

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

V. osztály

1. feladat. Határozd meg azokat az n természetes számokat, amelyekre az $A = 9^n + 2 \cdot 3^n + 1$ szám osztható 10-zel!

2. feladat. Bence és Csilla 2022 nyarán együtt táborozott. Feladatban közölték születési éveiket.

Bence: Ha összeadom a 2 hatványait úgy, hogy a hatványkitevők 3-mal induló, egymást követő természetes számok, akkor azt az évszámot kapom, amikor 30 éves leszek.

Csilla: A $9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999 \dots 9}_{2023}$ összegben található 1-es számjegyek száma az az évszám, amikor 10 éves voltam.

Hány évesek a gyerekek idén?

3. feladat. Adottak egyforma méretű, piros és fehér dobókockák. A dobókockák szabványosak, azaz a szemben lévő lapok pöttyeinek összege 7.

- Csongor két fehér és néhány piros dobókockából $3 \times 3 \times 3$ -as kockát épít úgy, hogy annak a lehető legkevesebb tarka lapja legyen. Hová helyezi el a fehér dobókockákat, és az így elkészített kocka hány lapja lesz tarka? Válaszod indokold!
- Legtöbb hány pötty látszódhat Csongor $3 \times 3 \times 3$ -as megépített kockájának hat lapján összesen?

4. feladat. Adottak azok a természetes számok, amelyek négyzetének 5-tel való osztási maradéka 1.

- Határozd meg az első 2023 ilyen négyzetszám összegének 5-tel való osztási maradékát!
- Igazold, hogy 2023-ig az adott természetes számok összegének utolsó számjegye 1.

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

V. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXII. EMMV

országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

VI. osztály

1. feladat. Egy iskola focicsapata két egymást követő nap fontos meccset játszott. A csapat szurkolói elhatározták, hogy a meccsre a csapat színeibe öltöznek: kékbe vagy fehérbe. Első nap a szurkolók $\frac{3}{4}$ -e fehérbe, míg a többiek kékbe öltöztek. Második nap az előző naphoz képest 40%-kal kevesebben öltöztek fehérbe és 80%-kal többen kékbe.

- a) Tudva azt, hogy mindkét nap minden jelenlevő szurkoló beöltözött, de a második nap 8 szurkoló hiányzott, számítsd ki az első mérkőzésen részt vevő szurkolók számát!
- b) A két napot együttvéve, mennyivel egyenlő a fehérbe, illetve kékbe öltözött szurkolók számának aránya?

2. feladat. Az $a < b$ természetes számok legnagyobb közös osztója 17, legkisebb közös többszöröse pedig 2023.

- a) Határozd meg az a és b számokat!
- b) Határozd meg az összes (x, y) számpárt, ha x és y prímszámok és $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} < \frac{1}{17}$, ahol a és b az a) alpontban kapott számok!

3. feladat. Adottak az $A_1, A_2, \dots, A_{21}$ kollineáris pontok ebben a sorrendben. Az $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, \dots, A_{20}A_{21}$ szakaszok hossza fordítottan arányos az $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots, \frac{1}{39}$ számokkal, és tudjuk, hogy az A_1A_{21} szakasz hossza 400 cm.

- a) Számítsd ki az $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_{20}A_{21}$ szakaszok közül a legrövidebb, illetve a leg-hosszabb szakasz hosszát!
- b) Az $A_1A_2, A_3A_4, \dots, A_{19}A_{20}$ szakaszok belső pontjait zöldre, míg az $A_2A_3, A_4A_5, \dots, A_{20}A_{21}$ szakaszok belső pontjait pirosra színezzük. Milyen színű lesz az A_1A_{21} szakasz felezőpontja?
- c) Az $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{21}$ pontok által meghatározott szakaszok között van-e olyan, amelynek a kezdőpontja A_1 és felezőpontja nincs kiszínezve?

4. feladat. Egy tetszőleges AOB szöget az O csúcspontjából kiinduló félegyenesekkel 36 darab egymással kongruens szögre osztunk, majd ugyanezt az AOB szöget ugyanilyen módon 48 darab egymással kongruens szögre osztunk.

- a) Hány félegyeneset kapunk az AOB szög belsejében?
- b) Határozd meg az AOB szög mértékét, ha az OA szártól számított 6. és 18. félegyenesek 24° -os szöget alkotnak!
- c) Tudva, hogy az AOB szög mértéke 144° , hány fokok szöget zár be az OA szártól számított 20. és 30. félegyenes?

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 3 óra.

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

VII. osztály

1. feladat. a) Igazold, hogy $(\sqrt{2023} - 1)(\sqrt{2022} - 2)(\sqrt{2021} - 3) \cdots (\sqrt{1} - 2023) < 0$.
- b) Határozd meg az összes a , b , c és d nem nulla egész számot, tudva, hogy páronként relatív prímek és $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = d$.
2. feladat. Oldd meg az egész számok halmazán a $4xy - 12x + 5y = 2023$ egyenletet!
3. feladat. Egy O középpontú kör AB húrjának B pontjában érintőt húzunk a körhöz. A kör CD átmérőjének tartóegyenese M pontban metszi a B -ben húzott érintőt ($M \neq B$), valamint N pontban az AB húr tartóegyenését. Bizonyítsd be, hogy CD akkor és csak akkor merőleges OA -ra, ha $BM = MN$.
4. feladat. Egy kosárban négy fajta alma van, amelyek száma összesen 50-nél több. Tudjuk, hogy bárhogyan választunk ki a kosárból 50 almát, a kiválasztottak között mindig van mind a négy fajtából. Legtöbb hány alma lehet a kosárban?

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

VIII. osztály

1. feladat. Lehet-e különböző pozitív egész számokat írni egy tetraéder éleire úgy, hogy az egy-egy csúcsban összefutó három élen levő számok szorzata ugyanannyi legyen?

2. feladat. a) Oldd meg az egész számok halmazában az $x^2 - xy + 45y = 2023$ egyenletet!

b) Milyen x és y egész számok esetén lesz az

$$E(x, y) = \frac{(4x - 3y)(3x - 4y)}{x^2y^2 + 1}$$

kifejezés a lehető legkisebb?

3. feladat. a) Igazold, hogy bármely x és y pozitív valós számok esetén

$$\sqrt{xy} \leq \sqrt{(1+x)(1+y)} - 1 \leq \frac{x+y}{2}.$$

b) Igazold, hogy bármely x , y és z pozitív valós számok esetén

$$\sqrt{x(y+1)} + \sqrt{y(z+1)} + \sqrt{z(x+1)} \leq \frac{3}{2} \sqrt{(x+1)(y+1)(z+1)}.$$

4. feladat. Az $ABCD A' B' C' D'$ téglatestben O az $ABCD$, E pedig az $ADD' A'$ lap középpontja. Legyen $C' E \cap AB = \{N\}$ és $C' O \cap AA' = \{M\}$.

a) Igazold, hogy $MN \parallel D' C$.

b) Ha $AB = AA'$, igazold, hogy az $MND' C$ négyszög téglalap!

c) Ha $ABCD A' B' C' D'$ kocka, határozd meg az AND' és AMC síkok által alkotott szög mértékét!

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

IX. osztály – I. forduló

1. feladat. Oldd meg a valós számok halmazán az

$$[x]^2 + \left(\left\{ x + \frac{1}{2023} \right\} - 1 \right) \left(x + \frac{2024}{2023} - \left[x + \frac{1}{2023} \right] \right) = 2024$$

egyenletet, ahol $[a]$ az a valós szám egész részét, $\{a\}$ pedig a tört részét jelöli!

2. feladat. Az $ABCDEF$ szabályos hatszögben az AFE háromszög súlypontját jelölje G . Továbbá legyen M az FE szakasz azon pontja, amelyre $\frac{FM}{ME} = k$, ahol $k > 0$.

- a) Fejezd ki a $\overrightarrow{BF}$ és $\overrightarrow{BE}$ vektorokat a $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ és $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ vektorok segítségével!
- b) Határozd meg a $k > 0$ értékét úgy, hogy a B , G és M pontok kollineárisak legyenek!

3. feladat. Igazold, hogy az $a, b, c > 0$ számok esetén teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{3}{2}(a + b + c) \leq \frac{2a^2 + ab}{a + b} + \frac{2b^2 + bc}{b + c} + \frac{2c^2 + ca}{c + a} \leq 2(a + b + c).$$

4. feladat. Az ABC nem egyenlő szárú háromszög köré írt középpontját jelölje O , magasságpontját pedig H . Legyen O' a HBC háromszög köré írt kör középpontja. Igazold, hogy az $AHO'O$ négyszög egy paralelogramma.

V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

X. osztály – I. forduló

1. feladat. Adott az $n \geq 2$ természetes szám. Határozd meg az $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy teljesüljenek a következő feltételek:

$$f(1) = 1 \quad \text{és}$$

$$f(\sqrt[n]{x \cdot y}) \geq \sqrt[n]{x^{2023}} \cdot f(\sqrt[n]{y}), \quad \text{bármely } x, y \geq 0.$$

2. feladat. Oldd meg az

$$x^3 + 3x^2 + 6x - 8 = (3x^2 + x + 2)\sqrt{x + 2}$$

egyenletet a valós számok halmazán!

3. feladat. Adottak az $x_1, x_2, \dots, x_n \in [n, n+1]$ valós számok, ahol $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Igazold, hogy $2n \leq \log_{x_1}[(2n+1)x_2 - n(n+1)] + \log_{x_2}[(2n+1)x_3 - n(n+1)] + \dots + \log_{x_n}[(2n+1)x_1 - n(n+1)] < 2n \log_n(n+1)$.

4. feladat. Adott a $z \in \mathbb{C}, |z| = 1$ komplex szám.

a) Igazold, hogy $|1 + z| + |1 + z^2| + |1 + z^3| \geq 2$.

b) Igazold, hogy $2(|1 + z| + |1 + z^2|) + |1 + z^3| \geq 2 + \sqrt{2}$.

V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

XI. osztály – I. forduló

1. feladat. Legyen $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ úgy, hogy $A^3B = I_n - B$.

a) Igazold, hogy B invertálható!

b) Igazold, hogy $AB = BA$.

2. feladat. Adottak az $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$ különböző sorozatok, amelyekre $a_1, b_1 > 0$, $a_{n+1} = a_n^2 + b_n^2$ és $b_{n+1} = 2a_nb_n$, minden $n \geq 1$ esetén. Igazold, hogy az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq 1}$ sorozat konvergens!

3. feladat. Jelölje $[x]$ az x valós szám egész részét. Tekintsük az $(a_n)_{n \geq 1}$ valós számsorozatot, amelyre $a_1 = \frac{3}{2}$ és $a_{n+1} - a_n = 2[a_n]$, minden $n \geq 1$ esetén.

a) Határozd meg az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozat általános tagját!

b) Igazold, hogy

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot a_{k+1} = \frac{2a_{2n+2} + 16a_{n+1} + 4n - 31}{16}.$$

c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2023 + a_n} + \frac{1}{2023^2 + a_n} + \cdots + \frac{1}{2023^n + a_n} \right)$ határértéket!

4. feladat. Adottak az $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mátrixok úgy, hogy $(A - B)^2 = O_2$.

a) Igazold, hogy $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$.

b) Ha $AB = BA$, akkor bizonyítsd be, hogy $\det(A) = \det(B)$.

V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

XII. osztály – I. forduló

1. feladat. Tekintsük az $(S_5, \cdot)$ szimmetrikus csoportot (az ötörendű permutációk csoportját).

a) Igazold, hogy az $f: S_5 \rightarrow S_5, f(x) = x^7$ függvény bijektív!

b) Oldd meg az $x^7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ egyenletet az S_5 halmazon!

2. feladat. Határozd meg az összes olyan $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ kétszeresen deriválható függvényt, amelyre $f(1) = f'(1) = e$ és

$$f''(x) \cdot f(x) - (f'(x))^2 = \frac{1 - \ln x}{x^2} \cdot f^2(x),$$

bármely x valós szám esetén.

3. feladat. Legyen $(G, \cdot)$ egy $6n + 1$ elemű csoport, ahol $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Igazold, hogy G -nek egyetlen olyan eleme van, amely önmaga inverze!

b) Ha a H halmaznak legalább $2n$ eleme van és $(H, \cdot)$ részcsoportha a $(G, \cdot)$ csoportnak, igazold, hogy $H = G$.

4. feladat. Számítsd ki az

$$I = \int \frac{e^x x^2 + 2x + 1}{e^{2x} x^2 + e^x x^2 + x} dx$$

integrált, ahol $x > 0$.

V. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXII. EMMV

országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

IX. osztály – II. forduló

1. feladat.

- a) Igazold, hogy az 5-nél nagyobb prímszámok $6k + 1$ vagy $6k + 5$ alakúak, ahol $k \in \mathbb{N}^*$.
- b) Határozd meg azokat az a és b prímszámokat, amelyekre $a + 2b$ és $a + 7b$ egyszerre prímek!

2. feladat. Legyen C egy adott AB szakasz felezőpontja, D pedig a BC szakasz felezőpontja. Ugyanakkor legyen E a B középpontú, BC sugarú kör, C -től különböző tetszőleges pontja. Jelölje F az E pontnak a D pont szerinti szimmetrikusát. Bizonyítsd be, hogy $EA = EF$.

3. feladat. Igazold, hogy bármely n természetes szám esetén $(5 - \sqrt{5})^n + (5 + \sqrt{5})^n$ osztható 2^n -nel!

4. feladat. A táblára felírtuk a természetes számokat 1-től n -ig. Minden lépésben kitörlünk két tetszőleges a és b számot, helyette felírjuk az $a + b - n$ számot. Határozd meg az (n, k) számpárokat úgy, hogy k lépés után a táblán maradt számok összege 2023 legyen!

5. feladat. Határozd meg az a , b , c nullától különböző természetes számokat, ha tudjuk, hogy páronként relatív prímek és $3a + 4b + 5c = 5\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$.

6. feladat. Az $ABCD$ négyzetben legyen P az AD oldal felezőpontja, valamint $AR \perp BP$ és $CS \perp BP$, ahol $R, S \in BP$ és $CS \cap AB = \{Q\}$. Igazold, hogy:

- a) $\frac{AR}{CS} = \frac{1}{2}$;
- b) $CR = DS = AB$;
- c) $\frac{T_{ARSQ}}{T_{ABCD}} = \frac{3}{20}$.

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

V. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXII. EMMV

országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

X. osztály – II. forduló

1. feladat. Egy diáktanács szavazásán három jelöltre lehetett szavazni. Összesen 2023-an szavaztak. Minden szavazat érvényes volt és mindenki csak egy jelöltre szavazott. Határozd meg, hogy hányféleképpen oszolhattak meg a szavazatok a jelöltek között, ha tudjuk, hogy bármelyik két jelölt összesen több szavazatot kapott, mint a harmadik!

2. feladat. Az ABC háromszög súlypontja G . Bizonyítsd be a

$$4 \cdot (AB + BC + CA) - 12 \cdot (GA^2 + GB^2 + GC^2) \leq 3$$

egyenlőtlenséget, és add meg az egyenlőség feltételét!

3. feladat. Egy egyenesen Imre megjelölt k darab pontot, ahol k természetes szám, $2 \leq k \leq 2021$. Ezután minden szomszédos pontpár között megjelölt még egy újabb pontot, és így tovább. Lehet-e egy ilyen eljárás végén 2022 pont az egyenesen? Hát 2033 pont? Ha ezek valamelyike elérhető, akkor abban az esetben mennyi lehet a k legkisebb értéke?

4. feladat. Az ABC háromszög az A csúcsban derékszögű. A C középpontú és CA sugarú kör, valamint a B középpontú és BA sugarú kör a BC átfogót D , illetve E pontokban metszi. Az ADE háromszög köré írt kör az AB , illetve AC befogót az F , illetve G pontokban metszi. Számítsd ki az FG szakasz hosszát, tudva, hogy $AB = 15$ cm és $AC = 8$ cm!

5. feladat. Oldd meg a nullától különböző természetes számok halmazán az $5^x - 1 = 2^y \cdot 3^z$ egyenletet! Ismertnek tekintjük, hogy a nullától különböző természetes számok halmazán a $2^x - 3^y = 1$ egyenletnek csak az $x = 2$ és $y = 1$ a megoldása, míg a $3^x - 2^y = 1$ egyenletnek csak az $x = y = 1$, valamint az $x = 2$ és $y = 3$ a megoldásai.

6. feladat. A valós számok halmazán oldd meg a

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{2y}{y^2 + 1} \\ \frac{\sqrt{1+y} - \sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y} + \sqrt{1-y}} = \frac{2x}{x^2 + 1} \end{cases}$$

egyenletrendszer!

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

XI-XII. osztály – II. forduló

1. feladat. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$2^{\cos 3x} + \cos^3 x = 8^{-\cos x}.$$

2. feladat. Az ABC háromszögben $AB = AC$ és $\hat{A} = 30^\circ$. Legyen M és N a B és C pontok AC , illetve AB oldalak szerinti szimmetrikusa. Az MN egyenes D és E pontokban metszi az AB , illetve AC oldalakat. Ha $DE = 2$ cm, számítsd ki a BC oldal hosszát!

3. feladat. Legyen $x, y, z \in (1, +\infty)$ és $x \cdot y \cdot z = p$. Igazold, hogy

$$\log_p x \cdot \sqrt[3]{1 + \log_p y - \log_p z} + \log_p y \cdot \sqrt[3]{1 + \log_p z - \log_p x} + \log_p z \cdot \sqrt[3]{1 + \log_p x - \log_p y} \leq 1.$$

4. feladat. Határozd meg azokat az $f: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket, amelyek teljesítik az

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 4 + \frac{2}{x-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

összefüggést!

5. feladat. Az $a_1, a_2, \dots, a_{2023}$ olyan természetes számok, amelyekre létezik $n \in \mathbb{N}$ úgy, hogy

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2023}^2 = n^2 + 2.$$

Igazold, hogy az $a_1, a_2, \dots, a_{2023}$ számok nem lehetnek mind páratlanok!

6. feladat. Legyen P az ABC hegyesszögű háromszög egy belső pontja. Jelöljük rendre a PB , PC és PA szakaszok hosszát x , y és z -vel, a $\widehat{BPC}$, $\widehat{CPA}$ és $\widehat{APB}$ szögek mértékét α , β és γ -val. Igazold, hogy $(x \cos \alpha - y)(z \cos \beta - y)$ kifejezés értéke akkor maximális, ha P a C -ből húzott szögfelezőn helyezkedik el!

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

V. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXII. EMMV

országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

V. osztály

1. feladat (10 pont). Határozd meg azokat az n természetes számokat, amelyekre az $A = 9^n + 2 \cdot 3^n + 1$ szám osztható 10-zel!

*Simon József, Csíkszereda
Hodgyai Edit, Micske*

Első megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Egy szám, akkor osztható 10-zel, ha a szám utolsó számjegye 0.

Ha $n = 0$, akkor $u(A) = u(9^0) + 2 \cdot u(3^0) + 1 = u(1 + 2 + 1) = u(4) = 4$. Ez nem osztható 10-zel.

(1 pont)

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor $n \geq 1$.

Ha $n = 1$, akkor $u(A) = u(9^1) + 2 \cdot u(3^1) + 1 = u(9 + 6 + 1) = u(16) = 6$. Ez nem osztható 10-zel.

(1 pont)

Ha $n = 2$, akkor $u(A) = u(9^2) + 2 \cdot u(3^2) + 1 = u(1 + 8 + 1) = u(10) = 0$. Ez osztható 10-zel.

(1 pont)

Ha $n = 3$, akkor $u(A) = u(9^3) + 2 \cdot u(3^3) + 1 = u(9 + 2 \cdot 7 + 1) = u(24) = 4$. Ez nem osztható 10-zel.

(1 pont)

Ha $n = 4$, akkor $u(A) = u(9^4) + 2 \cdot u(3^4) + 1 = u(1 + 2 \cdot 1 + 1) = u(4) = 4$. Ez sem osztható 10-zel.

(1 pont)

Ha folytatjuk a felírást n további értékeire, akkor négyesével ismétlődni fog A utolsó számjegye, és rendre 6, 0, 4, illetve 4 lesz.

(2 pont)

Mivel minden négyes csoport második értéke 0, ezért A pontosan akkor osztható 10-zel, ha n értékei $\{2, 6, \dots, 4 \cdot k + 2, \dots\}$, ahol k természetes szám.

(2 pont)

■

Második megoldás. Hivatalból

(1 pont)

$$A = 9^n + 2 \cdot 3^n + 1 = 3^n \cdot 3^n + 3^n + 3^n + 1 = 3^n \cdot (3^n + 1) + 3^n + 1$$

(3 pont)

$$= (3^n + 1) \cdot (3^n + 1) = (3^n + 1)^2.$$

(3 pont)

A $3^2, 3^6, \dots, 3^{4k+2}$ számok minden k természetes szám esetén 9-ben végződnek, és ekkor az A szám 0-ban végződik, ezért osztható 10-zel.

(2 pont)

A keresett számok tehát az $n = 4 \cdot k + 2$ alakú számok, ahol k természetes szám.

(1 pont)

■

2. feladat (10 pont). Bence és Csilla 2022 nyarán együtt táborozott. Feladatban közölték születési éveiket.

Bence: Ha összeadom a 2 hatványait úgy, hogy a hatványkitevők 3-mal induló, egymást követő természetes számok, akkor azt az évszámot kapom, amikor 30 éves leszek.

Csilla: A $9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999 \dots 9}_{2023}$ összegben található 1-es számjegyek száma az az évszám, amikor 10 éves voltam.

Hány évesek a gyerekek idén?

*Hamar Erzsébet, Marosvásárhely
Hodgyai Edit, Micske*

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

Bence Első megoldás

A tábor 2022-ben tartották, ahol Bence iskolás, tehát a keresett szám 2022-nél nagyobb és 2052-nél biztosan kisebb. (1 pont)

Viszont tudjuk, hogy a hatványkitevők egymást követő természetes számok, amelyek közül a legkisebb 3, így kiszámíthatjuk a következőket:

$$2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 = 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 = 1016 < 2022 \quad (1 \text{ pont})$$

$$2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} + 2^{11} = 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024 + 2048 = 4088 > 2052 \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{Így a keresett szám a } 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} = 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024 = 2040, \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{és Bence } 2040 - 30 = 2010\text{-ben született, azaz } 2023 - 2010 = 13 \text{ éves.} \quad (1 \text{ pont})$$

Bence Második megoldás

$$2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + \dots + 2^n - 30 < 2022 \quad (1 \text{ pont})$$

$$2^3 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3) + 2^7 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3) + \dots + 2^{n-3} \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3) - 30 < 2022 \quad (1 \text{ pont})$$

$$(1 + 2 + 2^2 + 2^3) \cdot (2^3 + 2^7 + \dots + 2^{n-3}) - 30 < 2022$$

$$(1 + 2 + 4 + 8) \cdot (2^3 + 2^7 + \dots + 2^{n-3}) - 30 < 2022$$

$$15 \cdot (2^3 + 2^7 + \dots + 2^{n-3}) - 30 < 2022$$

$$\underbrace{2^3 + 2^7 + \dots + 2^{n-3}}_{\text{természetes szám}} < \frac{2022+30}{15} = \frac{2052}{15}$$

Mivel $2052 = 136 \cdot 15 + 12$, ezért a 2 hatványainak összege nem lehet nagyobb 136-nál. (1 pont)

De $2^3 + 2^7 = 8 + 128 = 132$, következik, hogy $2^7 = 2^{n-3}$, azaz $n - 3 = 7$, ahonnan $n = 10$. (1 pont)

$$\text{Tehát } 15 \cdot (2^3 + 2^7) - 30 = 15 \cdot 136 - 30 = 2040 - 30 = 2010, \quad (1 \text{ pont})$$

így Bence $2023 - 2010 = 13$ éves.

Csilla:

$$9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999 \dots 9}_{2023} = (10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \dots + \left(\underbrace{1000 \dots 0}_{2023} - 1 \right) = (1 \text{ pont})$$

$$= 10 + 100 + 1000 + \dots + \underbrace{1000 \dots 0}_{2023} - 2023 = \underbrace{111 \dots 1}_{2019} 09087 \quad (2 \text{ pont})$$

Tehát 2019 darab 1-es számjegyet tartalmaz az eredmény, ami azt jelenti, hogy

$$\text{Csilla } 2019 - 10 = 2009\text{-ben született, azaz } 2023 - 2009 = 14 \text{ éves.} \quad (1 \text{ pont})$$



3. feladat (10 pont). Adottak egyforma méretű, piros és fehér dobókockák. A dobókockák szabványosak, azaz a szemben lévő lapok pöttyeinek összege 7.

- a) Csongor két fehér és néhány piros dobókockából $3 \times 3 \times 3$ -as kockát épít úgy, hogy annak a lehető legkevesebb tarka lapja legyen. Hová helyezi el a fehér dobókockákat, és az így elkészített kocka hány lapja lesz tarka? Válaszod indokold!
- b) Legtöbb hány pötty látszódhat Csongor $3 \times 3 \times 3$ -as megépített kockájának hat lapján összesen?

*Hodgyai Edit, Micske
Polgár István, Gyergyószentmiklós*

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

- a) Ahhoz, hogy a $3 \times 3 \times 3$ -as kocka lehető legkevesebb lapja legyen tarka, a sarokkocka nem lehet fehér, mert úgy három lapon is látszana. **(1 pont)**
 Ugyancsak ezen az elven, a fehér dobókocka nem szerepelhet a kocka élein, mert úgy két lapon is látszana. **(1 pont)**
 A fehér dobókockákat Csongor még elhelyezheti egy oldallap közepére, így az csak azon az oldallapon lesz látható. **(1 pont)**
 Ahhoz, hogy a kockának a lehető legkevesebb tarka lapja legyen, az egyik fehér dobókockát a kocka belsejébe rejti. Mivel a $3 \times 3 \times 3$ -as kocka belsejébe csak egy dobókocka fér el, a másik fehér dobókockát az egyik oldallap közepére fogja helyezni. **(1 pont)**
 Így csak egy tarka lapja lesz a kockának. **(1 pont)**
- b) A $3 \times 3 \times 3$ -as nagy kockát alkotó dobókockák lehetnek:
 - sarok kockák, melyeknek három lapja látszik és 8 darab van belőlük. A legtöbb pötty egy ilyen sarokkockán $6 + 5 + 4 = 15$, így a 8 darab összesen $8 \cdot 15 = 120$ pöttyöt tartalmaz. **(1 pont)**
 - élkockák, melyeknek két lapja látszik és 12 darab van belőlük. A legtöbb pötty egy ilyen élkockán $6 + 5 = 11$, így a 12 darab összesen $12 \cdot 11 = 132$ pöttyöt tartalmaz. **(1 pont)**
 - oldallap középső kockái, melyeknek egy lapja látszik, 6 darab van belőlük. A legtöbb pötty egy ilyen élkockán 6, így a 6 darab összesen $6 \cdot 6 = 36$ pöttyöt tartalmaz. **(1 pont)**
 Tehát a Csongor által épített $3 \times 3 \times 3$ -as kockán összesen legtöbb $120 + 132 + 36 = 288$ pötty fog látszani. **(1 pont)**



4. feladat (10 pont). Adottak azok a természetes számok, amelyek négyzetének 5-tel való osztási maradéka 1.

- a) Határozd meg az első 2023 ilyen négyzetszám összegének 5-tel való osztási maradékát!
- b) Igazold, hogy 2023-ig az adott természetes számok összegének utolsó számjegye 1.

*Polgár István, Gyergyószentmiklós
Hodgyai Edit, Micske
Hamar Erzsébet, Marosvásárhely*

Első megoldás. Hivatalból

(1 pont)

- a) Elkezdjük összeadni azokat a természetes számokat, amelyek négyzetének 5-tel való osztási maradéka 1. Két ilyen számot összeadva az 5-tel való osztási maradék $1 + 1 = 2$, hármat összeadva $1 + 1 + 1 = 3$, négyet összeadva $1 + 1 + 1 + 1 = 4$, viszont ötöt összeadva az 5-tel való osztási maradék $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$ lenne, viszont ez 0 maradékot jelent. (2 pont)
 Így, ha összeadjuk az első 2023 ilyen számot, akkor meg kell vizsgáljuk, hogy az 5 a 2023-ban hányszor van meg. Elosztva a két számot 404-et kapunk, ami azt jelenti, hogy $404 \cdot 5 = 2020$ ilyen természetes szám összege 0-t ad maradékul. (1 pont)
 Ehhez még hozzáadva az utolsó három hasonló tulajdonságú számot azt kapjuk, hogy a maradék $0 + 1 + 1 + 1 = 3$. (1 pont)

- b) Ha egy természetes szám négyzetének 5-tel való osztási maradéka 1, akkor az adott négyzet-szám csak 1-ben vagy 6-ban végződhet. (1 pont)
 Azok a számok, amelyek négyzete 1-ben végződik, csak 1-ben vagy 9-ben végződhetnek, és amelyek négyzete 6-ban végződik, azok csak 4-ben vagy 6-ban végződhetnek. (1 pont)
 Az első négy ilyen szám az 1, 4, 6 és 9, melyek összege 20.
 A következő négy ilyen szám a 11, 14, 16 és 19, melynek összege $40 + 20 = 60$.
 Ha tovább folytatjuk négyesével a számok felírását, rendre a következő számokat kapjuk:
 21, 24, 26 és 29, melyek összege $80 + 20 = 100 = 5 \cdot 20$
 31, 34, 36 és 39, melyek összege $120 + 20 = 140 = 7 \cdot 20$
 41, 44, 46 és 49, melyek összege $160 + 20 = 180 = 9 \cdot 20$ és így tovább. (1 pont)
 Megfigyelhető, hogy két egymás utáni 10 többszörös közé eső négy ilyen tulajdonságú szám összege 20 többszöröse. Így 2020-ig az adott tulajdonságú számok összege is 20 többszöröse lesz, tehát 0-ra végződik. (1 pont)
 Ehhez egyetlen számot kell még hozzáadni, a 2021-et, mert a 2024 már több, mint 2023.
 Tehát az utolsó számjegy $0 + 1 = 1$ lesz. (1 pont)

■

Második megoldás. Hivatalból

(1 pont)

- a) Jelölje az első 2023 ilyen négyzetszámot $n_1^2 = 5 \cdot k_1 + 1$, $n_2^2 = 5 \cdot k_2 + 1$, $n_3^2 = 5 \cdot k_3 + 1$, ..., $n_{2023}^2 = 5 \cdot k_{2023} + 1$, ahol $k_1, k_2, k_3, \dots, k_{2023}$ természetes számok. (1 pont)
 Ezek összege: $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + \dots + n_{2023}^2 = 5 \cdot k_1 + 1 + 5 \cdot k_2 + 1 + 5 \cdot k_3 + 1 + \dots + 5 \cdot k_{2023} + 1 = 5 \cdot (k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_{2023}) + 2023$. (1 pont)
 Az $5 \cdot (k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_{2023}) : 5$ és $2023 = 5 \cdot 404 + 3$.
 Tehát az első 2023 szám összegének osztási maradéka 3. (1 pont)
- b) Az első megoldásban meghatározott kért tulajdonságú számok összege akár ki is számítható, és az összeg ismeretében leolvasható annak utolsó számjegye.
 Az összeg: $1 + 4 + 6 + 9 + \dots + 2011 + 2014 + 2016 + 2019 + 2021$, mert $2024 > 2023$. (1 pont)
 $1 + 4 + 6 + 9 = 20 = 1 \cdot 20$, $11 + 14 + 16 + 19 = 60 = 3 \cdot 20$, $21 + 24 + 26 + 29 = 100 = 5 \cdot 20$, ..., $2011 + 2014 + 2016 + 2019 = 8060 = 403 \cdot 20$ (1 pont)
 Így az összeg: $1 \cdot 20 + 3 \cdot 20 + 5 \cdot 20 + \dots + 403 \cdot 20 + 2021 = 20 \cdot (1 + 3 + 5 + \dots + 403) + 2021 =$ (2 pont)
 $= 20 \cdot \frac{404 \cdot (201+1)}{2} + 2021 = 81608 \cdot 10 + 2021 = 818101$. Tehát az utolsó számjegy 1. (2 pont)

■

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

V. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXII. EMMV

országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

VI. osztály

1. feladat (10 pont). Egy iskola focicsapata két egymást követő nap fontos meccset játszott. A csapat szurkolói elhatározták, hogy a meccsekre a csapat színeibe öltöznek: kékbe vagy fehérbe. Első nap a szurkolók $\frac{3}{4}$ -e fehérbe, míg a többiek kékbe öltöztek. Második nap az előző naphoz képest 40%-kal kevesebben öltöztek fehérbe és 80%-kal többen kékbe.

- a) Tudva azt, hogy mindkét nap minden jelenlevő szurkoló beöltözött, de a második nap 8 szurkoló hiányzott, számítsd ki az első mérkőzésen részt vevő szurkolók számát!
- b) A két napot együttvéve, mennyivel egyenlő a fehérbe, illetve kékbe öltözött szurkolók számának aránya?

*Császár Sándor, Csíkszereda**Megoldás. Hivatalból***(1 pont)**

- a) Legyen x az első napi mérkőzésen részt vevő szurkolók száma.

I. nap fehérbe öltözött $\frac{3}{4} \cdot x$ szurkoló és kékbe öltözött $\frac{1}{4} \cdot x$ szurkoló.

(1 pont)

II. nap fehérbe öltözött $\frac{60}{100} \cdot \frac{3}{4} \cdot x = \frac{45}{100} \cdot x$ szurkoló, és

(1 pont)

kékbe öltözött $\frac{180}{100} \cdot \frac{1}{4} \cdot x = \frac{45}{100} \cdot x$ szurkoló.

(1 pont)

A második nap szurkolóinak száma összesen: $\frac{45}{100} \cdot x + \frac{45}{100} \cdot x = \frac{90}{100} \cdot x$.

Mindezeket felhasználva az $x = \frac{90}{100} \cdot x + 8$ egyenlethez jutunk.

(2 pont)

Az egyenletet megoldva következik, hogy $x = 80$.

Tehát az első napi mérkőzésen 80 szurkoló vett részt.

(1 pont)

- b) I. nap fehérbe öltözött $\frac{3}{4} \cdot 80 = 60$ szurkoló és kékbe öltözött $\frac{1}{4} \cdot 80 = 20$ szurkoló.

(1 pont)

II. nap fehérbe öltözött $\frac{45}{100} \cdot 80 = 36$ szurkoló és kékbe öltözött szintén 36 szurkoló.

(1 pont)

A keresett arány: $\frac{60+36}{20+36} = \frac{96}{56} = \frac{12}{7}$.

(1 pont)

2. feladat (10 pont). Az $a < b$ természetes számok legnagyobb közös osztója 17, legkisebb közös többszöröse pedig 2023.

- a) Határozd meg az a és b számokat!
- b) Határozd meg az összes (x, y) számpárt, ha x és y prímszámok és $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} < \frac{1}{17}$, ahol a és b az a) alpontban kapott számok!

Mátéfi István, Marosvásárhely
Czenter Enikő, Nagyvárad
Vad Márta, Nagyvárad

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

- a) Mivel $(a, b) = 17$, kapjuk, hogy $a = 17k$ és $b = 17l$, ahol $(k, l) = 1$, $k < l$. (1 pont)
Ismert, hogy $[a, b] \cdot (a, b) = a \cdot b$, tehát $a \cdot b = 17 \cdot 2023$, vagyis $a \cdot b = 7 \cdot 17^3$. (1 pont)
Mivel $a = 17k$ és $b = 17l$, következik, hogy $k \cdot l = 7 \cdot 17$. (1 pont)
Tehát $k = 1$ és $l = 119$ vagy $k = 7$ és $l = 17$.
A keresett számok $a = 17$ és $b = 2023$ vagy $a = 119$ és $b = 289$. (2 pont)

- b) Ha $a = 17$ és $b = 2023$, akkor $\frac{x}{17} + \frac{y}{2023} < \frac{1}{17}$, ahonnan kapjuk, hogy $119x + y < 119$, ami nem lehetséges. (1 pont)
Ha $a = 119$ és $b = 289$, akkor $\frac{x}{119} + \frac{y}{289} < \frac{1}{17}$, ahonnan kapjuk, hogy $17x + 7y < 119$, tehát $x \in \{2, 3, 5\}$.
Ha $x = 2$, akkor $7y < 85$, ahonnan $y \in \{2, 3, 5, 7, 11\}$. (1 pont)
Ha $x = 3$, akkor $7y < 68$, ahonnan $y \in \{2, 3, 5, 7\}$. (0,5 pont)
Ha $x = 5$, akkor $7y < 34$, ahonnan $y \in \{2, 3\}$. (0,5 pont)
A lehetséges (x, y) számpárok:
(2, 2); (2, 3); (2, 5); (2, 7); (2, 11); (3, 2); (3, 3); (3, 5); (3, 7); (5, 2); (5, 3). (1 pont)



3. feladat (10 pont). Adottak az $A_1, A_2, \dots, A_{21}$ kollineáris pontok ebben a sorrendben. Az $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, \dots, A_{20}A_{21}$ szakaszok hossza fordítottan arányos az $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots, \frac{1}{39}$ számokkal, és tudjuk, hogy az A_1A_{21} szakasz hossza 400 cm.

- a) Számítsd ki az $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_{20}A_{21}$ szakaszok közül a legrövidebb, illetve a leghosszabb szakasz hosszát!
- b) Az $A_1A_2, A_3A_4, \dots, A_{19}A_{20}$ szakaszok belső pontjait zöldre, míg az $A_2A_3, A_4A_5, \dots, A_{20}A_{21}$ szakaszok belső pontjait pirosra színezzük. Milyen színű lesz az A_1A_{21} szakasz felezőpontja?
- c) Az $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{21}$ pontok által meghatározott szakaszok között van-e olyan, amelynek a kezdőpontja A_1 és felezőpontja nincs kiszínezve?

Mátéfi István, Marosvásárhely
Czenter Enikő, Nagyvárad
Vad Márta, Nagyvárad

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a)

$$\frac{A_1 A_2}{1} = \frac{A_2 A_3}{\frac{1}{3}} = \frac{A_3 A_4}{\frac{1}{5}} = \dots = \frac{A_{19} A_{20}}{\frac{1}{37}} = \frac{A_{20} A_{21}}{\frac{1}{39}} \quad (1 \text{ pont})$$

$$\begin{aligned} \frac{A_1 A_2}{1} &= \frac{A_2 A_3}{3} = \frac{A_3 A_4}{5} = \dots = \frac{A_{19} A_{20}}{37} = \frac{A_{20} A_{21}}{39} = \\ &= \frac{A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_3 A_4 + \dots + A_{19} A_{20} + A_{20} A_{21}}{1 + 3 + 5 + \dots + 37 + 39} = \\ &= \frac{A_1 A_{21}}{(1 + 39) + (3 + 37) + \dots + (19 + 21)} = \frac{400}{10 \cdot 40} = \frac{400}{400} = 1. \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

Innen következik, hogy:

$$A_1 A_2 = 1 \text{ cm}, A_2 A_3 = 3 \text{ cm}, A_3 A_4 = 5 \text{ cm}, \dots, A_{20} A_{21} = 39 \text{ cm}.$$

Tehát a legrövidebb $A_1 A_2 = 1 \text{ cm}$, a leghosszabb $A_{20} A_{21} = 39 \text{ cm}$. (2 pont)

b) Jelölje M az $A_1 A_{21}$ szakasz felezőpontját, ekkor

$$\begin{aligned} A_1 M &= M A_{21} = \frac{A_1 A_{21}}{2} = \frac{400}{2} = 200 \text{ cm}, \\ A_{15} A_{16} + A_{16} A_{17} + \dots + A_{20} A_{21} &= 29 + 31 + \dots + 39 = 204 \text{ cm}. \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

Következik, hogy M az $A_{15} A_{16}$ szakasz belső pontja, tehát zöld színű. (1 pont)

c) Az $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{21}$ pontok nincsenek kiszínezve. Meghatározzuk a szakaszok hosszát:

$$A_1 A_2 = 1, A_1 A_3 = 1 + 3 = 2^2, A_1 A_4 = 1 + 3 + 5 = 3^2, \dots, A_1 A_{21} = 20^2.$$

Észrevehető, hogy a felsorolt szakaszok hossza mindig teljes négyzet. (1 pont)

Jelölje $M_1, M_2, \dots, M_{20}$ rendre az $A_1 A_2, A_1 A_3, \dots, A_1 A_{21}$ szakaszok felezőpontját.

$$\begin{aligned} A_1 M_1 &= \frac{A_1 A_2}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{nem teljes négyzet} \\ A_1 M_2 &= \frac{A_1 A_3}{2} = \frac{2^2}{2} = 2 \quad \text{nem teljes négyzet} \\ &\dots \\ A_1 M_{20} &= \frac{A_1 A_{21}}{2} = \frac{20^2}{2} = 200 \quad \text{nem teljes négyzet} \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

Mivel egy teljes négyzet fele nem lehet teljes négyzet, ezért nem létezik olyan $A_1 A_2, A_1 A_3, \dots, A_1 A_{21}$ szakasz, amelynek felezőpontja nincs kiszínezve, tehát minden szakasz felezőpontja ki van színezve. (1 pont)



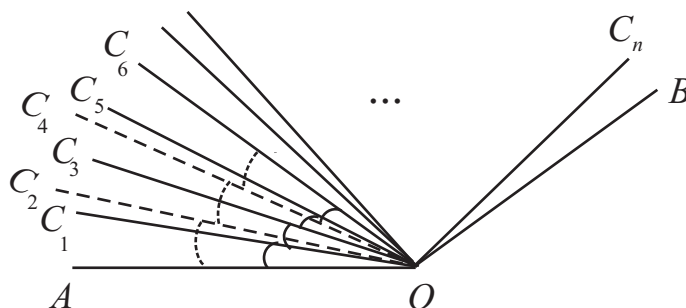
4. feladat (10 pont). Egy tetszőleges AOB szöget az O csúcpontjából kiinduló félegyenesekkel 36 darab egymással kongruens szögre osztunk, majd ugyanezt az AOB szöget ugyanilyen módon 48 darab egymással kongruens szögre osztunk.

- Hány félegyeneset kapunk az AOB szög belsejében?
- Határozd meg az AOB szög mértékét, ha az OA szártól számított 6. és 18. félegyenesek 24° -os szöget alkotnak!
- Tudva, hogy az AOB szög mértéke 144° , hány fokos szöget zár be az OA szártól számított 20. és 30. félegyenes?

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)



- Az ábra elkészítése. (1 pont)

Mivel $\frac{3}{36} = \frac{4}{48} = \frac{1}{12} \implies$ az első felosztás 3. félegyenesé megegyezik a második felosztás 4. félegyenesével. (1 pont)

Így a szög $\frac{1}{12}$ -ét ábrázoló félegyenes az OA -tól számítva a 6. félegyenes. (1 pont)

Ezt a felosztást összesen 12-szer elvégezve jutunk el a szög OB száráig. Tehát a félegyenesek száma az AOB szög belsejében $6 \cdot 12 - 1 = 71$. (2 pont)

- Az előző alpont alapján $\widehat{AOC_6} = \widehat{C_6OC_{12}} = \widehat{C_{12}OC_{18}} = \dots = \widehat{C_{66}OB}$. (1 pont)

Mivel $\widehat{C_6OC_{18}} = 24^\circ \implies \widehat{AOC_6} = 12^\circ \implies \widehat{AOB} = 12 \cdot 12^\circ = 144^\circ$. (1 pont)

- $\widehat{C_{18}OC_{20}} = \widehat{AOC_2} = 4^\circ$ és $\widehat{C_{18}OC_{30}} = \widehat{AOC_{12}} = 2 \cdot 12^\circ = 24^\circ$. (1 pont)

Tehát $\widehat{C_{20}OC_{30}} = \widehat{C_{18}OC_{30}} - \widehat{C_{18}OC_{20}} = 24^\circ - 4^\circ = 20^\circ$. (1 pont)

■

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

V. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXII. EMMV

országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

VII. osztály

1. feladat (10 pont). a) Igazold, hogy $(\sqrt{2023} - 1)(\sqrt{2022} - 2)(\sqrt{2021} - 3) \cdots (\sqrt{1} - 2023) < 0$.
Faluvégi Melánia, Zilah

b) Határozd meg az összes a , b , c és d nem nulla egész számot, tudva, hogy páronként relatív prímek és $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = d$.
Dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

a) A szorzat mindegyik tényezője $\sqrt{2024 - n} - n$ alakú, ahol $1 \leq n \leq 2023$, és n természetes szám. Mivel a szorzat előjele a pozitív, illetve negatív tényezők számától függ, összeszámoljuk, hogy hány negatív tényező van. (1 pont)

A következő átalakításokat végezzük: $\sqrt{2024 - n} - n < 0 \iff n > \sqrt{2024 - n}$, ahonnan $n^2 > 2024 - n \iff n^2 + n > 2024 \iff n(n + 1) > 2024 \iff n \geq 45$. (1 pont)

A szorzat 2023 tényezőt tartalmaz, ebből 44 pozitív, a többi pedig negatív, így $2023 - 44 = 1979$, azaz páratlan sok negatív tényező van, tehát a szorzat negatív. (1 pont)

b) Az $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = d$ összefüggés bal oldali tagjait közös nevezőre hozva, majd összeadva az alábbi egyenlőséghez jutunk:

$$\frac{a^2c + ab^2 + bc^2}{abc} = d.$$

(1 pont)

Ez az aránypárok alaptulajdonságát felhasználva a következő módon alakítható át:

$$a^2c + ab^2 + bc^2 = abcd \iff bc^2 = abcd - a^2c - ab^2 \iff bc^2 = a(bcd - ac - b^2).$$

(1 pont)

Mivel a jobb oldal osztható a -val, ezért a -nak a bal oldalt, azaz bc^2 -et is osztania kell.

(1 pont)

De $(a, b) = 1$, ezért $a|c^2$, viszont $(a, c) = 1$, így $a \in \{-1; 1\}$. (1 pont)

Teljesen hasonló átalakítások alapján $b|a^2c$ és $c|ab^2$, de $(a, b) = 1$, $(b, c) = 1$, ill. $(c, a) = 1$ feltételek miatt $a, b, c \in \{-1, 1\}$. (1 pont)

A kapott értékeket az eredeti összefüggésbe helyettesítve a következő nyolc számnégyest kapjuk:

$$(a, b, c, d) \in \{(1, 1, 1, 3); (1, 1, -1, -1); (1, -1, 1, -1); (-1, 1, 1, -1); (1, -1, -1, -1); (-1, 1, -1, -1); (-1, -1, 1, -1); (-1, -1, -1, 3)\}. \quad (1 \text{ pont})$$



2. feladat (10 pont). Oldd meg az egész számok halmazán a $4xy - 12x + 5y = 2023$ egyenletet!

Papp Ilonka, Brassó

Első megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Kifejezzük az egyenletből az y ismeretlent az x segítségével. Ekkor

$$y = \frac{12x + 2023}{4x + 5}.$$

(1 pont)

Mivel $y \in \mathbb{Z}$, ezért $\frac{12x+2023}{4x+5}$ is egész kell legyen. Ez pontosan akkor teljesül, ha $(4x + 5) \mid (12x + 2023)$.

(1 pont)

De $(4x + 5) \mid (4x + 5)$, ezért $(4x + 5) \mid [(12x + 2023) - 3 \cdot (4x + 5)]$, azaz $(4x + 5) \mid 2008$. (3 pont)

Mivel $4x + 5$ páratlan egész szám, és $(4x + 5) \mid 2008$, ezért $4x + 5 \in \{\pm 1; \pm 251\}$. (1 pont)

Ha $4x + 5 = 1$, akkor $x = -1$, és $y = 2011$. (0,5 pont)

Ha $4x + 5 = -1$, akkor $x = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$. (0,5 pont)

Ha $4x + 5 = 251$, akkor $x = \frac{123}{2} \notin \mathbb{Z}$. (0,5 pont)

Ha $4x + 5 = -251$, akkor $x = -64$, és $y = -5$. (0,5 pont)

Tehát $(x, y) \in \{(-1, 2011); (-64, -5)\}$. (1 pont)

■

Második megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Az egyenlet mindkét oldalából kivonva 15-öt, az alábbi ekvivalens átalakításokat végezhetjük:

$$4xy - 12x + 5y - 15 = 2023 - 15 \iff 4x(y - 3) + 5(y - 3) = 2008 \iff (4x + 5)(y - 3) = 2008.$$

(3 pont)

A 2008 egész osztói: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 251, \pm 502, \pm 1004, \pm 2008$.

(2 pont)

Figyelembe véve, hogy $y - 3 \in \mathbb{Z}$, és $4x + 5$ páratlan egész szám, a következő esetek lehetségesek:

(1 pont)

Ha $4x + 5 = 1$ és $y - 3 = 2008$, akkor $x = -1$ és $y = 2011$.

(0,5 pont)

Ha $4x + 5 = -1$ és $y - 3 = -2008$, akkor $x = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$ és $y = -2005$.

(0,5 pont)

Ha $4x + 5 = 251$ és $y - 3 = 8$, akkor $x = \frac{123}{2} \notin \mathbb{Z}$ és $y = 11$.

(0,5 pont)

Ha $4x + 5 = -251$ és $y - 3 = -8$, akkor $x = -64$ és $y = -5$.

(0,5 pont)

Tehát $(x, y) \in \{(-1, 2011); (-64, -5)\}$.

(1 pont)

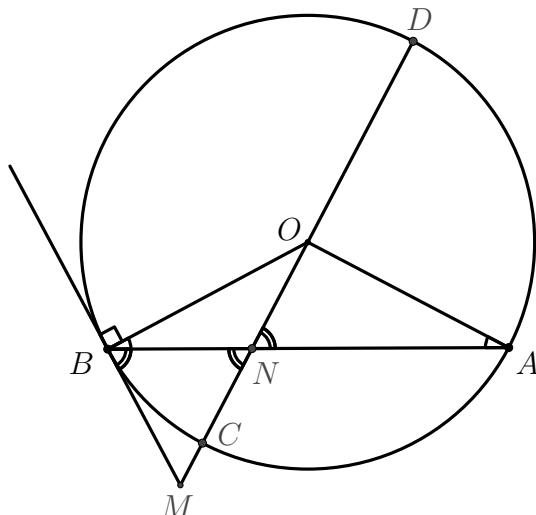
■

3. feladat (10 pont). Egy O középpontú kör AB húrjának B pontjában érintőt húzunk a körhöz. A kör CD átmérőjének tartóegyenese M pontban metszi a B -ben húzott érintőt ($M \neq B$), valamint N pontban az AB húr tartóegyenését. Bizonyítsd be, hogy CD akkor és csak akkor merőleges OA -ra, ha $BM = MN$.

Zákány Mónika, Nagybánya

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)



I. Először bizonyítsuk, hogy ha $CD \perp OA$, akkor $BM = MN$.

Ha $CD \perp OA$, akkor $\widehat{ONA} + \widehat{OAN} = 90^\circ$.

(1 pont)

Ugyanakkor $\widehat{ONA} \equiv \widehat{BNM}$ (csúcsszögek) és $\widehat{OAN} \equiv \widehat{OBN}$ (AOB_Δ egyenlő szárú). (1 pont)

Ez utóbbi két összefüggést behelyettesítve az $\widehat{ONA} + \widehat{OAN} = 90^\circ$ összefüggésbe kapjuk, hogy $\widehat{BNM} + \widehat{OBN} = 90^\circ$. (1 pont)

Ugyanakkor $\widehat{OBN} + \widehat{NBM} = 90^\circ$ ($OB \perp BM$), így $\widehat{MBN} \equiv \widehat{MNB}$, tehát $MB = MN$. (1 pont)

II. Bizonyítsuk, hogy ha $BM = MN$, akkor $CD \perp OA$.

Az MBN_Δ egyenlő szárú, ezért $\widehat{MBN} = \widehat{MNB}$.

(1 pont)

Ugyanakkor $\widehat{MNB} \equiv \widehat{ANO}$, hiszen csúcsszögek.

(1 pont)

A fenti két összefüggésből következik, hogy $\widehat{MBN} \equiv \widehat{ANO}$, de $\widehat{MBN} + \widehat{OBN} = 90^\circ$, ez pedig azt jelenti, hogy $\widehat{OBN}$ és $\widehat{ANO}$ egymás pótszögei, azaz $\widehat{OBN} + \widehat{ANO} = 90^\circ$. (1 pont)

Mivel OA és OB sugarak a körben, OAB_Δ egyenlő szárú, tehát $\widehat{OBA} \equiv \widehat{OAB}$. (1 pont)

A fentiekből következik, hogy $\widehat{OAN} + \widehat{ONA} = 90^\circ$, így az AON_Δ derékszögű kell legyen. (1 pont)

Vagyis a CD átmérő merőleges az AO sugarra.

■

4. feladat (10 pont). Egy kosárban négy fajta alma van, amelyek száma összesen 50-nél több. Tudjuk, hogy bárhogyan választunk ki a kosárból 50 almát, a kiválasztottak között mindig van mind a négy fajtából. Legtöbb hány alma lehet a kosárban? *Császár Sándor, Csíkszereda*

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Ha a kosárban pontosan 50 alma lenne, mivel mindegyik fajtából legalább 1 – 1 almának lennie kell, ezért az egyik fajtából legfeljebb 47 darab lehet ($47 + 1 + 1 + 1 = 50$). **(1 pont)**

Azonban több, mint 50 alma van, ezért valamelyik fajtából legalább 1 darabbal többnek kell lennie. Belátható, hogy sem $51 = 1 + 1 + 2 + 47$, sem $51 = 1 + 1 + 1 + 48$ alma nem lehet, hiszen ekkor kiválasztható 50 darab úgy, hogy csak három fajta alma legyen. **(1 pont)**

A fentiekből következik, hogy mindegyik fajta almából legalább 2 darab van, és mivel legalább 51 alma van, így $51 = 2 + 2 + 2 + 45$ almának lennie kell. Ugyanakkor azt is beláttuk, hogy lehet a kosárban pontosan 51 darab alma. **(1 pont)**

Ha 52 alma lenne, az $52 = 2 + 2 + 2 + 46$ és $52 = 2 + 2 + 3 + 45$ esetekből arra a megállapításra jutunk, hogy mindegyik fajtából legalább 3 darabnak kell lennie, és $52 = 3 + 3 + 3 + 43$ miatt lehet 52 alma a kosárban. **(1 pont)**

Teljesen hasonló módon belátható, hogy a kosárban levő almák fajták szerinti megoszlása a következő lehet: 53 darab alma esetén $53 = 4 + 4 + 4 + 41$, 54 darab alma esetén $54 = 5 + 5 + 5 + 39$, 55 darab alma esetén $55 = 6 + 6 + 6 + 37$, ..., 59 darab alma esetén $59 = 10 + 10 + 10 + 29$, ..., 65 darab alma esetén $65 = 16 + 16 + 16 + 17$. **(1 pont)**

Viszont 66 vagy annál több alma esetén nem lehetséges a helyes kiválasztás, mert ha a kosárban levő almák fajták szerinti megoszlása $a \leq b \leq c \leq d$, akkor a feladat feltételeinek megfelelő kiválasztáshoz teljesülnie kell a $b + c + d \leq 49$ egyenlőtlenségnek. A legnagyobb ilyen darabszámok $a = b = c = 16$ és $d = 17$. **(3 pont)**

Tehát a kosárban legkevesebb 65 alma lehet.

(1 pont)

■

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

V. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXII. EMMV

országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

VIII. osztály

1. feladat (10 pont). Lehet-e különböző pozitív egész számokat írni egy tetraéder éleire úgy, hogy az egy-egy csúcsban összefutó három élen levő számok szorzata ugyanannyi legyen? (***)

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

Legyenek az élekre írt pozitív egész számok a, b, c, d, e és f . Ekkor a feltételnek megfelelően kapjuk, hogy $abc = cde = aef = bdf$. (1 pont)

Elosztva az $abc = cde$ egyenlőség mindkét oldalát c -vel, következik, hogy $ab = de$. (1 pont)

Elosztva az $aef = bdf$ egyenlőség mindkét oldalát f -el, következik, hogy $ae = bd$. (1 pont)

Összeszorozva az $ab = de$ és $ae = bd$ egyenlőségeket, kapjuk, hogy $a^2be = bd^2e$, (2 pont)

majd mindkét oldalát elosztva be -vel, következik, hogy $a^2 = d^2$. (1 pont)

Mivel a és d pozitív egész számok, ezért $a = d$. Ekkor $b = e$ és $c = f$, (2 pont)

tehát *nem lehet* a feltételnek megfelelően különböző pozitív egész számokat írni egy tetraéder éleire. (1 pont)

■

2. feladat (10 pont). a) Oldd meg az egész számok halmazában az $x^2 - xy + 45y = 2023$ egyenletet!
Kovács Béla, Szatmárnémeti

b) Milyen x és y egész számok esetén lesz az

$$E(x, y) = \frac{(4x - 3y)(3x - 4y)}{x^2y^2 + 1}$$

kifejezés a lehető legkisebb?

Jakab-Medvessi Andrea-Alice, Kolozsvár

Mátyás Ildikó Beáta, Szatmárnémeti

Máthé Attila István, Sepsiszentgyörgy

a) *Első megoldás.* Hivatalból (1 pont)

Az egyenletet az $y(45 - x) = 2023 - x^2$ alakra hozzuk.

Ha $x = 45$, akkor $x^2 = 2023$, ami nem lehetséges. Ha $x \neq 45$, akkor $y = \frac{2023 - x^2}{45 - x}$. (1 pont)

Továbbá $y = \frac{x^2 - 2023}{x - 45} = \frac{x^2 - 2025 + 2}{x - 45} = \frac{(x + 45)(x - 45) + 2}{x - 45} = x + 45 + \frac{2}{x - 45}$. (1 pont)

Mivel $\frac{2}{x - 45}$ csak egész szám lehet, ezért a tört nevezője csak ± 1 vagy ± 2 lehet. (1 pont)

Összesen négy esetet kell vizsgálni.

Ha $x = 44$, akkor $y = 87$.

Ha $x = 46$, akkor $y = 93$.

Ha $x = 43$, akkor $y = 87$.

Ha $x = 47$, akkor $y = 93$.

(2 pont)

Ezek a számpárok az egyenlet egész megoldásai.

■

Második megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Az egyenletet rendezzük, majd a bal oldalon szorzatot alakítunk ki:

$$x^2 - xy + 45y = 2023 \Leftrightarrow x^2 - 2025 - y(x - 45) = -2, \text{ azaz } (x - 45)(x + 45) - y(x - 45) = -2,$$

$$\text{így } (x - 45)(x + 45 - y) = -2,$$

(2 pont)

ahonnan az $x - 45 = \pm 1$, illetve $x - 45 = \pm 2$ eseteket kell tárgyalni.

(1 pont)

Ugyanazokat a megoldásokat kapjuk, mint a fenti esetben.

(2 pont)

b) Az $E(x, y)$ kifejezést átalakítjuk, azaz

$$\begin{aligned} E(x, y) &= \frac{12x^2 - 16xy - 9xy + 12y^2}{x^2y^2 + 1} = \frac{12x^2 - 24xy + 12y^2 - xy}{x^2y^2 + 1} \\ &= \frac{12(x - y)^2 - xy}{x^2y^2 + 1} \geq \frac{-xy}{x^2y^2 + 1} \geq -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

(2 pont)

mert $\frac{-xy}{x^2y^2+1} \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{xy}{x^2y^2+1} \Leftrightarrow 1 + x^2y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow (xy - 1)^2 \geq 0$, ami igaz bármely x és y valós számok esetén.

(1 pont)

Tehát az $E(x, y)$ kifejezés lehető legkisebb értéke $-\frac{1}{2}$, amelyet $xy = 1$ esetén ér el, azaz $x = y = 1$ vagy $x = y = -1$.

(1 pont)

■

3. feladat (10 pont). a) Igazold, hogy bármely x és y pozitív valós számok esetén

$$\sqrt{xy} \leq \sqrt{(1+x)(1+y)} - 1 \leq \frac{x+y}{2}.$$

b) Igazold, hogy bármely x , y és z pozitív valós számok esetén

$$\sqrt{x(y+1)} + \sqrt{y(z+1)} + \sqrt{z(x+1)} \leq \frac{3}{2} \sqrt{(x+1)(y+1)(z+1)}.$$

(***)

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a) Először igazoljuk, hogy bármely $x, y \in (0; \infty)$ esetén $\sqrt{xy} \leq \sqrt{(1+x)(1+y)} - 1$.

$$\begin{aligned} \sqrt{xy} \leq \sqrt{(1+x)(1+y)} - 1 &\Leftrightarrow 1 + \sqrt{xy} \leq \sqrt{(1+x)(1+y)} \Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{xy} + xy \leq 1 + x + y + xy \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{xy} \leq x + y, \text{ ami igaz a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség alapján. } \end{aligned}$$

(2 pont)

A $\sqrt{(1+x)(1+y)} - 1 \leq \frac{x+y}{2}$ egyenlőtlenség ekvivalens a következőkkel:

$$\sqrt{(1+x)(1+y)} \leq \frac{x+y}{2} + 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{1+x+y+xy} \leq x+y+2, \text{ amely egyenlőtlenség mindkét oldalát}$$

négyzetre emelve kapjuk, hogy

$$4(1+x+y+xy) \leq x^2+y^2+4+2xy+4x+4y \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0, \text{ ami igaz}$$

bármely $x, y \in (0; \infty)$ esetén.

(2 pont)

b) A számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy

$$\sqrt{\frac{x}{x+1} \cdot \frac{1}{z+1}} \leq \frac{\frac{x}{x+1} + \frac{1}{z+1}}{2},$$

$$\sqrt{\frac{y}{y+1} \cdot \frac{1}{x+1}} \leq \frac{\frac{y}{y+1} + \frac{1}{x+1}}{2},$$

$$\sqrt{\frac{z}{z+1} \cdot \frac{1}{y+1}} \leq \frac{\frac{z}{z+1} + \frac{1}{y+1}}{2}.$$

(2 pont)

A fenti egyenlőtlenségeket összeadva kapjuk, hogy

$$\sqrt{\frac{x}{(x+1)(z+1)}} + \sqrt{\frac{y}{(y+1)(x+1)}} + \sqrt{\frac{z}{(z+1)(y+1)}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{z}{z+1} + \frac{1}{z+1} \right) = \frac{3}{2}.$$

(2 pont)

A $\sqrt{\frac{x}{(x+1)(z+1)}} + \sqrt{\frac{y}{(y+1)(x+1)}} + \sqrt{\frac{z}{(z+1)(y+1)}} \leq \frac{3}{2}$ egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozva

a $\sqrt{(x+1)(y+1)(z+1)}$ kifejezéssel, a kért egyenlőtlenséghez jutunk.

(1 pont)

■

4. feladat (10 pont). Az $ABCD A'B'C'D'$ téglatestben O az $ABCD$, E pedig az $ADD'A'$ lap középpontja. Legyen $C'E \cap AB = \{N\}$ és $C'O \cap AA' = \{M\}$.

- Igazold, hogy $MN \parallel D'C$.
- Ha $AB = AA'$, igazold, hogy az $MND'C$ négyszög téglalap!
- Ha $ABCD A'B'C'D'$ kocka, határozd meg az AND' és AMC síkok által alkotott szög mértékét!

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a) Az $NAE_{\Delta} \equiv C'D'E_{\Delta}$, mert $EA = ED'$, $\widehat{AEN} = \widehat{D'EC'}$ és $\widehat{NAE} = \widehat{C'D'E}$, ahonnan következik, hogy $EN = EC'$ és $AN = D'C'$.

(1 pont)

Ugyanígy $MAO_{\Delta} \equiv C'CO_{\Delta}$, ahonnan következik, hogy $OM = OC'$ és $AM = CC'$.

Mivel $EN = EC'$ és $OM = OC'$, így az EO a $C'NM$ háromszög középvonala, tehát $EO \parallel MN$.

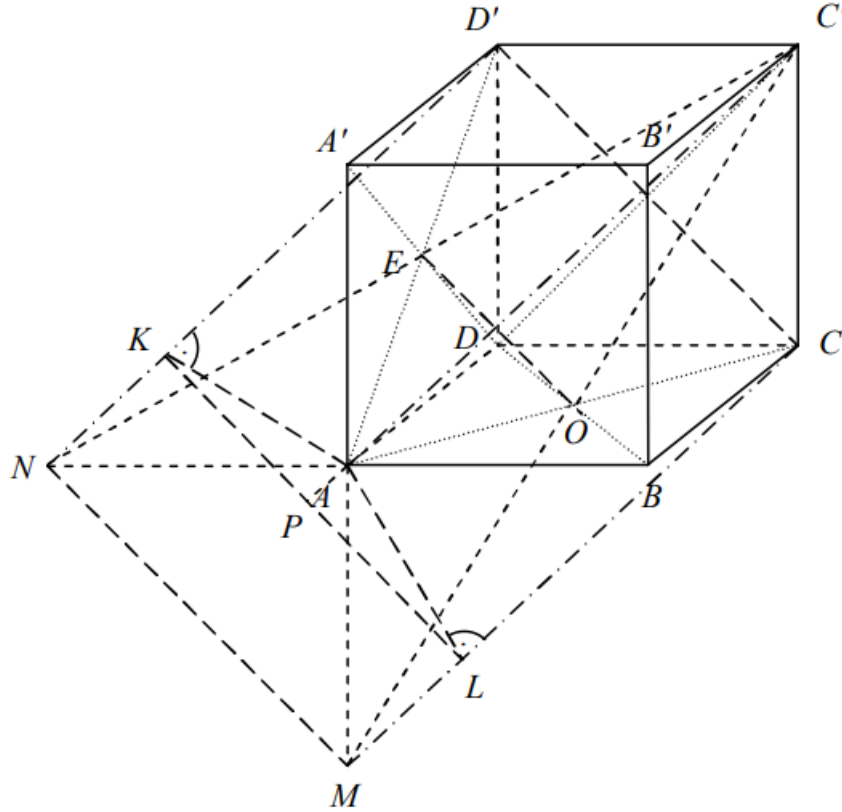
(1 pont)

Az ACD' háromszögben EO középvonal, tehát $EO \parallel D'C$.

(0,5 pont)

Az $EO \parallel MN$ és $EO \parallel D'C$ alapján következik, hogy $MN \parallel D'C$.

(0,5 pont)



b) Az $AMN_{\Delta} \equiv DD'C_{\Delta}$, mert $AM = DD'$, $AN = DC$ és $\widehat{MAN} = \widehat{D'DC}$,
tehát $MN = D'C$. (0,5 pont)

Mivel $MN \parallel D'C$, következik, hogy $MND'C$ paralelogramma. (0,5 pont)

Legyen $AB = AA' = a$ és $AD = b$. Kiszámítjuk a $D'NC$ háromszög oldalainak hosszát az a és b függvényében. A $DD'N$ derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele alapján

$D'N^2 = D'D^2 + DN^2 = a^2 + a^2 + b^2$, tehát $D'N = \sqrt{2a^2 + b^2}$. Hasonlóan a BCN derékszögű háromszögben $CN^2 = BN^2 + BC^2 = (2a)^2 + b^2$, tehát $CN = \sqrt{4a^2 + b^2}$, és $D'C = a\sqrt{2}$. (1 pont)

A $D'NC$ háromszögben fennáll a $CN^2 = D'N^2 + D'C^2$ összefüggés. Így Pitagorasz tételének fordított tétele alapján következik, hogy $D'N \perp D'C$, tehát az $MND'C$ négyszög téglalap. (1 pont)

c) Az AND' és AMC síkok azonosak az $AND'C'$ és $AMCC'$ síkokkal, ezeknek a metszésvonala az AC' egyenes. Meghúzzuk a két síkban az AC' metszésvonalra merőleges egyeneseket: $AK \perp AC'$, $K \in ND'$ és $AL \perp AC'$, $L \in MC$, ahonnan következik, hogy $AK \perp D'N$ és $AL \perp MC$. Így az AK és AL egyenesek szöge éppen a keresett síkok által közrezárt szöggel egyenlő. (1 pont)

Mivel az AND' és AMC háromszögek kongruensek, ezért $AK = AL$, tehát $NK = ML$, de $NK \parallel ML$, ahonnan következik, hogy $NMLK$ téglalap. Mivel $MN = a\sqrt{2}$, következik, hogy $KL = a\sqrt{2}$. (1 pont)

Az AND' derékszögű háromszögben AK magasság,

ezért $AK = \frac{AN \cdot AD'}{D'N} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3} = AL$. (0,5 pont)

Legyen AP az AKL egyenlő szárú háromszög magassága, így $LP = \frac{KL}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Az ALP derékszögű háromszögben $\cos \widehat{ALP} = \frac{LP}{AL} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ezért $\widehat{ALP} = 30^\circ$, tehát $\widehat{KAL} = 120^\circ$, de az AK és AL egyenesek által alkotott hegyesszöget kell venni,

így $((AND'), (AMC)) = 60^\circ$. (0,5 pont)

■

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

V. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXII. EMMV

országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

IX. osztály – I. forduló

1. feladat (10 pont). Oldd meg a valós számok halmazán az

$$[x]^2 + \left(\left\{ x + \frac{1}{2023} \right\} - 1 \right) \left(x + \frac{2024}{2023} - \left[x + \frac{1}{2023} \right] \right) = 2024$$

egyenletet, ahol $[a]$ az a valós szám egész részét, $\{a\}$ pedig a tört részét jelöli!

Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Észrevesszük, hogy

$$x + \frac{2024}{2023} - \left[x + \frac{1}{2023} \right] = x + \frac{1}{2023} - \left[x + \frac{1}{2023} \right] + 1 = \left\{ x + \frac{1}{2023} \right\} + 1. \quad (2 \text{ pont})$$

Ez alapján az egyenlet egyenértékű azzal, hogy

$$[x]^2 + \left(\left\{ x + \frac{1}{2023} \right\} - 1 \right) \left(\left\{ x + \frac{1}{2023} \right\} + 1 \right) = 2024$$
$$\iff [x]^2 + \left\{ x + \frac{1}{2023} \right\}^2 = 2025. \quad (2 \text{ pont})$$

Ez utóbbi egyenlet csak akkor teljesülhet, ha $\left\{ x + \frac{1}{2023} \right\}$ egész szám. Másrészt $\left\{ x + \frac{1}{2023} \right\} \in [0, 1)$, tehát $\left\{ x + \frac{1}{2023} \right\} = 0$ kell legyen. (2 pont)Ezek alapján azt kapjuk, hogy $[x]^2 = 2025$, ahonnan $[x] = 45$ vagy $[x] = -45$. (1 pont)Ha $[x] = 45$ és $\left\{ x + \frac{1}{2023} \right\} = 0$, akkor $x = 46 - \frac{1}{2023}$.Ha $[x] = -45$ és $\left\{ x + \frac{1}{2023} \right\} = 0$, akkor $x = -44 - \frac{1}{2023}$. Tehát a megoldások halmaza

$$M = \left\{ 46 - \frac{1}{2023}, -44 - \frac{1}{2023} \right\}. \quad (2 \text{ pont})$$

■

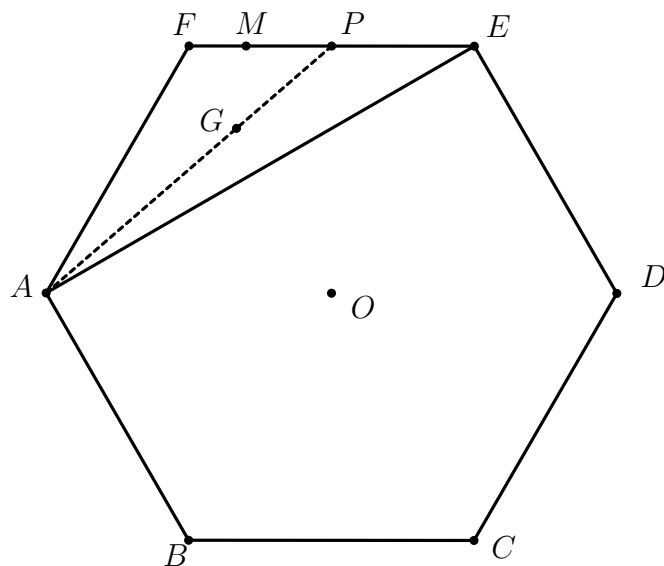
2. feladat (10 pont). Az $ABCDEF$ szabályos hatszögben az AFE háromszög súlypontját jelölje G . Továbbá legyen M az FE szakasz azon pontja, amelyre $\frac{FM}{ME} = k$, ahol $k > 0$.a) Fejezd ki a $\overrightarrow{BF}$ és $\overrightarrow{BE}$ vektorokat a $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ és $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ vektorok segítségével!b) Határozd meg a $k > 0$ értékét úgy, hogy a B , G és M pontok kollineárisak legyenek!

Mátéfi István, Marosvásárhely

Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)



a) Legyen O a hatszög középpontja, valamint P az FE szakasz felezőpontja. Ekkor

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = \vec{a} + \overrightarrow{BO} = \vec{a} + \vec{a} + \vec{b} = 2\vec{a} + \vec{b}.$$

$$\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BO} = 2(\vec{a} + \vec{b}). \quad (2 \text{ pont})$$

b) A B , G és M pontok akkor és csakis akkor kollineárisak, ha létezik $p \in \mathbb{R}^*$, amelyre teljesül, hogy $\overrightarrow{BM} = p \cdot \overrightarrow{BG}$. (1 pont)

Mivel G az AFE háromszög súlypontja, ezért $\frac{AG}{GP} = 2$. Ez alapján írhatjuk, hogy

$$\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BE}}{2} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}(4\vec{a} + 3\vec{b}) = \frac{5}{3}\vec{a} + \vec{b}. \quad (2 \text{ pont})$$

Továbbá $\frac{FM}{ME} = k$, így

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{BF} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{BE} = \frac{1}{k+1}(2\vec{a} + \vec{b}) + \frac{k}{k+1}(2\vec{a} + 2\vec{b}) = 2\vec{a} + \frac{1+2k}{k+1}\vec{b} \quad (2 \text{ pont})$$

A $\overrightarrow{BM} = p \cdot \overrightarrow{BG}$ egyenlőség alapján $\frac{5}{3}p = 2$ és $p = \frac{1+2k}{k+1}$, (1 pont)

ahonnan azt kapjuk, hogy $k = \frac{1}{4}$. (1 pont)

■

3. feladat (10 pont). Igazold, hogy az $a, b, c > 0$ számok esetén teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{3}{2}(a+b+c) \leq \frac{2a^2+ab}{a+b} + \frac{2b^2+bc}{b+c} + \frac{2c^2+ca}{c+a} \leq 2(a+b+c).$$

Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. Hivatalból
Legyen

(1 pont)

$$\begin{aligned} S &= \frac{2a^2 + ab}{a + b} + \frac{2b^2 + bc}{b + c} + \frac{2c^2 + ca}{c + a} \\ &= \frac{a^2 + a(a + b)}{a + b} + \frac{b^2 + b(b + c)}{b + c} + \frac{c^2 + c(c + a)}{c + a} \\ &= a + b + c + \frac{a^2}{a + b} + \frac{b^2}{b + c} + \frac{c^2}{c + a}. \end{aligned}$$

(2 pont)

Az $S \leq 2(a + b + c)$ egyenlőtlenség egyenértékű azzal, hogy

$$\frac{a^2}{a + b} + \frac{b^2}{b + c} + \frac{c^2}{c + a} \leq a + b + c,$$

ahonnan

$$\frac{-ab}{a + b} + \frac{-bc}{b + c} + \frac{-ac}{c + a} \leq 0,$$

ami teljesül minden $a, b, c > 0$ esetén.

(3 pont)

Az $S \geq \frac{3}{2}(a + b + c)$ egyenlőtlenség egyenértékű azzal, hogy

$$\frac{a^2}{a + b} + \frac{b^2}{b + c} + \frac{c^2}{c + a} \geq \frac{1}{2}(a + b + c).$$

A Bergström-egyenlőtlenség (vagy Titu-lemma) alapján

$$\frac{a^2}{a + b} + \frac{b^2}{b + c} + \frac{c^2}{c + a} \geq \frac{(a + b + c)^2}{a + b + b + c + c + a} = \frac{(a + b + c)^2}{2(a + b + c)} = \frac{1}{2}(a + b + c). \quad (4 \text{ pont})$$

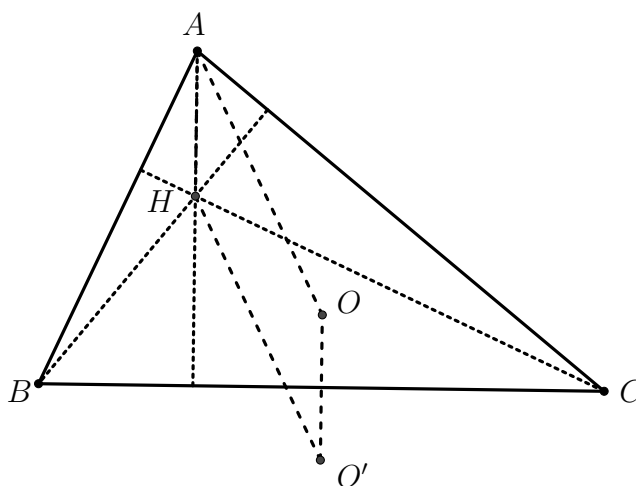
■

4. feladat (10 pont). Az ABC nem egyenlő szárú háromszög köré írt középpontját jelölje O , magasságpontját pedig H . Legyen O' a HBC háromszög köré írt kör középpontja. Igazold, hogy az $AHO'O$ négyszög egy paralelogramma.

Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)



Az ABC háromszögben a Sylvester-tétel alapján $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. (2 pont)

Mivel $AH \perp BC$ és $AB \perp HC$, ezért az A pont a HBC háromszög ortocentruma. (2 pont)

A HBC háromszögben a Sylvester-tétel alapján

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O'A} &= \overrightarrow{O'H} + \overrightarrow{O'B} + \overrightarrow{O'C} \\ &= \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OC} \\ &= 3\overrightarrow{O'O} + 2\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}.\end{aligned}\quad (2 \text{ pont})$$

Másrészt $\overrightarrow{O'A} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA}$, tehát $3\overrightarrow{O'O} + 2\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA}$, (2 pont)

ahonnan az következik, hogy $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OH}$, azaz $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'H}$. Ez pontosan azt jelenti, hogy az $AHO'O$ négyszög egy paralelogramma. (1 pont)

■

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

V. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXII. EMMV

országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

X. osztály – I. forduló

1. feladat (10 pont). Adott az $n \geq 2$ természetes szám. Határozd meg az $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy teljesüljenek a következő feltételek:

$$f(1) = 1 \quad \text{és}$$

$$f(\sqrt[n]{x \cdot y}) \geq \sqrt[n]{x^{2023}} \cdot f(\sqrt[n]{y}), \quad \text{bármely } x, y \geq 0.$$

(Zákány Mónika, Nagybanya)

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Mivel a $h: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $h(x) = \sqrt[n]{x}$ függvény bijektív, ezért bármely $u \in [0, \infty)$ szám egyértelműen felírható $u = \sqrt[n]{x}$ alakba, tehát a feladat feltétele a következő formába írható:

$$f(1) = 1 \quad \text{és} \quad f(u \cdot v) \geq u^{2023} \cdot f(v), \quad \forall u, v \in [0, \infty). \quad (1 \text{ pont})$$

Ha $u = x$ és $v = 1$, akkor azt kapjuk, hogy $f(x) \geq x^{2023}$ bármely $x \in [0, \infty)$ esetén. (2 pont)

Legyen most $u = \frac{1}{x}$ és $v = x \cdot y$, $x > 0$, $y \geq 0$. Ekkor azt kapjuk, hogy $f(y) \geq \frac{1}{x^{2023}} \cdot f(x \cdot y)$, ahonnan következik, hogy $f(x \cdot y) \leq x^{2023} \cdot f(y)$, bármely $x > 0$ és $y \geq 0$ esetén. (2 pont)

Ha $y = 1$ azt kapjuk, hogy $f(x) \leq x^{2023}$, bármely $x > 0$ esetén. Tehát $f(x) = x^{2023}$, ha $x > 0$, valamint $f(x) = a$, ha $x = 0$, ahol $a \geq 0$. (1 pont)

Ha $x > 0$ és $y = 0$, akkor $f(\sqrt[n]{x \cdot y}) = f(0) = a$. Innen a feltétel alapján kapjuk, hogy

$$a \geq \sqrt[n]{x^{2023}} \cdot f(\sqrt[n]{y}) = \sqrt[n]{x^{2023}} \cdot a$$

bármely $x > 0$, ami csak az $a = 0$ esetén teljesülhet. (1 pont)

Tehát $f(x) = x^{2023}$ bármely $x \in [0, \infty)$ esetén. (1 pont)

Az így kapott $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2023}$ függvény teljesíti a feladat feltételeit. (1 pont) ■

2. feladat (10 pont). Oldd meg az

$$x^3 + 3x^2 + 6x - 8 = (3x^2 + x + 2)\sqrt{x+2}$$

egyenletet a valós számok halmazán!

(Kovács Béla, Szatmárnémeti)

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Az egyenlet értelmezési tartománya $[-2, \infty)$.

(1 pont)

Az adott egyenletrendszert rendezzük x és $x+2$ szerint.

$$\begin{aligned} x^3 + 3x(x+2) - 8 &= 3x^2\sqrt{x+2} + (x+2)\sqrt{x+2} \\ \iff x^3 - 3x^2\sqrt{x+2} + 3x(x+2) - (x+2)\sqrt{x+2} &= 8. \end{aligned} \quad (3 \text{ pont})$$

Az egyenlet baloldalán kialakult egy teljes köb:

$$(x - \sqrt{x+2})^3 = 8 \quad (1 \text{ pont})$$

$$\iff x - \sqrt{x+2} = 2$$

$$\iff x - 2 = \sqrt{x+2}. \quad (1 \text{ pont})$$

Ha $x \geq -2$, akkor $\sqrt{x+2}$ értelmezett és $\sqrt{x+2} \geq 0$. Következik, hogy $x - 2 \geq 0$ vagyis $x \geq 2$.

(1 pont)

Az egyenlet megoldásait a $[2, \infty)$ intervallumon keressük. Az egyenletet négyzetre emelve és rendezve az $x^2 - 5x + 2 = 0$ egyenletet kapjuk, melynek megoldásai $x_1 = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$ és $x_2 = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$. (1 pont)

Ezek közül a megfelelő megoldás az $x = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$. (1 pont)

Megjegyzés. Jelölje $\sqrt{x+2} = t, t \geq 0$. Ekkor $x = t^2 - 2$ helyettesítéssel az eredeti egyenlet $t^6 - 3t^5 - 3t^4 + 11t^3 + 6t^2 - 12t - 16 = 0$ alakban írható. Az egyenletet felbontva:

$$t^6 - 3t^5 - 3t^4 + 11t^3 + 6t^2 - 12t - 8 = 8 \iff$$

$$(t^2 - t - 2)^3 = 8 \iff t^2 - t - 2 = 2 \iff t^2 - t - 4 = 0.$$

Megoldva a kapott másodfokú egyenletet, $t = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \geq 0$, ahonnan az $x = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$.

■

3. feladat (10 pont). Adottak az $x_1, x_2, \dots, x_n \in [n, n+1]$ valós számok, ahol $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Igazold, hogy

$$2n \leq \log_{x_1}[(2n+1)x_2 - n(n+1)] + \log_{x_2}[(2n+1)x_3 - n(n+1)] + \dots + \log_{x_n}[(2n+1)x_1 - n(n+1)] < 2n \log_n(n+1).$$

(Longáver Lajos, Nagybanya)

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Először lássuk be, hogy ha $x \in [a, b]$, akkor

$$(a+b)x - ab \geq x^2 \quad (1)$$

Valóban, ha $x \in [a, b]$, akkor $x - a \leq 0$ és $x - b \geq 0$, mely egyenlőtlenségeket összeszorozva, azt kapjuk, hogy $x^2 - (a+b)x + ab \leq 0$, ahonnan következik az (1) egyenlőtlenség. (2 pont)

Továbbá, legyen $a = n$, $b = n+1$ és az x helyére rendre $x_1, x_2, \dots, x_n$ -et írva azt kapjuk, hogy:

$$\log_{x_1}[(2n+1)x_2 - n(n+1)] \geq \log_{x_1}(x_2)^2 = 2 \log_{x_1} x_2,$$

$$\log_{x_2}[(2n+1)x_3 - n(n+1)] \geq \log_{x_2}(x_3)^2 = 2 \log_{x_2} x_3,$$

$\vdots$

$$\log_{x_n}[(2n+1)x_1 - n(n+1)] \geq \log_{x_n}(x_1)^2 = 2 \log_{x_n} x_1,$$

mert a logaritmusok alapjai nagyobbak mint 1.

Bevezetjük az $x_{n+1} = x_1$ jelölést. Összeadva a kapott egyenlőtlenségeket, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^n \log_{x_i}[(2n+1)x_{i+1} - n(n+1)] \geq 2 \cdot \sum_{i=1}^n \log_{x_i} x_{i+1}. \quad (1 \text{ pont})$$

Alkalmazva a számtani és mértani középátlánosok közti egyenlőtlenséget a $\log_{x_1} x_2, \log_{x_2} x_3, \dots, \log_{x_n} x_1$ pozitív számokra azt kapjuk, hogy:

$$2 \cdot \sum_{i=1}^n \log_{x_i} x_{i+1} \geq 2n \cdot \sqrt[n]{(\log_{x_1} x_2) \cdot (\log_{x_2} x_3) \cdot \dots \cdot (\log_{x_n} x_1)} = 2n.$$

Ezzel az első egyenlőtlenséget igazoltuk.

(2 pont)

Mivel $n \leq x_i, x_{n+1} \leq n+1$, azt kapjuk, hogy

$$\log_{x_i}[(2n+1)x_{i+1} - n(n+1)] \leq \log_n[(2n+1)x_{i+1} - n(n+1)] \quad (2)$$

$$\leq \log_n[(2n+1)(n+1) - n(n+1)] \quad (3)$$

$$= \log_n(n+1)^2 = 2\log_n(n+1),$$

minden $x_i, x_{i+1} \in [n, n+1]$ esetén.

(2 pont)

Az így kapott egyenlőtlenségeket összeadva kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^n \log_{x_i}[(2n+1)x_{i+1} - n(n+1)] \leq 2n \log_n(n+1). \quad (1 \text{ pont})$$

Az egyenlőség csak akkor teljesülne, ha

$$\log_{x_i}[(2n+1)x_{i+1} - n(n+1)] = 2\log_n(n+1), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Ez pontosan akkor áll fenn, ha a (2), illetve a (3) egyenlőtlenségekben egyenlőség van, vagyis $x_i = n$, illetve $x_{i+1} = n+1$. Ha $i = 1$, akkor következik, hogy $x_1 = n$, $x_2 = n+1$, ha pedig $i = 2$, akkor $x_2 = n$ és $x_3 = n+1$. Tehát x_2 egyidőben n és $n+1$ is kellene, hogy legyen, ami lehetetlen. Tehát az egyenlőtlenség szigorú.

(1 pont)



4. feladat (10 pont). Adott a $z \in \mathbb{C}, |z| = 1$ komplex szám.

a) Igazold, hogy $|1+z| + |1+z^2| + |1+z^3| \geq 2$.

b) Igazold, hogy $2(|1+z| + |1+z^2|) + |1+z^3| \geq 2 + \sqrt{2}$.

(Bencze Mihály, Brassó)

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a) Legyen

$$2 = |1+z+1-z| \leq |1+z| + |1-z| = |1+z| + |1+z^3 - (z+z^3)| \leq |1+z| + |1+z^3| + |z| \cdot |1+z^2|$$

(2 pont)

Mivel a $|z| = 1$, ezért

$$|1+z| + |1+z^3| + |z| \cdot |1+z^2| = |1+z| + |1+z^2| + |1+z^3|.$$

Tehát $|1+z| + |1+z^2| + |1+z^3| \geq 2$.

(1 pont)

b) Az a) alpont eredményét felhasználva azt kell igazolni, hogy

$$|1 + z| + |1 + z^2| \geq \sqrt{2}. \quad (1 \text{ pont})$$

Mivel $|z| = 1$ következik, hogy $z = \cos \alpha + i \cdot \sin \alpha$, ahol $\alpha \in [0, 2\pi)$. A modulusok összege felírható a következő alakban:

$$\begin{aligned} |1 + z| + |1 + z^2| &= |1 + \cos \alpha + i \cdot \sin \alpha| + |1 + \cos 2\alpha + i \cdot \sin 2\alpha| \\ &= \sqrt{(1 + \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha} + \sqrt{(1 + \cos 2\alpha)^2 + \sin^2 2\alpha} \\ &= \sqrt{2 + 2 \cos \alpha} + \sqrt{2 + 2 \cos 2\alpha} \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

$$\begin{aligned} &= 2\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} + 2\sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} \\ &= 2 \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| + 2 \left| \cos \alpha \right| = 2 \left(\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| + \left| 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right| \right). \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

Jelöljük a $\cos \frac{\alpha}{2}$ -t x -szel. A bizonyítandó egyenlőtlenség így alakul:

$$2(|x| + |2x^2 - 1|) \geq \sqrt{2}, \quad \text{bármely } x \in [-1, 1] \text{ esetén.} \quad (1 \text{ pont})$$

Tekintsük az $f : [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x| + |2x^2 - 1|$ függvényt.

Ha $x \in \left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +1\right]$, akkor $|x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$, tehát $f(x) = |x| + |2x^2 - 1| > \frac{\sqrt{2}}{2}$. (1 pont)

Ha $x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right]$, akkor $f(x) = -2x^2 - x + 1$. Mivel $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{4} \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right]$, az f függvénynek a minimuma a $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ -ben vagy a 0-ban van. $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(0) = 1$. Tehát $f(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, bármely $x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right]$ esetén.

Hasonlóan kapjuk, hogy $f(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, bármely $x \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ esetén. (1 pont)

Tehát $|1 + z| + |1 + z^2| \geq \sqrt{2}$.

■

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

V. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXII. EMMV

országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

XI. osztály – I. forduló

1. feladat (10 pont). Legyen $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ úgy, hogy $A^3B = I_n - B$.

a) Igazold, hogy B invertálható!

b) Igazold, hogy $AB = BA$.

Dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a) A feltétel alapján $A^3B = I_n - B$, ezért $A^3B + B = I_n$, tehát $(A^3 + I_n)B = I_n$. (1 pont)

Innen következik, hogy $\det((A^3 + I_n)B) = \det(I_n)$, tehát $\det(A^3 + I_n)\det(B) = 1$. (1 pont)

Ebből következik, hogy $\det(B) \neq 0$, így B invertálható, és $B^{-1} = A^3 + I_n$. (1 pont)

b) Beszorozva az $A^3B = I_n - B$ összefüggést balról, illetve jobbról A -val kapjuk, hogy:

$$A^4B = A - AB \quad \text{és} \quad A^3BA = A - BA. \quad (2 \text{ pont})$$

Kivonva egymásból a két egyenlet megfelelő oldalát kapjuk, hogy

$$A^4B - A^3BA = A - AB - (A - BA) \quad (2 \text{ pont})$$

ahonnan következik, hogy $A^3(AB - BA) = -(AB - BA)$, ezért $(A^3 + I_n)(AB - BA) = O_n$.

(1 pont)

Az előző pont eredménye alapján következik, hogy $B^{-1}(AB - BA) = O_n$,

ahonnan $BB^{-1}(AB - BA) = O_n$, azaz $AB - BA = O_n$ tehát $AB = BA$.

(1 pont)

■

2. feladat (10 pont). Adottak az $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$ különböző sorozatok, amelyekre $a_1, b_1 > 0$, $a_{n+1} = a_n^2 + b_n^2$ és $b_{n+1} = 2a_nb_n$, minden $n \geq 1$ esetén. Igazold, hogy az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq 1}$ sorozat konvergens!

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Az rekurziók alapján felírható, hogy

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_n^2 + b_n^2}{2a_nb_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{a_n}{b_n} + \frac{b_n}{a_n} \right), \quad \forall n \geq 1. \quad (1)$$

(2 pont)

Legyen $\frac{a_n}{b_n} = x_n$, minden $n \geq 1$ esetén. Mivel $a_1, b_1 > 0$, ezért $a_n, b_n > 0$, minden $n \geq 1$ esetén. Innen kapjuk, hogy $x_n > 0$, bármely $n \geq 1$ esetén. (1 pont)

Az (1) összefüggés egyenértékű az $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right)$, $n \geq 1$ összefüggéssel. (1 pont)

Mivel $x_n > 0$, ezért $x_n + \frac{1}{x_n} \geq 2$. Így $x_{n+1} \geq 1$, minden $n \geq 1$ esetén, vagyis $x_n \geq 1$, bármely $n \geq 2$ esetén. (1 pont)

Az $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2 + 1}{2x_n} - x_n = \frac{(1-x_n)(1+x_n)}{2x_n}$. Ugyanakkor $x_n \geq 1$, minden $n \geq 2$ esetén, ahonnan $1 - x_n \leq 0$, minden $n \geq 2$ esetén. Tehát $x_{n+1} - x_n \leq 0$, vagyis $x_{n+1} \leq x_n$, minden $n \geq 2$ esetén következik, hogy az $(x_n)_{n \geq 2}$ sorozat csökkenő. (2 pont)

Mivel az $x_n > 0$, minden $n \geq 1$ esetén, ezért az $(x_n)_{n \geq 1}$ sorozat alulról korlátos. (1 pont)

Tehát Weierstrass tételét felhasználva az $(x_n)_{n \geq 1} = \left(\frac{a_n}{b_n} \right)_{n \geq 1}$ sorozat konvergens. (1 pont)

■

3. feladat (10 pont). Jelölje $[x]$ az x valós szám egész részét. Tekintsük az $(a_n)_{n \geq 1}$ valós számsorozatot, amelyre $a_1 = \frac{3}{2}$ és $a_{n+1} - a_n = 2[a_n]$, minden $n \geq 1$ esetén.

a) Határozd meg az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozat általános tagját!

b) Igazold, hogy

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot a_{k+1} = \frac{2a_{2n+2} + 16a_{n+1} + 4n - 31}{16}.$$

c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2023 + a_n} + \frac{1}{2023^2 + a_n} + \dots + \frac{1}{2023^n + a_n} \right)$ határértéket!

Dr. Bence Mihály, Brassó

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a) A rekurziót átírhatjuk, mint $a_{n+1} = 2[a_n] + a_n$. Felírjuk a sorozat néhány tagját:

$$a_1 = \frac{3}{2},$$

$$a_2 = 2[a_1] + a_1 = 2 \cdot 1 + 1 + \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2},$$

$$a_3 = 2[a_2] + a_2 = 2 \cdot 3 + 3 + \frac{1}{2} = 3^2 + \frac{1}{2}$$

$$a_4 = 2[a_3] + a_3 = 2 \cdot 3^2 + 3^2 + \frac{1}{2} = 3^3 + \frac{1}{2}. \quad (1 \text{ pont})$$

Észrevesszük, hogy $a_n = 3^{n-1} + \frac{1}{2}$. (1 pont)

Igazoljuk a matematikai indukció módszerével a sejtést. Az $n = 1$ esetén $a_1 = 3^0 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ igaz. Feltételezzük, hogy $a_k = 3^{k-1} + \frac{1}{2}$ és ellenőrizzük, hogy $a_{k+1} = 3^k + \frac{1}{2}$. A rekurzió és az

indukciós feltevés alapján

$$\begin{aligned}
 a_{k+1} &= 2[a_k] + a_k \\
 &= 2 \left[3^k + \frac{1}{2} \right] + 3^k + \frac{1}{2} \\
 &= 2 \cdot 3^k + 3^k + \frac{1}{2} \\
 &= 3 \cdot 3^k + \frac{1}{2} \\
 &= 3^{k+1} + \frac{1}{2},
 \end{aligned}$$

tehát a sejtés igaz.

(2 pont)

b)

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n a_k a_{k+1} &= \sum_{k=1}^n \left(3^{k-1} + \frac{1}{2} \right) \left(3^k + \frac{1}{2} \right) = \sum_{k=1}^n \left(3^{2k-1} + \frac{1}{2} \cdot 3^k + \frac{1}{2} \cdot 3^{k-1} + \frac{1}{4} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n 3^{2k-1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n 3^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n 3^{k-1} + \frac{n}{4}
 \end{aligned}$$

(1 pont)

$$\begin{aligned}
 &= 3 \cdot \frac{(3^2)^n - 1}{3^2 - 1} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} + \frac{n}{4} \\
 &= \frac{3^{2n+1} - 3}{8} + \frac{4(3^n - 1)}{4} + \frac{n}{4}
 \end{aligned}$$

(1 pont)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3^{2n+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 3 + 8(3^n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1) + 2n}{8} \\
 &= \frac{2a_{2n+2} + 16a_{n+1} + 4n - 31}{16}.
 \end{aligned}$$

(1 pont)

c) Felírhatjuk, hogy

$$\frac{1}{2023^n + a_n} \leq \frac{1}{2023^k + a_n} \leq \frac{1}{2023 + a_n},$$

minden $k = 1, \dots, n$ esetén. Összeadva az egyenlőtlenségeket a $k = 1, \dots, n$ esetén kapjuk, hogy

$$\frac{n}{2023^n + a_n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2023^k + a_n} \leq \frac{n}{2023 + a_n}.$$

(1 pont)

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2023^n + a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2023^n + 3^{n-1} + \frac{1}{2}} = 0$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2023 + a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2023 + 3^{n-1} + \frac{1}{2}} = 0$, ezért a fogó

tétel alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2023^k + a_n} = 0$.

(1 pont)

■

4. feladat (10 pont). Adottak az $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mátrixok úgy, hogy $(A - B)^2 = O_2$.

a) Igazold, hogy $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$.

b) Ha $AB = BA$, akkor bizonyítsd be, hogy $\det(A) = \det(B)$.

(***)

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

a) Mivel $(A - B)^2 = O_2$, ezért $\det(A - B) = 0$. (1 pont)

A Cayley–Hamilton-tétel felírva az $(A - B)$ mátrixra kapjuk, hogy

$$(A - B)^2 - \text{Tr}(A - B) \cdot (A - B) + \det(A - B)I_2 = O_2. \quad (1 \text{ pont})$$

Felhasználva az $(A - B)^2 = O_2$ és $\det(A - B) = 0$ összefüggéseket következik, hogy

$$\text{Tr}(A - B) \cdot (A - B) = O_2. \quad (1 \text{ pont})$$

Innen $\text{Tr}(\text{Tr}(A - B) \cdot (A - B)) = 0$, így $[\text{Tr}(A - B)]^2 = 0$. De $\text{Tr}(A - B) = \text{Tr}(A) - \text{Tr}(B)$, ezért $[\text{Tr}(A) - \text{Tr}(B)]^2 = 0$, tehát $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$. (1 pont)

b) Mivel $AB = BA$, ezért fennáll az $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$, így az előző alpont alapján

$$\det(A^2 - B^2) = \det[(A + B)(A - B)] = \det(A + B) \det(A - B) = 0. \quad (1 \text{ pont})$$

Bevezetjük a $t = \text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$, $\alpha = \det A$ és $\beta = \det(B)$ jelöléseket. A Cayley–Hamilton-tétel alapján $A^2 - tA + \alpha I_2 = O_2$ és $B^2 - tB + \beta I_2 = O_2$, amelyeket kivonva egymásból kapjuk, hogy $A^2 - B^2 = t(A - B) - (\alpha - \beta)I_2$. (1 pont)

Két esetet különböztetünk meg.

I. Ha $t = 0$, akkor $A^2 - B^2 = -(\alpha - \beta)I_2$, így $0 = \det(A^2 - B^2) = (\alpha - \beta)^2 \cdot 1$, tehát $\det(A) = \alpha = \beta = \det(B)$. (1 pont)

II. Ha $t \neq 0$, akkor

$$\det(A^2 - B^2) = \det[t(A - B) - (\alpha - \beta)I_2] = \det\left(t\left[(A - B) - \frac{\alpha - \beta}{t}I_2\right]\right). \quad (1 \text{ pont})$$

Ismeretes, hogy $\det[(A - B) - xI_2] = x^2 - \text{Tr}(A - B)x + \det(A - B)$, továbbá a korábbról ismert $\text{Tr}(A - B) = 0$ és $\det(A - B) = 0$ összefüggések alapján $\det[(A - B) - xI_2] = x^2$. Innen következik, hogy

$$\det(A^2 - B^2) = t^2 \det\left((A - B) - \frac{\alpha - \beta}{t}I_2\right) = t^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{t}\right)^2 = (\alpha - \beta)^2,$$

de mivel $\det(A^2 - B^2) = 0$, ezért $(\alpha - \beta)^2 = 0$, tehát $\det(A) = \alpha = \beta = \det(B)$. (1 pont)

■

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

V. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXII. EMMV

országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

XII. osztály – I. forduló

1. feladat (10 pont). Tekintsük az $(S_5, \cdot)$ szimmetrikus csoportot (az ötödrendű permutációk csoportját).

- a) Igazold, hogy az $f: S_5 \rightarrow S_5$, $f(x) = x^7$ függvény bijektív!
- b) Oldd meg az $x^7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ egyenletet az S_5 halmazon!

*Biró Béla, Sepsiszentgyörgy**Megoldás. Hivatalból***(1 pont)**

- a) Az $(S_5, \cdot)$ véges csoportban minden elem rendje osztója a csoport rendjének, a csoport rendje pedig $|S_5| = 5! = 120$. **(1 pont)**

Tekintsük a σ és τ S_5 -beli permutációkat. A fentiek alapján igaz, hogy $\sigma^{120} = \tau^{120} = e$, ahol e az identikus permutáció S_5 -ben. **(1 pont)**

Ha $f(\sigma) = f(\tau)$, akkor $\sigma^7 = \tau^7$. **(1 pont)**

Viszont $120 = 119 + 1 = 7 \cdot 17 + 1$, ezért $e = \sigma^{120} = \sigma^{119} \cdot \sigma = (\sigma^7)^{17} \cdot \sigma$ és $e = \tau^{120} = \tau^{119} \cdot \tau = (\tau^7)^{17} \cdot \tau$, ahonnan $\sigma = (\sigma^7)^{-17} = (\tau^7)^{-17} = \tau$. Tehát az f függvény injektív. **(1 pont)**

Mivel S_5 véges halmaz és az $f: S_5 \rightarrow S_5$ függvény injektív, az f függvény szürjektív is. Tehát f bijektív. **(1 pont)**

- b) Jelöljük α -val a $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ permutációt. Észrevehetjük, hogy $\alpha^3 = e$ (például onnan, hogy $\alpha = (142)(3)(5) = (142)$). **(1 pont)**

Így $\alpha^7 = (\alpha^3)^2 \cdot \alpha = e \cdot \alpha = \alpha$, vagyis α megoldása az egyenletnek. **(2 pont)**

Az a) alpont értelmében az egyenletnek egy és csakis egy megoldása van, így α az egyetlen megoldás. **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont). Határozd meg az összes olyan $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ kétszeresen deriválható függvényt, amelyre $f(1) = f'(1) = e$ és

$$f''(x) \cdot f(x) - (f'(x))^2 = \frac{1 - \ln x}{x^2} \cdot f^2(x),$$

bármely x valós szám esetén.

*Dr. Bencze Mihály, Brassó
Szilágyi Judit, Kolozsvár*

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

Az adott $f''(x) \cdot f(x) - (f'(x))^2 = \frac{1-\ln x}{x^2} \cdot f^2(x)$ egyenlőséget a következő alakban írhatjuk:

$$\frac{f''(x) \cdot f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

ami az $\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = \frac{1-\ln x}{x^2}$ egyenlőséggel egyenértékű. (2 pont)

Így $\int \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' dx = \int \frac{1-\ln x}{x^2} dx$, tehát $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\ln x}{x} + C$. (1 pont)

Ez alapján $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \left(\frac{\ln x}{x} + C\right) dx$, ami az $\ln |f(x)| = \frac{1}{2} \ln^2 x + cx + d$ egyenlőséghez vezet. (2 pont)

Mivel $f(x) > 0$, minden x valós számra, az összefüggés egyenértékű az $f(x) = e^{\frac{\ln^2 x}{2} + cx + d}$ egyenlőséggel, minden $x > 0$ esetén. (1 pont)

Az egyenlőség $x = 1$ -re $f(1) = e^{c+d}$, és mivel $f(1) = e$, így $c + d = 1$. Hasonlóan $\frac{f'(1)}{f(1)} = c$, de a kezdeti feltétel alapján $\frac{f'(1)}{f(1)} = \frac{e}{e} = 1$. A két összefüggés alapján $c = 1$ és $d = 0$. (2 pont)

Tehát a keresett függvény az $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = e^{\frac{\ln^2 x}{2} + x}$. (1 pont)

■

3. feladat (10 pont). Legyen $(G, \cdot)$ egy $6n + 1$ elemű csoport, ahol $n \in \mathbb{N}^*$.

- Igazold, hogy G -nek egyetlen olyan eleme van, amely önmaga inverze!
- Ha a H halmaznak legalább $2n$ eleme van és $(H, \cdot)$ részcsoportha a $(G, \cdot)$ csoportnak, igazold, hogy $H = G$.

Szilágyi Judit, Kolozsvár
Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

- Az $x = x^{-1}$ egyenlőség az $x^2 = e$ egyenlőséggel egyenértékű, minden $x \in G$ esetén. Ha $x = e$, akkor teljesül az $e^2 = e$ egyenlőség. (1 pont)
Ha $x \neq e$, és $x^2 = e$, akkor az x elem rendje 2. (1 pont)
Mivel 2 nem osztója $6n + 1$ -nek, az x elem rendje nem lehet 2, így az egységelemen kívül nincs olyan elem a G -ben, ami önmaga inverze. (1 pont)

- Legyen H elemszáma k . Lagrange tétele alapján $k \mid (6n + 1)$, ugyanakkor $k \geq 2n$. (2 pont)
Legyen $d_{\min}$ a $6n + 1$ legkisebb és $d_{\max}$ a legnagyobb valódi osztója, ekkor $d_{\max} = \frac{6n+1}{d_{\min}}$. (1 pont)

Mivel $2 \nmid (6n + 1)$, $3 \nmid (6n + 1)$, sőt $4 \nmid (6n + 1)$, így $d_{\min} \geq 5$, tehát $d_{\max} \leq \frac{6n+1}{5} < 2n$. (2 pont)

Ezek alapján $k \geq 2n$, $d_{\max} < 2n$, tehát $k > d_{\max}$, viszont $k \mid (6n + 1)$, ahonnan $k = 6n + 1$. Vagyis $H = G$. (1 pont)



4. feladat (10 pont). Számítsd ki az

$$I = \int \frac{e^x x^2 + 2x + 1}{e^{2x} x^2 + e^x x^2 + x} dx$$

integrált, ahol $x > 0$.

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Az integrálandó törtfüggvényt egyszerűsítjük x^2 -tel, így a következő alakban írhatjuk:

$$I = \int \frac{e^x x^2 + 2x + 1}{e^{2x} x^2 + e^x x^2 + x} dx = \int \frac{e^x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{e^{2x} + e^x + \frac{1}{x}} dx = \int \frac{u(x)}{v(x)} dx$$

(2 pont)

A nevező deriváltja $v'(x) = (e^{2x} + e^x + \frac{1}{x})' = 2e^{2x} + e^x - \frac{1}{x^2}$.

(2 pont)

Az I integrált az

$$I_1 = \int \frac{2e^{2x} + e^x - \frac{1}{x^2}}{e^{2x} + e^x + \frac{1}{x}} dx = \int \frac{v'(x)}{v(x)} dx$$

és

$$I_2 = \int \frac{e^{2x} + e^x + \frac{1}{x}}{e^{2x} + e^x + \frac{1}{x}} dx = \int \frac{v(x)}{v(x)} dx$$

integrálok lineáris kombinációjaként, vagyis $I = \alpha I_1 + \beta I_2$ alakban írjuk fel (ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$). **(2 pont)**

Ehhez tulajdonképpen az $u(x) = \alpha \cdot v'(x) + \beta \cdot v(x)$ egyenlőséget teljesítő α, β valós számokat kell megkeresnünk. A számítások elvégzése után kapjuk, hogy $\alpha = -1$ és $\beta = 2$, vagyis

$$I = - \int \frac{2e^{2x} + e^x - \frac{1}{x^2}}{e^{2x} + e^x + \frac{1}{x}} dx + 2 \int \frac{e^{2x} + e^x + \frac{1}{x}}{e^{2x} + e^x + \frac{1}{x}} dx$$

Tehát

$$I = - \int \frac{v'(x)}{v(x)} dx + 2 \int \frac{v(x)}{v(x)} dx = - \ln |v(x)| + 2x + C = - \ln \left| e^{2x} + e^x + \frac{1}{x} \right| + 2x + C$$

(2 pont)

Mivel $x > 0$ így

$$I = - \ln \left(e^{2x} + e^x + \frac{1}{x} \right) + 2x + C$$

(1 pont)



CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

V. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXII. EMMV

országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

IX. osztály – II. forduló

1. feladat (10 pont).

- a) Igazold, hogy az 5-nél nagyobb prímszámok $6k + 1$ vagy $6k + 5$ alakúak, ahol $k \in \mathbb{N}^*$.
- b) Határozd meg azokat az a és b prímszámokat, amelyekre $a + 2b$ és $a + 7b$ egyszerre prímek!

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

- a) Minden $k \in \mathbb{N}^*$ esetén a $6k$, $6k + 2$ és $6k + 4$ alakú természetes számok oszthatók 2-vel, a $6k + 3$ alakú számok pedig oszthatók 3-mal, tehát ezek nem lehetnek prímszámok. (1 pont)
Így az 5-nél nagyobb prímszámok $6k + 1$ vagy $6k + 5$ alakúak, ahol $k \in \mathbb{N}^*$. (1 pont)

- b) Ha az a és b számok páratlanok, akkor $a + 7b$ páros, így nem lehet prímszám, tehát az a és b számok közül legalább az egyik páros kell legyen, azaz $a = 2$ vagy $b = 2$. (1 pont)

Ha $a = 2$, akkor $a + 2b = 2 + 2b$ páros, tehát nem prímszám. (1 pont)Ha $b = 2$ és $a \neq 2$, akkor keressük azokat az a prímszámokat, amelyekre $a + 4$ és $a + 14$ egyszerre prímek. Ebben az esetben a következő eseteket tárgyaljuk:

- ha $a = 3$, akkor $a + 4 = 7$ és $a + 14 = 17$, mindkettő prímszám, (1 pont)
- ha $a = 5$, akkor $a + 4 = 9$, ami nem prímszám, (1 pont)
- ha $a = 6k + 1$, akkor $a + 14 = 3(2k + 5)$, ami nem prímszám, (1 pont)
- ha $a = 6k + 5$, akkor $a + 4 = 3(2k + 3)$, de ez sem prímszám. (1 pont)

Tehát a keresett számok: $a = 3$ és $b = 2$.

(1 pont)

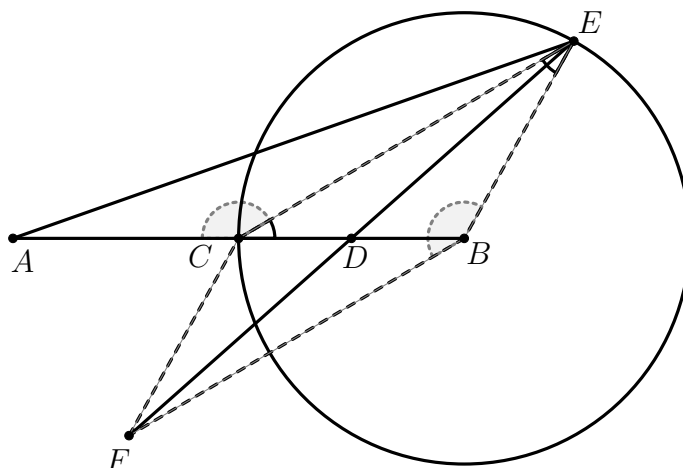
■

2. feladat (10 pont). Legyen C egy adott AB szakasz felezőpontja, D pedig a BC szakasz felezőpontja. Ugyanakkor legyen E a B középpontú, BC sugarú kör, C -től különböző tetszőleges pontja. Jelölje F az E pontnak a D pont szerinti szimmetrikusát. Bizonyítsd be, hogy $EA = EF$.

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

Első megoldás. Hivatalból

(1 pont)


Mivel F az E pontnak a D pont szerinti szimmetrikusa, ezért $ED = DF$.

Ugyanakkor $DB = DC$, így $BECF$ paralelogramma és $\widehat{BEC} + \widehat{FBE} = 180^\circ$.

(3 pont)

De $\widehat{BEC} \equiv \widehat{BCE}$, mert a BEC háromszög egyenlő szárú, így

 $\widehat{ACE} = 180^\circ - \widehat{ECB} = 180^\circ - \widehat{BEC} = \widehat{FBE}$.

(3 pont)

Az ACE és EBF háromszögekben $AC = EB$, mert $AC = CB = EB$, továbbá $CE = BF$, mert $BECF$ paralelogramma, végül $\widehat{ACE} \equiv \widehat{FBE}$.

(2 pont)

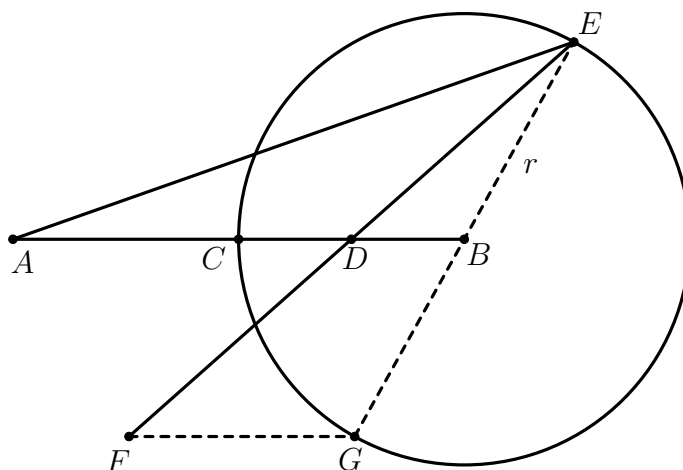
Ezek alapján $ACE_\Delta \equiv EBF_\Delta$, ahonnan $AE = EF$.

(1 pont)

■

Második megoldás. Hivatalból

(1 pont)


Legyen G az E pont átmérősen ellentett pontja.

(1 pont)

Ha r a kör sugara, akkor $BE = BG = BC = r$, $AB = 2r$ és $EG = 2r$, tehát $AB = EG$.

(2 pont)

Az EFG_Δ -ben $ED = DF$ és $EB = BG$, ezért DB az EFG_Δ középvonala, így

 $FG = 2DB = BC = r$, tehát $FG = BE$,

(3 pont)

ugyanakkor $DB \parallel FG$, ezért $\widehat{ABE} \equiv \widehat{EGF}$.

(2 pont)

A fentiek alapján $AB = EG$, $FG = BE$, valamint $\widehat{ABE} \equiv \widehat{EGF}$, amiből következik, hogy az ABE és EGF háromszögek kongruensek, tehát $EA = EF$.

(1 pont)

■

3. feladat (10 pont). Igazold, hogy bármely n természetes szám esetén $(5 - \sqrt{5})^n + (5 + \sqrt{5})^n$ osztható 2^n -nel!

*Kocsis Attila, Déva
Bara Lajos, Zilah*

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

Legyen $P(n) : (5 - \sqrt{5})^n + (5 + \sqrt{5})^n : 2^n$, ahol $n \in \mathbb{N}$. Matematikai indukcióval igazoljuk, hogy $P(n)$ igaz kijelentés, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.

I. Ellenőrizzük az $n = 0$ és $n = 1$ sajátos eseteket: $P(0) : 2 : 2^0$, $P(1) : 10 : 2^1$, ami igaz. (2 pont)

II. Feltételezzük, hogy a $P(k - 1)$ és a $P(k)$ kijelentések igazak, ezért léteznek olyan m_1 és m_2 természetes számok, amelyekre

$$(5 - \sqrt{5})^{k-1} + (5 + \sqrt{5})^{k-1} = 2^{k-1} \cdot m_1 \quad \text{és} \quad (5 - \sqrt{5})^k + (5 + \sqrt{5})^k = 2^k \cdot m_2.$$

Bizonyítjuk, hogy $P(k + 1)$ kijelentés is igaz, vagyis $(5 - \sqrt{5})^{k+1} + (5 + \sqrt{5})^{k+1} : 2^{k+1}$. (2 pont)

Az $a = 5 - \sqrt{5}$ és $b = 5 + \sqrt{5}$ jelölések alapján

$$\begin{aligned} a^{k+1} + b^{k+1} &= (a^k + b^k)(a + b) - ab(a^{k-1} + b^{k-1}) \\ &= 10 \cdot 2^k \cdot m_2 - 20 \cdot 2^{k-1} \cdot m_1 \\ &= 5 \cdot 2^{k+1} \cdot m_2 - 5 \cdot 2^{k+1} \cdot m_1 \\ &= 2^{k+1} \cdot 5 \cdot (m_2 - m_1) : 2^{k+1}. \end{aligned}$$

(4 pont)

Tehát $(5 - \sqrt{5})^n + (5 + \sqrt{5})^n : 2^n$, bármely n természetes szám esetén. (1 pont)

■

4. feladat (10 pont). A táblára felírtuk a természetes számokat 1-től n -ig. Minden lépésben kitörlünk két tetszőleges a és b számot, helyette felírjuk az $a + b - n$ számot. Határozd meg az (n, k) számpárokat úgy, hogy k lépés után a táblán maradt számok összege 2023 legyen!

*Kocsis Attila, Déva
Hodgyai Edit, Micske*

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

Felírtuk a táblára a számokat 1-től n -ig. Ezek összege: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. (1 pont)

Ha két tetszőleges számot a -t és b -t letörljük, majd helyette visszaírjuk az $a + b - n$ számot, az összeg minden lépésben n -nel csökken, így k lépés után, ahol $k \in \mathbb{N}^*$, az összeg $k \cdot n$ -nel csökken.

(2 pont)

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2} - k \cdot n &= 2023 \quad | \cdot 2 \\ n(n+1) - 2kn &= 4046 \\ n(n+1 - 2k) &= 4046 \end{aligned}$$

(1 pont)

Mivel $4046 = 2 \cdot 7 \cdot 17^2$ és osztóinak száma $(1+1)(1+1)(2+1) = 12$, valamint az n természetes szám egyenlő kell legyen 4046 valamely osztójával, felírjuk az osztók halmazát.

$$D_{4046} = \{1, 2, 7, 14, 17, 34, 119, 238, 289, 578, 2023, 4046\} \quad (1 \text{ pont})$$

Ha $n = 4046$, akkor $4046 + 1 - 2k = 1$, ahonnan $2k = 4046$, tehát $k = 2023 \in \mathbb{N}^*$

Ha $n = 2023$, akkor $2023 + 1 - 2k = 2$, ahonnan $2k = 2022$, tehát $k = 1011 \in \mathbb{N}^*$

Ha $n = 578$, akkor $578 + 1 - 2k = 7$, ahonnan $2k = 572$, tehát $k = 286 \in \mathbb{N}^*$

Ha $n = 289$, akkor $289 + 1 - 2k = 14$, ahonnan $2k = 276$, tehát $k = 138 \in \mathbb{N}^*$

Ha $n = 238$, akkor $238 + 1 - 2k = 17$, ahonnan $2k = 222$, tehát $k = 111 \in \mathbb{N}^*$

Ha $n = 119$, akkor $119 + 1 - 2k = 34$, ahonnan $2k = 86$, tehát $k = 43 \in \mathbb{N}^*$ (2 pont)

Mivel $n + 1 - 2k \leq n - 1 < n$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ és $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén, ezért elégséges a fenti esetek tárgyalása. (1 pont)

Tehát 6 olyan n természetes szám van, amelyre k lépés után a táblán maradt számok összege 2023. Ezek a következők:

$n = 4046$ esetén a táblán $1, 2, 3, \dots, 4046$ szerepel, és $k = 2023$ lépés után az összeg 2023.

$n = 2023$ esetén a táblán $1, 2, 3, \dots, 2023$ szerepel, és $k = 1011$ lépés után az összeg 2023.

$n = 578$ esetén a táblán $1, 2, 3, \dots, 578$ szerepel, és $k = 286$ lépés után az összeg 2023.

$n = 289$ esetén a táblán $1, 2, 3, \dots, 289$ szerepel, és $k = 138$ lépés után az összeg 2023.

$n = 238$ esetén a táblán $1, 2, 3, \dots, 238$ szerepel, és $k = 111$ lépés után az összeg 2023.

$n = 119$ esetén a táblán $1, 2, 3, \dots, 119$ szerepel, és $k = 43$ lépés után az összeg 2023.

A megoldások: $(n, k) \in \{(119, 43), (238, 111), (289, 138), (578, 286), (2023, 1011), (4046, 2023)\}$. (1 pont)



5. feladat (10 pont). Határozd meg az a, b, c nullától különböző természetes számokat, ha tudjuk, hogy páronként relatív prímek és $3a + 4b + 5c = 5\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$.

Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

A 3, 4, 5, valamint az a, b, c pozitív természetes számokra alkalmazva a Cauchy–Bunyakovskij–Schwarz-egyenlőtlenséget kapjuk, hogy $(3a + 4b + 5c)^2 \leq (3^2 + 4^2 + 5^2)(a^2 + b^2 + c^2) = 50(a^2 + b^2 + c^2)$, ahonnan $3a + 4b + 5c \leq 5\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$. (5 pont)

Ebben egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$. (2 pont)

Mivel a, b és c természetes számok, ezért létezik olyan nem nulla k természetes szám, amelyre $a = 3k$, $b = 4k$ és $c = 5k$. (1 pont)

Ugyanakkor a, b és c relatív prímek, ezért $k = 1$, így $a = 3$, $b = 4$ és $c = 5$. (1 pont)



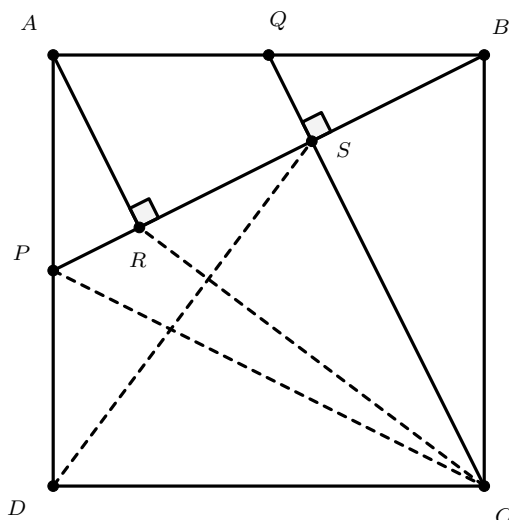
6. feladat (10 pont). Az $ABCD$ négyzetben legyen P az AD oldal felezőpontja, valamint $AR \perp BP$ és $CS \perp BP$, ahol $R, S \in BP$ és $CS \cap AB = \{Q\}$. Igazold, hogy:

- $\frac{AR}{CS} = \frac{1}{2}$;
- $CR = DS = AB$;
- $\frac{T_{ARSQ}}{T_{ABCD}} = \frac{3}{20}$.

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)



- A szög-szög hasonlósági eset alapján a BSQ , CSB és CBQ háromszögek hasonlóak, valamint a BSQ , BRA , ARP és BAP háromszögek is hasonlóak. Tehát mind a hat háromszög hasonló.

(1 pont)

Az ARP és CSB háromszögek hasonlóságából felírható, hogy:

$$\frac{AR}{CS} = \frac{RP}{SB} = \frac{PA}{BC} = \frac{PA}{2PA} = \frac{1}{2}.$$

Tehát

$$\frac{AR}{CS} = \frac{1}{2}.$$

(1 pont)

- Az a) alpontból tudjuk, hogy BAP és CBQ háromszögek hasonlóak, vagyis

$$\frac{BA}{CB} = \frac{AP}{BQ} = \frac{PB}{QC} = 1.$$

Ebből következik, hogy $AP = BQ$, ahonnan Q az AB felezőpontja. Így, mivel $SQ \parallel AR$, a kettő alapján következik, hogy QS középvonal a BAR háromszögben, vagyis S a BR szakasz felezőpontja.

(1 pont)

Mivel $RS = SB$ valamint a BCR háromszögben a CS magasság is, ezért a BCR háromszög egyenlő szárú, azaz $BC = CR$, vagyis $CR = AB$. (1 pont)

Az a) alpontból tudjuk, hogy CSB és BRA háromszögek hasonlóak, azaz

$$\frac{BC}{AB} = \frac{CS}{BR} = \frac{SB}{RA} = 1.$$

Tehát $CS = BR$ és $SB = RA$. (1 pont)

Mivel a $\widehat{BCS}$ szögnek a $\widehat{CBS}$ és $\widehat{SCD}$ is pótszöge, ezért $\widehat{CBS} = \widehat{SCD}$. Ekkor, ha tekintjük a BCR és CDS háromszögeket, ezekben $\widehat{CBR} = \widehat{SCD}$, ezenkívül $DC = BC$ és $SC = RB$, így a két háromszög kongruens. Innen $CR = DS$, de $CR = AB$ tehát $CR = DS = AB$.

(1 pont)

c) Legyen $AB = 4x$. Ekkor $T_{ABCD} = (4x)^2 = 16x^2$.

A BAR háromszögben QS középvonal, tehát $QS = \frac{AR}{2}$, de $AR = \frac{CS}{2}$, vagyis $QS = \frac{CS}{4}$. (1 pont)

Tudjuk, hogy $RS = SB = RA = 2QS$.

$$T_{ARSQ} = \frac{SQ+AR}{2} \cdot RS = \frac{SQ+2SQ}{2} \cdot 2SQ = 3SQ^2. \quad (1 \text{ pont})$$

A BCQ háromszögben alkalmazva a Pitagorasz-tételt kapjuk, hogy $QC = 2\sqrt{5} \cdot x$.

Tehát $QS = \frac{1}{5}QC = \frac{1}{5} \cdot 2\sqrt{5} \cdot x$, ahonnan $T_{ARSQ} = 3SQ^2 = \frac{12}{5}x^2$.

Mindezeket felhasználva

$$\frac{T_{ARSQ}}{T_{ABCD}} = \frac{\frac{12}{5}x^2}{16x^2} = \frac{3}{20} \quad (1 \text{ pont})$$

■

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

V. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXII. EMMV

országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

X. osztály – II. forduló

1. feladat (10 pont). Egy diáktanács szavazásán három jelöltre lehetett szavazni. Összesen 2023-an szavaztak. Minden szavazat érvényes volt és mindenki csak egy jelöltre szavazott. Határozd meg, hogy hányféleképpen oszolhattak meg a szavazatok a jelöltek között, ha tudjuk, hogy bármelyik két jelölt összesen több szavazatot kapott, mint a harmadik!

*Faluvégi Melánia, Zilah és Szilveszter Ibolya, Temesvár**Megoldás. Hivatalból*

(1 pont)

Vezessük be a következő jelöléseket:

- x - az első jelölt szavazatainak száma;
- y - a második jelölt szavazatainak száma;
- z - a harmadik jelölt szavazatainak száma.

Ekkor $x + y + z = 2023$, $x, y, z \in \mathbb{N}$ és innen $x = 2023 - (y + z)$.

(1 pont)

A feltételekből felírhatjuk, hogy $x + y > z$, $y + z > x$ és $z + x > y$.

(1 pont)

A fentiekből következik, hogy $2023 - (y + z) + y > z \implies z \leq 1011$.

(1 pont)

Hasonlóan $2023 - (y + z) + z > y \implies y \leq 1011$ és

(1 pont)

 $y + z > 2023 - (y + z) \implies y + z \geq 1012$.

(1 pont)

Tehát $1012 \leq z + y \leq 2022$.

(1 pont)

Innen az (z, y) számpárok száma $1011 \cdot 1011 = 1011^2$.

(2 pont)

Minden (z, y) számpár esetén az x egyértelműen meghatározott, mert $x + y + z = 2023$. Ezért az (x, y, z) számhármakok száma szintén 1011^2 .Tehát a lehetséges esetek száma 1011^2 .

(1 pont)



2. feladat (10 pont). Az ABC háromszög súlypontja G . Bizonyítsd be a

$$4 \cdot (AB + BC + CA) - 12 \cdot (GA^2 + GB^2 + GC^2) \leq 3$$

egyenlőtlenséget, és add meg az egyenlőség feltételét!

*Olosz Ferenc, Szatmárnémeti**Megoldás. Hivatalból*

(1 pont)

Ha A' a BC oldal felezőpontja, a , b és c a háromszög BC , CA , és AB oldalainak hossza, valamint $AA' = m_a$, akkor $GA = \frac{2}{3}AA' = \frac{2}{3}m_a$, ahol $m_a^2 = \frac{2 \cdot (b^2 + c^2) - a^2}{4}$.

(1 pont)

Hasonlóan a B' az AC oldal felezőpontja $GB = \frac{2}{3}BB' = \frac{2}{3}m_b$, ahol $m_b^2 = \frac{2 \cdot (a^2 + c^2) - b^2}{4}$ és a C' az AB oldal felezőpontja $GC = \frac{2}{3}CC' = \frac{2}{3}m_c$, ahol $m_c^2 = \frac{2 \cdot (a^2 + b^2) - c^2}{4}$.

(1 pont)

Tehát $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{4}{9} \cdot (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)}{4} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$.

(1 pont)

A bizonyítandó egyenlőtlenség átírható a vele egyenértékű $4(a^2 + b^2 + c^2) - 4(a + b + c) + 3 \geq 0$ alakba és ezt a következőképpen bizonyítjuk: (2 pont)

$$4 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) - 4 \cdot (a + b + c) + 3 = (4a^2 - 4a + 1) + (4b^2 - 4b + 1) + (4c^2 - 4c + 1) = (2a - 1)^2 + (2b - 1)^2 + (2c - 1)^2 \geq 0. \quad (2 \text{ pont})$$

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $2a - 1 = 0$, $2b - 1 = 0$ és $2c - 1 = 0$, (1 pont)

tehát az egyenlőség feltétele $a = b = c = \frac{1}{2}$. (1 pont) ■

3. feladat (10 pont). Egy egyenesen Imre megjelölt k darab pontot, ahol k természetes szám, $2 \leq k \leq 2021$. Ezután minden szomszédos pontpár között megjelölt még egy újabb pontot, és így tovább. Lehet-e egy ilyen eljárás végén 2022 pont az egyenesen? Hát 2033 pont? Ha ezek valamelyike elérhető, akkor abban az esetben mennyi lehet a k legkisebb értéke?

(***)

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

Minden lépésnél eggyel kevesebb pontot jelölt meg, mint amennyi már megvan jelölve az egyenesen. Ha az első lépésben Imre k pontot jelölt be az egyenesen, akkor a következő lépésben újabb $k - 1$ pontot jelölt meg, vagyis az első lépés után $2k - 1$ megjelölt pont van. (1 pont)

Ha $2k - 1$ megjelölt pont van az egyenesen, akkor a következő lépésben újabb $2k - 2$ pontot jelölt be, vagyis összesen $4k - 3$ megjelölt pont lesz. A következő lépésekben $8k - 7$, majd $16k - 15$ megjelölt pont lesz. (1 pont)

Az a sejtésünk, hogy az n -edik lépés után $2^n \cdot k - (2^n - 1) = 2^n(k - 1) + 1$ megjelölt pont lesz. Ha ehhez hozzáveszünk az $(n + 1)$ -dik lépésben megjelölt újabb $2^n(k - 1)$ pontot, akkor az $(n + 1)$ -dik lépés után $2^{n+1}(k - 1) + 1$ megjelölt pont lesz, tehát a sejtésünk igaz. (3 pont)

A $2^n(k - 1) + 1$ nem lehet egyenlő 2022-vel, mert a bal oldal páratlan. Tehát az eljárás végén nem lehet 2022 pont az egyenesen. (1 pont)

Vizsgáljuk a $2^n(k - 1) + 1 = 2033$ egyenlőséget. Ekkor $2^n \cdot (k - 1) = 2032 = 2^4 \cdot 127$. (1 pont)

A k akkor a legkisebb, ha $n = 4$, és ekkor $k - 1 = 127$, tehát $k = 128$, vagyis 2033 megjelölt pont elérhető $k = 128$ megjelölt pontból kiindulva. (2 pont) ■

4. feladat (10 pont). Az ABC háromszög az A csúcsban derékszögű. A C középpontú és CA sugarú kör, valamint a B középpontú és BA sugarú kör a BC átfogót D , illetve E pontokban metszi. Az ADE háromszög köré írt kör az AB , illetve AC befogót az F , illetve G pontokban metszi. Számítsd ki az FG szakasz hosszát, tudva, hogy $AB = 15$ cm és $AC = 8$ cm!

Zajzon Csaba, Barót

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

Jelöljük $\mathcal{C}_1$ -gyel a CA sugarú kört, $\mathcal{C}_2$ -vel a BA sugarú kört és $\mathcal{C}_3$ -al az ADE háromszög köré írt kört. Legyen a $\mathcal{C}_1$ és a $\mathcal{C}_2$ második metszéspontja P .

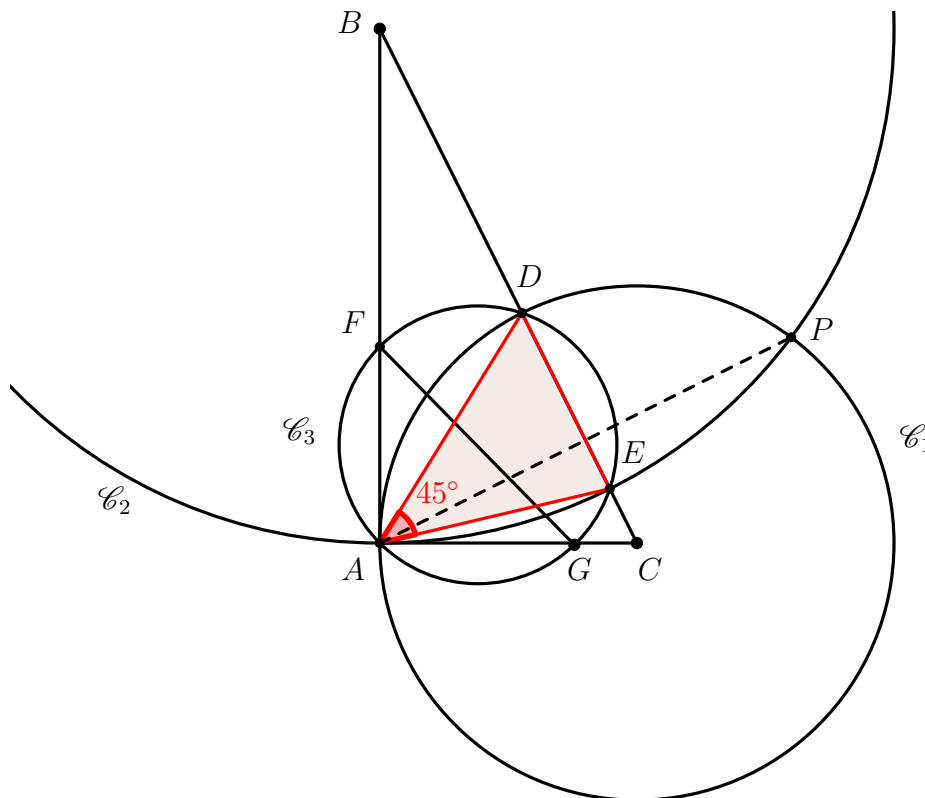
Mivel két metsző kör metszéspontján áthaladó egyenes merőleges a két kör centrálisára, ezért teljesül, hogy $CB \perp AP$, ugyanakkor a $\mathcal{C}_2$ körön $\widehat{AE} = \widehat{EP}$ és a $\mathcal{C}_1$ körön $\widehat{AD} = \widehat{DP}$. (2 pont)

Mivel AC érintője a $\mathcal{C}_2$ körnek, ezért a

$$\widehat{CAE} = \frac{\widehat{AE}}{2} = \frac{\widehat{EP}}{2} = \widehat{PAE} = \frac{\widehat{PAC}}{2}. \quad (1 \text{ pont})$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\widehat{BAD} = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{\widehat{DP}}{2} = \widehat{DAP} = \frac{\widehat{BAP}}{2}. \quad (1 \text{ pont})$$



Tehát a $\widehat{DAE} = \widehat{DAP} + \widehat{PAE} = \frac{\widehat{BAP}}{2} + \frac{\widehat{PAC}}{2} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.
Az $ABC\triangle$ -ben $BC^2 = AC^2 + AB^2 = 289$, tehát $BC = 17$ cm. Továbbá

$$BE = BA = 15 \text{ cm},$$

$$CD = CA = 8 \text{ cm},$$

$$DE = BE + CD - BC = 15 + 8 - 17 = 6 \text{ cm}. \quad (2 \text{ pont})$$

Az $AED\triangle$ -ben alkalmazva a szinusztételt, azt kapjuk, hogy

$$R = \frac{DE}{2 \cdot \sin(\angle DAE)} = \frac{6}{2 \cdot \sin 45^\circ} = 3\sqrt{2} \text{ cm},$$

ahol R a $\mathcal{C}_3$ kör sugara. (1 pont)

Mivel $\widehat{FAG}$ derékszög, következik, hogy FG a $\mathcal{C}_3$ kör átmérője, amelynek hossza $2R = 6\sqrt{2}$ cm. (1 pont)

■

Második megoldás. Hivatalból (1 pont)

Az AGF háromszög derékszögű, ezért a GF az ADE háromszög köré írt kör átmérője. A CAD háromszög egyenlő szárú, így $CD = CA = 8$ cm és

$$\angle CDA = \angle CAD = \frac{180^\circ - \angle C}{2}. \quad (1)$$

(1 pont)

A BAE háromszög egyenlő szárú, így $BE = BA = 15$ cm és

$$BEA\angle = BAE\angle = \frac{180^\circ - B\angle}{2}. \quad (2)$$

(1 pont)

Az (1) és (2) összefüggésekből:

$$CDA\angle + BAE\angle = 90^\circ + DAE\angle,$$

ahonnan következik, hogy $DAE\angle = CDA\angle + BAE\angle - 90^\circ$. (1 pont)

Ekkor $DAE\angle = \frac{180^\circ - C\angle}{2} + \frac{180^\circ - B\angle}{2} - 90^\circ$ vagyis $DAE\angle = 90^\circ - \frac{C\angle + B\angle}{2} = 90^\circ - \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$. (2 pont)

Az ABC derékszögű háromszögben, Pitagorasz tételével kiszámolva, kapjuk, hogy $BC = 17$ cm, így $DE = CD + BE - BC = 6$ cm. (2 pont)

Az ADE háromszögben felírva a szinusztételt:

$$\frac{DE}{\sin(DAE\angle)} = 2R \iff \frac{6}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R. \quad (1 \text{ pont})$$

A műveletek elvégzése után kapjuk, hogy $2R = 6\sqrt{2}$ cm. Tehát $FG = 6\sqrt{2}$ cm. (1 pont)

■

5. feladat (10 pont). Oldd meg a nullától különböző természetes számok halmazán az $5^x - 1 = 2^y \cdot 3^z$ egyenletet! Ismertnek tekintjük, hogy a nullától különböző természetes számok halmazán a $2^x - 3^y = 1$ egyenletnek csak az $x = 2$ és $y = 1$ a megoldása, míg a $3^x - 2^y = 1$ egyenletnek csak az $x = y = 1$, valamint az $x = 2$ és $y = 3$ a megoldásai.

Bolyai János kézírata nyomán

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

Ha x páratlan, akkor $x = 2n+1$ és akkor $5^x - 1 = 5^{2n+1} - 1 = 5 \cdot (6-1)^{2n} - 1 = 6 \cdot \mathcal{M} + 5 \cdot 1 - 1 = 6 \cdot \mathcal{M} + 4$. Tehát $5^x - 1$ nem osztható 3-mal, de $2^y \cdot 3^z$ osztható 3-mal, mert $z \geq 1$, tehát az egyenletnek nincs megoldása. (1 pont)

Ha x páros, akkor $x = 2n$ és az egyenlet a következő alakban írható:

$$(5^n - 1)(5^n + 1) = 2^y \cdot 3^z.$$

Mivel $(5^n - 1)$ és $(5^n + 1)$ egymásutáni páros számok ezért a legnagyobb közös osztójuk 2 és csak az alábbi esetek lehetségesek:

$$\begin{cases} 5^n - 1 = 2^k \cdot 3^a \\ 5^n + 1 = 2 \cdot 3^b \end{cases}, k \geq 1 \quad \text{vagy} \quad \begin{cases} 5^n - 1 = 2 \cdot 3^a \\ 5^n + 1 = 2^k \cdot 3^b \end{cases}, k \geq 1. \quad (2 \text{ pont})$$

Az első esetben $2 \cdot 3^b - 2^k \cdot 3^a = 2$ vagyis $3^b - 2^{k-1} \cdot 3^a = 1$.

Ha $a \geq 1$ és $b \geq 1$, akkor a bal oldal osztható 3-mal, tehát az egyenlőség nem lehetséges.

(1 pont)

Ha $b = 0$, akkor $2^{k-1} \cdot 3^a = 0$ szintén lehetetlen.

(1 pont)

Ha $a = 0$, akkor $3^b - 2^{k-1} = 1$. Mivel a $3^x - 2^y = 1$ egyenletnek csak az $x = y = 1$ valamint az $x = 2$ és $y = 3$ a megoldásai, ezért $b = k - 1 = 1$ vagy $b = 2$ és $k - 1 = 3$.

Ha $b = 1$ és $k = 2$ akkor azt kapjuk, hogy $x = 2, y = 3$ és $z = 1$.

(1 pont)

Ha $b = 2$ és $k = 4$, akkor nincs megoldás. (1 pont)

A második esetben $2^k \cdot 3^b - 2 \cdot 3^a = 2$ vagyis $2^{k-1} \cdot 3^b - 3^a = 1$. Ha $a = 0$, akkor $b = 0$ és nincs megoldás. (1 pont)

Ha $b = 0$, akkor $2^{k-1} - 3^a = 1$. Mivel a $2^x - 3^y = 1$ egyenletnek a nullától különböző természetes számok halmazán csak az $x = 2$ és $y = 1$ a megoldása, ezért $k - 1 = 2$, valamint $a = 1$. Ekkor $k = 3$, $a = 1$ és $5^n - 1 = 6$, ami lehetetlen.

Tehát az egyenlet egyetlen megoldása az $x = 2, y = 3$ és $z = 1$. (1 pont) ■

6. feladat (10 pont). A valós számok halmazán oldd meg a

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{2y}{y^2 + 1} \\ \frac{\sqrt{1+y} - \sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y} + \sqrt{1-y}} = \frac{2x}{x^2 + 1} \end{cases}$$

egyenletrendszert!

Dávid Géza, Székelyudvarhely

Első megoldás. Hivatalból (1 pont)

Az egyenletekben szereplő kifejezések akkor értelmezettek, ha $x, y \in [-1, 1]$.

Tekintsük az $f: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ függvényt. Igazoljuk, hogy az f szigorúan növekvő és szürjektív.

Legyen $-1 \leq x < y \leq 1$. Azt kell igazolni, hogy $\frac{2x}{x^2+1} < \frac{2y}{y^2+1}$, ami egyenértékű a következőkkel

$$\begin{aligned} xy^2 + x &< x^2y + y \\ \iff xy^2 - x^2y + x - y &< 0 \\ \iff xy(y-x) - (y-x) &< 0 \\ \iff (y-x) \cdot (xy-1) &< 0, \end{aligned}$$

ami igaz. (1 pont)

Legyen $y \in [-1, 1]$. Azt vizsgáljuk, hogy létezik-e $x \in [-1, 1]$ úgy, hogy $f(x) = y$, ami egyenértékű az $(x^2 + 1) \cdot y = 2x$ kifejezéssel, vagyis az $yx^2 - 2x + y = 0$ egyenlettel. Ha $y = 0$, akkor $x = 0$, illetve ha $y \neq 0$, akkor az előbbi egyenlet egyetlen $[-1, 1]$ intervallumba eső megoldása

$$x = \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{\sqrt{1+y} - \sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y} + \sqrt{1-y}},$$

tehát az f szürjektív. (1 pont)

Mivel f szigorúan növekvő és szürjektív következik, hogy bijektív és

$$f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1], \quad f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}. \quad (1 \text{ pont})$$

Most rátérünk az egyenletrendszer megoldására.

Az egyenletrendszer a következőképpen alakul:

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = f(y) \\ f^{-1}(y) = f(x) \end{cases}.$$

Feltételezzük, hogy $x < y \implies f(x) < f(y) \implies f^{-1}(y) < f^{-1}(x)$. Mivel f^{-1} is növekvő, következik, hogy $y < x$, ami ellentmondás. Tehát $x = y$. (2 pont)

Így $\frac{2x}{x^2+1} = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ vagyis $f(x) = f^{-1}(x)$. (1 pont)

Mivel f szigorúan növekvő ezért az $f(x) = f^{-1}(x)$ egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha $f(x) = x = f^{-1}(x)$, (1 pont)

vagyis $\frac{2x}{x^2+1} = x$, ami az $x^3 - x = 0 \iff x(x-1)(x+1) = 0$ egyenlettel egyenértékű.

Tehát $x = 0$ vagy $x = -1$ vagy $x = 1$. (1 pont)

Innen az következik, hogy a $(0, 0)$, $(1, 1)$ és a $(-1, -1)$ az egyenletrendszer megoldásai. (1 pont)

■

Második megoldás. Hivatalból (1 pont)

Ha $x = 0$ vagy $y = 0$, akkor az egyenletrendszer $(x, y) = (0, 0)$. Tegyük fel, hogy $x, y \neq 0$. Ekkor

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x})^2 - (\sqrt{1-x})^2}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2}$$

$$= \frac{x}{x(1 + \sqrt{1-x^2})}$$

$$= \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}}. \quad (3)$$

$$= \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}}. \quad (4)$$

(2 pont)

A (3) és (4) alapján az egyenletrendszer első egyenletéből kapjuk, hogy

$$\frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{2y}{y^2 + 1} \quad \text{és} \quad \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{y^2 + 1}{2y}.$$

Ezeket összeadva kapjuk a

$$\frac{2}{x} = \frac{2y}{y^2 + 1} + \frac{y^2 + 1}{2y} \quad (5)$$

összefüggést. (1 pont)

Hasonlóan az egyenletrendszer második egyenletéből adódik, hogy

$$\frac{2}{y} = \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{x^2 + 1}{2x}. \quad (1 \text{ pont})$$

Ezeket kivonva egymásból kapjuk, hogy

$$\frac{2}{x} - \frac{2}{y} = \frac{2y}{y^2 + 1} - \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{y^2 + 1}{2y} - \frac{x^2 + 1}{2x}$$

$$\iff 2 \cdot \frac{y-x}{xy} = 2 \cdot \frac{yx^2 + y - xy^2 - x}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} + \frac{y^2x + x - yx^2 - y}{2xy}$$

$$\iff \frac{2(y-x)}{xy} = \frac{2(y-x)(1-xy)}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} + \frac{(y-x)(-1+xy)}{2xy}$$

$$\iff \frac{(y-x)(5-xy)}{2xy} = \frac{2(y-x)(1-xy)}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}. \quad (1 \text{ pont})$$

Ha $x \neq y$, akkor

$$\frac{5 - xy}{2xy} = \frac{2(1 - xy)}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} \iff (5 - xy)(x^2 + 1)(y^2 + 1) = 4(1 - xy)xy.$$

Mivel $x, y \in [-1, 1]$, ezért $5 - xy \geq 4$, $1 + x^2 \geq 1$, $1 + y^2 \geq 1$, illetve $4(1 - xy)xy \leq 1$, mivel az $f(u) = (1 - u)u$ másodfokú függvény maximuma $\frac{1}{4}$. Tehát a fenti egyenlőség bal oldala nagyobb vagy egyenlő, mint 4, míg a jobb oldala kisebb vagy egyenlő mint 1, így a fenti egyenlőség nem teljesülhet semmilyen $x, y \in [-1, 1]$ számokra. **(2 pont)**

Ha $x = y$, akkor az (5) alapján kapjuk

$$\frac{2}{x} = \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{x^2 + 1}{2x} \iff 4(x^2 + 1) = 4x^2 + (x^2 + 1)^2 \iff x^4 + 2x^2 - 3 = 0.$$

Mivel a $v^2 + 2v - 3 = 0$ egyenlet két megoldása $v = 1$ és $v = 3$, ezért $x^2 = 1$. Tehát, ha $x, y \neq 0$, akkor az egyenletrendszer megoldásai $(x, y) = (-1, -1)$ és $(x, y) = (1, 1)$. **(2 pont)** ■

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

V. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXII. EMMV

országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

XI-XII. osztály – II. forduló

1. feladat (10 pont). Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$2^{\cos 3x} + \cos^3 x = 8^{-\cos x}.$$

dr. Bencze Mihály, Brassó

Első megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Tudjuk, hogy $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.

(1 pont)

$$\begin{aligned} 2^{\cos 3x} + \cos^3 x = 8^{-\cos x} &\iff 2^{4 \cos^3 x - 3 \cos x} + \cos^3 x = 2^{-3 \cos x} \iff \\ \iff \cos^3 x = 2^{-3 \cos x} - 2^{4 \cos^3 x - 3 \cos x} &\iff \cos^3 x = 2^{-3 \cos x} (1 - 2^{4 \cos^3 x}). \end{aligned}$$

(2 pont)

Az $y = \cos x \in [-1, 1]$ helyettesítéssel az

$$y^3 = 2^{-3y} (1 - 2^{4y^3}) \iff y^3 \cdot 2^{3y} = 1 - 2^{4y^3} \iff y^3 \cdot 2^{3y} + 2^{4y^3} = 1$$

egyenlethez jutunk.

(2 pont)

Ekkor tekintsük a következő $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(y) = y^3 \cdot 2^{3y} + 2^{4y^3}$ függvényt. Mivel ez a függvény szigorúan növekvő függvények összege, így f is szigorúan növekvő, tehát injektív. Vagyis az

$$y^3 \cdot 2^{3y} + 2^{4y^3} = 1$$

egyenletnek csak egy megoldása van a valós számok halmazán, ez pedig az $y = 0$.

(3 pont)

Tehát $\cos x = 0$, ahonnan $x \in \{\pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

(1 pont)



Második megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Tudjuk, hogy $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.

(1 pont)

$$\begin{aligned} 2^{\cos 3x} + \cos^3 x = 8^{-\cos x} &\iff 2^{\cos 3x} + 4 \frac{\cos^3 x}{4} = 2^{-3 \cos x} \\ \iff 2^{\cos 3x} + \frac{4 \cos^3 x - 3 \cos x}{4} &= 2^{-3 \cos x} - \frac{3 \cos x}{4} \\ \iff 2^{\cos 3x} + \frac{\cos 3x}{4} &= 2^{-3 \cos x} - \frac{3 \cos x}{4}. \end{aligned}$$

(3 pont)

Ekkor tekintsük a következő $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = 2^t + \frac{t}{4}$ függvényt. Ez szigorúan növekvő, tehát injektív.

(1 pont)

$$2^{\cos 3x} + \frac{\cos 3x}{4} = 2^{-3 \cos x} - \frac{3 \cos x}{4} \iff f(\cos 3x) = f(-3 \cos x).$$

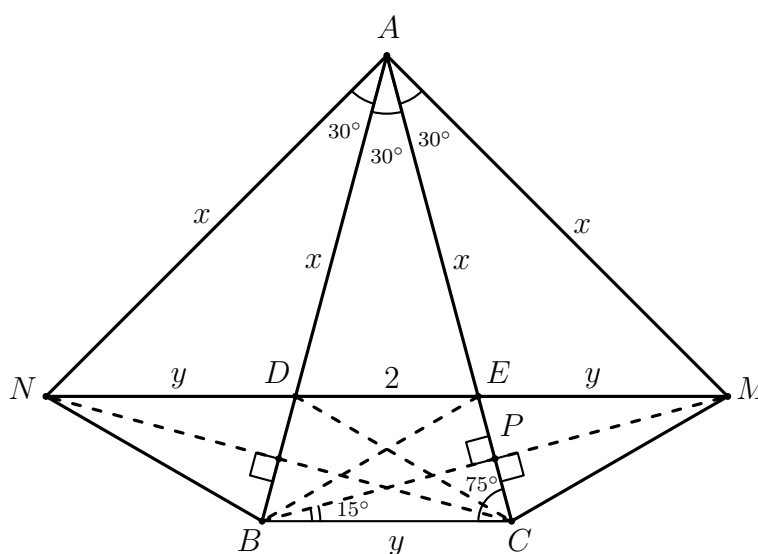
Mivel a függvény injektív, így $f(\cos 3x) = f(-3 \cos x)$ egyenértékű a $\cos 3x = -3 \cos x$ összefüggéssel. (2 pont)

$$\cos 3x = -3 \cos x \iff 4 \cos^3 x - 3 \cos x = -3 \cos x \iff \cos x = 0.$$

Tehát $\cos x = 0$, ahonnan $x \in \{\pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. (2 pont) ■

2. feladat (10 pont). Az ABC háromszögben $AB = AC$ és $\hat{A} = 30^\circ$. Legyen M és N a B és C pontok AC , illetve AB oldalak szerinti szimmetrikusa. Az MN egyenes D és E pontokban metszi az AB , illetve AC oldalakat. Ha $DE = 2$ cm, számítsd ki a BC oldal hosszát!

Zajzon Csaba, Barót



Megoldás. Hivatalból

Mivel a B és M pontok szimmetrikusak az AC oldalra nézve, következik, hogy $\widehat{CAM} = \widehat{CAB} = 30^\circ$ és $AB = AM$. Hasonlóan $\widehat{NAB} = \widehat{BAC} = 30^\circ$ és $NA = AC$. Ezek alapján következik, hogy MAN_Δ derékszögű és egyenlő szárú. (1 pont)

Mivel B és M , valamint N és C szimmetrikusak az AC , illetve AB oldalakra nézve, ezért $BC = CM$ és $BE = EM$. (1 pont)

Legyen $BM \cap AC = \{P\}$. A BPA derékszögű háromszögben $\hat{B} = 60^\circ$. A BAC egyenlő szárú háromszög $\widehat{BAC} = 30^\circ$, tehát $\widehat{ABC} = 75^\circ$. Ezek alapján $\widehat{PBC} = 15^\circ$. (1 pont)

Mivel a MAN háromszög derékszögű és egyenlő szárú, következik, hogy $\widehat{AMN} = 45^\circ$. Az APM háromszögben $\widehat{AMP} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Ezek alapján $\widehat{EMP} = 15^\circ = \widehat{EBP}$, és ezen kívül $\widehat{PBC} = 15^\circ$, ahonnan következik, hogy $BE = BC = CM = EM$, tehát $BCME$ rombusz. (2 pont)

Hasonlóan igazoljuk, hogy $BCDN$ rombusz, ahonnan $EM = ND = BC$ és $EM \parallel BC \parallel ND$, tehát $DE \parallel BC$. (1 pont)

Bevezetjük az $AB = x$ és $BC = y$ jelöléseket. Az MAN derékszögű háromszögben Pitagorasz tételét alkalmazva felírhatjuk, hogy

$$x^2 + x^2 = (2y + 2)^2 \iff x^2 = 2(y + 1)^2. \quad (1)$$

(1 pont)

Az ABC háromszögben a koszinusz tételt alkalmazva felírhatjuk, hogy

$$y^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cos 30^\circ,$$

tehát

$$y^2 = 2x^2 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \quad (2)$$

(1 pont)

Így az (1) és a (2) összefüggésekből következik, hogy

$$\begin{aligned} y^2 &= 4(y+1)^2 \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2} \\ \iff y^2 &= (y+1)^2(4-2\sqrt{3}), \quad y > 0 \\ \iff y &= (y+1)\sqrt{4-2\sqrt{3}} \\ \iff y &= \frac{\sqrt{3}-1}{2-\sqrt{3}} \\ \iff y &= \sqrt{3}+1. \end{aligned}$$

Tehát $BC = \sqrt{3} + 1$.

(1 pont)

■

3. feladat (10 pont). Legyen $x, y, z \in (1, +\infty)$ és $x \cdot y \cdot z = p$. Igazold, hogy

$$\log_p x \cdot \sqrt[3]{1 + \log_p y - \log_p z} + \log_p y \cdot \sqrt[3]{1 + \log_p z - \log_p x} + \log_p z \cdot \sqrt[3]{1 + \log_p x - \log_p y} \leq 1.$$

Longáver Lajos, Nagyánnya

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Az $a = \log_p x$, $b = \log_p y$ és $c = \log_p z$ jelöléseket bevezetve az $a + b + c = \log_p xyz = \log_p p = 1$ összefüggést kapjuk.

(1 pont)

A fenti jelölésekkel a bizonyítandó egyenlőtlenség

$$a \cdot \sqrt[3]{1+b-c} + b \cdot \sqrt[3]{1+c-a} + c \cdot \sqrt[3]{1+a-b} \leq 1. \quad (1 \text{ pont})$$

Igazoljuk, hogy $a, b, c > 0$. Mivel $x > 1$ és $xyz > 1$, így $a = \log_p x = \log_{xyz} x > \log_{xyz} 1 = 0$. Hasonlóan $b > 0$, $c > 0$. Mivel $a, b, c > 0$ és $a + b + c = 1$, következik, hogy $a, b, c \in (0, 1)$. Ezért $1 + b - c > 1 + 0 - 1 = 0$.

(1 pont)

Mivel az $1 + b - c$, 1 és 1 pozitív valós számok, a mértani és számtani közepek közti egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy

$$\sqrt[3]{(1+b-c) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{1+b-c+1+1}{3},$$

vagyis

$$\sqrt[3]{(1+b-c)} \leq \frac{3+b-c}{3}. \quad (3 \text{ pont})$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozzuk az a pozitív számmal. Így

$$a \cdot \sqrt[3]{1+b-c} \leq \frac{3a+ab-ac}{3}. \quad (1 \text{ pont})$$

Hasonlóan

$$b \cdot \sqrt[3]{1+c-a} \leq \frac{3b+bc-ab}{3},$$

$$c \cdot \sqrt[3]{1+a-b} \leq \frac{3c+ac-bc}{3}.$$

A három egyenlőtlenséget összeadjuk, így az

$$a \cdot \sqrt[3]{1+b-c} + b \cdot \sqrt[3]{1+c-a} + c \cdot \sqrt[3]{1+a-b} \leq \frac{3(a+b+c)}{3} = 1 \quad (2 \text{ pont})$$

egyenlőtlenséghez jutunk. ■

4. feladat (10 pont). Határozd meg azokat az $f: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket, amelyek teljesítik az

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 4 + \frac{2}{x-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

összefüggést!

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Megoldás. Hivatalból

A megadott összefüggésben az $y = \frac{x-1}{x}$ helyettesítést végezzük. Innen $yx = x-1$, tehát $\frac{1}{1-x} = \frac{y-1}{y}$. (1 pont)

Így kapjuk, hogy $f(y) + f\left(\frac{y-1}{y}\right) = 4 + \frac{2-2y}{y}$, minden $y \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Tehát

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 4 + \frac{2-2x}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}. \quad (3) \quad (2 \text{ pont})$$

Most a $z = \frac{1}{1-x}$ helyettesítést végezzük a megadott egyenletben, így $\frac{x-1}{x} = \frac{1}{1-z}$. (1 pont)

Ez alapján az adott egyenletből kapjuk, hogy $f(z) + f\left(\frac{1}{1-z}\right) = 4 - 2z$, minden $z \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, tehát

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 4 - 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}. \quad (4) \quad (2 \text{ pont})$$

Összeadva a (3)-as és a (4)-es egyenletek megfelelő oldalait, kapjuk, hogy

$$2f(x) + 4 + \frac{2}{x-1} = 6 - 2x + \frac{2}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}. \quad (2 \text{ pont})$$

Ha ezt elosztjuk 2-vel és átrendezzük, megkapjuk a keresett függvényt $f: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = 1 - x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 1 - x - \frac{1}{x(x-1)}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}. \quad (1 \text{ pont})$$

■

5. feladat (10 pont). Az $a_1, a_2, \dots, a_{2023}$ olyan természetes számok, amelyekre létezik $n \in \mathbb{N}$ úgy, hogy

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2023}^2 = n^2 + 2.$$

Igazold, hogy az $a_1, a_2, \dots, a_{2023}$ számok nem lehetnek mind páratlanok!

Szilágyi Judit, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Ha n páros, akkor $n^2 + 2$ páros szám. Ha $a_1, a_2, \dots, a_{2023}$ mind páratlan számok lennének, akkor négyzetösszegük is páratlan lenne, ami így nem lehet egyenlő az $n^2 + 2$ páros számmal. Tehát a számok nem lehetnek mind páratlanok.

(2 pont)

Ha n páratlan, felételezzük, hogy az $a_1, a_2, \dots, a_{2023}$ számok mind páratlanok. Ekkor

$$a_i = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1 = 8m + 1$$

alakú, minden $i = \overline{1, 2023}$ esetén.

(2 pont)

Így $\sum_{i=1}^{2023} a_i^2 = 8M + 2023 = 8M + 8 \cdot 252 + 7 = 8M + 7$ alakú.

(2 pont)

Mivel n páratlan szám, az n lehet $8k + 1$, $8k + 3$, $8k + 5$ vagy $8k + 7$ alakú. Így n^2 mindenik esetben $8k + 1$ alakú, tehát $n^2 + 2 = 8M + 3$ alakú, ami nem lehet egyenlő a $8M + 7$ alakú számmal.

(2 pont)

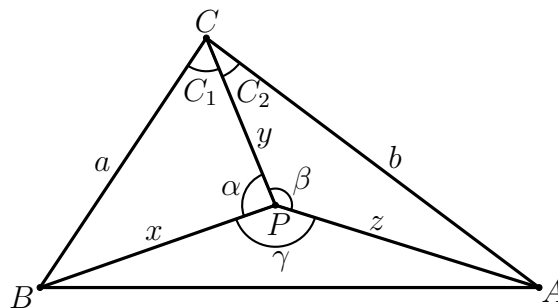
Tehát az $a_1, a_2, \dots, a_{2023}$ számok nem lehetnek mind páratlanok.

(1 pont)

■

6. feladat (10 pont). Legyen P az ABC hegyesszögű háromszög egy belső pontja. Jelöljük rendre a PB , PC és PA szakaszok hosszát x , y és z -vel, a $\widehat{BPC}$, $\widehat{CPA}$ és $\widehat{APB}$ szögek mértékét α , β és γ -val. Igazold, hogy $(x \cos \alpha - y)(z \cos \beta - y)$ kifejezés értéke akkor maximális, ha P a C -ből húzott szögfelezőn helyezkedik el!

Mészár Julianna, Nagyszalonta és Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad



Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Bevezetjük az $BC = a$, $AC = b$, $\widehat{PCB} = \widehat{C}_1$ és $\widehat{ACP} = \widehat{C}_2$ jelöléseket. A PBC és PAC háromszögekben a koszinusz tételt alkalmazva felírhatjuk, hogy $\cos \alpha = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{2xy}$ és $\cos \beta = \frac{y^2 + z^2 - b^2}{2yz}$.

(1 pont)

Innen

$$\begin{aligned}(x \cos \alpha - y)(z \cos \beta - y) &= \left(x \cdot \frac{x^2 + y^2 - a^2}{2xy} - y \right) \cdot \left(z \cdot \frac{y^2 + z^2 - b^2}{2yz} - y \right) \\ &= \frac{x^2 - y^2 - a^2}{2y} \cdot \frac{z^2 - y^2 - b^2}{2y}.\end{aligned}\quad (2 \text{ pont})$$

A PBC és ABC háromszögekben a koszinusz tétel alapján $\cos \widehat{C}_1 = \frac{a^2 + y^2 - x^2}{2ay}$ és $\cos \widehat{C}_2 = \frac{y^2 + b^2 - z^2}{2by}$.
(1 pont)

Tehát

$$\begin{aligned}(x \cos \alpha - y)(z \cos \beta - y) &= \frac{-2ay \cos \widehat{C}_1}{2y} \cdot \frac{-2by \cos \widehat{C}_2}{2y} = ab \cos \widehat{C}_1 \cdot \cos \widehat{C}_2 \quad (2 \text{ pont}) \\ &= \frac{1}{2}ab \left(\cos(\widehat{C}_1 + \widehat{C}_2) + \cos(\widehat{C}_1 - \widehat{C}_2) \right) \\ &= \frac{1}{2}ab \left(\cos \widehat{C} + \cos(\widehat{C}_1 - \widehat{C}_2) \right).\end{aligned}\quad (2 \text{ pont})$$

Mivel a koszinusz függvény csökkenő a $[0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon, ez a kifejezés pontosan akkor lesz maximális, ha $\cos(\widehat{C}_1 - \widehat{C}_2) = 1$, vagyis $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$, tehát CP az $\widehat{ACB}$ szögfelezője. (1 pont)

■