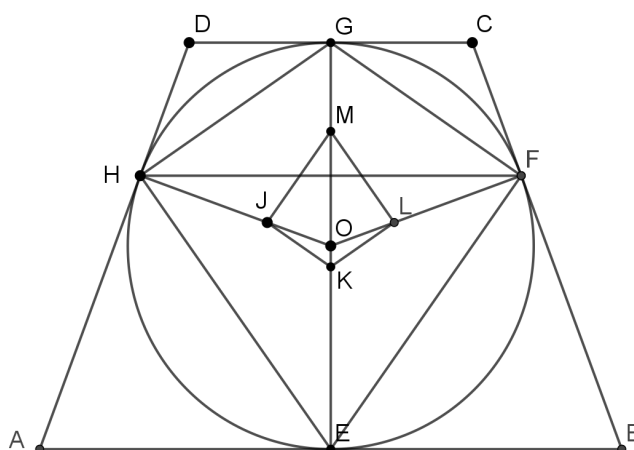
a) Igazold, hogy $JK \parallel GF$!

b) Bizonyítsd be, hogy az $EFGH$ és $JKLM$ négyszögek súlypontjai egybeesnek! (Egy négyszög súlypontja az átlói felezőpontját összekötő szakasz felezőpontja.)

c) Legyen N a KL és MJ egyenesek metszéspontja. Ha J az NM szakasz felezőpontja és $AB = 4$, számítsd ki a $JKLM$ négyszög területét!

Mészár Julianna, Nagyszalonta
Pálhegyi Farkas László, Nagyvárad

Megoldás. Hivatalból (1 pont)



a) $\vec{JK} = \vec{r_K} - \vec{r_J} =$ (1 pont)

$= \frac{\vec{r_E} + \vec{r_F} + \vec{r_H}}{3} - \frac{\vec{r_E} + \vec{r_G} + \vec{r_H}}{3} = \frac{\vec{r_F} - \vec{r_G}}{3} =$ (1 pont)

$= \frac{1}{3} \cdot \vec{GF}$. Tehát $JK \parallel GF$. (1 pont)

b) Ha T Az $EFGH$ négyszög súlypontja, akkor $\vec{r}_T = \frac{\vec{r}_E + \vec{r}_F + \vec{r}_G + \vec{r}_H}{4}$ (1 pont)

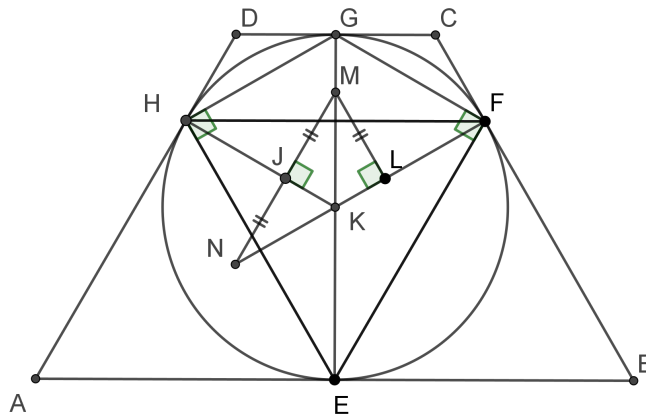
A $JKLM$ négyszög S súlypontjára pedig

$$\vec{r}_S = \frac{\vec{r}_J + \vec{r}_K + \vec{r}_L + \vec{r}_M}{4} = \frac{\frac{\vec{r}_E + \vec{r}_H + \vec{r}_G}{3} + \frac{\vec{r}_E + \vec{r}_H + \vec{r}_F}{3} + \frac{\vec{r}_E + \vec{r}_F + \vec{r}_G}{3} + \frac{\vec{r}_F + \vec{r}_H + \vec{r}_G}{3}}{4} =$$

(1 pont)

$$= \frac{\vec{r}_E + \vec{r}_F + \vec{r}_G + \vec{r}_H}{4} = \vec{r}_T \Rightarrow S = T$$

(1 pont)



c) Az a) alpont alapján $\vec{JK} = \frac{1}{3} \cdot \vec{GF}$, hasonlóan igazolható, hogy $\vec{KL} = \frac{1}{3} \cdot \vec{HG}$, $\vec{ML} = \frac{1}{3} \cdot \vec{HE}$ és $\vec{MJ} = \frac{1}{3} \cdot \vec{FE}$.

Tehát az $EFGH$ és $MJKL$ deltoid hasonló egymással és a hasonlósági arány $\frac{1}{3}$, így a területek aránya $\frac{1}{9}$. (1 pont)

Az egyenlő szárú trapéz szimmetriája miatt GE a beírt kör átmérője, tehát $\widehat{GFE} = \widehat{GHE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MJK} = \widehat{MLK} = 90^\circ$

Az NLM derékszögű háromszögben $ML = \frac{MN}{2}$, tehát $\widehat{NML} = 60^\circ$. De $\widehat{NML} = \widehat{FEH}$, tehát az FEH háromszög egyenlő oldalú. (1 pont)

A külső pontból húzott érintők egyenlősége miatt az AHE és BEF háromszögek is egyenlő oldalúak, tehát $EF = FH = EH = AE = 2$ és $EG = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

$$\text{Az előzőek alapján } T_{EFGH} = \frac{FH \cdot EG}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow T_{JKLM} = \frac{4\sqrt{3}}{27}.$$

(1 pont)

■

4. feladat (10 pont). Az $ABCD$ konvex négyszögben E és F rendre az AC és BD átlók felezőpontja, G és H rendre az AD és BC oldalak felezőpontja, illetve fennáll a $\vec{DB} + \vec{HG} = \vec{CB} + \vec{EF}$ egyenlőség.

a) Bizonyítsd be, hogy az E és F pontok egybeesnek!

b) Bizonyítsd be, hogy a G , E és H pontok kollineárisak!

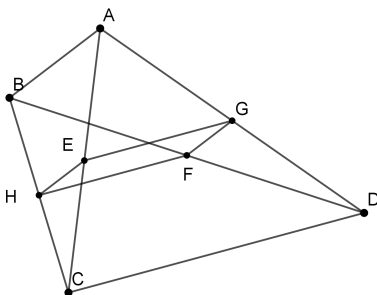
c) Ha M a CD egyenes azon pontja, amelyre $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ és P az AH és BM egyenesek metszéspontja, akkor határozd meg az $\frac{AP}{PH}$ és $\frac{BP}{PM}$ arányok értékét!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a) Első megoldás



A feladat feltételei alapján az EH szakasz az ABC háromszög középvonala, tehát $EH \parallel AB$ és $EH = \frac{AB}{2}$, hasonlóan a GF szakasz az ABD háromszög középvonala, tehát $GF \parallel AB$ és $GF = \frac{AB}{2}$.

A fentiek alapján $EH \parallel GF$ és $EH = GF$, tehát $EHGF$ paralelogramma. (1 pont)

A feladatbeli egyenlőség egyenértékű a következő egyenlőségekkel:

$$\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{HG} \Leftrightarrow \quad (1 \text{ pont})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{EH} - (\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HF}) = 2\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AB} \quad (1 \text{ pont})$$

(Használtuk, hogy $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{HF}$, mert $EHGF$ paralelogramma)

Tehát $ABCD$ paralelogramma, amiből következik, hogy átlói felezik egymást, tehát $E = F$. (1 pont)

Második megoldás

Írjuk fel a pontok helyzetvektorait!

$$\vec{r}_E = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_C}{2}, \vec{r}_F = \frac{\vec{r}_B + \vec{r}_D}{2}, \vec{r}_H = \frac{\vec{r}_B + \vec{r}_C}{2}, \vec{r}_G = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_D}{2}. \quad (1 \text{ pont})$$

A feladatbeli egyenlőség egyenértékű a következő egyenlőségekkel:

$$\begin{aligned} \vec{r}_B - \vec{r}_D + \vec{r}_G - \vec{r}_H &= \vec{r}_B - \vec{r}_C + \vec{r}_F - \vec{r}_E \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\vec{r}_D + \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_D}{2} - \frac{\vec{r}_B + \vec{r}_C}{2} &= -\vec{r}_C + \frac{\vec{r}_B + \vec{r}_D}{2} - \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_C}{2} \Leftrightarrow \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

$$\Leftrightarrow -\vec{r}_D + \vec{r}_A = -\vec{r}_C + \vec{r}_B = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC} \quad (1 \text{ pont})$$

Tehát $ABCD$ paralelogramma, amiből következik, hogy átlói felezik egymást, tehát $E = F$. (1 pont)

Harmadik megoldás

A feladatbeli egyenlőség egyenértékű a következő egyenlőségekkel:

$$\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{HG} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH} \quad (1) \quad (1 \text{ pont})$$

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF} \Rightarrow 2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}. \quad (2) \quad (1 \text{ pont})$$

$$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CH} \Rightarrow 2\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}. \quad (3) \quad (1 \text{ pont})$$

A (2) és (3) összefüggéseket összeadva kapjuk, hogy $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AB}$ (4).

Az (1) és (4) összefüggések alapján $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

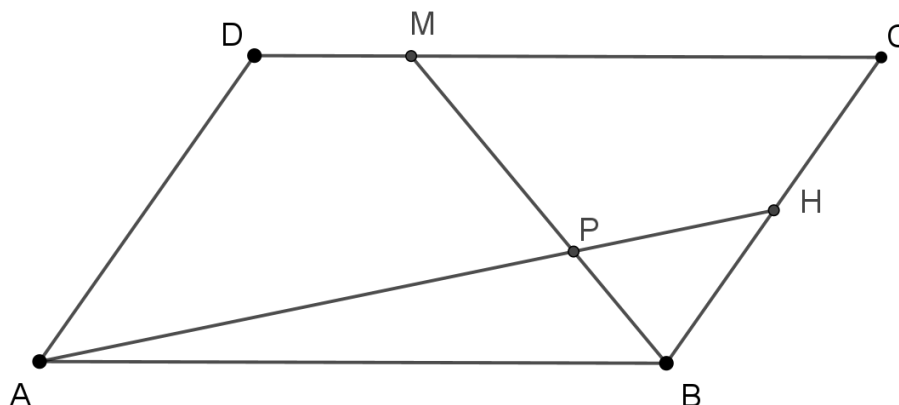
Tehát $ABCD$ paralelogramma, amiből következik, hogy átlói felezik egymást, tehát $E = F$. (1 pont)

b) Mivel az a) alpont alapján $ABCD$ paralelogramma, következik, hogy E mindkét átló felezőpontja.

EH az ABC háromszög középvonala, tehát $EH \parallel AB$, GE az ABD háromszög középvonala, tehát $GE \parallel AB$, (1 pont)

de az E ponton át az AB egyeneshez csak egy párhuzamos húzható, tehát a G, E és H pontok kollineárisak. (1 pont)

c) Első megoldás



Legyen $\frac{AP}{AH} = x$ és $\frac{BP}{BM} = y$.

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \quad (1 \text{ pont})$$

$$\overrightarrow{PH} = (1-x)\overrightarrow{AH} = (1-x)\overrightarrow{AB} + \frac{1-x}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BP} = y\overrightarrow{BM} = y\overrightarrow{BC} - \frac{3y}{4}\overrightarrow{AB} \quad (1 \text{ pont})$$

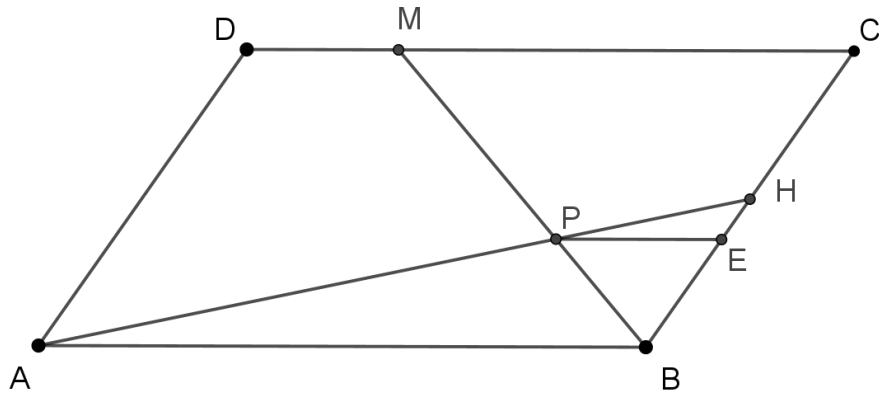
$$\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PH} = \overrightarrow{BH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PH} = \left(1-x - \frac{3y}{4}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1-x}{2} + y\right)\overrightarrow{BC}$$

$$\text{Tehát } 1-x - \frac{3y}{4} = 0 \text{ és } \frac{1-x}{2} + y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{8}{11}, y = \frac{4}{11}$$

$$\text{Ahonnan } \frac{AP}{PH} = \frac{8}{3} \text{ és } \frac{BP}{PM} = \frac{4}{7}. \quad (1 \text{ pont})$$

Második megoldás



A P ponton keresztül párhuzamost húzunk az AB -vel, ami a BC oldalt az E pontban metszi.

Az ABH háromszögben a hasonlóság alaptételéből

$$x = \frac{PH}{AH} = \frac{PE}{AB} = \frac{HE}{BH} = \frac{BH - BE}{BH} = \frac{\frac{1}{2}BC - BE}{\frac{1}{2}BC} = \frac{BC - 2BE}{BC} = 1 - 2 \cdot \frac{BE}{BC} \quad (1 \text{ pont})$$

A BMC háromszögben a hasonlóság alaptételéből

$$y = \frac{BP}{BM} = \frac{BE}{BC} = \frac{PE}{MC} = \frac{PE}{\frac{3}{4}CD} = \frac{4}{3} \cdot \frac{PE}{AB} = \frac{4}{3} \cdot x \quad (1 \text{ pont})$$

A fentiek alapján $y = \frac{4}{3} \cdot x$ és $x = 1 - 2y$, ahonnan $x = \frac{8}{11}$ és $y = \frac{4}{11}$, azaz $\frac{AP}{PH} = \frac{8}{3}$ és $\frac{BP}{PM} = \frac{4}{7}$.
(1 pont)

■



MINISTERUL EDUCAȚIEI



VI. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXIII. EMMV

országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

X. osztály – I. forduló

1. feladat (10 pont). a) Igazold, hogy $\frac{1}{\log_b a} + \frac{1}{\log_c a} \geq \log_{\frac{a^2+4}{4}} b + \log_{\frac{a^2+4}{4}} c$, ahol $a, b, c \in (1, \infty)$!

b) Mutasd ki, hogy $\log_{bc} \frac{a^2+4}{4} + \log_{ca} \frac{b^2+4}{4} + \log_{ab} \frac{c^2+4}{4} \geq \frac{3}{2}$, ahol $a, b, c \in (1, \infty)$!

c) Határozd meg az a, b, c egynél nagyobb természetes számokat úgy, hogy

$$\log_{bc} \frac{4bc}{a^2+4} + \log_{ca} \frac{4ca}{b^2+4} + \log_{ab} \frac{4ab}{c^2+4} \geq \frac{3}{2}.$$

Mátéfi István, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a) A logaritmusok tulajdonságai alapján elvégezhetjük a következő átalakításokat:

$$\frac{1}{\log_b a} + \frac{1}{\log_c a} \geq \log_{\frac{a^2+4}{4}} b + \log_{\frac{a^2+4}{4}} c \iff \log_a bc \geq \log_{\frac{a^2+4}{4}} bc \iff \frac{1}{\log_{bc} a} \geq \frac{1}{\log_{bc} \frac{a^2+4}{4}}. \quad (1 \text{ pont})$$

Ez akkor és csak akkor teljesül, hogyha $\log_{bc} a \leq \log_{bc} \frac{a^2+4}{4}$. Mivel $b, c > 1$, így $bc > 1$, tehát a bc alapú logaritmus tulajdonságai alapján $a \leq \frac{a^2+4}{4}$, ahonnan $0 \leq (a-2)^2$, ami nyilvánvaló. Az egyenlőség akkor áll fenn, ha $a = 2$. (1 pont)

b) Az előző alpontban beláttuk, hogy $\log_{bc} a \leq \log_{bc} \frac{a^2+4}{4}$, ezt hasonlóan felírhatjuk a változókat permutálva, tehát a $\log_{ca} b \leq \log_{ca} \frac{b^2+4}{4}$ és a $\log_{ab} c \leq \log_{ab} \frac{c^2+4}{4}$ egyenlőtlenségek szintén teljesülnek.

Ezeket összeadva kapjuk, hogy

$$\log_{bc} \frac{a^2+4}{4} + \log_{ca} \frac{b^2+4}{4} + \log_{ab} \frac{c^2+4}{4} \geq \log_{bc} a + \log_{ca} b + \log_{ab} c. \quad (1 \text{ pont})$$

A jobb oldali kifejezésben közös alapra írjuk a logaritmusokat

$$\log_{bc} a + \log_{ca} b + \log_{ab} c = \frac{\lg a}{\lg b + \lg c} + \frac{\lg b}{\lg c + \lg a} + \frac{\lg c}{\lg a + \lg b}, \quad (1 \text{ pont})$$

így a bizonyítandó egyenlőtlenség teljesül, ha igaz a következő:

$$\frac{\lg a}{\lg b + \lg c} + \frac{\lg b}{\lg c + \lg a} + \frac{\lg c}{\lg a + \lg b} \geq \frac{3}{2}.$$

Jelölve $\lg a = x$, $\lg b = y$, $\lg c = z$ kapjuk, hogy $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$. (1 pont)

Jelöljük továbbá $x + y = s$, $x + z = p$, $y + z = q$, ahonnan $2(x + y + z) = s + p + q$, illetve $2x = p + s - q$, $2y = q + s - p$, $2z = p + q - s$. Ezek alapján az egyenlőtlenség a következőképp alakul

$$\frac{s+p-q}{2q} + \frac{q+s-p}{2p} + \frac{p+q-s}{2s} \geq \frac{3}{2} \iff \left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right) + \left(\frac{p}{s} + \frac{s}{p}\right) + \left(\frac{s}{q} + \frac{q}{s}\right) \geq 6,$$

ami igaz minden $s, p, q > 0$ esetén. (1 pont)

Megjegyzés. $\frac{\lg a}{\lg b + \lg c} + \frac{\lg b}{\lg c + \lg a} + \frac{\lg c}{\lg a + \lg b} = \frac{3}{2} \iff \lg a = \lg b = \lg c$. (1 pont)

c) A megadott egyenlőtlenséget átalakíthatjuk a következő képpen:

$$\log_{bc} \frac{4bc}{a^2+4} + \log_{ca} \frac{4ac}{b^2+4} + \log_{ab} \frac{4ab}{c^2+4} \geq \frac{3}{2}$$

$$3 + \log_{bc} \frac{4}{a^2+4} + \log_{ca} \frac{4}{b^2+4} + \log_{ab} \frac{4}{c^2+4} \geq \frac{3}{2}$$

$$3 - \log_{bc} \frac{a^2+4}{4} - \log_{ca} \frac{b^2+4}{4} - \log_{ab} \frac{c^2+4}{4} \geq \frac{3}{2}$$

$$\log_{bc} \frac{a^2+4}{4} + \log_{ca} \frac{b^2+4}{4} + \log_{ab} \frac{c^2+4}{4} \leq \frac{3}{2} \quad (1 \text{ pont})$$

Viszont az előző alpontban bizonyítottuk, hogy $\log_{bc} \frac{a^2+4}{4} + \log_{ca} \frac{b^2+4}{4} + \log_{ab} \frac{c^2+4}{4} \geq \frac{3}{2}$, tehát

$\log_{bc} \frac{a^2+4}{4} + \log_{ca} \frac{b^2+4}{4} + \log_{ab} \frac{c^2+4}{4} = \frac{3}{2}$, ami csak akkor lehet, hogyha $a = b = c$, vagyis $M = \{(2, 2, 2)\}$. (1 pont)

■

2. feladat (10 pont). Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$5(\sqrt[3]{5x-9} + 1) = (x-1)^3 + 9.$$

Mátyás Mátyás, Sepsiszentgyörgy

Első megoldás. Hivatalból (1 pont)

Jelöljük $y = \sqrt[3]{5x-9} + 1$, ekkor $y - 1 = \sqrt[3]{5x-9}$, ahonnan $(y-1)^3 = 5x-9$, így $x = \frac{(y-1)^3 + 9}{5}$.

Az eredeti egyenletbe helyettesítve pedig $(x-1)^3 + 9 = 5y$, ahonnan $\frac{(x-1)^3 + 9}{5} = y$. (2 pont)

Összeadva a két egyenlőséget a következőt kapjuk $x + \frac{(x-1)^3 + 9}{5} = \frac{(y-1)^3 + 9}{5} + y$. (1 pont)

Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{(x-1)^3 + 9}{5} + x$ függvény szigorúan növekvő, ezért injektív.

Ez alapján az $x + \frac{(x-1)^3 + 9}{5} = \frac{(y-1)^3 + 9}{5} + y$ tulajdonképpen $f(x) = f(y)$ és mivel f injektív, ezért $x = y$, vagyis elégséges megoldani az $\frac{(x-1)^3 + 9}{5} = x$ egyenletet, ami átalakítva a következő:

$$\frac{(x-1)^3 + 9}{5} = x \iff (x-1)^3 + 9 = 5x \iff x^3 - 3x^2 - 2x + 8 = 0 \quad (2 \text{ pont})$$

Észrevesszük, hogy $x = 2$ megoldása az egyenletnek, így $x^3 - 3x^2 - 2x + 8 = (x-2)(x^2 - x - 4) = 0$. (2 pont)

Megoldjuk az $x^2 - x - 4 = 0$ egyenletet: $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 17 > 0$, azaz $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$. (1 pont)

Tehát az eredeti egyenlet megoldáshalmaza $M = \{2, \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}\}$. (1 pont)

Második megoldás. Hivatalból (1 pont)

Alakítsuk át az egyenletet: $\sqrt[3]{5x-9} + 1 = \frac{(x-1)^3 + 9}{5}$ és legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{5x-9} + 1$ függvény. (2 pont)

A köbgyök függvény tulajdonságai miatt tudjuk, hogy f szigorúan növekvő, tehát injektív. (1 pont)

Az f szürjektív is, mert $y = \sqrt[3]{5x-9} + 1 \iff y-1 = \sqrt[3]{5x-9} \iff (y-1)^3 = 5x-9 \iff \frac{(y-1)^3 + 9}{5} = x$, tehát minden y valós számra létezik x valós úgy, hogy $f(x) = y$. (1 pont)

Ezek alapján az értelmezett függvény bijektív, tehát invertálható, és az inverze $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $f^{-1}(x) = \frac{(x-1)^3 + 9}{5}$. (1 pont)

Ekkor az egyenletünk tulajdonképpen $f(x) = f^{-1}(x)$, viszont egy függvény és az inverze szimmetrikus az első szögfelezőre, tehát csak $x = y$ koordinátájú pontokban metszhetik egymást, vagyis elégséges megoldanunk az $f(x) = x$, azaz a $\sqrt[3]{5x-9} + 1 = x$ egyenletet. (1 pont)

$$\sqrt[3]{5x-9} + 1 = x \iff \sqrt[3]{5x-9} = x-1 \iff 5x-9 = (x-1)^3 \iff (x-1)^3 - 5(x-1) + 4 = 0 \quad (1 \text{ pont})$$

Legyen $t = x - 1$, ekkor

$$(x-1)^3 - 5(x-1) + 4 = 0 \iff t^3 - 5t + 4 = 0 \iff (t^3 - t) - 4(t-1) = 0 \iff (t-1)(t^2 + t - 4) = 0.$$

A $t = 1$ megoldás, ekkor a jelölés alapján $x = t + 1 = 2$ megoldása az eredeti egyenletnek. (1 pont)

A $t^2 + t - 4 = 0$ egyenlet esetén pedig $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 17 > 0$, azaz $t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$, a jelölés alapján $x_{1,2} = t_{1,2} + 1 = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$ megoldása az eredeti egyenletnek. (1 pont)

Tehát az eredeti egyenlet megoldáshalmaza $M = \{2, \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}\}$. ■

3. feladat (10 pont). a) Határozd meg az $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ szürjektív függvényt, ha

$$f(x) \cdot f(f(x)) + f(f(x)) = f(x) - 1,$$

minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ esetén!

b) Értelmezzük a $h_n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\text{-szer } f}$ függvényeket, ahol $n \in \mathbb{N}^*$. Határozd meg a h_{2024} függvényt!

*Kovács Melinda, Beszterce
Gergely Anna, Székelyudvarhely*

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

a) Az adott $f(x) \cdot f(f(x)) + f(f(x)) = f(x) - 1$ egyenlőségből kiindulva kapjuk, hogy $f(f(x))(f(x)+1) = f(x)-1$. Mivel a függvény értékkészlete az $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ halmaz, ezért $f(x) \neq -1$, tehát eloszthatunk $(f(x) + 1)$ -el, így $f(f(x)) = \frac{f(x) - 1}{f(x) + 1}$. (1 pont)

Jelöljük $y = f(x)$, ekkor $f(y) = \frac{y - 1}{y + 1}$, $\forall y \in \text{Im } f$. (1 pont)

Tehát a keresett függvény az $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, $f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$. (1 pont)

Ellenőrizzük az f szürjektivitását: $\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ esetén $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ úgy, hogy $f(x) = y \iff \frac{x - 1}{x + 1} = y$, ahonnan $x = \frac{1 + y}{1 - y}$, ez pedig létezik az $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ halmazon. (1 pont)

Ha $\frac{1 + y}{1 - y} = -1 \iff 1 + y = -1 + y \iff 1 = -1$, ami lehetetlen.

Ha $\frac{1 + y}{1 - y} = 0 \iff 1 + y = 0 \iff y = -1$, ami lehetetlen. (1 pont)

b) Számítsuk ki:

$$n = 1 \text{ esetén } h_1(x) = f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$$

$$n = 2 \text{ esetén } h_2(x) = (f \circ f)(x) = -\frac{1}{x} \quad (1 \text{ pont})$$

$$n = 3 \text{ esetén } h_3(x) = (f \circ f \circ f)(x) = -\frac{1}{f(x)} = \frac{x + 1}{1 - x} \quad (1 \text{ pont})$$

$$n = 4 \text{ esetén } h_4(x) = (f \circ f \circ f \circ f)(x) = x. \quad (1 \text{ pont})$$

Ahonnan következik, hogy $n = 2024$ esetén $h_{2024}(x) = h_4(x) = x$. (1 pont)

■

4. feladat (10 pont). Az ABC egyenlő oldalú háromszög köré írt kör egységnyi sugarú. A kör tetszőleges M pontja esetén igazold a következő egyenlőtlenségeket:

a) $MA \cdot MB \cdot MC \leq 2\sqrt{2}$;

b) $\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$.

*Mike Ildikó, Kézdivásárhely
Mátéfi István, Marosvásárhely*

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

a) Jelölje z_A, z_B, z_C és z az A, B, C és M pontok affixumait.

A bal oldali szorzatot komplex számok segítségével $MA \cdot MB \cdot MC = |z - z_A| \cdot |z - z_B| \cdot |z - z_C|$ alakban írhatjuk. **(1 pont)**

A moduluszok négyzeteire felírható a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség:

$$\sqrt[3]{|z - z_A|^2 \cdot |z - z_B|^2 \cdot |z - z_C|^2} \leq \frac{|z - z_A|^2 + |z - z_B|^2 + |z - z_C|^2}{3}$$

$$(|z - z_A| \cdot |z - z_B| \cdot |z - z_C|)^2 \leq \left(\frac{|z - z_A|^2 + |z - z_B|^2 + |z - z_C|^2}{3} \right)^3. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Kiszámítjuk a $|z - z_A|^2 + |z - z_B|^2 + |z - z_C|^2 = (z - z_A)(\overline{z - z_A}) + (z - z_B)(\overline{z - z_B}) + (z - z_C)(\overline{z - z_C})$ kifejezést, ahonnan kapjuk, hogy

$$|z - z_A|^2 + |z - z_B|^2 + |z - z_C|^2 = 3z \cdot \bar{z} - (z_A + z_B + z_C) \cdot \bar{z} - \overline{(z_A + z_B + z_C)} \cdot z + z_A \bar{z}_A + z_B \bar{z}_B + z_C \bar{z}_C. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Felhasználjuk, hogy a háromszög egyenlő oldalú, a köré írt kör egységsugarú, innen felírható, hogy $(z_A + z_B + z_C) = \overline{(z_A + z_B + z_C)} = 0$, illetve $z_A \bar{z}_A = |z_A|^2 = z_B \bar{z}_B = |z_B|^2 = z_C \bar{z}_C = |z_C|^2 = 1$.

Mivel az M pont is a körön van, ezért $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 1$. **(1 pont)**

Ezek alapján $|z - z_A|^2 + |z - z_B|^2 + |z - z_C|^2 = 6$, így az egyenlőtlenség a következő:

$$(|z - z_A| \cdot |z - z_B| \cdot |z - z_C|)^2 \leq \left(\frac{|z - z_A|^2 + |z - z_B|^2 + |z - z_C|^2}{3} \right)^3$$

$$(|z - z_A| \cdot |z - z_B| \cdot |z - z_C|)^2 \leq \left(\frac{6}{3} \right)^3$$

$$(|z - z_A| \cdot |z - z_B| \cdot |z - z_C|)^2 \leq 8$$

$$MA \cdot MB \cdot MC \leq \sqrt{8}$$

$$MA \cdot MB \cdot MC \leq 2\sqrt{2}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

b) Az $\frac{1}{MA}, \frac{1}{MB}, \frac{1}{MC}$ számokra felírjuk a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget

$$\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{MA} \cdot \frac{1}{MB} \cdot \frac{1}{MC}}, \quad \textbf{(1 pont)}$$

illetve felhasználjuk az előző alpont eredményét, miszerint $MA \cdot MB \cdot MC \leq 2\sqrt{2}$, ahonnan

$$\frac{1}{MA \cdot MB \cdot MC} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Ezek alapján

$$\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{MA \cdot MB \cdot MC}} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2\sqrt{2}}} = \frac{3}{\sqrt{2}}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

■



MINISTERUL EDUCAȚIEI



VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
 országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

XI. osztály – I. forduló

1. feladat (10 pont). Az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot a következőképpen értelmezzük:

$$a_0 = a_1 = 1 \quad \text{és} \quad 17^{a_{n+2}} = 15^{a_{n+1}} + 8^{a_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

a) Igazold, hogy az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens!

b) Számítsd ki az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat határértékét!

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a) Mivel $a_0 = a_1 = 1$ és $17^{a_2} = 15^1 + 8^1 = 23$, ahonnan $a_2 = \log_{17} 23 > 1$, így $a_0 = a_1 < a_2 < 2$.

(1 pont)

Indukcióval igazoljuk, hogy a sorozat növekvő. Valóban, $a_0 \leq a_1 < a_2$ és ha az $a_k \leq a_{k+1}$ állítás igaz, bármely $k = \overline{1, n-1}$ esetén, akkor

$$17^{a_{n+1}} = 15^{a_n} + 8^{a_{n-1}} \geq 15^{a_{n-1}} + 8^{a_{n-2}} = 17^{a_n}$$

(felhasználtuk, hogy az $f(x) = 15^x$ és $g(x) = 8^x$ függvények növekvők és hogy $a_n \geq a_{n-1}$ és $a_{n-1} \geq a_{n-2}$, az indukciós feltevés szerint). Tehát $17^{a_{n+1}} \geq 17^{a_n}$ és mivel a $h(x) = 17^x$ függvény növekvő, következik, hogy $a_{n+1} \geq a_n$.

(2 pont)

Szintén matematikai indukcióval igazoljuk, hogy $a_n < 2$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Az $a_0 = a_1 < a_2 < 2$ és ha feltételezzük, hogy $a_k < 2$, bármely $k = \overline{1, n}$ esetén, akkor

$$17^{a_{n+1}} = 15^{a_n} + 8^{a_{n-1}} < 15^2 + 8^2 = 289 = 17^2,$$

így $a_{n+1} < 2$.

(2 pont)

Mivel $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ növekvő és felülről korlátos, a sorozat konvergens.

(1 pont)

b) Határértékre térünk a rekurziós összefüggésben, így

$$17^{\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+2}} = 15^{\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}} + 8^{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}.$$

Az $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ jelöléssel a fenti egyenlőség $17^l = 15^l + 8^l$ alakba írható,

(1 pont)

ami az

$$\left(\frac{15}{17}\right)^l + \left(\frac{8}{17}\right)^l = 1 \tag{1}$$

egyenlőséggel egyenértékű. Mivel a $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \left(\frac{15}{17}\right)^x + \left(\frac{8}{17}\right)^x$ függvény szigorúan csökkenő, a h injektív, így az (1) egyenletnek legfeljebb egy megoldása van.

(1 pont)

Ugyanakkor $\left(\frac{15}{17}\right)^2 + \left(\frac{8}{17}\right)^2 = 1$, így az egyenlet egyetlen megoldása $l = 2$. Tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

(1 pont)



2. feladat (10 pont). Ha $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ igazold, hogy

$$\det(A^2 + A + I_2) = \left(\frac{1}{2} + \operatorname{tr} A\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \det A\right)^2 + \operatorname{tr} A \cdot \det A + \frac{1}{2},$$

ahol $\operatorname{tr} A$ az A mátrix főátlóján lévő elemeinek összege (az A mátrix nyoma).

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Az A mátrixhoz rendelt karakterisztikus polinom:

$$\det(A - x \cdot I_2) = x^2 - \operatorname{tr} A \cdot x + \det A, \quad (1 \text{ pont})$$

Ugyannakkor

$$A^2 + A + I_2 = (A - \varepsilon I_2) \cdot (A - \varepsilon^2 I_2),$$

ahol ε a harmadrendű egységgyök, azaz $\varepsilon^3 = 1$ és $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

(1 pont)

Mivel $\det X \cdot Y = \det X \cdot \det Y$

$$\det(A^2 + A + I_2) = \det(A - \varepsilon I_2) \cdot \det(A - \varepsilon^2 I_2) \quad (1 \text{ pont})$$

$$= (\varepsilon^2 - \operatorname{tr} A \cdot \varepsilon + \det A) \cdot (\varepsilon^4 - \operatorname{tr} A \cdot \varepsilon^2 + \det A) \quad (1 \text{ pont})$$

$$= \varepsilon^6 - \operatorname{tr} A \cdot \varepsilon^5 + \det A \cdot \varepsilon^4 - \operatorname{tr} A \cdot \varepsilon^4 + (\operatorname{tr} A)^2 \cdot \varepsilon^3 - \operatorname{tr} A \cdot \det A \cdot \varepsilon^2 + \det A \cdot \varepsilon^2 - \operatorname{tr} A \cdot \det A \cdot \varepsilon + (\det A)^2. \quad (1 \text{ pont})$$

Figyelembe véve, hogy

$$\varepsilon^6 = \varepsilon^3 = 1, \quad \varepsilon^5 = \varepsilon^2, \quad \varepsilon^4 = \varepsilon \quad \text{és} \quad \varepsilon^2 + \varepsilon = -1 \quad (1 \text{ pont})$$

kapjuk, hogy

$$\det(A^2 + A + I_2) = 1 + \operatorname{tr} A + (\operatorname{tr} A)^2 - \det A + (\det A)^2 + \operatorname{tr} A \cdot \det A \quad (1 \text{ pont})$$

$$= \frac{1}{4} + \operatorname{tr} A + (\operatorname{tr} A)^2 + \frac{1}{4} - \det A + (\det A)^2 + \operatorname{tr} A \cdot \det A + \frac{1}{2} \quad (1 \text{ pont})$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \operatorname{tr} A\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \det A\right)^2 + \operatorname{tr} A \cdot \det A + \frac{1}{2}. \quad (1 \text{ pont})$$



3. feladat (10 pont). Az $(x_n)_{n \geq 1}$ sorozatot az $x_{n+1} = x_n^2 - (2a - 1) \cdot x_n + a^2$ rekurziós összefüggéssel értelmezzük, ahol $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ és $x_1 \in \mathbb{R}$.

a) Ha $x_1 = a + 1$, igazold, hogy az

$$y_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k - a + 1} \right)^{x_{n+1} - a}, \quad \forall n \geq 1$$

általános tagú sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!

b) Ha $x_1 \in (a - 1, a)$, igazold, hogy a

$$z_n = (x_n - a + 1)^n, \quad \forall n \geq 1$$

általános tagú sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a) Mivel $x_{n+1} - x_n = (x_n - a)^2 \geq 0$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, az $(x_n)_{n \geq 1}$ sorozat növekvő. Ha a sorozat felülről korlátos lenne, akkor a Weierstrass tétele alapján létezne $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ véges határérték.

(1 pont)

Ekkor az l határértékre felírható, hogy

$$l = l^2 - (2a - 1) \cdot l + a^2 \iff (l - a)^2 = 0 \iff l = a.$$

Mivel az $(x_n)_{n \geq 1}$ sorozat növekvő, ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \geq x_1 = a + 1 > a$, vagyis ellentmondáshoz jutottunk. Tehát a sorozat felülről nem korlátos, így $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

(1 pont)

A rekurziós összefüggés alapján

$$x_{n+1} - a = (x_n - a)^2 + x_n - a.$$

Így az $a_n = x_n - a$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, általános tagú sorozatra érvényes az

$$a_{n+1} = a_n^2 + a_n \quad (2)$$

összefüggés, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

(1 pont)

Az y_n értelmezésében szereplő összeg átírható, mint

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k - a + 1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k + 1}.$$

A (2) alapján $a_{n+1} = a_n \cdot (a_n + 1)$, ahonnan $\frac{1}{a_n + 1} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Így

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k + 1} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{a_{k+1}} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{a_k \cdot a_{k+1}} = \sum_{k=1}^n \frac{a_{k+1} - a_k}{a_k \cdot a_{k+1}} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} = 1 - \frac{1}{a_{n+1}}. \quad (1 \text{ pont})$$

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, következik, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$. Tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{a_{n+1}}\right)^{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-1}{a_{n+1}}\right)^{-a_{n+1}}\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}. \quad (1 \text{ pont})$$

b) Az előző alpont alapján az $(x_n)_{n \geq 1}$ sorozat növekvő.Tudjuk, hogy $x_1 < a$. Ha feltételezzük, hogy $x_n < a$, akkor

$$x_{n+1} - a = (x_n - a)^2 + x_n - a = (x_n - a)(x_n - a + 1) < 0 \iff x_{n+1} < a$$

Tehát az indukció elve alapján $x_n < a$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

(1 pont)

Mivel a sorozat felülről korlátos és növekvő, ezért konvergens. Az előző alpont alapján kapjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Mivel $a_n = x_n - a$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, következik, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Ugyanakkor $x_n < a$, így

$a_n < 0$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$.

(1 pont)

Tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} \right]^{n \cdot a_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n},$ (1 pont)

ahol a $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n}}$ határértékre alkalmazható a Cesaro-Stolz tétele

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} \cdot a_n}{a_n - a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} \cdot a_n}{-a_n^2} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = - \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 1) = -1,$$

így $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = e^{-1} = \frac{1}{e}.$ (1 pont)

■

4. feladat (10 pont). Tekintjük az $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mátrixokat. Jelölje $\text{tr } M$ az M mátrix főátlóján lévő elemek összegét (az M mátrix nyomát).

a) Ha $B \neq O_3$, igazold, hogy az $f: \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f(X) = \text{tr}(B \cdot X)$ függvény szürjektív!

b) Ha $\text{tr}(A \cdot X) = 0$, minden $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ esetén, akkor mutasd ki, hogy $A = O_3$!

*Cziprok András, Szatmárnémeti
Szilágyi Judit, Kolozsvár*

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

a) Ha $B \neq O_3$, akkor a $B = (b_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$ mátrixnak van legalább egy $b_{pm} \neq 0$ eleme.

A $B \cdot X$ mátrix nyoma $\text{tr}(B \cdot X) = \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{l=1}^3 b_{kl} \cdot x_{lk} \right).$ (1 pont)

Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Igazolni kell, hogy létezik $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mátrix úgy, hogy $\text{tr}(B \cdot X) = \alpha.$ (1 pont)

Tekintsük az $X = (x_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$ mátrixot úgy, hogy $x_{mp} = \frac{\alpha}{b_{pm}}$ és a többi eleme nulla, azaz $b_{ij} = 0$, ha $i \neq m$ vagy $j \neq p.$ (1 pont)

Ezen X mátrix esetén

$$\text{tr}(B \cdot X) = \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{l=1}^3 b_{kl} \cdot x_{lk} \right) = b_{pm} \cdot x_{mp} = b_{pm} \cdot \frac{\alpha}{b_{pm}} = \alpha,$$

tehát f szürjektív. (1 pont)

b) Legyenek $X_{ji} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ azon mátrixok, amelyek j -dik sorában és i -dik oszlopában 1-es szerepel, míg a többi eleme 0, minden $i, j = \overline{1,3}$ esetén. (2 pont)

Az $A \cdot X_{ji}$ mátrix minden eleme 0, kivéve az $a_{ij} \cdot x_{ji} = a_{ij}$ elemet, amely a főátlóban található.

(1 pont)

Következik, hogy

$$\text{tr}(A \cdot X_{ji}) = \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{l=1}^3 a_{kl} \cdot x_{lk} \right) = a_{ij} \cdot x_{ji} = a_{ij}, \quad \forall i, j = \overline{1,3}. \quad (1 \text{ pont})$$

A $\text{tr}(A \cdot X) = 0$, minden $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ esetén, feltétel alapján $a_{ij} = 0$, minden $i, j = \overline{1,3}$ esetén, tehát $A = O_3.$ (1 pont)

■

VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

XII. osztály – I. forduló

1. feladat (10 pont). Határozd meg az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{e^{2x}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{e^{2x}}{1 + e^x + e^{2x}}$$

függvény primitív függvényeit!

*Turdean Katalin, Zilah
Forgács István, Szatmárnémeti*

Első megoldás. Hivatalból

(1 pont)

$$I = \int f(x) dx = \int \frac{1}{e^{2x}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{e^{2x}}{1 + e^x + e^{2x}} dx = - \int \frac{1}{e^x} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{e^{-2x} + e^{-x} + 1} \cdot \frac{-1}{e^x} dx.$$

(1 pont)

Az $e^{-x} = u$ változcserét használva azt kapjuk, hogy

$$I = - \int u \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{1 + u + u^2} du.$$

(1 pont)

Használjuk a parciális integrálás módszerét.

$$I = - \left[\frac{u^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{1 + u + u^2} + \int \frac{u^2}{2} \cdot \frac{(2u + 1)}{(u^2 + u + 1)^2 + 1} du \right] =$$
$$- \frac{u^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{1 + u + u^2} - \frac{1}{2} \int \frac{2u^3 + u^2}{1 + (1 + u + u^2)^2} du.$$

(1 pont)

Az integrálban szereplő tört nevezője

$$1 + (1 + u + u^2)^2 = (u^2 + 1)^2 + 2(u^2 + 1)u + u^2 + 1 = (u^2 + 1)(u^2 + 2u + 2)$$

alakba írható.

(1 pont)

Ezt felhasználva, a törtet elemi törtek összegére bontjuk.

$$\frac{2u^3 + u^2}{1 + (1 + u + u^2)^2} = \frac{2u^3 + u^2}{(u^2 + 1)(u^2 + 2u + 2)} = \frac{Au + B}{u^2 + 1} + \frac{Cu + D}{u^2 + 2u + 2}, \text{ ahol } A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

(1 pont)

Közös nevezőre hozva a két elemi törtet, az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} A + C = 2 \\ 2A + B + D = 1 \\ 2A + 2B + C = 0 \\ 2B + D = 0 \end{cases}.$$

(1 pont)

Megoldva az egyenletrendszert: $A = 0, B = -1, C = 2, D = 2$.

(1 pont)

Tehát

$$I = -\frac{u^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{1+u+u^2} - \frac{1}{2} \int \left[\frac{-1}{u^2+1} + \frac{2u+2}{u^2+2u+2} \right] du =$$

$$-\frac{u^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{1+u+u^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} u - \frac{1}{2} \ln(u^2+2u+2) + C.$$

(1 pont)

Ahonnán az f függvény, primitív függvényei a következők:

$$F_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F_k(x) = -\frac{1}{2e^{2x}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{e^{2x}}{1+e^x+e^{2x}} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{e^x} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+2e^x+2e^{2x}}{e^{2x}} + k, \text{ ahol } k \in \mathbb{R}.$$

(1 pont)

■

Második megoldás. Hivatalból

(1 pont)

$$I = \int f(x) dx = \int \frac{1}{e^{2x}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{e^{2x}}{1+e^x+e^{2x}} dx = - \int \frac{1}{e^x} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{e^{-2x}+e^{-x}+1} \cdot \frac{-1}{e^x} dx.$$

(1 pont)

Az $e^{-x} = u$ változócsereét használva azt kapjuk, hogy

$$I = - \int u \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{1+u+u^2} du.$$

(1 pont)

Használjuk az

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{1+u+u^2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{u} - \operatorname{arctg} \frac{1}{u+1}, \forall u \in (0, +\infty)$$

(1 pont)

és

$$\operatorname{arctg} u + \operatorname{arctg} \frac{1}{u} = \frac{\pi}{2}, \forall u \in (0, +\infty)$$

(1 pont)

azonosságokat.

Ekkor

$$I = - \int u \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{u} - \operatorname{arctg} \frac{1}{u+1} \right) du =$$

$$= - \int u \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} u - \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(u+1) \right) du =$$

$$= \int u \operatorname{arctg} u du - \int u \cdot \operatorname{arctg}(u+1) du =$$

(1 pont)

$$= \frac{u^2}{2} \operatorname{arctg} u - \frac{1}{2} \int \frac{u^2}{1+u^2} du - \frac{u^2}{2} \operatorname{arctg}(u+1) + \frac{1}{2} \int \frac{u^2}{1+(u+1)^2} du =$$

(1 pont)

$$= \frac{u^2}{2} (\operatorname{arctg} u - \operatorname{arctg}(u+1)) - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+u^2}\right) du + \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{2u+2}{u^2+2u+2}\right) du =$$

(1 pont)

$$= \frac{u^2}{2} (\operatorname{arctg} u - \operatorname{arctg}(u+1)) - \frac{1}{2}u + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} u + \frac{1}{2}u - \frac{1}{2} \ln(u^2+2u+2) + C =$$

$$= \frac{u^2}{2} (\operatorname{arctg} u - \operatorname{arctg}(u+1)) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} u - \frac{1}{2} \ln(u^2+2u+2) + C.$$

(1 pont)

Ahonnán az f függvény, primitív függvényei a következők:

$$F_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F_k(x) = \frac{1}{2e^{2x}} \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{e^x} - \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{e^x} + 1 \right) \right) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{e^x} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+2e^x+2e^{2x}}{e^{2x}} + k$$

ahol $k \in \mathbb{R}$. (1 pont) ■

2. feladat (10 pont). Adott a $(G, \cdot)$ csoport és az $f: G \rightarrow G$ függvény úgy, hogy

$$f(xf(y)) = f(x) \cdot y, \text{ bármely } x, y \in G \text{ esetén.}$$

a) Igazold, hogy f csoportautomorfizmus!

b) Határozd meg az f függvényt, ha a G csoportnak öt eleme van!

*Dávid Géza, Székelyudvarhely
Turdean Katalin, Zilah*

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

a) Jelölje e a csoport semleges elemét. A megadott feltételbe, ha $x = e$, akkor

$$f(f(y)) = f(e) \cdot y, \text{ bármely } y \in G \text{ esetén.} \quad (1)$$

Ha a (1) egyenletbe $y = e$, akkor $f(f(e)) = f(e)e$. Innen következik, hogy

$$f(f(e)) = f(e). \quad (2)$$

(1 pont)

Legyen $x_1, x_2 \in G$ úgy, hogy $f(x_1) = f(x_2)$, ahonnan következik, hogy $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$.

Ekkor az (1) összefüggés alapján

$$\begin{cases} f(f(x_1)) = f(e) \cdot x_1, \\ f(f(x_2)) = f(e) \cdot x_2 \end{cases} \implies f(e)x_1 = f(e)x_2 \implies x_1 = x_2 \implies$$

f injektív. (1 pont)

Mivel f injektív a (2) $\implies f(e) = e$. Felhasználva a (1) összefüggést és, hogy $f(e) = e$ következik, hogy $f(f(y)) = y$, bármely $y \in G$ esetén.

Tehát $(f \circ f)(y) = y$ bármely $y \in G$ esetén. Innen következik, hogy $f \circ f = 1_G \implies f$ szürjektív és $f^{-1} = f$ (1 pont)

Bizonyítjuk, hogy f morfizmus.

Az f morfizmus $\iff f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in G$. Legyen $x, y \in G$. Az $y \in G$ esetén, létezik egyetlen egy $z \in G$ úgy, hogy $f(z) = y$.

$$f(xy) = f(x \cdot f(z)) = f(x)z = f(x) \cdot f^{-1}(y) = f(x) \cdot f(y).$$

Tehát f morfizmus.

Mivel f morfizmus és bijektív, az f automorfizmus. (1 pont)

b) Ha a G -nek öt eleme van, akkor a $(G, \cdot)$ ciklikus csoport. Tehát a $G = \{e, a, a^2, a^3, a^4\}$ alakú, ahol $a^5 = e$. (1 pont)

Az a alpontban beláttuk, hogy $(f \circ f)(x) = x, \forall x \in G$, tehát az f bijektív és $f^{-1} = f$. Mivel f csoportautomorfizmus ezért $f(e) = e$. Mivel $f^{-1}(x) = f(x), \forall x \in G$, ezért ha $f(x) = y$, akkor $f(y) = x$. Az $f_1: G \rightarrow G, f_1(x) = x$ függvény teljesíti a megadott feltételt. (1 pont)

Ha $f \neq f_1$, akkor vizsgáljuk meg, hogy $f(a)$ mivel lehet egyenlő.

Az $f(a) \neq e$, mert az f injektív.

Ha $f(a) = a$, akkor $f(a^k) = (f(a))^k = a^k \implies f(x) = x, \forall x \in G$. (1 pont)

Ha $f(a) \neq a$, akkor a következő esetek lehetnek:

1. $f(a) = a^2$, ekkor $f(a^2) = a \implies (f(a))^2 = a \implies a^4 = a \implies a^3 = e$, ami ellentmondás.
2. $f(a) = a^3$, ekkor $f(a^3) = a \implies (f(a))^3 = a \implies a^9 = a \implies a^4 = a \implies a^3 = e$, ami ellentmondás.
3. $f(a) = a^4$, ekkor $f(a^4) = a \implies (f(a))^4 = a \implies a^{16} = a \implies a = a$, ami lehetséges.

Tehát $f(a) = a^4$. Mivel f bijektív, akkor $f(a^2) = a^3$ és $f(a^3) = a^2$. Ekkor $(f(a))^2 = a^3$, ahonnan azt kapjuk, hogy $(a^4)^2 = a^3 \iff a^3 = a^3$, ami lehetséges. (1 pont)

Az $f(f(y)) = f(x) \cdot y$, bármely $x, y \in G$ feltétel ekvivalens az $f(x) \cdot f(f(y)) = f(x) \cdot y$, bármely $x, y \in G$ feltétellel vagyis azzal, hogy $f(f(y)) = y, \forall y \in G$. Ezt a feltételt két függvény teljesíti: az

$$\begin{array}{c|ccccc} x & e & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ \hline f(x) & e & a & a^2 & a^3 & a^4 \end{array} \quad \text{és} \quad \begin{array}{c|ccccc} x & e & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ \hline f(x) & e & a^4 & a^3 & a^2 & a \end{array}. \quad (1 \text{ pont})$$

■

3. feladat (10 pont). Határozd meg azokat az $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ és $g: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ függvényeket, amelyek egyszerre teljesítik a következő feltételeket:

- a) az $F: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty), F(x) = f(x) \cdot e^{-x}$ függvény a g függvény primitív függvénye;
- b) a $G: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty), G(x) = g(x) \cdot e^{-x}$ függvény az f függvény primitív függvénye;
- c) $f(x) > g(x)$, bármely $x \in (0, +\infty)$ esetén!

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Az a) feltétel szerint F deriválható, tehát $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ és $f(x) = F(x) \cdot e^x$ is deriválható.Ugyanígy a b) feltételből azt kapjuk, hogy a g is deriválható.

(1 pont)

 $a) \implies F'(x) = g(x), \forall x \in (0, +\infty)$ és $b) \implies G'(x) = f(x), \forall x \in (0, +\infty)$.

$$\begin{cases} G'(x) + F'(x) = f(x) + g(x), \forall x \in (0, +\infty) \\ G'(x) - F'(x) = f(x) - g(x), \forall x \in (0, +\infty) \end{cases} \implies \begin{cases} (G(x) + F(x))' = f(x) + g(x), \forall x \in (0, +\infty) \\ (G(x) - F(x))' = f(x) - g(x), \forall x \in (0, +\infty) \end{cases}.$$

$$\begin{cases} ((g(x) + f(x))e^{-x})' = f(x) + g(x), \forall x \in (0, +\infty) \\ ((g(x) - f(x))e^{-x})' = f(x) - g(x), \forall x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

(1 pont)

Tekintsük az $u : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $u(x) = f(x) + g(x)$ és a $v : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $v(x) = f(x) - g(x)$ függvényeket. Az u és v deriválhatóak és $(u(x) \cdot e^{-x})' = u(x)$, $\forall x > 0$ és $-(v(x) \cdot e^{-x})' = v(x)$, $\forall x > 0$.

(1 pont)

Rendre meghatározzuk az u és v függvényeket:

$$(u(x) \cdot e^{-x})' = u(x) \iff u'(x) \cdot e^{-x} - u(x)e^{-x} = u(x) \iff u'(x) = u(x)(1 + e^x), \forall x > 0. \quad (1 \text{ pont})$$

Az $u(x) = f(x) + g(x) > 0$, $\forall x > 0$, tehát $u(x) \neq 0$, $\forall x > 0$.

$$\text{Igy } \frac{u'(x)}{u(x)} = 1 + e^x, \text{ azaz } (\ln u(x))' = 1 + e^x, \forall x > 0. \quad (1 \text{ pont})$$

Innen következik, hogy $\ln u(x) = x + e^x + k_1$, ahol $k_1 \in \mathbb{R}$, vagyis $u(x) = e^{x+e^x+k_1} = e^{k_1} \cdot e^{x+e^x} = a e^{x+e^x}$, ahol $a > 0$ tetszőleges valós szám. Tehát $f(x) + g(x) = a \cdot e^{x+e^x}$, $\forall x > 0$.

$$A -(v(x) \cdot e^{-x})' = v(x) \iff -v'(x) \cdot e^{-x} + v(x)e^{-x} = v(x) \iff v'(x) = v(x)(1 - e^x), \forall x > 0.$$

A $v(x) = f(x) - g(x) > 0$, $\forall x > 0$, tehát $v(x) \neq 0$, $\forall x > 0$.

$$\text{Igy } \frac{v'(x)}{v(x)} = 1 - e^x, \text{ azaz } (\ln v(x))' = 1 - e^x, \forall x > 0. \quad (1 \text{ pont})$$

Innen következik, hogy $\ln v(x) = x - e^x + k_2$, ahol $k_2 \in \mathbb{R}$, vagyis $v(x) = b \cdot e^{x-e^x}$, $\forall x > 0$, ahol $b > 0$ tetszőleges valós szám. Tehát $f(x) - g(x) = b \cdot e^{x-e^x}$, $\forall x > 0$.

(1 pont)

Tehát

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = a \cdot e^{x+e^x}, \forall x \in (0, +\infty) \\ f(x) - g(x) = b \cdot e^{x-e^x}, \forall x \in (0, +\infty) \end{cases}.$$

(1 pont)

Innen azt kapjuk, hogy

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} (a \cdot e^{x+e^x} + b \cdot e^{x-e^x}), \forall x \in (0, +\infty) \\ g(x) = \frac{1}{2} (a \cdot e^{x+e^x} - b \cdot e^{x-e^x}), \forall x \in (0, +\infty) \end{cases}.$$

Mivel a és b pozitívak, ezért $f(x) > 0, \forall x > 0$. Ahhoz, hogy $g(x) > 0, \forall x > 0$ teljesüljön az szükséges, hogy $a \cdot e^{x+e^x} > b \cdot e^{x-e^x}, \forall x > 0$ vagyis, hogy $a \cdot e^{e^x} > b e^{-e^x}, \forall x > 0$. Innen azt kapjuk, hogy $e^{2e^x} > \frac{b}{a}, \forall x > 0$. A $h(x) = e^{2e^x}, \forall x > 0$ függvény szigorúan növekvő és folytonos. Tehát $\inf_{x>0} h(x) = \lim_{x \searrow 0} h(x) = e^2$. Tehát $\frac{b}{a} \leq e^2$, azaz $b \leq e^2 \cdot a$.

A kapott függvények teljesítik a feladat mindhárom feltételét.

(1 pont)

■

4. feladat (10 pont). A $(G, \cdot)$ véges csoportnak $2n$ eleme van. Legyen $H = \{x \in G \mid x^2 = e\}$, ahol e a $(G, \cdot)$ csoport semleges eleme. Jelölje $|H|$ a H halmaz számosságát.

a) Igazold, hogy ha $|H| \geq n + 1$ és $x \cdot y \in H$, bármely $x, y \in H$ esetén, akkor a $(G, \cdot)$ Abel-féle csoport!

b) Igazold, hogy ha n páratlan, akkor $|H| \leq n + 1$.

(***)

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a) Legyen x és y a H két tetszőleges eleme. Ezért $x^2 = e$ és $y^2 = e$, és $(xy)^2 = e$, mert $xy \in H$. Innen azt kapjuk, hogy $x^2y^2 = e \cdot e = e = (xy)^2 \implies x^2y^2 = (xy)^2 \implies xxyy = xyxy$, ahonnan következik, hogy $xy = yx$. Tehát $xy = yx, \forall x, y \in H$ esetén.

(1 pont)

$x^2 = e \implies x^{-1} = x \implies (x^{-1})^2 = x^2 = e \implies x^{-1} \in H$. Tehát a $(H, \cdot)$ részcsoportha a $(G, \cdot)$ csoportnak.

(1 pont)

Lagrange tétele alapján a H rendje osztója a G rendjének. Mivel $|H| \geq n + 1$ és $|G| = 2n$ ezért $|H| = 2n$, mert ha egy természetes szám osztója nagyobb a szám felénél, akkor az maga a szám. Tehát $H = G$.

(2 pont)

Mivel $xy = yx, \forall x, y \in H$ ezért $xy = yx, \forall x, y \in G$, tehát a $(G, \cdot)$ Abel- féle csoport.

(1 pont)

b) Legyen $H = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Feltételezzük, hogy $k > n$ vagyis $k \geq n + 1$.

Mivel $e^2 = e$, az $e \in H$, és feltételezhetjük, hogy $a_0 = e$.

(1 pont)

Ha $a_i, a_j \in H, i \neq j$ és $a_i \neq e, a_j \neq e$, akkor $a_i a_j \notin H$. Valóban, ha $a_i \cdot a_j \in H$, akkor a $H_1 = \{e, a_i, a_j, a_i a_j\}$ részcsoportha lenne a G -nek.

A H_1 -nek négy különböző eleme van, mert $a_i \cdot a_j \neq a_i, a_i \cdot a_j \neq a_j$ és $a_i \cdot a_j \neq e$, ugyanis, ha $a_i \cdot a_j = e$, akkor $a_i \cdot a_j = e = a_i \cdot a_i$, ahonnan $a_j = a_i$ következne.

(1 pont)

Tehát H_1 -nek négy eleme van. Mivel $(H_1, \cdot)$ részcsoportha a $(G, \cdot)$ csoportnak, következik, hogy $4|2n$ vagyis $2|n$, ami ellentmondás, mert n páratlan.

(1 pont)

Ha $i, j > 0$ és $i \neq j$ akkor az $a_1 a_2, a_1 a_3, \dots, a_1 a_k$ elemek egyike sem e és mind benne vannak a $G \setminus H$ halmazban. Ezen elemek száma $k - 1$. Ez viszont lehetetlen, mivel a

$$2n = |G| = |H| + |G \setminus H| \geq k + 1 + k - 1 \geq 2(n + 1) > 2n$$

ellentmondáshoz vezet.

(1 pont)

■



MINISTERUL EDUCAȚIEI



VI. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXIII. EMMV

országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

IX. osztály – II. forduló

1. feladat (10 pont). a) Hány oldala van annak a konvex sokszögnek, amelynek 350 átlója van?

b) Van-e olyan konvex sokszög amelynek $2024^m + 2$ átlója van, ahol $m \in \mathbb{N}$?

Longáver Lajos, Nagybánya

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a) Egy n oldalú sokszög átlóinak száma $\frac{n(n-3)}{2}$.

(1 pont)

$$\frac{n(n-3)}{2} = 350 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 700 = 0, \text{ melynek megoldásai } n_1 = 28 \text{ és } n_2 = -25.$$

(1 pont)

Utóbbi nem lehet egy sokszög oldalainak száma, így a sokszög 28 oldalú.

(1 pont)

b) *Első megoldás.* Kérdés, hogy van-e megoldása a természetes számok halmazán

az $\frac{n(n-3)}{2} = 2024^m + 2$ egyenletnek, ahol m természetes szám.

Ez egyenértékű az $n(n-3) = 2 \cdot 2024^m + 4$ egyenlettel.

(1 pont)

A bal oldalon szereplő kifejezés utolsó számjegye a $0 \cdot 3, 1 \cdot 4, 2 \cdot 5, 3 \cdot 6, 4 \cdot 7, 5 \cdot 8, 6 \cdot 9, 7 \cdot 0, 8 \cdot 1, 9 \cdot 2$ szorzatok utolsó számjegyéből származhat, tehát csak 0, 4 vagy 8 lehet.

(2 pont)

A jobb oldali kifejezés utolsó számjegye $m = 0$ esetén $2 + 4 = 6$, más esetben 2 vagy 6 lehet, mivel $2 \cdot \dots 4 + 4 = \dots 2$ és $2 \cdot \dots 6 + 4 = \dots 6$.

(2 pont)

Tehát egyetlen $m \in \mathbb{N}$ esetén sincs olyan n oldalú sokszög, amely átlóinak száma $2024^m + 2$.

(1 pont)

Második megoldás. Kérdés, hogy van-e megoldása a természetes számok halmazán

az $\frac{n(n-3)}{2} = 2024^m + 2$ egyenletnek, ahol m természetes szám.

Ez egyenértékű az $n(n-3) = 2 \cdot 2024^m + 4$ egyenlettel.

(1 pont)

Ha $n = 3k$, akkor a bal oldal osztható 9-cel, a jobb oldal viszont nem.

(2 pont)

Ha $n = 3k \pm 1$, akkor a bal oldal 3-mal való osztási maradéka 1, míg a jobb oldalé 0 vagy 2.

(2 pont)

Tehát egyetlen $m \in \mathbb{N}$ esetén sincs olyan n oldalú sokszög, amely átlóinak száma $2024^m + 2$.

(1 pont)

Harmadik megoldás. Kérdés, hogy van-e megoldása a természetes számok halmazán

az $\frac{n(n-3)}{2} = 2024^m + 2$ egyenletnek, ha m természetes szám.

Ez egyenértékű az $n(n-3) = 2 \cdot 2024^m + 4$ egyenlettel, amit

(1 pont)

$$n^2 - 3n - 4 = 2 \cdot 2024^m \iff (n-4)(n+1) = 2^{3m+1} \cdot 11^m \cdot 23^m \iff (n-4)(n+1) = 2 \cdot 8^m \cdot 11^m \cdot 23^m$$

(1 pont)

Ha d az $n-4$ és $n+1$ közös osztója, akkor d osztja a különbségüket, azaz 5-öt, de a jobb oldal nem többszöröse 5-nek, ebből következik, hogy $n-4$ és $n+1$ relatív prímek, ezért

(1 pont)

a jobb oldalt két olyan relatív prím tényező szorzatára kell bontani, amelyek különbsége 5.

(1 pont)

Ha $m \geq 1$, akkor $2 \cdot 8^m \cdot 11^m \cdot 23^m - 1 > 5$, ugyanakkor $2 \cdot 88^m - 23^m > 88^m - 23^m \geq 88 - 23 > 5$ és $2 \cdot 184^m - 11^m > 184^m - 11^m \geq 184 - 23 > 5$, valamint $253^m - 2 \cdot 8^m \geq 253^m - 16^m \geq 253 - 16 > 5$.
(1 pont)

Ha $m = 0$, akkor az egyenlet $n^2 - 3n - 6 = 0$ alakú, aminek nincs természetes szám megoldása.

Tehát egyetlen $m \in \mathbb{N}$ esetén sincs olyan n oldalú sokszög, amely átlóinak száma $2024^m + 2$. (1 pont)

■

2. feladat (10 pont). Az A -ban derékszögű ABC háromszögben $AB = \sqrt{2}$, E és D rendre az AB és BC oldal felezőpontja. Az AD és CE egyenesek merőlegesek egymásra és az F pontban metszik egymást.

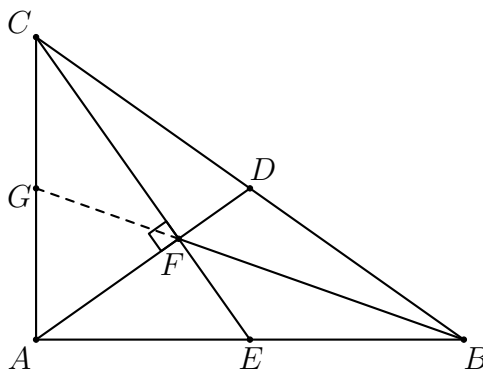
a) Igazold, hogy az AFC háromszög területe egyenlő a $BDFE$ négyszög területével!

b) Számítsd ki a BF szakasz hosszát!

Császár Sándor, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)



a)

$$T_{ACE} = T_{CEB} = \frac{1}{2} \cdot T_{ABC} \quad (1 \text{ pont})$$

$$T_{AFE} = T_{CFD} = \frac{1}{6} \cdot T_{ABC} \quad (1 \text{ pont})$$

A fenti összefüggések megfelelő oldalait kivonjuk egymásból, így kapjuk, hogy

$$T_{AFC} = T_{BDFE} \quad (1 \text{ pont})$$

b) Jelöljük x -szel az FD szakasz hosszát, innen kapjuk, hogy

$$AF = 2x, \quad AD = BD = DC = 3x. \quad (1 \text{ pont})$$

A CFD_{Δ} -ben $\widehat{F} = 90^\circ$, így a Pitagorasz-tétel alapján $CF = 2\sqrt{2}x$.

Mivel az ABC_{Δ} -ben F súlypont, kapjuk, hogy $FE = \sqrt{2}x$.

(1 pont)

Az AFE_{Δ} -ben $\widehat{F} = 90^\circ$, így a Pitagorasz-tétel alapján $AE = x\sqrt{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tehát $x = \frac{\sqrt{3}}{6}$. (1 pont)

Az ABC_{Δ} -ben $\widehat{A} = 90^\circ$, ezért a Pitagorasz-tétel alapján $AC = x\sqrt{12} = 2\sqrt{3}x = 1$. (1 pont)

Jelöljük G -vel a BF és AC egyenesek metszéspontját. Ekkor a CFA_Δ -ben FG az átfogóhoz tartozó oldalfelező, ahonnan következik, hogy $FG = \frac{AC}{2} = \frac{1}{2}$. (1 pont)

Mivel az ABC_Δ -ben F súlypont, a fentiek alapján következik, hogy

$$BF = 2 \cdot FG = 1. \quad (1 \text{ pont})$$

■

3. feladat (10 pont). Az $(a_n)_{n \geq 1}$ pozitív tagú sorozatról tudjuk, hogy $a_1 = 1$, és teljesül az alábbi összefüggés:

$$\sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{a_k \cdot a_{k+1}} = 1 - \frac{1}{a_{n+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Határozd meg a sorozat általános tagját!

b) Bizonyítsd be, hogy $\sum_{k=1}^n k \cdot a_k = \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} \right)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$

c) Igazold, hogy $\sum_{k=1}^n \frac{a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2}}{k^3 + 3k^2 + 2k} = \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{a_k} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n+2} \sqrt{a_k} \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a) Feltétel szerint $a_1 = 1 = 1^2$, és a megadott összefüggés

$n = 1$ esetén $\frac{3}{a_1 a_2} = 1 - \frac{1}{a_2}$, ahonnan $a_2 = 4 = 2^2$, és

$n = 2$ esetén $\frac{3}{a_1 a_2} + \frac{5}{a_2 a_3} = 1 - \frac{1}{a_3}$, ahonnan $a_3 = 9 = 3^2$.

(1 pont)

Feltételezzük, hogy $a_n = n^2$, és bizonyítjuk, hogy $a_{n+1} = (n+1)^2$.

Ekkor

$$\frac{3}{a_1 a_2} + \frac{5}{a_2 a_3} + \dots + \frac{2n+1}{a_n a_{n+1}} = 1 - \frac{1}{a_{n+1}}, \quad (1 \text{ pont})$$

$$1 - \frac{1}{n^2} + \frac{2n+1}{n^2 \cdot a_{n+1}} = 1 - \frac{1}{a_{n+1}}, \quad (1 \text{ pont})$$

$$-a_{n+1} + 2n + 1 = -n^2, \quad (1 \text{ pont})$$

$$a_{n+1} = (n+1)^2.$$

$$b) \sum_{k=1}^n k \cdot a_k = \sum_{k=1}^n k \cdot k^2 = \sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2, \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{így } \sum_{k=1}^n k \cdot a_k = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} \right)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (1 \text{ pont})$$

$$c) \sum_{k=1}^n \frac{a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2}}{k^3 + 3k^2 + 2k} = \sum_{k=1}^n \frac{k^2(k+1)^2(k+2)^2}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{Ugyanakkor } \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \text{ miatt} \quad (1 \text{ pont})$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2}}{k^3 + 3k^2 + 2k} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{(n+2)(n+3)}{2} = \sum_{k=1}^n k \cdot \sum_{k=1}^{n+2} k = \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{a_k} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n+2} \sqrt{a_k} \right), \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (1 \text{ pont})$$

■

4. feladat (10 pont). Határozd meg azokat az x, y, z valós számokat, amelyekre

$$(x - 2y - 3)^2 + (x + y - z)^2 + (2x - y - z)^2 = 3.$$

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Első megoldás. Hivatalból (1 pont)

Az $a = x + y - z$ és $b = 2x - y - z$ jelölést használva (1 pont)

$b - a = x - 2y$, (1 pont)

és az egyenlet $(b - a - 3)^2 + a^2 + b^2 = 3$ alakú lesz. (1 pont)

A számításokat elvégezve és balra rendezve $2a^2 + 2b^2 - 2ab + 6a - 6b + 6 = 0$, (1 pont)
majd teljes négyzeteket kialakítva kapjuk, hogy

$$(a - b + 2)^2 + (a + 1)^2 + (b - 1)^2 = 0, \quad (3 \text{ pont})$$

ahonnan $a = -1$ és $b = 1$. (1 pont)

Ekkor a megoldások $x = 2y + 2$, $y \in \mathbb{R}$ és $z = 3y + 3$.

Tehát $M = \{(2\alpha + 2, \alpha, 3\alpha + 3) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. (1 pont)

■

Második megoldás. Hivatalból (1 pont)

A tagokat négyzetre emelve, balra rendezve, majd 2-vel elosztva az egyenlet

$$3x^2 + 3y^2 + z^2 - 3xy - 3xz - 3x + 6y + 3 = 0 \quad (2 \text{ pont})$$

alakú lesz. Az egyik ismeretlen szerint rendezve a tagokat kapjuk, hogy

$$z^2 - 3xz + 3[x^2 - x(y+1) + (y+1)^2] = 0, \quad (2 \text{ pont})$$

melynek diszkriminánsa $\Delta = 9x^2 - 12x^2 + 12x(y+1) - 12(y+1)^2$, (1 pont)

ahonnan $\Delta = -3(x - 2y - 2)^2 \leq 0$. (2 pont)

Az egyenletnek pontosan akkor van valós megoldása, ha a diszkriminánsa nem negatív, ezért $x - 2y - 2 = 0$. (1 pont)

Ekkor az egyenlet megoldása: $z = \frac{3x}{2}$. Innen $x = \frac{2z}{3}$, $y = \frac{z}{2} - 1$ és $z \in \mathbb{R}$. (1 pont)

$z = 2\alpha + 2$ esetén $x = 2\alpha + 2$ és $y = \alpha$, így $M = \{(2\alpha + 2, \alpha, 3\alpha + 3) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. ■

Harmadik megoldás. Hivatalból

(1 pont)

A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned} & [(-x + 2y + 3)^2 + (-x - y + z)^2 + (2x - y - z)^2] \cdot [1^1 + 1^1 + 1^1] \geq \\ & \geq (-x + 2y + 3 - x - y + z + 2x - y - z)^2 = 9. \end{aligned}$$

(4 pont)

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha

$$\frac{-x + 2y + 3}{1} = \frac{-x - y + z}{1} = \frac{2x - y - z}{1},$$

(2 pont)

ahonnan $M = \{(2\alpha + 2, \alpha, 3\alpha + 3) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

(3 pont)



5. feladat (10 pont). Az ABC háromszögben a BAC szög mértéke 120° és AP , BQ , CR az ABC háromszög szögfelezői, $P \in BC$, $Q \in CA$, $R \in AB$.

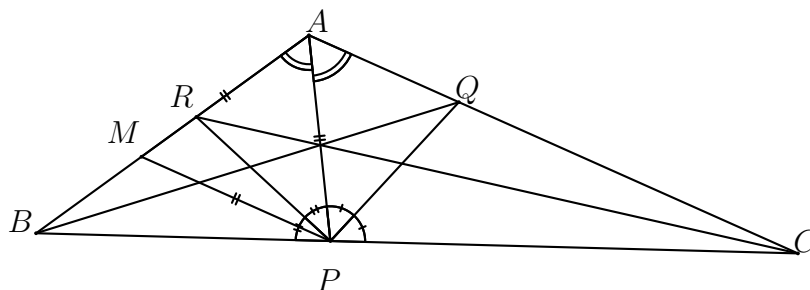
a) Igazold, hogy $AP = \frac{bc}{b+c}$, ahol $b = AC$ és $c = AB$.

b) Bizonyítsd be, hogy $QP \perp PR$.

Szilágyi Zsolt, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)



a) A P pontból párhuzamost húzunk az AC egyenessel, ami az AB oldalt az M pontban metszi. Ekkor $\widehat{MPA} = \widehat{PAC} = 60^\circ$, mert belső váltószögek, tehát az AMP háromszög egyenlő oldalú. Innen $MP = AP$.

(1 pont)

A hasonlóság alaptételéből $\frac{MP}{AC} = \frac{BP}{BC}$.

(1 pont)

Az ABC háromszögben az AP szögfelezőre felírt szögfelezőtétel alapján

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{BP}{BC} = \frac{c}{b+c}$$

(1 pont)

Tehát $\frac{MP}{b} = \frac{c}{b+c}$, ahonnan $MP = \frac{bc}{b+c}$, így $AP = \frac{bc}{b+c}$.

(1 pont)

b) *Első megoldás*

Az ABP háromszögben $AP = \frac{bc}{b+c}$ és $BP = \frac{ac}{b+c}$, a $\frac{BP}{BC} = \frac{c}{b+c}$ összefüggés alapján.

(1 pont)

Tehát $\frac{AP}{BP} = \frac{b}{a}$.

(1 pont)

Ugyanakkor az ABC háromszögben az CR szögfelezőre felírt szögfelezőtétel alapján

$$\frac{AR}{RB} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}.$$

(1 pont)

A fentiek alapján $\frac{AR}{RB} = \frac{AP}{BP}$, így a szögfelező tételének fordított tétele alapján PR az APB szög szögfelezője.

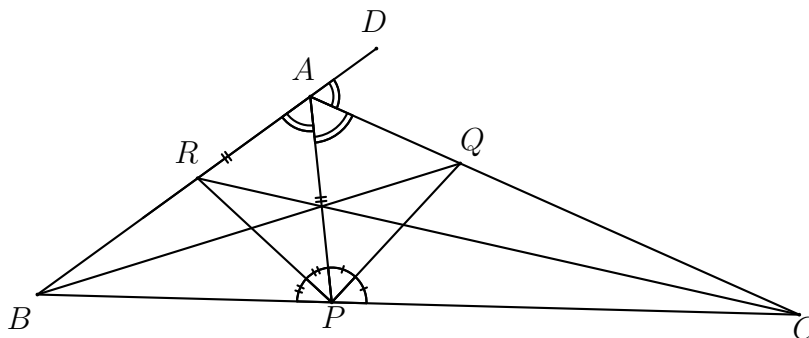
Hasonlóan PQ az APC szög szögfelezője.

(1 pont)

Tehát PR és PQ két egymás melletti kiegészítő szög szögfelezője, így $PR \perp PQ$.

(1 pont)

Második megoldás



Az ABP háromszögben BQ belső szögfelező, AQ pedig külső szögfelező,

(1 pont)

ahonnan következik, hogy PQ szintén külső szögfelező.

(1 pont)

Innen kapjuk, hogy $\widehat{APQ} = \widehat{CPQ}$.

(1 pont)

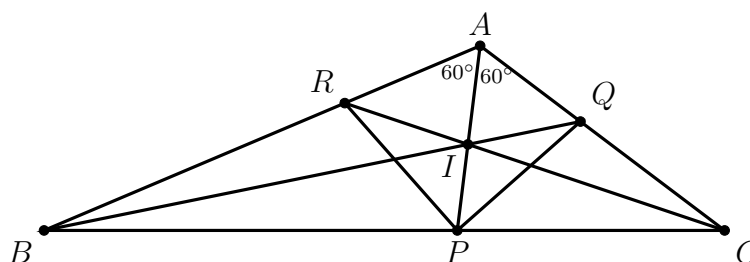
Teljesen hasonlóan $\widehat{APR} = \widehat{BPR}$.

(1 pont)

Mindezekből következik, hogy $\widehat{RPQ} = 90^\circ$, azaz $PR \perp PQ$.

(1 pont)

Harmadik megoldás



Jelölje a, b, c rendre az ABC háromszög BC, CA, AB oldalainak hosszát. Az ABC háromszög AP szögfelezőjére felírva a szögfelezőtételt $\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$, ahonnan $\frac{BP}{BC} = \frac{BP}{BP+PC} = \frac{c}{b+c}$ és $\frac{BC}{PC} = \frac{BP+PC}{PC} = \frac{c+b}{b}$. Ezek alapján írhatjuk, hogy

$$\overrightarrow{BP} = \frac{c}{b+c} \cdot \overrightarrow{BC} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{CP} = \frac{b}{b+c} \cdot \overrightarrow{CB}. \quad (1 \text{ pont})$$

Az ABC háromszög CR szögfelezőjére felírva a szögfelezőtételt $\frac{BR}{RA} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$, így $\frac{BR}{BA} = \frac{a}{a+b}$, ezért

$$\overrightarrow{BR} = \frac{a}{a+b} \cdot \overrightarrow{BA}.$$

Hasonlóan az ABC háromszög BQ szögfelezőjére felírva a szögfelezőtételt $\frac{CQ}{QA} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$, ahonnan $\frac{CQ}{CA} = \frac{a}{a+c}$, így

$$\overrightarrow{CQ} = \frac{a}{a+c} \cdot \overrightarrow{CA}.$$

(1 pont)

Tehát

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PR} &= \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BR} = -\frac{c}{b+c} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{a}{a+b} \cdot \overrightarrow{BA} \\ &= -\frac{c}{b+c} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) - \frac{a}{a+b} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{c}{b+c} \cdot \overrightarrow{AC} + \left(\frac{c}{b+c} - \frac{a}{a+b} \right) \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{c}{b+c} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{b(c-a)}{(b+c)(a+b)} \cdot \overrightarrow{AB}, \\ \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} = \frac{b}{b+c} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{a}{a+c} \cdot \overrightarrow{CA} \\ &= \frac{b}{b+c} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) - \frac{a}{a+c} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{b}{b+c} \cdot \overrightarrow{AB} + \left(\frac{b}{b+c} - \frac{a}{a+c} \right) \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{b}{b+c} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{c(b-a)}{(b+c)(a+c)} \cdot \overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

(1 pont)

Megjegyezzük, hogy

$$\overrightarrow{AB}^2 = c^2, \quad \overrightarrow{AC}^2 = b^2, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = bc \cos(\widehat{BAC}) = bc \cos 120^\circ = -\frac{bc}{2}.$$

Végül

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PQ} &= \left[-\frac{c}{b+c} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{b(c-a)}{(b+c)(a+b)} \cdot \overrightarrow{AB} \right] \cdot \left[-\frac{b}{b+c} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{c(b-a)}{(b+c)(a+c)} \cdot \overrightarrow{AC} \right] \\
&= \frac{cb}{(b+c)^2} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{b^2(c-a)}{(b+c)^2(a+b)} \overrightarrow{AB}^2 - \frac{c^2(b-a)}{(b+c)^2(a+c)} \overrightarrow{AC}^2 \\
&\quad + \frac{bc(c-a)(b-a)}{(b+c)^2(a+b)(a+c)} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= -\frac{(cb)^2}{2(b+c)^2} - \frac{(cb)^2(c-a)}{(b+c)^2(a+b)} - \frac{(cb)^2(b-a)}{(b+c)^2(a+c)} - \frac{(bc)^2(c-a)(b-a)}{2(b+c)^2(a+b)(a+c)} \\
&= \frac{-(cb)^2}{2(b+c)^2(a+b)(a+c)} [(a+b)(a+c) + 2(c-a)(c+a) + 2(b-a)(b+a) + (c-a)(b-a)] \\
&= \frac{-(cb)^2}{2(b+c)^2(a+b)(a+c)} [2bc + 2c^2 + 2b^2 - 2a^2]
\end{aligned} \tag{1 pont}$$

Az ABC háromszögben a koszinusztétel alapján

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(120^\circ) = b^2 + c^2 + bc,$$

tehát $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$, amiből következik, hogy $PR \perp PQ$. (1 pont)

■

6. feladat (10 pont). Lúdas Matyinak van 31 lúdja, 33 kacsája és 35 tyúkjá. Találkozik a vásárbán Döbrögivel, akinek 27 lúdja, 33 kacsája és 39 tyúkjá van. Megegyeznek, hogy cserélni fognak a következő szabály szerint: két darab, különböző fajtajú szárnyasért cserébe a másik ad két szárnyast a harmadik fajtából, vagy fordítva, két ugyanolyan szárnyasért egy-egy darabot a másik két fajtából.

- a) Sikerülhet-e Döbröginek úgy csereberélnie, hogy a végén minden fajta szárnyasból ugyanannyi darabja legyen?
- b) Sikerülhet-e Lúdas Matyinak úgy csereberélnie, hogy a végén minden fajta szárnyasból ugyanannyi darabja legyen?

*Kocsis Attila-Levente, Déva*Megoldás. Hivatalból (1 pont)

- a) Igen, sikerülhet. A (ludak száma, kacsák száma, tyúkok száma) hármas a következőképpen alakul $(27, 33, 39) \rightarrow (29, 32, 38) \rightarrow (31, 31, 37) \rightarrow (30, 33, 36) \rightarrow (32, 32, 35) \rightarrow (31, 34, 34) \rightarrow (33, 33, 33)$.

(3 pont)

- b) Egy csere után két fajta szárnyas száma eggyel csökken, a harmadik fajtaé pedig 2-vel nő. (Például, ha csere előtt van L lúdja, T tyúkjá és K kacsája, akkor ha egy ludat és egy kacsát cserél két tyúkra, akkor az új számok $L - 1$, $K - 1$ és $T + 2$, vagy ha két tyúkot cserél egy lúdra és egy kacsára, akkor az új számok $L + 1$, $K + 1$ és $T - 2$.)

(2 pont)

Egy ilyen cserével a különféle szárnyasok száma közti különbség vagy nem változik, vagy hárommal változik. (A fenti példában az új különbségek $L - K$, $L - T - 3$ és $K - T - 3$ vagy $L - K$, $L - T + 3$ és $K - T + 3$)

(1 pont)

Egyik esetben sem változik a különbségek 3-mal való osztási maradéka. **(1 pont)**

Az eredeti különbségek 2, 2 és 4, tehát ugyanebben a sorrendben végzett különbségek maradékai 2, 2 és 1 lesznek. **(1 pont)**

Ha minden fajta szárnyasból ugyanannyi lenne, akkor ezek a különbségek nullák lennének, ami a fentiek alapján nem érhető el. **(1 pont)**





MINISTERUL EDUCAȚIEI



VI. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXIII. EMMV

országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

X. osztály – II. forduló

1. feladat (10 pont). a) Igazold, hogy $3^p + 2^p$ osztható 5-tel, bármely $p \geq 1$ páratlan természetes szám esetén!

b) Mutasd ki, hogy $3^{12m+1} + 2^{12n+5}$ osztható 5-tel, bármely m és n természetes számok esetén!

Mátéfi István, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a) Első megoldás. Mivel p páratlan, így $p = 4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ vagy $p = 4k + 3$, $k \in \mathbb{N}$ alakú. (1 pont)

I. eset: $p = 4k + 1$ esetén

$$3^4 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 3^{4k+1} \equiv 3 \pmod{5}$$

$$2^4 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 2^{4k+1} \equiv 2 \pmod{5}$$

(1 pont)

ahonnan $3^{4k+1} + 2^{4k+1} \equiv 0 \pmod{5}$.

(1 pont)

II. eset: $p = 4k + 3$ esetén az előző eset alapján

$$3^{4k+1} \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow 3^{4k+3} \equiv 2 \pmod{5}$$

$$2^{4k+1} \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow 2^{4k+3} \equiv 3 \pmod{5}$$

(1 pont)

ahonnan $3^{4k+3} + 2^{4k+3} \equiv 0 \pmod{5}$, tehát a kért állítás igaz.

(1 pont)

Második megoldás. Ellenőrizzük az állítást $p = 1$ -re: $3^1 + 2^1 = 5 \div 5$.

(1 pont)

Feltételezzük, hogy igaz $p = 2k + 1$ -re, $k \geq 1$ esetén, azaz

$$3^{2k+1} + 2^{2k+1} \div 5,$$

igazoljuk, hogy

$$3^{2k+3} + 2^{2k+3} \div 5.$$

(1 pont)

Ekkor $3^{2k+3} = 3^2 \cdot 3^{2k+1}$, az indukciós feltevés alapján pedig $3^{2k+1} + 2^{2k+1} = 5M$ alakú, azaz $3^{2k+1} = 5M - 2^{2k+1}$.

(1 pont)

$$3^{2k+3} + 2^{2k+3} = 3^2(5M - 2^{2k+1}) + 2^{2k+3}$$

$$= 5M \cdot 3^2 + 2^{2k+3} - 9 \cdot 2^{2k+1}$$

$$= 5M \cdot 3^2 + 2^{2k+1}(4 - 9)$$

$$= 5M \cdot 3^2 - 5 \cdot 2^{2k+1} \div 5.$$

(2 pont)

Harmadik megoldás. Ha $p = 2k + 1$, akkor

$$3^{2k+1} + 2^{2k+1} = (3 + 2)(3^{2k} - 3^{2k-1} \cdot 2 + 3^{2k-2} \cdot 2^2 - \dots + 2^{2k}),$$

vagyis a megadott kifejezés osztható 5-tel.

(5 pont)

b) Mivel $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{5}$, ezért $3^{12} \equiv 1 \pmod{5}$, vagyis $3^{12m+1} \equiv 3 \pmod{5}$. (1 pont)

Hasonlóan, mivel $2^4 = 16 \equiv 1 \pmod{5}$, ezért $2^{12} \equiv 1 \pmod{5}$, tehát $2^{12n+1} \equiv 2 \pmod{5}$. (1 pont)

Tehát $3^{12m+1} + 2^{12n+5} \equiv 0 \pmod{5}$, azaz $3^{12m+1} + 2^{12n+5}$ osztható 5-tel, bármely m és n természetes számok esetében. (2 pont)

■

2. feladat (10 pont). Adott az $E(n) = 9^n + 3^{n+1} + 4^n + 3 \cdot 2^n + 2 \cdot 6^n + 2$ kifejezés, ahol $n \in \mathbb{N}$. Tanulmányozd, hogy létezik-e olyan n természetes szám, amelyre

a) $E(n)$ prímszám;

b) $E(n)$ teljes négyzet;

c) $E(n) = 210$.

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

a) Az $E(n)$ kifejezést megpróbáljuk szorzattá alakítani:

$$\begin{aligned} E(n) &= 9^n + 3^{n+1} + 4^n + 3 \cdot 2^n + 2 \cdot 6^n + 2 \\ E(n) &= (3^n)^2 + 2 \cdot 3^n \cdot 2^n + (2^n)^2 + 3 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n + 2 \\ E(n) &= (3^n + 2^n)^2 + 3(3^n + 2^n) + 2. \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

A $(3^n + 2^n)$ -ben másodfokú $(3^n + 2^n)^2 + 3(3^n + 2^n) + 2 = 0$ egyenleteknek a gyökei -1 és -2 , (1 pont) ezért

$$E(n) = (3^n + 2^n + 1) \cdot (3^n + 2^n + 2), \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1 \text{ pont})$$

Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $E(n)$ két egymást követő, 1-nél nagyobb természetes szám szorzata, ezért nincs olyan n természetes szám, amelyre $E(n)$ prímszám. (1 pont)

b) Tekintettel arra, hogy $(3^n + 2^n + 1)^2 < E(n) < (3^n + 2^n + 2)^2$ és két egymást követő természetes szám négyzete között nincs egyetlen teljes négyzet sem, ezért nincs olyan n természetes szám, amelyre $E(n)$ teljes négyzet lenne. (1 pont)

c) Mivel

$$E(2) = (9 + 4 + 1)(9 + 4 + 2) = 14 \cdot 15 = 210, \quad (3 \text{ pont})$$

ezért a 2 teljesíti a kért feltételt. (1 pont)

■

3. feladat (10 pont). Oldd meg a valós számok halmazán az

$$(x^2 - 2x)(x^2 - x - 6)(x^2 - 3x - 4) + 36 = 0$$

egyenletet!

Longáver Lajos, Nagybánya

*Első megoldás. Hivatalból***(1 pont)**

Bontsuk fel a másodfokú kifejezéseket elsőfokú kifejezések szorzatára:

$$\begin{aligned}
x^2 - 2x &= x(x - 2), \\
x^2 - x - 6 &= x^2 - 3x + 2x - 6 = x(x - 3) + 2(x - 3) = (x - 3)(x + 2), \\
x^2 - 3x - 4 &= x^2 - 4x + x - 4 = x(x - 4) + (x - 4) = (x - 4)(x + 1).
\end{aligned}$$

Ekkor az egyenletünk a következőképpen alakul át:

$$x(x - 2)(x - 3)(x + 2)(x - 4)(x + 1) + 36 = 0.$$

Rendezzük:

$$(x - 4)(x - 3)(x - 2)x(x + 1)(x + 2) + 36 = 0. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Észrevehetjük, hogy az $x = 1$ megoldás, mert $(-3) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 + 36 = 0$. **(1 pont)**Az elsőfokú kifejezéseket csoportosítjuk ismét kettesével, így a következő párokat kapjuk $(x - 2) \cdot x$, $(x - 3)(x + 1)$, illetve $(x - 4)(x + 2)$. Ha ezeket a szorzásokat elvégezzük, akkor az egyenlet a következő:

$$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x - 8) + 36 = 0. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Ekkor legyen $y = x^2 - 2x$, ami alapján az $y(y - 3)(y - 8) + 36 = 0 \iff y^3 - 11y^2 + 24y + 36 = 0$ egyenletet kell megoldani. **(1 pont)**Tudjuk, hogy $x = 1$ megoldása volt az eredeti egyenletnek, így az $y = x^2 - 2x = 1 - 2 = -1$ megoldás. Ez alapján

$$\begin{aligned}
y^3 - 11y^2 + 24y + 36 &= 0 \\
y^3 + y^2 - 12y^2 - 12y + 36y + 36 &= 0 \\
y^2(y + 1) - 12y(y + 1) + 36(y + 1) &= 0 \\
(y + 1)(y^2 - 12y + 36) &= 0 \\
(y + 1)(y - 6)^2 &= 0. \quad \textbf{(2 pont)}
\end{aligned}$$

Az $y + 1 = 0$ esetben $x^2 - 2x = -1 \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x - 1)^2 = 0$, tehát az $x_1 = x_2 = 1$ megoldásai az eredeti egyenletnek. **(1 pont)**Az $(y - 6)^2 = 0$ esetben az $y = 6$ kétszeres gyöke az egyenletnek.Ha $y = 6 \iff x^2 - 2x = 6 \iff x^2 - 2x - 6 = 0$, így $\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 28$, ahonnan

$$x_{3,4} = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{2} = 1 \pm \sqrt{7}. \text{ De mivel } y = 6 \text{ kétszeres gyök volt, így } x_3 = x_5 = 1 + \sqrt{7}, \text{ illetve } x_4 = x_6 = 1 - \sqrt{7}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Tehát az eredeti egyenlet megoldásai $x_1 = x_2 = 1, x_3 = x_5 = 1 + \sqrt{7}, x_4 = x_6 = 1 - \sqrt{7}$. ■*Második megoldás. Hivatalból***(1 pont)**

Bontsuk fel a másodfokú kifejezéseket elsőfokú kifejezések szorzatára:

$$\begin{aligned}
x^2 - 2x &= x(x - 2), \\
x^2 - x - 6 &= x^2 - 3x + 2x - 6 = x(x - 3) + 2(x - 3) = (x - 3)(x + 2), \\
x^2 - 3x - 4 &= x^2 - 4x + x - 4 = x(x - 4) + (x - 4) = (x - 4)(x + 1).
\end{aligned}$$

Ezért a megoldandó egyenletet a következő alakba írhatjuk:

$$x(x - 2)(x - 3)(x + 2)(x - 4)(x + 1) + 36 = 0. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Ha $x - 1 = p$, akkor

(2 pont)

$$\begin{aligned} x(x-2)(x-3)(x+2)(x-4)(x+1) &= (p+1)(p-1)(p-2)(p+3)(p-3)(p+2) \\ &= (p-1)(p+1)(p-2)(p+2)(p-3)(p+3). \end{aligned}$$

Tehát a megoldandó egyenlet a következő:

$$(p^2 - 1)(p^2 - 4)(p^2 - 9) + 36 = 0. \quad (2 \text{ pont})$$

Legyen $p^2 = z$, ahonnan

$$(z - 1)(z - 4)(z - 9) + 36 = z^3 - 14z^2 + 49z = z(z - 7)^2 = 0. \quad (2 \text{ pont})$$

Ennek az egyenletnek a megoldásai $z_1 = 0$ és $z_2 = z_3 = 7$. Mivel $x = p + 1 = z^2 + 1$, következik, hogy $x_1 = x_2 = 1, x_3 = x_5 = 1 + \sqrt{7}, x_4 = x_6 = 1 - \sqrt{7}$. (2 pont) ■

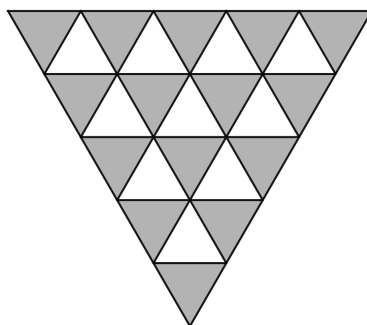
4. feladat (10 pont). Egy kincskereső egy egyenlő oldalú háromszög alakú területet tár fel, amelynek oldala 5 egység. A terület fel van osztva kongruens egyenlő oldalú háromszögekre, amelyek oldalai 1 egység hosszúak és párhuzamosak az eredeti háromszög oldalaival. Minden egyes kis háromszögben egy kincs rejlik. A feltárást a kincskereső bármely kis háromszögben elkezdheti, ezután viszont egy háromszögből csak vele oldalszomszédos háromszögbe mehet át, egy háromszögbe nem térhet vissza és nem hagyhatja el a nagy háromszög területét.

Maximálisan hány kincset gyűjthet be a kincskereső? Adj meg egy útvonalat, amely mentén haladva ez elérhető!

Kovács Melinda, Beszterce

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)



1. ábra. Felosztás és színezés

Tekintve az 1. ábrát az első sorban 9, a második sorban 7, a harmadikban 5, a negyedikben 3 és az utolsó sorban 1 kis egyenlő oldalú háromszög szerepel. Így összesen $9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 25$ kis háromszögre van felosztva a terület. (1 pont)

A kis háromszögeket színezzük be, váltakozva fekete és fehér színre, mint az 1. ábrán látható. Ekkor a fekete háromszögek száma $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ lesz, míg a fehéreké $4 + 3 + 2 + 1 = 10$.

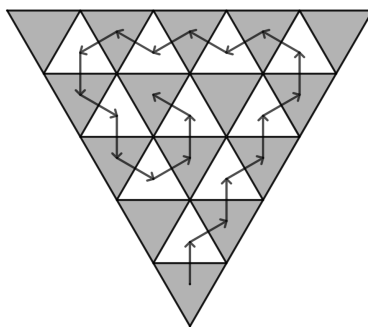
(2 pont)

Mivel a kincskereső egy háromszögből csak vele oldalszomszédos háromszögbe mehet, így minden lépésben fekete színű háromszögből fehérbe, vagy fehér színűből feketébe fog menni. (1 pont)

A maximális útvonalat akkor érheti el a kincskereső, ha feketéből (a több) indul és bejárva az összes fehéret, fekete háromszögbe érkezik. (2 pont)

Mivel a fehér háromszögek száma 10, ezért egy út során legfeljebb 10 darab fehér és 11 darab fekete háromszögon haladhat át a kincskereső, tehát legfeljebb 21 kincset tud gyűjteni. (1 pont)

Ez el is érhető, egy ilyen útvonal látható a 2. ábrán. (2 pont)



2. ábra. Példa maximális hosszúságú útra

■

5. feladat (10 pont). Az ABC háromszög köré írt kör középpontja O , átmérője AM és $N \in AM$ úgy, hogy $BN \perp AM$.

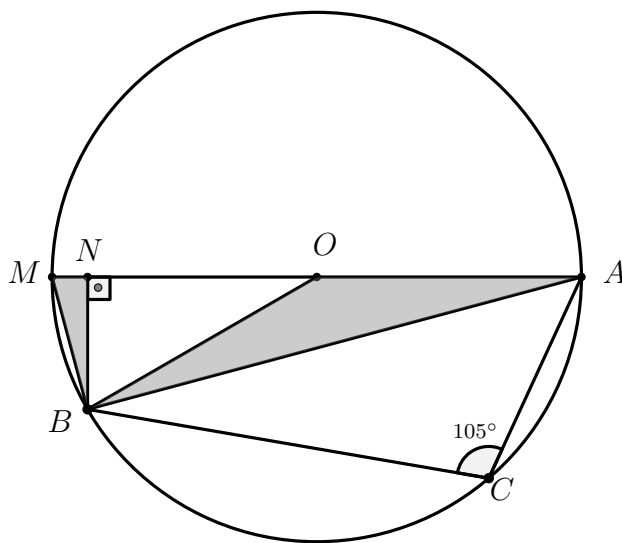
a) Számítsd ki az AOB és BNM háromszögek területének az arányát, ha $\hat{C} = 105^\circ$.

b) Mekkora az ABC háromszög C szögének a mértéke, ha $3 \cdot T_{AOB\Delta} = 2 \cdot T_{BNM\Delta}$ és $\hat{C} > 90^\circ$?

Mátéfi István, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)



a) Mivel a $\widehat{C} = 105^\circ \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} = 75^\circ$.

Az ABC háromszög köré írt körön található $\widehat{BC} + \widehat{CA} = 2(\widehat{A} + \widehat{B}) = 150^\circ$, ahonnan kapjuk, hogy $\widehat{MB} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{BAM} = 15^\circ$. **(1 pont)**

$$\frac{T_{AOB\Delta}}{T_{BNM\Delta}} = \frac{OA \cdot d(B, OA)}{MN \cdot d(B, MN)} = \frac{OA}{MN}.$$

A BNM háromszögben $\widehat{NMB} = 75^\circ$ és $\widehat{MNB} = 90^\circ$, tehát

$$\cos \widehat{NMB} = \frac{MN}{MB} \Rightarrow MN = MB \cdot \cos \widehat{NMB} \Rightarrow MN = MB \cdot \cos 75^\circ. \quad (1)$$

(1 pont)

Az ABM háromszögben $\widehat{NAB} = 15^\circ$ és $\widehat{ABM} = 90^\circ$, tehát

$$\sin \widehat{MAB} = \frac{MB}{AM} \Rightarrow MB = AM \cdot \sin \widehat{MAB} \Rightarrow MB = AM \cdot \sin 15^\circ. \quad (2)$$

(1 pont)

Az (1) és (2) alapján kapjuk, hogy

$$MN = AM \cdot \sin 15^\circ \cdot \cos 75^\circ \Rightarrow MN = AM \cdot \sin 15^\circ \cdot \sin 15^\circ = AM \cdot \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} \Rightarrow MN = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \cdot AM,$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$\frac{T_{AOB\Delta}}{T_{BNM\Delta}} = \frac{OA}{MN} = \frac{4 \cdot OA}{(2 - \sqrt{3}) \cdot AM} = \frac{4 \cdot OA}{(2 - \sqrt{3}) \cdot 2 \cdot OA} = 2(2 + \sqrt{3}). \quad (1 \text{ pont})$$

b) Legyen $\widehat{C} = \alpha \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ - \alpha$. Írhatjuk, hogy $\widehat{BC} + \widehat{CA} = 2 \cdot (\widehat{A} + \widehat{B}) = 360^\circ - 2\alpha$, ahonnan $\widehat{MB} = 2\alpha - 180^\circ$ (mivel $\alpha > 90^\circ$, ez a mérték pozitív). Ezért $\widehat{BAM} = \alpha - 90^\circ$. **(1 pont)**

$$\frac{T_{AOB\Delta}}{T_{BNM\Delta}} = \frac{OA \cdot d(B, OA)}{MN \cdot d(B, MN)} = \frac{OA}{MN}.$$

A BNM háromszögben $\widehat{MBN} = \alpha - 90^\circ$ és $\widehat{MNB} = 90^\circ$, tehát

$$\sin \widehat{MBN} = \frac{MN}{MB} \Rightarrow MN = MB \cdot \sin \widehat{MBN} \Rightarrow MN = MB \cdot \sin(\alpha - 90^\circ) \quad (3)$$

(1 pont)

Az ABM háromszögben $\widehat{NAB} = \alpha - 90^\circ$ és $\widehat{ABM} = 90^\circ$, tehát

$$\sin \widehat{MAB} = \frac{MB}{AM} \Rightarrow MB = AM \cdot \sin \widehat{MAB} \Rightarrow MB = AM \cdot \sin(\alpha - 90^\circ). \quad (4)$$

(1 pont)

A (3) és (4) alapján kapjuk, hogy $MN = MB \cdot \cos \widehat{NMB} \Rightarrow$

$$MN = AM \cdot \sin^2(\alpha - 90^\circ)$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$\frac{T_{AOB\Delta}}{T_{BNM\Delta}} = \frac{OA}{MN} = \frac{OA}{2 \cdot OA \cdot \sin^2(\alpha - 90^\circ)} \Rightarrow \frac{T_{AOB\Delta}}{T_{BNM\Delta}} = \frac{1}{2 \cdot \sin^2(\alpha - 90^\circ)}. \quad (1 \text{ pont})$$

$$3 \cdot T_{AOB\Delta} = 2 \cdot T_{BNM\Delta} \Leftrightarrow \sin^2(\alpha - 90^\circ) = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \cos^2(-\alpha) = \cos^2 \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow \alpha = 150^\circ$ vagy $\alpha = 30^\circ$. Viszont a C tompaszög, ezért $\alpha = 150^\circ$. (1 pont)

■

6. feladat (10 pont). Robi felírt a táblára 100 darab egyest. Ezután minden lépésben letöröl egy x számot a tábláról, és helyette felírja az $\frac{x}{2}, \frac{x}{3}, \frac{x}{6}$ számokat. Dávid észrevette, hogy akárhányszor ismétli meg ezt Robi, minden lépés után kiválasztható egy olyan szám, amely legalább 34-szer szerepel a táblán. Bizonyítsd be, hogy Dávid észrevétele helyes!

Barta-Zágoni Csongor, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

Vegyük észre, hogy $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6}$, tehát a táblán szereplő számok összege invariáns, így az mindvégig $S = 100$ marad. (1 pont)

Továbbá az is látható, hogy mivel egyesekből indulunk ki, és egy új számot a régít 2-vel, 3-mal, vagy $2 \cdot 3$ -mal osztva kapunk, ezért minden táblára felkerülő szám $\frac{1}{2^a \cdot 3^b}$ alakú, ahol $a, b \in \mathbb{N}$. (1 pont)

Alkalmazzuk *reductio ad absurdum* módszerét: feltételezzük, hogy létezik olyan véges lépéssorozat, amely után minden szám legfeljebb 33-szor jelenik meg a táblán, n darab lépés után. (1 pont)

Becsüljük felülről az S összeget! Mivel n lépést végeztünk, ezért a legkisebb szám, ami a táblán szerepelhet az a $\frac{1}{2^n \cdot 3^n}$. (1 pont)

Mivel minden szám legfeljebb 33-szor szerepelhet, az összeg pedig állandó, így

$$S = 100 \leq 33 \cdot \sum_{\substack{0 \leq i \leq n, \\ 0 \leq j \leq n}} \frac{1}{2^i \cdot 3^j} = 33 \left(\sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} + \frac{1}{3^1} \cdot \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} + \frac{1}{3^2} \cdot \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} + \cdots + \frac{1}{3^n} \cdot \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} \right) \quad (1 \text{ pont})$$

$$S = 100 \leq 33 \cdot \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} \cdot \sum_{j=0}^n \frac{1}{3^j} \quad (1 \text{ pont})$$

A mértani haladványok képletét felhasználva kapjuk, hogy

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{1}{2^n} < 2, \quad (1 \text{ pont})$$

$$\sum_{j=0}^n \frac{1}{3^j} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^n} < \frac{3}{2}. \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{Innen pedig } S \leq 33 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} = 99 \iff 100 \leq 99, \text{ ami ellentmondás.} \quad (1 \text{ pont})$$

Tehát Dávid észrevétele helyes. ■



MINISTERUL EDUCAȚIEI



VI. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXIII. EMMV

országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

XI-XII. osztály – II. forduló

1. feladat (10 pont). Határozd meg az összes olyan természetes számot, amelynek pontosan hat pozitív osztója van, és pozitív valódi osztóinak összege 2024-gyel egyenlő!

Kajántó Tünde, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Ha az n természetes számnak 6 osztója van, akkor $n = p^5$ vagy $n = p^2 \cdot q$, ahol p, q különböző prímek.

(1 pont)

Ha $n = p^5$, akkor a feltétel alapján $p + p^2 + p^3 + p^4 = 2024$, ahonnan

$$p \cdot (1 + p + p^2 + p^3) = 2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23. \quad (1 \text{ pont})$$

Innen a $p = 2$ eset behelyettesítés alapján nem jó, hisz az összeg kisebb lesz, mint 2024. A $p = 11$ vagy $p = 23$ értékek sem jók, mivel $10^4 = 10000$, vagyis az 10-nél nagyobb prímszámok esetén az összeg már meghaladja a 2024-et. Tehát n nem lehet p^5 alakú.

(2 pont)

Ha $n = p^2 q$, akkor a feltétel alapján $p + p^2 + q + pq = 2024$, ahonnan

$$(1 + p) \cdot (q + p) = 2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23. \quad (1 \text{ pont})$$

A baloldali tényezők egyike se lehet 1 vagy 2, valamint $1 + p < q + p$. Ezt felhasználva az alábbi táblázatban vizsgáljuk a 2024 lehetséges tényezőre bontásait:

$1 + p$	$q + p$	p	q
4	506	3	503
8	253	7	246 nem prím
11	184	10 nem prím	
22	92	21 nem prím	
23	88	22 nem prím	
44	46	43	3

(3 pont)

Tehát az egyik lehetséges eset a $p = 3, q = 503$, ekkor $n = 3^2 \cdot 503 = 4527$. A másik esetben $p = 43, q = 3$, ekkor $n = 43^2 \cdot 3 = 5547$.

(1 pont)



2. feladat (10 pont). Oldd meg a valós számok halmazán a

$$\begin{cases} \log_5(22 + x) = \log_3(12 - y) \\ \log_5(22 + y) = \log_3(12 - z) \\ \log_5(22 + z) = \log_3(12 - x) \end{cases}$$

egyenletrendszer!

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

Mivel a három változó cirkulárisan permutálható, bármelyről feltételezhetjük, hogy a legnagyobb. Legyen a legnagyobb az y , azaz $z \leq y$ és $x \leq y$. (1 pont)

$$\log_3(12 - x) = \log_5(22 + z) \leq \log_5(22 + y) = \log_3(12 - z) \implies 12 - x \leq 12 - z \implies z \leq x. \quad (1 \text{ pont})$$

$$\log_3(12 - x) = \log_5(22 + z) \leq \log_5(22 + x) = \log_3(12 - y) \implies 12 - x \leq 12 - y \implies y \leq x. \quad (1 \text{ pont})$$

Tehát $z \leq x = y$.

Így az első egyenlet a

$$\log_5(22 + x) = \log_3(12 - x) \quad (1)$$

egyenlettel egyenértékű. (1 pont)

Az

$$f: (-22, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_5(22 + x)$$

függvény szigorúan növekvő, a

$$g: (-\infty, 12) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \log_3(12 - x)$$

függvény szigorúan csökkenő, így grafikus képeik legtöbb egy pontban metszik egymást, vagyis a (1)-es egyenletnek legtöbb egy megoldása van. (1 pont)

Ha $x = 3$, akkor

$$\log_5(22 + 3) = \log_3(12 - 3) \iff 2 = 2 \text{ igaz.}$$

Következik, hogy $x = 3$ az egyenlet egyetlen megoldása. (1 pont)

A harmadik egyenletbe behelyettesítve ezt az értéket, $z = 3$ megoldást kapjuk. (1 pont)

Tehát az egyenletrendszer megoldása: $(x, y, z) = (3, 3, 3)$. (1 pont)

■

3. feladat (10 pont). Az $ABCD$ húrnégyszög átlói merőlegesek egymásra, E az átlók metszéspontja. A négyszög köré írható kör középpontja O és M az AB oldal felezőpontja.

a) Igazold, hogy $EM \perp CD$!

b) Igazold, hogy $OM = \frac{CD}{2}$!

(***)

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Észrevesszük, hogy a $2n, 2n + 1, \dots, 4n$ számokból alkotható bármely számhármasság esetén teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, hiszen a két legkisebb elem összege $4n + 1$, ami nagyobb $4n$ -nél, a halmaz legnagyobb eleménél. (4 pont)

Viszont ezek száma $2n + 1$, így a skatulya elv alapján biztosan lesz köztük három, ami ugyanabba a halmazba kerül. (2 pont)

Tehát ebben a halmazban van három szám, amelyek egy háromszög oldalainak mérőszámai. (1 pont) ■

5. feladat (10 pont). Az ABC háromszögben fennáll a

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C + \sqrt{3} \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{5}{4}$$

összefüggés. Igazold, hogy az ABC háromszög egyenlő oldalú!

Longáver Lajos, Nagybánya

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Összegé alakítjuk a $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$ szorzatot.

$$\begin{aligned} \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C &= \frac{1}{2} \cdot [\cos(A + B) + \cos(A - B)] \cdot \cos C = \\ \frac{1}{2} \cdot [\cos(\pi - C) + \cos(A - B)] \cdot \cos C &= \frac{1}{2} \cdot [-\cos C + \cos(A - B)] \cdot \cos C = \\ \frac{1}{2} \cdot [-\cos^2 C + \cos(A - B) \cdot \cos C] &= \\ \frac{1}{2} \cdot \left[-\cos^2 C + \frac{\cos(A - B + C) + \cos(A - B - C)}{2} \right] &= \\ \frac{-2\cos^2 C + \cos(\pi - 2B) + \cos(2A - \pi)}{4} &= \\ \frac{-2\frac{1+\cos(2C)}{2} - \cos(2B) - \cos(2A)}{4}. \end{aligned}$$

Tehát

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = -\frac{1 + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C}{4}.$$

(2 pont)

Hasonlóan igazolható, hogy

$$\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{4}.$$

(2 pont)

Felhasználva az azonosságokat, a kezdeti feltétel:

$$\begin{aligned} \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C + \sqrt{3} \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C &= \frac{5}{4} \iff \\ -\frac{1 + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C}{4} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{4} &= \frac{5}{4} \iff \end{aligned}$$

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C - \sqrt{3}(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) + 6 = 0$$

alakba írható.

Csoportosítva a tagokat azt kapjuk, hogy:

$$(\cos 2A - \sqrt{3} \sin 2A + 2) + (\cos 2B - \sqrt{3} \sin 2B + 2) + (\cos 2C - \sqrt{3} \sin 2C + 2) = 0.$$

(1 pont)

Felhasználva a

$$\cos 2A - \sqrt{3} \sin 2A + 2 = \cos^2 A - \sin^2 A - 2\sqrt{3} \cdot \sin A \cdot \cos A + 2(\cos^2 A + \sin^2 A) =$$

$$= 3\cos^2 A - 2\sqrt{3} \cdot \sin A \cdot \cos A + \sin^2 A = (\sin A - \sqrt{3} \cos A)^2$$

(2 pont)

azonosságot kapjuk, hogy:

$$(\sin A - \sqrt{3} \cos A)^2 + (\sin B - \sqrt{3} \cos B)^2 + (\sin C - \sqrt{3} \cos C)^2 = 0 \iff$$

$$\sin A - \sqrt{3} \cos A = \sin B - \sqrt{3} \cos B = \sin C - \sqrt{3} \cos C = 0 \iff$$

(1 pont)

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} B = \operatorname{tg} C = \sqrt{3} \iff A = B = C = \frac{\pi}{3}.$$

Tehát a háromszög egyenlő oldalú.

(1 pont)



6. feladat (10 pont). Tekintsük az $(S_n)_{n \geq 1}$ sorozatot, ahol S_n az első n darab prímszám összegét jelöli ($S_1 = 2, S_2 = 5, S_3 = 10, \dots$). Igazold, hogy a sorozatnak nem lehet két egymás utáni tagja négyzetszám!

Dávid Géza, Székelyudvarhely

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

$$S_1 = 2, \quad S_2 = 5, \quad S_3 = 10, \quad S_4 = 17, \dots$$

Legyen $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots$ a prímszámok sorozata. Feltételezzük, hogy az $(S_n)_{n \geq 1}$ sorozatban van két olyan egymásutáni tag, amely négyzetszám. Legyenek ezek S_m és S_{m+1} .

Ekkor

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = k^2 \quad \text{és} \quad p_1 + p_2 + \dots + p_m + p_{m+1} = l^2, \quad \text{ahol } k, l \in \mathbb{N} \text{ és } l > k.$$

(1 pont)

Innen azt kapjuk, hogy $l^2 - k^2 = p_{m+1}$,

(1 pont)

azaz $(l - k)(l + k) = p_{m+1}$. Mivel p_{m+1} prímszám, ezért $l - k = 1$ és $l + k = p_{m+1}$, tehát

$$\begin{cases} l = \frac{p_{m+1}+1}{2} \\ k = \frac{p_{m+1}-1}{2} \end{cases}.$$

(2 pont)

Tehát

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m + p_{m+1} = \left(\frac{p_{m+1} + 1}{2} \right)^2. \quad (2)$$

(1 pont)

Feltételezhetjük, hogy $m > 4$, mert S_1, S_2, S_3, S_4 nem négyzetszámok. Ugyanakkor a prímszámok összege kisebb, mint a páratlan számok összege, vagyis

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m + p_{m+1} < 1 + 3 + 5 + \dots + p_{m+1} = \left(\frac{p_{m+1} + 1}{2} \right)^2. \quad (3)$$

(3 pont)

Az (2) és (3) alapján

$$\left(\frac{p_{m+1} + 1}{2} \right)^2 < \left(\frac{p_{m+1} + 1}{2} \right)^2,$$

ami ellentmondás. Tehát a feltételezésünk hamis.

(1 pont)

