

IV. országos magyar matematikaolimpia

XXXI. EMMV

országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

V. osztály

1. feladat. Egy zeneiskolában az egyik osztály minden diákját tanítják zongorázni és hegedülni is, még hozzá úgy, hogy a tanár egyszerre mindig csak egy diáknak tart órát. Az osztály fel van osztva A és B csoportokra. Az A csoportba tartozó diákok mindegyike hetente 5 hegedűórára és 2 zongoraórára, a B csoportban lévők pedig 3 hegedűórára és 4 zongoraórára járnak. Így az osztály diákjai hetente 63 hegedűórán és 56 zongoraórán vesznek részt.

- a) Határozd meg, hogy hány diák van az osztályban!
- b) Határozd meg az A , illetve B csoportban lévő diákok számát!

2. feladat. a) Határozd meg azt a legkisebb m természetes számot, amelynek pontosan 2022 természetes osztója van!

- b) Igazold, hogy az $n = 2^{336} \cdot 3^2 \cdot 5$ szám osztóinak összege osztható 78-cal!

3. feladat. Gombóc Artúr gazdag nagybácsija egy játékra hívja Artúrt és barátait. A játékosok kapnak egy-egy belépőt a játékba, amellyel majd elnyerhetik a nagybácsi 2022 aranyérméből álló vagyonát, vagy annak egy részét. A játék folyamán, minden kör elején, mindenki akinek van belépője sorra elvesz egy-egy aranyérmét a gazdag nagybácsitól. Ezután a nagybácsi véletlenszerűen elveszi valamelyik játékos belépőjét, aki ezáltal kiesik a játékból, majd egy új kör kezdődik. A játék addig folytatódik, ameddig mindegyik játékos el nem veszíti a belépőjét, vagy a nagybácsi ki nem fogja az aranyérmékből.

a) Határozd meg, hogy legtöbb hány belépőt oszthat ki a nagybácsi úgy, hogy biztos maradjon neki is aranyérméje a játék végére!

b) Gombóc Artúrnak a nagynénije is rendelkezik 2022 aranyérmével és megszervez ő is egy hasonló játékot, annyi különbséggel, hogy ő körönként két játékosnak veszi el a belépőjét, vagy az utolsó egynek. Határozd meg, hogy a nagynéni legtöbb hány belépőt oszthat ki úgy, hogy a játék végére biztosan ne fogyjon ki az aranyérmékből!

4. feladat. Az A és B város távolsága 60 km. A két várost egy kétirányú egyenes út köti össze. Ezen az úton egyszerre indul egy-egy felügyelő járőr egymással szemben azonos sebességgel. Velük egy időben a félúton levő C pontból is elindul egy járőr az egyik város felé, ugyanolyan sebességgel, mint az előző kettő. A járőrökre az a szabály vonatkozik, hogy egyenletes sebességgel kell haladniuk és ha összehaladnak egy másik járőrrel, akkor mindkettő visszafordul és tovább folytatja a járőrözést. Ha valamelyik járőr visszaér az A vagy a B városba, akkor szintén visszafordul és folytatja az útját.

a) Igazold, hogy van olyan t időpont, amelyben minden járőr visszakerült abba a pontba, amelyikből indult. Határozd meg az ilyen t időpontokat (a kezdéshes viszonyítva), ha a járőrök sebessége 5 km/h!

b) Igazold, hogy az előbbi állítás akkor is igaz, ha a C -ben lévő járőr helyett két másikat indítunk: az egyiket az A -tól 20 km-re levő D pontból, a másikat az A -tól 40 km-re levő E pontból, tetszőlegesen vagy az A , vagy a B irányába!

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 3 óra.

IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

VI. osztály

1. feladat. Határozd meg, minden alpont esetén, azokat az $\overline{abc}$ alakú természetes számokat, amelyekre teljesül az adott feltétel:

- a) $abc = 24$;
- b) $(a + 1)(b + 2)(c + 3) = 1320$;
- c) $\frac{a}{b + c} = \frac{b}{c + a} = \frac{c}{a + b}$.

2. feladat. A számjegyek közül nyolcat felhasználva, mindegyiket csak egyszer, alkotunk négy darab kétjegyű számot. Ezek mindegyikének fordítottja is kétjegyű szám. A négy szám és fordítottjainak összege egy olyan szám, melynek 37-tel való osztási maradéka 11. Mely számjegyeket nem használtuk fel?

3. feladat. Adottak a síkban az $\widehat{AOB} = 50^\circ$ és $\widehat{COD} = 120^\circ$ szögek, amelyeknek a szögfelezői egy egyenesen vannak.

- a) Határozd meg a $\widehat{BOC}$ és $\widehat{AOD}$ szögek mértékét! Hány eset lehetséges?
- b) Számítsd ki a $\widehat{BOC}$ és $\widehat{AOD}$ szögek szögfelezői által bezárt szög mértékét!

4. feladat. Az erdei tisztáson húsvét reggelén az ötven tagú nyuszicsapat 50 darab sorba állított tojásautomatát talált. Mindegyik automata a tojásokat piros–sárga–zöld–kék–piros–sárga–zöld–kék–piros–... sorrendben adagolja (a tojások színei ebben a sorrendben ismétlődnek és mindegyik automatában az első tojás piros). A nyuszi egymásután feltöltik a puttonyaikat és indulnak a gyerekekhez: az első nyuszi mindegyik automatából kivesz egy-egy tojást; a második nyuszi a második automatával kezdődően minden másodikból egyet-egyet; a harmadik a harmadik automatával kezdődően minden harmadikból egyet-egyet, és így tovább. Így az utolsó nyuszi csak az ötvenedik automatából vesz ki egy tojást.

- a) Összesen hány tojást szereztek be a nyuszi az automatákból?
- b) Az első nyuszi után leghamarabb melyik nyuszi fog piros tojást kivenni?
- c) A nyuszi hány automatából vettek ki páratlan számú tojást?

IV. országos magyar matematikaolimpia

XXXI. EMMV

országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

VII. osztály

1. feladat. Egy kutyakiállításon 3 vizslát, 4 pulit és 5 kuvaszt mutattak be.

a) Az első nap minden jelenlevő néző szavazott minden fajtából *pontosan* egy kutyára. Legtöbb néző vett részt a kiállítás első napján, ha tudjuk, hogy a szavazatok között nem volt két egyforma?

b) A második nap minden jelenlevő néző csak a pulik közül szavazott legalább egyre. Legtöbb néző vett részt a kiállítás második napján, ha tudjuk, hogy a szavazatok között nem volt két egyforma?

c) A harmadik nap minden jelenlevő néző szavazott minden fajtából *legalább* egy kutyára. Legtöbb néző vett részt a kiállítás harmadik napján, ha tudjuk, hogy a szavazatok között nem volt két egyforma?

2. feladat. Az ABC háromszög BC oldalán felvesszük az E pontot. Legyen F az AB oldal belső pontja úgy, hogy az EF szakasz a háromszög területét két egyenlő részre osztja, valamint M a BC szakasz felezőpontja.

a) Igazold, hogy M a B és E pontok között van!

b) Igazold, hogy az $AEMF$ négyszög trapéz!

3. feladat. Az ABC egyenlő oldalú háromszög BC oldala egy O középpontú körnek egy húrja. Az O pont a háromszög belsejében található. Az AB és AC oldalak pedig a nagyobbik BC körívet az E és D pontokban metszik. Jelöljük M -mel, N -nel és P -vel az O pontnak az AB , BC és AC oldalakra húzott merőlegesek talppontját! Tudjuk, hogy $BC = 12$ cm és $OM = 4ON$.

a) Számítsd ki a kör középpontjának az ABC háromszög oldalaitól való távolságát!

b) Igazold, hogy $AE = EM = MB$.

c) Bizonyítsd be, hogy $\frac{T_{MNP}}{T_{ABC}} = \frac{2}{9}$.

4. feladat. Egy gazdának van három juhásza, amelyek a gazda juhait minden reggel egy-egy nyájban terelik ki a legelőre, majd este egy-egy nyájban haza. Tereléskor bármelyik juh bármelyik nyájba kerülhet. Egyik este a juhászok beszélgetnek és a következőket állapítják meg:

- az aznap reggeli kitereléskor a nyájakban lévő juhok számait növekvő sorrendbe rendezve az 5, 6 és 7 számokkal egyenesen arányos számokat kaptak;
- az aznap esti hazatereléskor a nyájakban lévő juhok számait növekvő sorrendbe rendezve a 4, 5 és 6 számokkal egyenesen arányos számokat kaptak;
- az egyik juhász este 12 juhval többet terelt haza, mint amennyit kihajtott reggel.

a) Igazold, hogy a gazda juhainak száma osztható 90-nel!

b) Hány juh volt aznap reggel a kihajtott nyájakban külön-külön? Hát este a hazahajtottakban?

IV. országos magyar matematikaolimpia

XXXI. EMMV

országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

VIII. osztály

1. feladat. Péternek és Jánosnak összesen 40 kisautója van. Mindketten ráírják az összes saját autójukra a szerencseszámukat. A János autóin levő számok összege kétszer nagyobb, mint a Péter autóin található számok összege. Ha Jánosnak annyi autója lenne, mint amennyi Péternek van, akkor az autóin található számok összege 36-tal kevesebb lenne, mint amennyi a Péter autóira írt számok összege. Ha Péternek lenne annyi autója, mint amennyi Jánosnak van, akkor a Péter autóin levő számok összege 84-gyel lenne több, mint amennyi a János autóin szereplő számok összege. Hány autójuk van a fiúknak külön-külön és mennyi a szerencseszámuk?

2. feladat. Az $ABCD A'B'C'D'$ kockában E az AD' , F az AB' , G a $B'C$ és H a $D'C$ szakasz felezőpontja. Igazold, hogy

- az $ACB'D'$ szabályos tetraéder;
- az E , F , G és H pontok egy síkban vannak, és négyzetet alkotnak;
- az $EFGH$ négyzet középpontja egybeesik a kocka középpontjával!

3. feladat. Az $ABCDEFGH$ téglatestben $AB = 20$ cm, $BC = 15$ cm és $AE = 12\sqrt{3}$ cm.

- Számítsd ki az E pont távolságát a BD egyenestől!
- Határozd meg az (EBD) és (FDB) síkok által meghatározott szög mértékét!
- Ha M és N a CD , illetve CG élek felezőpontjai, akkor számítsd ki az M pont távolságát az (NDB) síktól!

4. feladat. Adottak az $a < b < c$ prímszámok, amelyekre $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq 335$.

- Igazold, hogy $6 \leq \sqrt{a+6} - \sqrt{8a} + \sqrt{b+12} - \sqrt{12b} + \sqrt{c+6} - \sqrt{20c} < 337$.
- Határozd meg az a, b, c számok értékét úgy, hogy

$$\frac{2022}{\sqrt{a+6} - \sqrt{8a} + \sqrt{b+12} - \sqrt{12b} + \sqrt{c+6} - \sqrt{20c}} \in \mathbb{N}.$$

IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20-23.

IX. osztály – I. forduló

1. feladat. Határozd meg azokat az x, y, z és t valós számokat, amelyekre

$$2x^2 + 5y^2 + 4z^2 + t^2 - 6xy - 2yz - 2zt - 2t + 2 = 0.$$

2. feladat. Igazold, hogy ha $a, b, c > 0$ és $a \cdot b \cdot c = 1$, akkor

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{b^3 + c^3 + 1} + \frac{1}{c^3 + a^3 + 1} \leq 1.$$

3. feladat. Legyen G az ABC általános háromszög súlypontja, B' és C' pedig rendre a B és a C csúcsból kiinduló szögfelező talppontja. Igazold, hogy ha a B', G és C' pontok kollineárisak, akkor $\frac{1}{BC} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}$.

4. feladat. Adott az $ABCD$ négyzet. Felvesszük az E pontot az AC szakaszon, valamint az F pontot az AC egyenesen a négyzet külső tartományában úgy, hogy $AE = CF = AB$. Legyen a BE egyenes és a DC szakasz metszéspontja M , a BE egyenes és az AD egyenes metszéspontja N , valamint a CN egyenes és a DF egyenes metszéspontja P . Igazold, hogy az A, M és P pontok kollineárisak.

**IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.**

X. osztály – I. forduló

1. feladat. Oldd meg a valós számok halmazán az

$$x^2 - 5x - 18 = 2(x - 3)\sqrt{x - 2}$$

egyenletet!

2. feladat.

- a) Tanulmányozd az $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x - 2^x$ függvény monotonitását!
- b) Oldd meg a természetes számok halmazán a

$$3^{3^x} \cdot 2^{2^x} - 3^{2^x} \cdot 2^{3^x} = x \cdot 6^{2^x}$$

egyenletet!

3. feladat. A z_1, z_2, z_3 komplex számokra teljesülnek a következő összefüggések:

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| \quad \text{és} \quad z_1 + \sqrt{3}z_2 + 2z_3 = 0.$$

Igazold, hogy $z_1 + z_0 \cdot z_2 + z_3 = 0$, ahol $z_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$.

4. feladat. Adott az $f: \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+2}{2x-1}$ függvény. Az f_{n+1} függvényt a következőképpen értelmezzük: $f_1 = f$ és $f_{n+1} = f \circ f_n$, minden $n \geq 1$ esetén. Igazold, hogy az f_n értelmezett az $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ halmazon, bármilyen $n \in \mathbb{N}^*$ esetén és határozd meg az f_n függvényt!

IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

XI. osztály – I. forduló

1. feladat. Az $(x_n)_{n \geq 1}$ sorozat esetén $x_1 \geq 1$ és $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ -ra.

- a) Határozd meg a sorozat általános tagjának képletét, ha $x_1 = 2$.
- b) Bizonyítsd be, hogy minden $x_1 \geq 1$ kezdőérték esetén a sorozat konvergens és határértéke 1.
- c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1)$ határértéket!

2. feladat. Adott az $A = \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ mátrix.

- a) Határozd meg az A^n mátrixot, ahol $n \in \mathbb{N}^*$.
- b) Adott az $f: \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{4}\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{4}\}$, $f(x) = \frac{9x-7}{8x-6}$ függvény és legyen $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\text{-szer}}$. Határozd meg az f_{2022} függvényt!

3. feladat. Legyen $\mathcal{A}$ azoknak az $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixoknak a halmaza, amelyek esetén $\det A = 1$, illetve $\det(A^4 + A^2 + I_2) = 1$.

- a) Határozd meg a $\mathcal{T} = \{\text{tr}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ halmazt, ahol $\text{tr}(A)$ az A mátrix főátlón levő elemeinek összegét jelöli!
- b) Határozd meg a $\mathcal{D} = \{\det(A + A^{-1}) \mid A \in \mathcal{A}\}$ halmazt!

4. feladat. Az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ és $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozatokat az

$$x_n = (45 + \sqrt{2022})^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

illetve

$$y_n = (45 - \sqrt{2022})^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

képletekkel értelmeztük.

- a) Igazold, hogy $x_n + y_n \in \mathbb{N}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén!
- b) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\}^{\frac{x_n}{3^n}}$ határértéket, ahol $\{a\}$ az a valós szám törtrészét jelöli!

IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

XII. osztály – I. forduló

1. feladat. Adott a $G = (-2022, 2022)$ halmaz és az

$$x * y = \frac{2022^2(x + y)}{2022^2 + xy}, \quad \forall x, y \in G$$

művelet.

a) Igazold, hogy $(G, *)$ csoport és az $f: (G, *) \rightarrow (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$,

$$f(x) = \frac{2022 - x}{2022 + x}$$

függvény csoportizomorfizmus!

b) Számítsd ki tetszőleges $n \geq 2$ természetes szám esetén a

$$\frac{2022}{7} * \frac{2022}{17} * \cdots * \frac{2022}{2n^2 - 1}$$

kifejezés értékét!

2. feladat. Határozd meg az $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sin x \cdot (3 - \sin 2x)}$$

függvény primitívjeit!

3. feladat. Határozd meg azokat az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, melyeknek létezik $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ primitív függvényük úgy, hogy $[f(x)] - \{f(x)\} = F(x)$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén, ahol $[a]$ az a valós szám egészrészét, $\{a\}$ pedig a tört részét jelöli!

4. feladat. Legyen $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan primitív függvénnel rendelkező függvény, amelynek valamely $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ primitívjére a $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} tF\left(\frac{1}{t}\right)$ határérték véges. Jelöljük ezt a határértéket

L -el. Bizonyítsd be, hogy a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

függvénynek pontosan akkor létezik primitív függvénye, ha $c = L$.

IV. országos magyar matematikaolimpia

XXXI. EMMV

országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

V. osztály

1. feladat (10 pont). Egy zeneiskolában az egyik osztály minden diákját tanítják zongorázni és hegedülni is, még hozzá úgy, hogy a tanár egyszerre mindig csak egy diáknak tart órát. Az osztály fel van osztva A és B csoportokra. Az A csoportba tartozó diákok mindegyike hetente 5 hegedűórára és 2 zongoraórára, a B csoportban lévők pedig 3 hegedűórára és 4 zongoraórára járnak. Így az osztály diákjai hetente 63 hegedűórán és 56 zongoraórán vesznek részt.

- a) Határozd meg, hogy hány diák van az osztályban!
- b) Határozd meg az A , illetve B csoportban lévő diákok számát!

Simon József, Csíkszereda

Megoldás.

a) Az osztály diákjai összesen $63 + 56 = 119$ órára járnak. (2 pont)
Mindegyik tanulónak összesen 7 zongora- és hegedűórája van egy héten. (1 pont)
Így az osztálynak $119 : 7 = 17$ diákja van. (1 pont)

b) Feltételezzük, hogy minden diák az A csoportba tartozik. Ekkor összesen $17 \cdot 5 = 85$ hegedűórájuk lenne. (1 pont)

Ez $85 - 63 = 22$ órával több, mint ahány hegedűórájuk van összesen. (1 pont)

Ha egy diák nem az A , hanem a B csoportba járna, az $5 - 3 = 2$ hegedűórával jelentene kevesebbet. (1 pont)

Tehát a B csoportba $22 : 2 = 11$ diák tartozik, (1 pont)

az A csoportba pedig $17 - 11 = 6$ diák van. (1 pont)

Hivatalból (1 pont)



2. feladat (10 pont). a) Határozd meg azt a legkisebb m természetes számot, amelynek pontosan 2022 természetes osztója van!

- b) Igazold, hogy az $n = 2^{336} \cdot 3^2 \cdot 5$ szám osztóinak összege osztható 78-cal!

Mátyás Beáta, Szatmárnémeti

Megoldás.

- a) Ha az m szám prímszámhatványokra való felbontása

$$m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

alakú, akkor m -nek pontosan $(1 + \alpha_1) \cdot (1 + \alpha_2) \cdot \dots \cdot (1 + \alpha_k)$ darab osztója van. Tehát az m számnak akkor van pontosan 2022 osztója, ha $(1 + \alpha_1) \cdot (1 + \alpha_2) \cdot \dots \cdot (1 + \alpha_k) = 2022$. (1 pont)

Ez alapján a 2022-t fel kell bontanunk az összes lehetséges módon szorzótényezőkre. Minden egyes

felbontásban, ha a tényezőkből kivonunk 1-et, megkapjuk a lehetséges $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ kitevőket.

A 2022 prímtényező felbontása $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$. (1 pont)

A keresett számok tehát

$$p_1^{2021}, p_1 \cdot p_2^{3 \cdot 337 - 1}, p_1^2 \cdot p_2^{2 \cdot 337 - 1}, p_1^5 \cdot p_2^{336}, p_1 \cdot p_2^2 \cdot p_3^{336}$$

alakúak, ahol p_1, p_2, p_3 különböző prímszámok. (1 pont)

Mivel a legkisebb természetes számot keressük, ezért a nagyobb hatványkitevőkhöz válasszuk a kisebb prímtényezőket, kezdve a legkisebb prímszámokkal, tehát a jelöltjeink az

$$x = 2^{2021}, y = 2^{1010} \cdot 3, z = 2^{673} \cdot 3^2, u = 2^{336} \cdot 3^5, v = 2^{336} \cdot 3^2 \cdot 5$$

természetes számok. (1 pont)

Ezután rendre összehasonlítjuk a számokat, hogy megkapjuk a legkisebbet. Sorra végezhetjük a következő összehasonlításokat:

$$\begin{aligned} x = 2^{2021} &= 2^{1010} \cdot 2^{1011} &>& 2^{1010} \cdot 3 = y, \\ y = 2^{1010} \cdot 3 &= 2^{673} \cdot 2^{337} \cdot 3 &>& 2^{673} \cdot 3 \cdot 3 = z, \\ z = 2^{673} \cdot 3^2 &= 2^{337} \cdot 2^{336} \cdot 3^2 &>& 2^{337} \cdot 3^3 \cdot 3^2 = u, \\ u = 2^{336} \cdot 3^5 &= 2^{336} \cdot 3^2 \cdot 3^3 &>& 2^{336} \cdot 3^2 \cdot 5 = v. \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

Ezek alapján a keresett természetes szám az $m = v = 2^{336} \cdot 3^2 \cdot 5$. (1 pont)

b) Az n szám minden osztója felírható $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ alakban, ahol az a, b, c természetes számokra igaz, hogy $a \leq 336, b \leq 2$ és $c \leq 1$. (1 pont)

Ha az n osztóinak összegét D -vel jelöljük, akkor az összeadandókat az előbbi megjegyzés alapján a következő módon csoportosíthatjuk:

$$\begin{aligned} D &= 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{336} + 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + 3 \cdot 2^{336} \\ &\quad + 3^2 + 3^2 \cdot 2 + 3^2 \cdot 2^2 + \dots + 3^2 \cdot 2^{336} + 5 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 2^2 + \dots + 5 \cdot 2^{336} \\ &\quad + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \cdot 2^2 + \dots + 3 \cdot 5 \cdot 2^{336} + 3^2 \cdot 5 + 3^2 \cdot 5 \cdot 2 + 3^2 \cdot 5 \cdot 2^2 + \dots + 3^2 \cdot 5 \cdot 2^{336}. \end{aligned}$$

Az $S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{336}$ jelölés bevezetésével az előző összefüggés átírható a

$$\begin{aligned} D &= S + 3 + 3 \cdot S + 3^2 \cdot S + 5 \cdot S + 3 \cdot 5 \cdot S + 3^2 \cdot 5 \cdot S \\ &= (1 + 3 + 3^2 + 5 + 3 \cdot 5 + 3^2 \cdot 5) S = 78S \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

alakba. A $D = 78 \cdot S$ szám osztható 78-cal, ezért az n szám osztóinak összege osztható 78-cal. (1 pont)

Hivatalból (1 pont) ■

3. feladat (10 pont). Gombóc Artúr gazdag nagybácsija egy játékra hívja Artúrt és barátait. A játékosok kapnak egy-egy belépőt a játékba, amellyel majd elnyerhetik a nagybácsi 2022 aranyérméből álló vagyonát, vagy annak egy részét. A játék folyamán, minden kör elején, mindenki akinek van belépője sorra elvesz egy-egy aranyérmét a gazdag nagybácsitól. Ezután a nagybácsi véletlenszerűen elveszi valamelyik játékos belépőjét, aki ezáltal kiesik a játékból, majd egy új kör kezdődik. A játék addig folytatódik, ameddig mindegyik játékos el nem veszíti a belépőjét, vagy a nagybácsi ki nem fogy az aranyérméből.

a) Határozd meg, hogy legtöbb hány belépőt oszthat ki a nagybácsi úgy, hogy biztos maradjon neki is aranyérméje a játék végére!

b) Gombóc Artúrnak a nagynénije is rendelkezik 2022 aranyérmével és megszervez ő is egy hasonló játékot, annyi különbséggel, hogy ő körönként két játékosnak veszi el a belépőjét, vagy az utolsó egynek. Határozd meg, hogy a nagynéni legtöbb hány belépőt oszthat ki úgy, hogy a játék végére biztosan ne fogyjon ki az aranyérmékből!

*Mastan Eliza, Máramaros
Baja Zsolt, Kolozsvár*

Megoldás.

a) Legyen a kiosztott belépők száma n . Ekkor a nagybácsitól az első körben elvesznek n érmét, a második körben $n-1$ -et, majd $n-2$ -t, és így tovább. A nagybácsi akkor nem fogy ki a pénzérmékből, ha az utolsó körben több, mint egy érméje van, ekkor elvesznek tőle 1 aranyérmét, majd ő elveszi az utolsó belépőt. Ebben az esetben a játék alatt a nagybácsitól összesen

$$n + n - 1 + n - 2 + \dots + 1 = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} \quad (1 \text{ pont})$$

aranyérmét vesznek el. A nagybácsinak kell pénze maradjon a játék után, ezért azt a legnagyobb n -et kell megkeresnünk amely teljesíti az

$$\frac{n \cdot (n + 1)}{2} < 2022,$$

egyenlőtlenséget.

(1 pont)

Mivel

$$\frac{63 \cdot 64}{2} = 2016 < 2022 \quad \text{és} \quad \frac{64 \cdot 65}{2} = 2080 > 2022, \quad (1 \text{ pont})$$

ezért a keresett n érték 63, vagyis a nagybácsi legtöbb 63 belépőt oszthat ki úgy, hogy még neki is maradjon az aranyérmékből a játék végén. (1 pont)

b) Jelöljük ismét n -el a játékosok számát. A nagynéni minden kör végén 2 belépőt vesz el, ezért Artúrék rendre $n, n-2, n-4, \dots$ aranyérmét tudnak elvenni és az utolsó körben még 1-et vagy 2-t, attól függően, hogy páros vagy páratlan a játékosok száma.

Tárgyaljunk az szerint, hogy n páros, vagy páratlan. Ha n páros, vagyis ha $n = 2k$, akkor Artúrék összesen

$$2k + 2k - 2 + \dots + 2 = 2(k + k - 1 + \dots + 1) = k \cdot (k + 1) \quad (1 \text{ pont})$$

darab aranyérmét nyernek el és a legnagyobb k természetes számot kell megkeressük, amelyre teljesül, hogy $k \cdot (k + 1) < 2022$. Mivel

$$44 \cdot 45 = 1980 < 2022 < 2070 = 45 \cdot 46,$$

ezért $k = 44$, vagyis legtöbb $2 \cdot 44 = 88$ darab belépőt tud kiosztani a nagynéni ebben az esetben.

(1 pont)

Ha n páratlan, vagyis ha $n = 2k - 1$, akkor a játékosok nyeresége összesen

$$2k - 1 + 2k - 3 + \dots + 3 + 1 = k^2 \quad (1 \text{ pont})$$

darab aranyérme. A célunk annak a legnagyobb k természetes számnak a megkeresése, amelyre teljesül, hogy $k^2 < 2022$. Mivel

$$44^2 = 1980 < 2022 < 2025 = 45^2,$$

ezért $k = 44$, vagyis ebben az esetben legtöbb $2 \cdot 44 - 1 = 87$ darab belépőt tud kiosztani a nagynéni. **(1 pont)**

A két esetet összesítve azt kapjuk, hogy a nagynéni legtöbb 88 belépőt oszthat ki, ha a játék végén nem szeretne érmék nélkül maradni. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

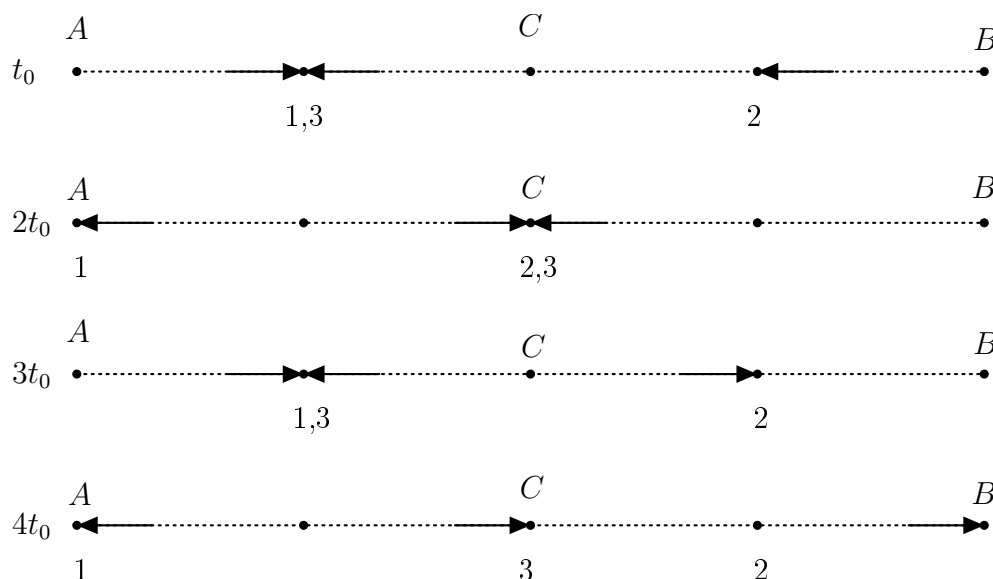
4. feladat (10 pont). Az A és B város távolsága 60 km. A két várost egy kétirányú egyenes út köti össze. Ezen az úton egyszerre indul egy-egy felügyelő járőr egymással szemben azonos sebességgel. Velük egy időben a félúton levő C pontból is elindul egy járőr az egyik város felé, ugyanolyan sebességgel, mint az előző kettő. A járőrökre az a szabály vonatkozik, hogy egyenletes sebességgel kell haladniuk és ha összetalálkoznak egy másik járőrrel, akkor mindkettő visszafordul és tovább folytatja a járőrözést. Ha valamelyik járőr visszaér az A vagy a B városba, akkor szintén visszafordul és folytatja az útját.

a) Igazold, hogy van olyan t időpont, amelyben minden járőr visszakerült abba a pontba, amelyből indult. Határozd meg az ilyen t időpontokat (a kezdéshes viszonyítva), ha a járőrök sebessége 5 km/h!

b) Igazold, hogy az előbbi állítás akkor is igaz, ha a C -ben lévő járőr helyett két másikat indítunk: az egyiket az A -tól 20 km-re levő D pontból, a másikat az A -tól 40 km-re levő E pontból, tetszőlegesen vagy az A , vagy a B irányába! *András Szilárd, Kolozsvár*

Megoldás.

a) A szimmetria miatt feltételezhetjük, hogy a C -ből az A felé indul a járőr. Jelöljük t_0 -val azt az időt, amennyi idő alatt a járőrök megtesznek 15 km távolságot ($t_0 = 3$ óra). Az alábbi ábrán azt láthatjuk, hogy a $t_0, 2t_0, 3t_0, 4t_0$ időpontokban hol vannak a járőrök. A nyílakra írt számok a járőrök sorszámát jelölik, 1-el az A -ból induló, 2-vel a B -ből induló és 3-mal a C -ből induló járőrt jelöltük.



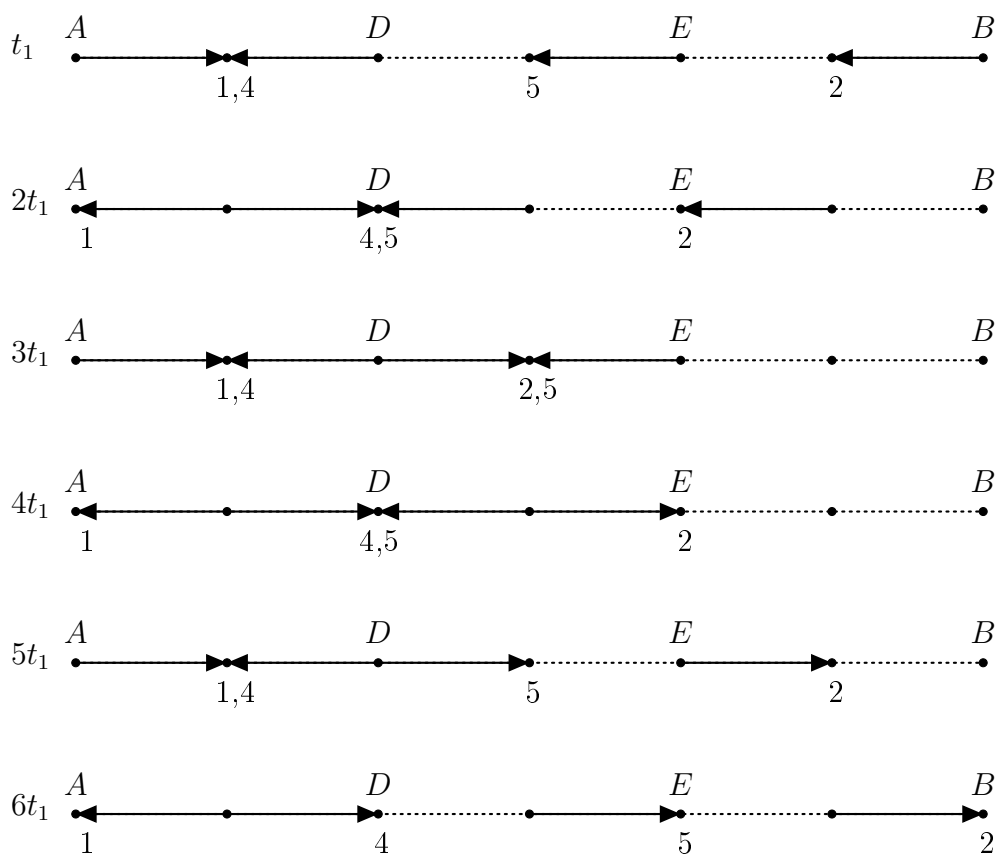
Látható, hogy $4t_0$ a legrövidebb idő, amely után minden járőr visszakerül a kiindulási helyére. A 3-as járőr ugyan a C -ben lesz, de B felé fog továbbhaladni, tehát további $4t_0$ idő múlva ismét a C -be kerül, de ezúttal az A felé fog tartani, vagyis ettől a pillanattól kezdve minden ismétlődik. (4 pont)

Megjegyzés. Az ábrán látható mindegyik állapot helyes feltűntetése egy pontot ér.

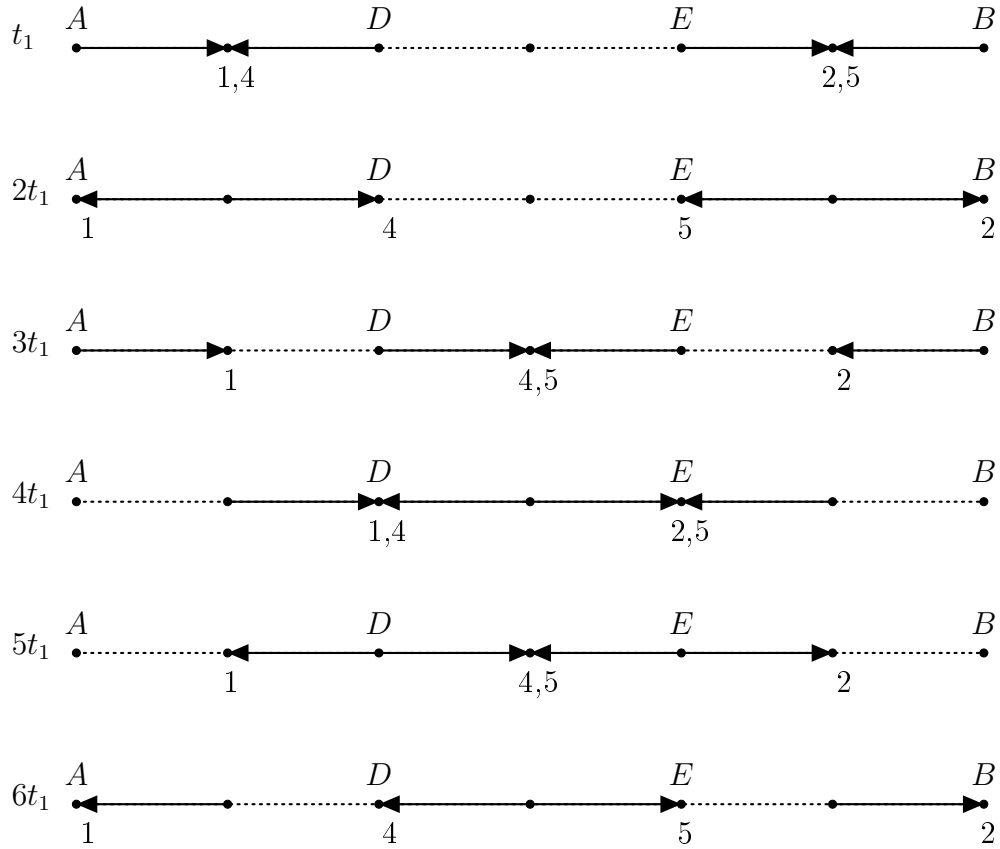
Ha a járőrök sebessége 5 km/h, akkor t_0 értéke 3 óra. Így a járőrök 12 óránként érkeznek vissza a kiindulási helyükre és 24 óránként ismétlődik a teljes folyamat. (1 pont)

b) Legyen a D -ből induló járőr sorszáma 4, az E -ből induló pedig 5. Mind a két járőr indulhat az A és B város felé is, vagyis $2 \cdot 2 = 4$ esetet kellene tárgyaljunk. Az a két eset, amikor mindkettő az A vagy mindkettő a B felé indul szimmetrikus, ezért elég egyiket tárgyalni. Jelöljük t_1 -el azt az időt, amennyi alatt a járőrök megtesznek 10 km távolságot ($t_1 = 2$ óra).

Ha mind a két új járőr egy irányba indul, akkor a szimmetria miatt ezt választhatjuk az A irányának. A következő ábra alapján $6t_1$ idő után mindegyik járőr visszakerül a helyére, viszont ezúttal az új járőrök a B irányába fognak tartani. Tehát $12t_1$ idő után mindenki visszakerül a kiinduló helyére, a kezdeti irányával és innen a folyamat ismétlődik. (1 pont)



A maradék két esetben a két új járőr különböző irányba indul kezdetben. Ha a 4-es számú járőr az A felé indul, akkor $2t_1$ idő után mindenki visszakerül a helyére, viszont a 4-es ezúttal a B felé fog menni, az 5-ös pedig az A felé. Ez pontosan a harmadik tárgyalandó eset kiinduló állapota, és innen $4t_1$ idő alatt visszajutnak a második eset kiinduló állapotába. Tehát mindkét esetben $6t_1$ idő alatt a járőrök visszajutnak a kiinduló helyükre a kiinduló menetirányukkal. (2 pont)



Összefoglalva legfeljebb $12t_1 = 24$ óra alatt mindenki visszakerül a kiindulási helyére.

(1 pont)

Hivatalból

(1 pont)



IV. országos magyar matematikaolimpia**XXXI. EMMV**

országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

VI. osztály

1. feladat (10 pont). Határozd meg, minden alpont esetén, azokat az $\overline{abc}$ alakú természetes számokat, amelyekre teljesül az adott feltétel:

a) $abc = 24$;

b) $(a+1)(b+2)(c+3) = 1320$;

c) $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$.

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. a) Mivel $abc = 24$, ezért írjuk fel 24-et, mint három számjegy szorzata, az összes lehetséges módon:

$$24 = 1 \cdot 3 \cdot 8 = 1 \cdot 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 4. \quad (2 \text{ pont})$$

Ha $abc = 1 \cdot 3 \cdot 8$, akkor $\overline{abc} \in \{138, 183, 318, 381, 813, 831\}$. (0.5 pont)Ha $abc = 1 \cdot 4 \cdot 6$, akkor $\overline{abc} \in \{146, 164, 416, 461, 614, 641\}$. (0.5 pont)Ha $abc = 2 \cdot 2 \cdot 6$, akkor $\overline{abc} \in \{226, 262, 622\}$. (0.5 pont)Ha $abc = 2 \cdot 3 \cdot 4$, akkor $\overline{abc} \in \{234, 243, 324, 342, 423, 432\}$. (0.5 pont)b) Az $(a+1)(b+2)(c+3)$ szorzat lehető legnagyobb értéke $(9+1)(9+2)(9+3) = 10 \cdot 11 \cdot 12 = 1320$. (1 pont)A feltétel szerint a szorzat 1320, ez pontosan akkor lehetséges ha $a = b = c = 9$. Tehát $\overline{abc} = 999$. (1 pont)

c) Az egyenlő arányok sorozatának tulajdonságai alapján írhatjuk, hogy

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{2a+2b+2c} = \frac{1}{2}. \quad (1 \text{ pont})$$

Átalakítva a fenti egyenleteket kapjuk, hogy

$$a = \frac{b+c}{2}, \quad b = \frac{c+a}{2}, \quad c = \frac{a+b}{2}.$$

Az első két összefüggés alapján

$$a = \frac{\frac{c+a}{2} + c}{2} = \frac{a+3c}{4}.$$

Keresztbe szorozva, következik, hogy $4a = a+3c$, azaz $3a = 3c$, vagyis $a = c$. Hasonlóan

$$b = \frac{\frac{a+b}{2} + a}{2} = \frac{b+3a}{4},$$

azaz $4b = b+3a$, tehát $a = b$. Összegezve $a = b = c$. (1 pont)Tehát $\overline{abc} \in \{111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999\}$. (1 pont)

Hivatalból (1 pont)



Megjegyzés. Az a, b, c számjegyek egyenlőségét másképpen is lehet indokolni. Mivel $a = \frac{b+c}{2}$ ezért az a szám a b és c között helyezkedik el. Hasonlóan b az a és c között, illetve c az a és b között. Ez pontosan akkor lehetséges ha $a = b = c$.

2. feladat (10 pont). A számjegyek közül nyolcat felhasználva, mindegyiket csak egyszer, alkotunk négy darab kétjegyű számot. Ezek mindegyikének fordítottja is kétjegyű szám. A négy szám és fordítottjainak összege egy olyan szám, melynek 37-tel való osztási maradéka 11. Mely számjegyeket nem használtuk fel?
Zajzon Csaba, Barót

Megoldás. Az alkotott kétjegyű természetes szám nem kezdődhet 0-val, valamint az egyesek helyén sem lehet 0, mert akkor a fordított számok valamelyikének első számjegye 0 lenne. Ezért az egyik számjegy, amit nem használtunk fel a 0. (1 pont)

Jelölje a négy számot $\overline{ab}, \overline{cd}, \overline{ef}, \overline{gh}$. Ekkor a fordítottjaik $\overline{ba}, \overline{dc}, \overline{fe}, \overline{hg}$. Ha S -sel jelöljük a nyolc szám összegét, akkor

$$S = \overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ef} + \overline{gh} + \overline{ba} + \overline{dc} + \overline{fe} + \overline{hg}. \quad (1 \text{ pont})$$

A számok 10-es alapú számrendszerben vannak, ezért

$$\begin{aligned} S &= 10a + b + 10c + d + 10e + f + 10g + h + 10b + a + 10d + c + 10f + e + 10h + g \\ &= 11a + 11b + 11c + 11d + 11e + 11f + 11g + 11h \\ &= 11(a + b + c + d + e + f + g + h) \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

A feltétel szerint $S = 37k + 11$, ahol k egy természetes szám, (1 pont)
vagyis $S - 11 = 37k$. (1 pont)

Ekkor

$$11(a + b + c + d + e + f + g + h - 1) = 37k.$$

Figyelembe véve, hogy 11 és 37 relatív prímek, kapjuk, hogy $(a + b + c + d + e + f + g + h - 1) : 37$. (1 pont)

Tudjuk, hogy

$$36 \leq a + b + c + d + e + f + g + h \leq 44, \quad (1 \text{ pont})$$

így $a + b + c + d + e + f + g + h - 1 = 37$, (1 pont)

azaz $a + b + c + d + e + f + g + h = 38$. A kilenc számjegy összege 45, tehát a hiányzó számjegy $45 - 38 = 7$. (1 pont)

Hivatalból (1 pont)

■

Második megoldás. Az első megoldást követjük addig, hogy $S = 37k + 11$, ahol k egy természetes szám. (4 pont)

Továbbá $S : 11$, vagyis $37k + 11 : 11$, tehát $37k : 11$. Figyelembe véve, hogy 11 és 37 relatív prímek, írhatjuk, hogy $k : 11$. (1 pont)

Tudjuk, hogy

$$1 + 2 + \dots + 8 \leq a + b + \dots + g \leq 2 + 3 + \dots + 9.$$

Beszorozva 11-gyel kapjuk, hogy

$$\frac{8 \cdot 9}{2} \cdot 11 \leq S \leq \left(\frac{9 \cdot 10}{2} - 1 \right) \cdot 11,$$

azaz $396 \leq S \leq 484$.

Innen következik, hogy

(1 pont)

$$\begin{aligned} 396 &\leq 37k + 11 \leq 484, \\ 385 &\leq 37k \leq 473, \\ 10 + \frac{15}{37} &\leq k \leq 12 + \frac{29}{37}, \end{aligned}$$

Tehát $k \in \{11, 12\}$. Figyelembe véve, hogy $k \nmid 11$, kapjuk, hogy $k = 11$.

(1 pont)

Következésképpen $S = 37 \cdot 11 + 11 = 38 \cdot 11$, ebből $a + b + c + d + e + f + g + h = 38$.

(1 pont)

A kilenc számjegy összege 45, így a hiányzó számjegy $45 - 38 = 7$.

(1 pont)

Hivatalból

(1 pont)



3. feladat (10 pont). Adottak a síkban az $\widehat{AOB} = 50^\circ$ és $\widehat{COD} = 120^\circ$ szögek, amelyeknek a szögfelezői egy egyenesen vannak.

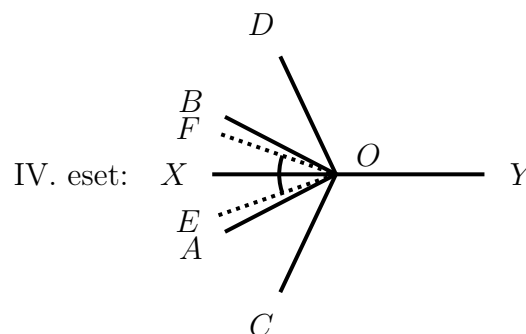
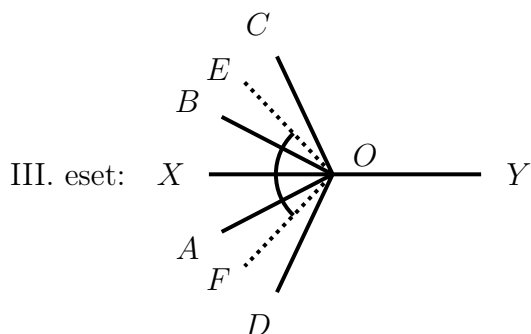
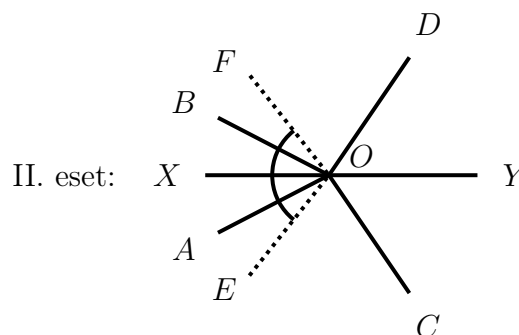
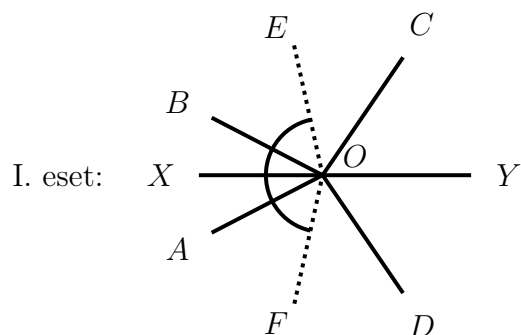
a) Határozd meg a $\widehat{BOC}$ és $\widehat{AOD}$ szögek mértékét! Hány eset lehetséges?

b) Számítsd ki a $\widehat{BOC}$ és $\widehat{AOD}$ szögek szögfelezői által bezárt szög mértékét!

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. Legyen OX az $\widehat{AOB}$ szögfelezője, és OY az ellentétes félegyenese. Ekkor két eset lehetséges: a $\widehat{COD}$ szögfelezője egybeesik OX -el, vagy OY -nal. Mindkét esetben a C pont az OX által meghatározott két félsík bármelyikében lehet: az A pontot tartalmazó félsíkban, vagy a B pontot tartalmazó félsíkban. Tehát összesen négy esetünk van (lásd az ábrát).

(1 pont)



Megjegyzés. Az XY egyenesre nézve az OA és OC szimmetrikusa rendre OB , valamint OD . Ezért $\widehat{BOC} = \widehat{AOD}$.

Legyen OE a $\widehat{BOC}$ szögfelezője, illetve OF az $\widehat{AOD}$ szögfelezője.

I. eset.

a) Feltétel szerint $\widehat{XOB} = 25^\circ$ és $\widehat{YOC} = 60^\circ$, ezért $\widehat{BOC} = 180^\circ - \widehat{YOC} - \widehat{BOC} = 95^\circ$; valamint $\widehat{AOD} = 95^\circ$. (1 pont)

b) Az ábra alapján $\widehat{EOF} = \widehat{EOB} + \widehat{BOA} + \widehat{AOF}$. Tudjuk, hogy $\widehat{EOB} = \widehat{AOF} = \widehat{BOC} : 2$. Tehát $\widehat{EOF} = 2(\widehat{BOC} : 2) + \widehat{AOB} = \widehat{BOC} + \widehat{AOB} = 145^\circ$. (1 pont)

II. eset.

a) Az ábra alapján $\widehat{BOC} = \widehat{AOB} + \widehat{AOC} = 145^\circ$; valamint $\widehat{AOD} = 145^\circ$. (1 pont)

b) Az ábra alapján $\widehat{EOF} = \widehat{AOF} + \widehat{BOE} - \widehat{AOB}$. Tudjuk, hogy $\widehat{AOF} = \widehat{BOE} = \widehat{BOC} : 2$. Tehát $\widehat{EOF} = 2(\widehat{BOC} : 2) - \widehat{AOB} = \widehat{BOC} - \widehat{AOB} = 95^\circ$. (1 pont)

III. eset.

a) Az ábra alapján $\widehat{BOC} = \widehat{XOC} - \widehat{XOB} = 35^\circ$; valamint $\widehat{AOD} = 35^\circ$. (1 pont)

b) Az ábra alapján $\widehat{EOF} = \widehat{EOB} + \widehat{BOA} + \widehat{AOF}$. Tudjuk, hogy $\widehat{EOB} = \widehat{AOF} = \widehat{BOC} : 2$. Tehát $\widehat{EOF} = 2(\widehat{BOC} : 2) + \widehat{AOB} = \widehat{BOC} + \widehat{AOB} = 85^\circ$. (1 pont)

IV. eset.

a) Az ábra alapján $\widehat{BOC} = \widehat{BOX} + \widehat{XOC} = 85^\circ$; valamint $\widehat{AOD} = 85^\circ$. (1 pont)

b) Az ábra alapján $\widehat{EOF} = \widehat{COD} - \widehat{FOD} - \widehat{COE}$. Tudjuk, hogy $\widehat{FOD} = \widehat{COE} = \widehat{BOC} : 2$. Tehát $\widehat{EOF} = \widehat{COD} - 2(\widehat{BOC} : 2) = \widehat{COD} - \widehat{BOC} = 35^\circ$. (1 pont)

Hivatalból (1 pont) ■

4. feladat (10 pont). Az erdei tisztáson húsvét reggelén az ötven tagú nyuszicsapat 50 darab sorba állított tojásautomatát talált. Mindegyik automata a tojásokat piros-sárga-zöld-kék-piros-sárga-zöld-kék-piros... sorrendben adagolja (a tojások színei ebben a sorrendben ismétlődnek és mindegyik automatában az első tojás piros). A nyuszik egymásután feltöltik a puttonyaikat és indulnak a gyerekekhez: az első nyuszi mindegyik automatából kivesz egy-egy tojást; a második nyuszi a második automatával kezdődően minden másodikból egyet-egyet; a harmadik a harmadik automatával kezdődően minden harmadikból egyet-egyet, és így tovább. Így az utolsó nyuszi csak az ötvenedik automatából vesz ki egy tojást.

- Összesen hány tojást szereztek be a nyuszik az automatákból?
- Az első nyuszi után leghamarabb melyik nyuszi fog piros tojást kivenni?
- A nyuszik hány automatából vettek ki páratlan számú tojást?

Hodgyai Edit, Micske
Zajzon Csaba, Barót

Megoldás. a) Az 1. nyuszi minden automatából kivesz egy-egy tojást, így 50 tojással távozik. A 2. nyuszi a második automatától számítva minden másodikból, vagyis a páros sorszámúakból vesz ki egy-egy tojást, így $50 : 2 = 25$ tojást szállít. A harmadik nyuszi a harmadik automatától kezdődően, minden harmadikból vesz ki tojást, azaz a három többszöröse sorszámú automatákból. A legnagyobb három többszörös, ami kisebb mint 50 a 48. Tehát $48 : 3 = 16$ darab három többszörös van 1-től 50-ig. Vagyis 16 tojást vesz ki a harmadik nyuszi. **(1 pont)**

A negyedik nyuszi a fenti gondolatmenet szerint 12 tojást kap. Hasonló gondolatmenet alapján kitölthetjük az alábbi táblázatot, ahol az első sor tartalmazza a nyuszik sorszámát, és alatta a második sor pedig általuk beszerzett tojások számát.

Nyuszi sorszám	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13–16	17–25	26–50
Tojások száma	50	25	16	12	10	8	7	6	5	5	4	4	3	2	1

(1 pont)

Így összesen

$$50 + 25 + 16 + 12 + 10 + 8 + 7 + 6 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 25 \cdot 1 = 207$$

tojást vittek el.

(1 pont)

b) Az első nyuszi után minden automata sárga tojást fog adni. A második nyuszi után a páros sorszámú automaták zöld színűt, míg a páratlan sorszámú automaták sárga tojást fognak adni.

(1 pont)

A harmadik nyuszi után az automatákban soron következő tojások színei rendje: sárga, zöld, zöld, zöld, sárga, kék, sárga, ... Vagyis minden hatodik automatában a soron következő tojás színe kék, az összes többiben sárga, vagy zöld.

A gondolatmenetet folytatva, a negyedik nyuszi után minden tizenkettedik automatában lesz a soron következő tojás piros, az összes többiben sárga, zöld vagy kék.

(1 pont)

Mivel 1 és 50 között nincs 5-tel és 12-vel egyszerre osztható szám, így az ötödik nyuszi biztosan nem vesz ki piros tojást. Tehát a hatodik nyuszi fog először piros tojást kivenni az első nyuszi után, mégpedig a 12-ik automatából.

(1 pont)

Második megoldás a b) alpontra. Piros tojás leghamarabb azokból az automatákból lesz kivehető, amelyekből már négy tojást kivettek. Ez leghamarabb az első négy nyuszi után történhet meg.

(1 pont)

Ezért nézzük meg hol lesznek piros tojások az első négy nyuszi után! Az első nyuszi kivesz minden automatából; a második nyuszi kivesz minden páros sorszámú automatából; a harmadik minden három többszörös sorszámú automatából; illetve a negyedik nyuszi minden négy többszörös sorszámú automatából. Így azoknak az automatáknak, amelyekből az első négy nyuszi tojást vett ki a sorszáma többszöröse kell legyen 1, 2, 3 és 4-nek. Ezen számok legkisebb közös többszöröse 12, azaz minden tizenkettedik automata ad piros tojást az első négy nyuszi után, és más nem.

(1 pont)

Az előző megoldás gondolatmenté alapján nem az ötödik, hanem a hatodik nyuszi fog először piros tojást kivenni az automatákból az első nyuszi után, mégpedig a 12-ik automatából.

(1 pont)

c) Egy automatából pontosan akkor vehet ki egy tojást egy adott nyuszi, ha annak a nyuszinak a sorszáma osztja az automata sorszámát. Tehát mindegyik automatából annyi tojás lesz kiszedve, ahány osztója van az illető sorszámának. Így a feladatunk az, hogy számoljuk meg, hogy 1 és 50 között hány számnak van páratlan sok osztója. **(1 pont)**

Ha n nem négyzetszám és d osztja az n -et, akkor $\frac{n}{d} \neq d$ is osztja az n -et, tehát az osztók párba állíthatók, és ezért páros sokan vannak.

Ha $n = k^2$ négyzetszám, akkor az előbbi gondolatnak megfelelően az n osztói közül mindegyiknek van párja, kivéve a k -t. Ez azt jelenti, hogy a négyzetszámoknak páratlan sok osztója van. **(1 pont)**

Összegezve, azon automatákból vettek ki páratlan sok tojást, amelyek sorszáma teljes négyzet. Egy és ötven között a teljes négyzetek 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49. Azaz hét darab automatából vettek ki páratlan sok tojást. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)** ■

IV. országos magyar matematikaolimpia

XXXI. EMMV

országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

VII. osztály

1. feladat (10 pont). Egy kutyakiállításon 3 vizslát, 4 pulit és 5 kuvaszt mutattak be.

a) Az első nap minden jelenlevő néző szavazott minden fajtából *pontosan* egy kutyára. Legtöbb hány néző vett részt a kiállítás első napján, ha tudjuk, hogy a szavazatok között nem volt két egyforma?

b) A második nap minden jelenlevő néző csak a pulik közül szavazott legalább egyre. Legtöbb hány néző vett részt a kiállítás második napján, ha tudjuk, hogy a szavazatok között nem volt két egyforma?

c) A harmadik nap minden jelenlevő néző szavazott minden fajtából *legalább* egy kutyára. Legtöbb hány néző vett részt a kiállítás harmadik napján, ha tudjuk, hogy a szavazatok között nem volt két egyforma?

Császár Sándor, Csíkszereda

Megoldás. a) A 4 puliből és 5 kuvaszból egyet-egyet $4 \cdot 5 = 20$ -féle módon választhatunk ki.

(2 pont)

A 20-féle módon kiválasztható puli és kuvasz mellé a három vizsla közül egyet választunk ki, így összesen $4 \cdot 5 \cdot 3 = 20 \cdot 3 = 60$ -féle puli, kuvasz, vizsla hármast választhatunk. Tehát legkevesebb 60 látogató lehetett az első napon.

(1 pont)

Megjegyzés. Ugyanerre az eredményre jutunk, ha másik két fajta kutyából indulunk ki.

b) Ha a pulikat 1-től 4-ig számozzuk, egy néző szavazata az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmaz egy nemüres részhalmazának felel meg. Az részhalmazok száma $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$, mivel bármelyik elem a négy közül egymástól függetlenül vagy benne van a részhalmazban vagy nincs. Emiatt az $\{1, 2, 3, 4\}$ nem üres részhalmazainak a száma $16 - 1 = 15$. Tehát legkevesebb 15 látogató lehetett a második napon.

(2 pont)

c) Az előző alponthoz hasonlóan egy szavazat egyértelműen megfelel három nem üres halmaznak, amelyekből az első a vizslák, a második a pulik, a harmadik a kuvaszok részhalmaza.

A vizsláknak $2^3 - 1 = 7$, a puliknak $2^4 - 1 = 15$, valamint a kuvaszoknak $2^5 - 1 = 31$ nem üres részhalmaza van. Így a lehetséges különböző szavazatok száma $7 \cdot 15 \cdot 31 = 3255$.

(3 pont)

Tehát a harmadik napon legkevesebb $7 \cdot 15 \cdot 31 = 3255$ lehetett a nézők száma.

(1 pont)

Hivatalból

(1 pont)



2. feladat (10 pont). Az ABC háromszög BC oldalán felvesszük az E pontot. Legyen F az AB oldal belső pontja úgy, hogy az EF szakasz a háromszög területét két egyenlő részre osztja, valamint M a BC szakasz felezőpontja.

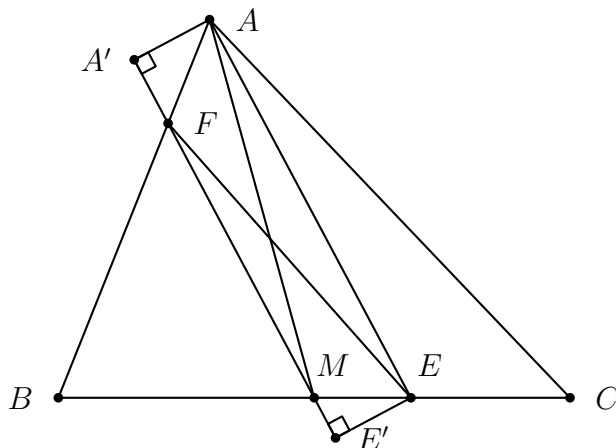
a) Igazold, hogy M a B és E pontok között van!

b) Igazold, hogy az $AEMF$ négyszög trapéz!

Szilágyi Zsolt, Kolozsvár

Megoldás. a) Az ábra elkészítése.

(1 pont)



A feltétel miatt $T_{EFB} = T_{EFAC} = \frac{1}{2}T_{ABC}$. Mivel M a BC felezőpontja, ezért $T_{ABM} = \frac{1}{2}T_{ABC}$. Az M pont a B és E pontok között van, mivel ellenkező esetben az EFB háromszög az ABM háromszög belsejében lenne, ami a $T_{EFB} < T_{ABM} = \frac{1}{2}T_{ABC}$ ellentmondáshoz vezetne. (1 pont)

b) Az EFB háromszög felbontható a BMF és MEF háromszögekre, ezért $T_{EFB} = T_{BMF} + T_{MEF} = \frac{1}{2}T_{ABC}$. (1 pont)

Az ABM háromszög is felbontható a BMF és AMF háromszögekre, ezért $T_{ABM} = T_{BMF} + T_{AMF} = \frac{1}{2}T_{ABC}$. (1 pont)

Ezek alapján kapjuk, hogy $T_{MEF} = T_{AMF}$. (1 pont)

Az AFM háromszögben legyen A' az A csúsból húzott magasság talppontja, tehát $AA' \perp FM$. Az EFM háromszögben legyen E' az E csúsból húzott magasság talppontja, tehát $EE' \perp FM$.

Mivel $T_{AMF} = \frac{1}{2} \cdot MF \cdot AA' = T_{EMF} = \frac{1}{2} \cdot MF \cdot EE'$, ezért $AA' = EE'$. (2 pont)

Mivel $AA' = EE'$ és $AA' \parallel EE'$, ezért $AA'E'E$ paralelogramma, ahonnan kapjuk, hogy $FM \parallel AE$, és így $AEMF$ trapéz. (2 pont)

Hivatalból

(1 pont) ■

3. feladat (10 pont). Az ABC egyenlő oldalú háromszög BC oldala egy O középpontú körnek egy húrja. Az O pont a háromszög belsejében található. Az AB és AC oldalak pedig a nagyobbik BC körívet az E és D pontokban metszik. Jelöljük M -mel, N -nel és P -vel az O pontnak az AB , BC és AC oldalakra húzott merőlegesek talppontját! Tudjuk, hogy $BC = 12$ cm és $OM = 4ON$.

a) Számítsd ki a kör középpontjának az ABC háromszög oldalaitól való távolságát!

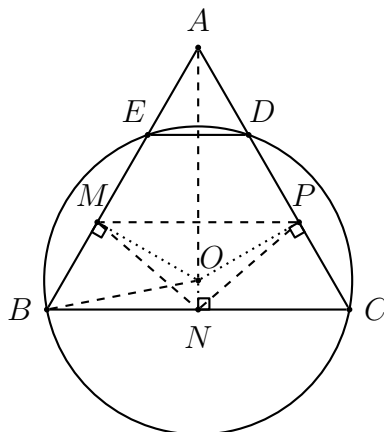
b) Igazold, hogy $AE = EM = MB$.

c) Bizonyítsd be, hogy $\frac{T_{MNP}}{T_{ABC}} = \frac{2}{9}$.

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. a) Az ábra elkészítése.

(1 pont)



A keresett távolságok az OM , ON és OP szakaszok hosszai. A BO és OC sugarak, így a BOC háromszög egyenlő szárú, amelyben az ON magasság egyben oldalfelező. A BC szakasz ON oldalfelező merőlegese áthalad az ABC egyenlő oldalú háromszög A csúcsán, ezért AN szögfelező is.

(1 pont)

Az AOM derékszögű háromszögben $\widehat{OAM} = 30^\circ$, ahonnan következik, hogy $AO = 2OM$. Tehát $AO = 8ON$, ezért $AN = 9ON$.

(1 pont)

Mivel az AN szakasz az ABC egyenlő oldalú háromszög magassága, ezért Pitagorász-tétele alapján $AN = BC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm. Így $9ON = 6\sqrt{3}$, vagyis $ON = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ cm, továbbá $OM = OP = \frac{8}{3}\sqrt{3}$ cm.

(1 pont)

b) Először kiszámítjuk a kör sugarát. Az OBN derékszögű háromszögben $OB^2 = ON^2 + BN^2$, ahonnan $OB = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 + 6^2} = \sqrt{\frac{4}{3} + 36} = \frac{4}{3}\sqrt{21}$ cm.

(1 pont)

A BOE egyenlő szárú háromszögben az OM magasság egyben oldalfelező is, ezért $BM = ME$. A BMO háromszögben az $\widehat{M}$ derékszög, így Pitagorász-tétel alapján $BM^2 = OB^2 - OM^2 = \left(\frac{4}{3}\sqrt{21}\right)^2 - \left(\frac{8}{3}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{16 \cdot 21}{9} - \frac{64 \cdot 3}{9} = \frac{16}{9}(21 - 12) = 16$, tehát $BM = 4$ cm. Így $ME = 4$ cm és $AE = 4$ cm, tehát $AE = EM = MB$.

(1 pont)

c) Mivel $BM = \frac{1}{3}AB$, ezért $T_{BMN} = \frac{1}{3}T_{BAN}$, de $T_{BAN} = \frac{1}{2}T_{ABC}$, így $T_{BMN} = \frac{1}{6}T_{ABC}$. Ugyanígy $T_{CNP} = \frac{1}{6}T_{ABC}$.

(1 pont)

Az $AP = \frac{2}{3}AC$, ezért $T_{ABP} = \frac{2}{3}T_{ABC}$ és $AM = \frac{2}{3}AB$, így $T_{AMP} = \frac{2}{3}T_{ABP} = \frac{4}{9}T_{ABC}$.

(1 pont)

Az előbbi összefüggések alapján

$$\begin{aligned} \frac{T_{MNP}}{T_{ABC}} &= \frac{T_{ABC} - T_{AMP} - T_{BMN} - T_{CNP}}{T_{ABC}} \\ &= 1 - \frac{T_{AMP}}{T_{ABC}} - \frac{T_{BMN}}{T_{ABC}} - \frac{T_{CNP}}{T_{ABC}} \\ &= 1 - \frac{4}{9} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

(1 pont)

Hivatalból

(1 pont)



A c) alpont második megoldása. Az $AMP_\Delta \sim ABC_\Delta$, a hasonlósági arány $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$, így $\frac{T_{AMP}}{T_{ABC}} = \frac{4}{9}$.

(1 pont)

Mivel $\frac{BM}{BA} = \frac{1}{3}$ és $\frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}$, így $\frac{T_{BMN}}{T_{ABC}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, ugyanígy $\frac{T_{CNP}}{T_{ABC}} = \frac{1}{6}$.

(1 pont)

Innen következik, hogy

$$\begin{aligned}\frac{T_{MNP}}{T_{ABC}} &= \frac{T_{ABC} - T_{AMP} - T_{BMN} - T_{CNP}}{T_{ABC}} \\ &= 1 - \frac{T_{AMP}}{T_{ABC}} - \frac{T_{BMN}}{T_{ABC}} - \frac{T_{CNP}}{T_{ABC}} \\ &= 1 - \frac{4}{9} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{9}.\end{aligned}\quad (1 \text{ pont})$$

■

4. feladat (10 pont). Egy gazdának van három juhásza, amelyek a gazda juhait minden reggel egy-egy nyájban terelik ki a legelőre, majd este egy-egy nyájban haza. Tereléskor bármelyik juh bármelyik nyájba kerülhet. Egyik este a juhászok beszélgetnek és a következőket állapítják meg:

- az aznap reggeli kitereléskor a nyájokban lévő juhok számait növekvő sorrendbe rendezve az 5, 6 és 7 számokkal egyenesen arányos számokat kaptak;
- az aznap esti hazatereléskor a nyájokban lévő juhok számait növekvő sorrendbe rendezve a 4, 5 és 6 számokkal egyenesen arányos számokat kaptak;
- az egyik juhász este 12 juhval többet terelt haza, mint amennyit kihajtott reggel.

a) Igazold, hogy a gazda juhainak száma osztható 90-nel!

b) Hány juh volt aznap reggel a kihajtott nyájokban külön-külön? Hát este a hazahajtottakban?

Csúszár Sándor, Csíkszereda

Megoldás. Legyen a , b és c a juhok száma reggel a három nyájban, növekvő sorrendben, illetve legyen $k = a + b + c$ az összes juh száma. Mivel a , b , c egyenesen arányos az 5, 6, 7 számokkal, ezért

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{k}{18},$$

ahonnan

$$a = \frac{5}{18}k, \quad b = \frac{6}{18}k, \quad c = \frac{7}{18}k. \quad (1 \text{ pont})$$

Legyen az esti nyájokban lévő juhok száma növekvő sorrendben x , y és z . Ezek egyenesen arányosak a 4, 5, 6 számokkal, tehát

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6} = \frac{k}{15},$$

ahonnan

$$x = \frac{4}{15}k, \quad y = \frac{5}{15}k, \quad z = \frac{6}{15}k. \quad (1 \text{ pont})$$

a) Mivel $\frac{k}{18}$ és $\frac{k}{15}$ egész számok kell legyenek, ezért k a 18 és 15 többszöröse, és így k osztható $[18, 15] = 90$ -nel. (1 pont)

b) Közös nevezőre hozva a korábban kapott kifejezéseket, írhatjuk hogy

$$a = \frac{25k}{90}, \quad b = \frac{30k}{90}, \quad c = \frac{35k}{90}, \quad x = \frac{24k}{90}, \quad y = \frac{30k}{90}, \quad z = \frac{36k}{90}.$$

Azt tudjuk, hogy az x , y , z számok közül valamelyik 12-nél nagyobb, mint az a , b , c valamelyike. Mivel $x < a < b < c$ és $y = b < c$ ezért négy esetet kell letárgyalnunk.

1. eset: $y = a + 12$. Azt kapjuk, hogy

$$\frac{30k}{90} = \frac{25k}{90} + 12,$$

ahonnan következik, hogy $k = 216$, ami nem osztható 90-nel, tehát ez az eset nem lehetséges.

(1 pont)

2. eset: $z = a + 12$. Ekkor

$$\frac{36k}{90} = \frac{25k}{90} + 12,$$

tehát $k = \frac{1080}{11}$. Mivel ez nem természetes szám, ez az eset sem állhat fent.

(1 pont)

3. eset: $z = b + 12$. Ekkor

$$\frac{36k}{90} = \frac{30k}{90} + 12,$$

innen $k = \frac{1080}{6} = 2 \cdot 90 = 180$. Ekkor $a = 50$, $b = 60$, $c = 70$ az eredeti nyájak juhainak száma, $x = 48$, $y = 60$, $z = 72$ az esti nyájak juhainak száma.

(2 pont)

4. eset: $z = c + 12$. Ekkor

$$\frac{36k}{90} = \frac{35k}{90} + 12,$$

ahonnan $k = 12 \cdot 90 = 1080$. Ekkor $a = 300$, $b = 360$, $c = 420$ az eredeti nyájak juhainak száma, $x = 288$, $y = 360$, $z = 432$ az esti nyájak juhainak száma.

(2 pont)

Hivatalból

(1 pont)



IV. országos magyar matematikaolimpia

XXXI. EMMV

országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

VIII. osztály

1. feladat (10 pont). Péternek és Jánosnak összesen 40 kisautója van. Mindketten ráírják az összes saját autójukra a szerencseszámukat. A János autóin levő számok összege kétszer nagyobb, mint a Péter autóin található számok összege. Ha Jánosnak annyi autója lenne, mint amennyi Péternek van, akkor az autóin található számok összege 36-tal kevesebb lenne, mint amennyi a Péter autóira írt számok összege. Ha Péternek lenne annyi autója, mint amennyi Jánosnak van, akkor a Péter autóin levő számok összege 84-gyel lenne több, mint amennyi a János autóin szereplő számok összege. Hány autójuk van a fiúknak külön-külön és mennyi a szerencseszámuk?

Császár Sándor, Csíkszereda

Első megoldás. Jelöljük x -szel a Péter és y -nal a János autóinak számát, illetve a -val a Péter és b -vel a János szerencseszámát. Péternek és Jánosnak összesen 40 kisautója van, ezért $x + y = 40$. A János autóin lévő számok összege $y \cdot b$, ez a szám kétszer nagyobb, mint a Péter autóin lévő számok összege, ami $x \cdot a$. Ezért

$$y \cdot b = 2 \cdot x \cdot a. \quad (2 \text{ pont})$$

Ha Jánosnak annyi autója lenne, mint amennyi Péternek van, akkor az autóin található számok összege 36-tal kevesebb lenne, mint amennyi a Péter autóin lévő számok összege, ezért

$$x \cdot b = x \cdot a - 36.$$

Ha Péternek lenne annyi autója, mint amennyi Jánosnak van, akkor a Péter kisautóin található számok összege 84-gyel lenne több, mint amennyi a János autóira írt számok összege, ezért

$$y \cdot a = y \cdot b + 84.$$

Az előbbi két összefüggés a következő egyenletrendszerhez vezet:

$$\begin{cases} x \cdot b - x \cdot a = -36 \\ y \cdot b - y \cdot a = -84. \end{cases} \quad (1 \text{ pont})$$

Összeadva a megfelelő oldalakat, a kapott összefüggést rendre az alábbi ekvivalens alakokba írhatjuk:

$$\begin{aligned} b \cdot (x + y) - a \cdot (x + y) &= -120, \\ (b - a)(x + y) &= -120. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $x + y = 40$, az utóbbi összefüggésből következik, hogy $a = b + 3$. (2 pont)

Az $a = (b + 3)$ -at behelyettesítve az $x \cdot b = x \cdot a - 36$ egyenlőségbe kapjuk, hogy

$$x \cdot b = x \cdot (b + 3) - 36,$$

vagyis $3x = 36$, ahonnan Péter kisautóinak a száma $x = 12$ és János kisautóinak a száma pedig $y = 40 - 12 = 28$. (2 pont)

Ezeket az értéket behelyettesítve az $y \cdot b = 2 \cdot x \cdot a = 2 \cdot x \cdot (b + 3)$ összefüggésbe, következik, hogy

$$28 \cdot b = 2 \cdot 12 \cdot (b + 3),$$

ahonnan $b = 18$. Tehát János szerencseszáma $b = 18$, Péteré pedig $a = b + 3 = 21$. (2 pont)

Hivatalból (1 pont)

■

Második megoldás. Az első megoldás gondolatmenetét követjük addig, ameddig eljutunk az alábbi összefüggésekig:

$$\begin{aligned} x + y &= 40, \\ y \cdot b &= 2 \cdot x \cdot a, \\ x \cdot (a - b) &= 36, \\ y \cdot (a - b) &= 84. \end{aligned} \quad (3 \text{ pont})$$

Ezek alapján $x, y, a - b \neq 0$. Elosztva az utolsó két összefüggés megfelelő oldalait, az

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{7} \quad (1 \text{ pont})$$

összefüggéshez jutunk. Innen származtatással következik, hogy $\frac{x+y}{y} = \frac{3+7}{7}$, vagyis $\frac{40}{y} = \frac{10}{7}$, ahonnan János autóinak a száma $y = 28$ és Péter autóinak a száma pedig $x = 40 - 28 = 12$. (3 pont)

A kapott értékeket behelyettesítve az $x \cdot (a - b) = 36$, illetve $y \cdot b = 2 \cdot x \cdot a$ egyenlőségekbe következik, hogy $a - b = 3$ és $7b = 6a$, ahonnan $\frac{b}{a} = \frac{6}{7}$ és származtatással kapjuk, hogy

$$\frac{b}{a - b} = \frac{6}{7 - 6}.$$

Innen következik, hogy $\frac{b}{3} = 6$, tehát János szerencseszáma $b = 18$ Péteré pedig $a = b + 3 = 21$.

(2 pont)

Hivatalból

(1 pont)

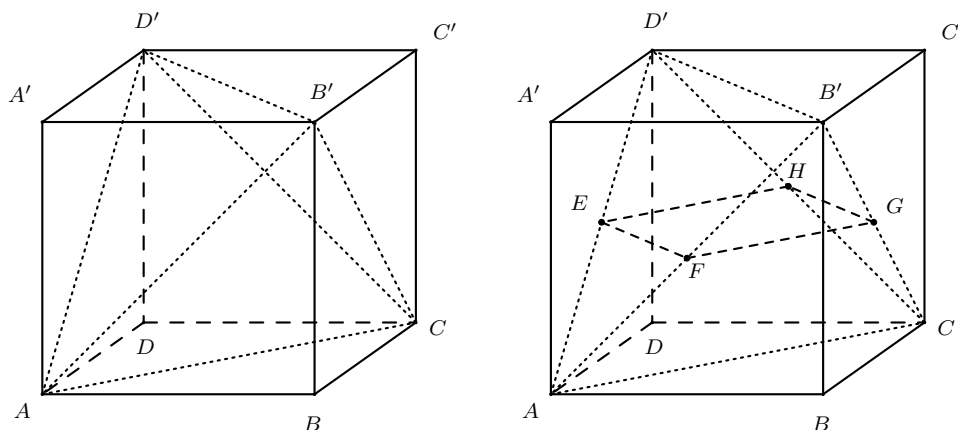
■

2. feladat (10 pont). Az $ABCD A' B' C' D'$ kockában E az AD' , F az AB' , G a $B'C$ és H a $D'C$ szakasz felezőpontja. Igazold, hogy

- a) az $ACB'D'$ szabályos tetraéder;
- b) az E, F, G és H pontok egy síkban vannak, és négyzetet alkotnak;
- c) az $EFGH$ négyzet középpontja egybeesik a kocka középpontjával!

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. a) A tetraéder minden éle a kocka valamelyik lapjának átlója, tehát a tetraéder összes éle kongruens, ezért az $ACB'D'$ szabályos tetraéder. (2 pont)



b) Az E és H pontok az $D'A$, illetve $D'C$ szakaszok felezőpontjai, ezért az EH szakasz a $D'AC$ háromszög középvonala, ahonnan $EH \parallel AC$ és $EH = \frac{1}{2}AC$. Az F és G pontok az $B'A$, illetve $B'C$ szakaszok felezőpontjai, ezért az FG szakasz a $B'AC$ háromszög középvonala, ahonnan $FG \parallel AC$ és $FG = \frac{1}{2}AC$. (1 pont)

Az $EH \parallel AC$ és $FG \parallel AC$ párhuzamosságok alapján $EH \parallel FG$, ezért az E, F, G, H pontok egy síkban vannak. (1 pont)

Mivel $EH \parallel FG$ és $EH = FG = \frac{1}{2}AC$, ezért az $EFGH$ négyszög paralelogramma. (1 pont)

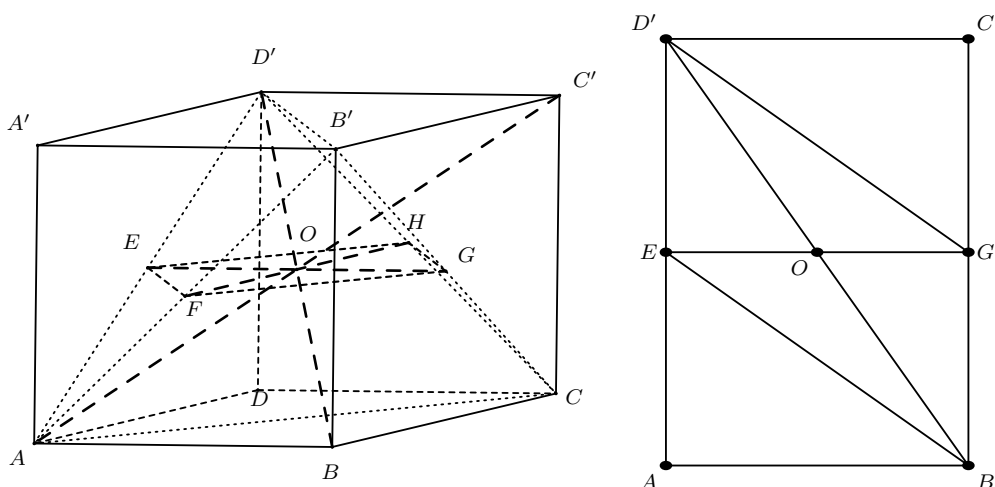
Hasonlóan EF és HG az $AD'B'$, illetve $CD'B'$ háromszögek középvonalai, ezért $EF = HG = \frac{1}{2}D'B'$. Az AC és $B'D'$ a kocka lapjainak átlói, ezért $AC = B'D'$. Tehát $FG = EF$, ezért $EFGH$ egy rombusz. (1 pont)

Az $AC \perp BD$ és $BD \parallel B'D' \parallel EF$, $AC \parallel FG$, ezért $EF \perp FG$, tehát $EFGH$ négyzet. (1 pont)

c) Jelölje O' az $EFGH$ négyzet középpontját, tehát $EG \cap FH = \{O'\}$, ahol O' az EG szakasz felezőpontja. (1 pont)

Az $ABC'D'$ paralelogrammában $BD' \cap AC' = \{O\}$, ahol O pont a kocka középpontja, tehát O felezi a $D'B$ szakaszt.

A $D'EBG$ paralelogrammában $D'B$ és EG átlók tehát felezik egymást, ahonnan az EG és $D'B$ felezőpontjai egybeesnek, tehát $O = O'$. (1 pont)



Hivatalból

(1 pont)



3. feladat (10 pont). Az $ABCDEFGH$ téglatestben $AB = 20$ cm, $BC = 15$ cm és $AE = 12\sqrt{3}$ cm.

- Számítsd ki az E pont távolságát a BD egyenestől!
- Határozd meg az (EBD) és (FDB) síkok által meghatározott szög mértékét!
- Ha M és N a CD , illetve CG élek felezőpontjai, akkor számítsd ki az M pont távolságát az (NDB) síktól!

Papp Ilonka, Brassó

Máthé Attila-István, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. a) Az (ABD) síkban legyen L az A pontból a BD egyenesre bocsájtott merőleges talppontja, azaz $L \in BD$ és $AL \perp BD$.

Az E pontra és az (ABD) síkban található BD egyenesre alkalmazzuk a három merőleges tételét: $EA \perp (ABD)$, $AL \perp BD$, $AL, BD \subset (ABD)$, ezért $EL \perp BD$, ahonnan az E pont távolsága a BD egyenestől $d(E, BD) = EL$. (1 pont)

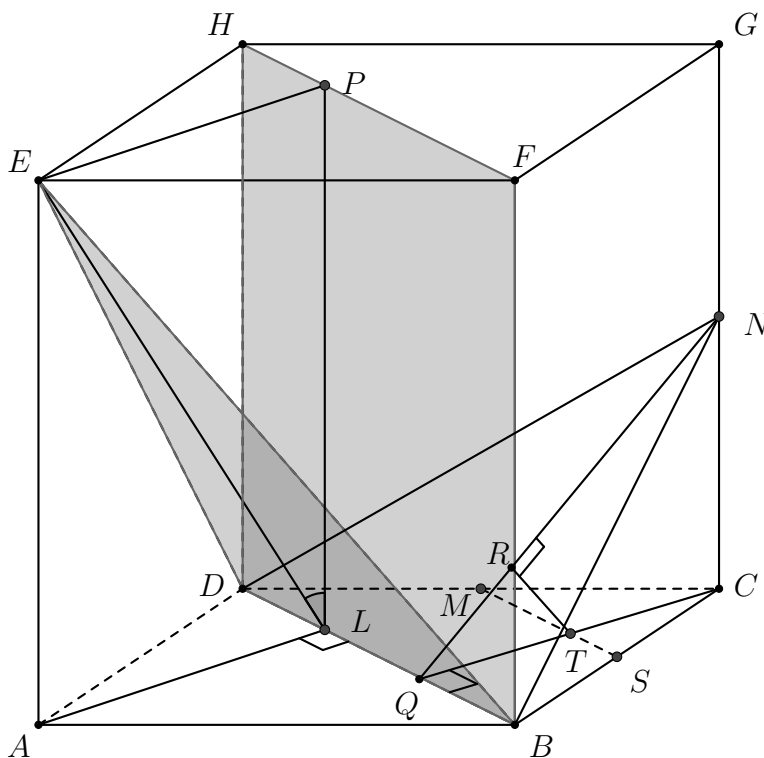
Az ABD háromszögben $\hat{A} = 90^\circ$, így Pitagorász tétele alapján $BD^2 = AB^2 + AD^2$, ahonnan $BD = 25$ cm. A fent említett háromszögben AL az átfogóhoz tartozó magasság, tehát $AL = \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12$ cm.

Az EAL háromszögben $\hat{A} = 90^\circ$, így Pitagorász tétele alapján $EL^2 = EA^2 + AL^2$, ahonnan

$$EL = \sqrt{(12\sqrt{3})^2 + 12^2} = 24 \text{ cm.}$$

Tehát az E pont távolsága a BD egyenestől $d(E, BD) = EL = 24$ cm.

(1 pont)



b) A $H \in (FDB)$ és $DBFH$ téglalap. Az L ponton keresztül a HD -vel párhuzamosan húzott egyenes a HF egyenest a P pontban metszi, azaz $PL \parallel HD$, $P \in HF$. Ekkor $PL \perp BD$.

Mivel az (EBD) és (FDB) síkok a BD egyenesben metszik egymást, az (EBD) sík EL egyenese merőleges a BD -re és az (FDB) sík PL egyenese merőleges a BD -re, ezért az (EBD) és (FDB) síkok hajlásszöge megegyezik az EL és PL egyenesek által bezárt szöggel, vagyis az $\widehat{ELP}$ -gel.

(2 pont)

Mivel $EALP$ téglalap, $\widehat{EPL} = 90^\circ$ és $PL = EA = 12\sqrt{3}$ cm, az EPL háromszögben $\hat{P} = 90^\circ$ és $PE = \frac{1}{2}EL = 12$ cm, így az $\widehat{ELP}$ mértéke 30° , tehát az (EBD) és (FDB) síkok hajlásszöge 30° .

(1 pont)

c) Az M ponton keresztül párhuzamost húzunk a BD egyenessel, amely a BC egyenest az S pontban metszi. Mivel $MS \parallel BD$ és $BD \subset (NDB)$, következik, hogy $MS \parallel (NDB)$. Legyen $Q \in BD$ pont úgy, hogy $CQ \perp BD$, a CQ az MS középvonalát a T pontban metszi, tehát T egyben a CQ szakasz felezőpontja is. A fentiek alapján $d(M, (NDB)) = d(T, (NDB))$.

(1 pont)

Az N pontra és a (DBC) síkban található BD egyenesre ($NC \perp (DBC)$, $CQ \perp BD$, $CQ, BD \subset (DBC)$) alkalmazva a három merőleges tételét kapjuk, hogy $NQ \perp BD$.

Felvesszük az $R \in NQ$ pontot úgy, hogy $TR \perp NQ$. Mivel $TR \perp NQ$, $NQ \perp BD$, $TQ \perp BD$ (mivel $CQ \perp BD$) a három merőleges (kiegészített) fordított tétele alapján $TR \perp (NDB)$, tehát a T pont távolsága az (NDB) síktól $d(T, (NDB)) = TR$.

(1 pont)

A QRT és QCN háromszögekben $\widehat{QRT} = \widehat{QCN} = 90^\circ$ és $\hat{Q}$ közös szög, ezért $QRT_\Delta \sim QCN_\Delta$, ahonnan $\frac{QT}{QN} = \frac{RT}{CN}$.

(1 pont)

Mivel $CQ = AL = 12$ cm és T a CQ szakasz felezőpontja, ezért $QT = TC = 6$ cm.

Az N a CG felezőpontja, így $CN = NG = 6\sqrt{3}$ cm. Az NCQ háromszögben $\hat{C} = 90^\circ$, Pitagorász tétele alapján $NQ^2 = NC^2 + CQ^2$, ahonnan $NQ = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 + 12^2} = 6\sqrt{7}$ cm.

A $\frac{QT}{QN} = \frac{RT}{CN}$ arányból kapjuk, hogy $\frac{6}{6\sqrt{7}} = \frac{RT}{6\sqrt{3}}$, következik, hogy $RT = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{6\sqrt{21}}{7}$ cm, a T pont távolsága az (NDB) síktól $d(T, (NDB)) = \frac{6\sqrt{21}}{7}$ cm, tehát $d(M, (NDB)) = \frac{6\sqrt{21}}{7}$ cm.

(1 pont)

Hivatalból

(1 pont)



4. feladat (10 pont). Adottak az $a < b < c$ prímszámok, amelyekre $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq 335$.

a) Igazold, hogy $6 \leq \sqrt{a+6-\sqrt{8a}} + \sqrt{b+12-\sqrt{12b}} + \sqrt{c+6-\sqrt{20c}} < 337$.

b) Határozd meg az a, b, c számok értékét úgy, hogy

$$\frac{2022}{\sqrt{a+6-\sqrt{8a}} + \sqrt{b+12-\sqrt{12b}} + \sqrt{c+6-\sqrt{20c}}} \in \mathbb{N}.$$

Mátéfi István, Marosvásárhely

Megoldás. a) Legyen $A = \sqrt{a+6-\sqrt{8a}} + \sqrt{b+12-\sqrt{12b}} + \sqrt{c+6-\sqrt{20c}}$.

A gyökökben teljes négyzeteket alakítunk ki, és kapjuk, hogy

$$\sqrt{a+6-\sqrt{8a}} = \sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{2})^2 + 4},$$

$$\sqrt{b+12-\sqrt{12b}} = \sqrt{(\sqrt{b}-\sqrt{3})^2 + 9},$$

$$\sqrt{c+6-\sqrt{20c}} = \sqrt{(\sqrt{c}-\sqrt{5})^2 + 1}.$$

(1 pont)

Ekkor

$$A = \sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{2})^2 + 4} + \sqrt{(\sqrt{b} - \sqrt{3})^2 + 9} + \sqrt{(\sqrt{c} - \sqrt{5})^2 + 1} \geq 2 + 3 + 1 = 6. \quad (1 \text{ pont})$$

A jobb oldali egyenlőtlenség igazolásához felhasználjuk a $\sqrt{x^2 + y^2} \leq x + y$ egyenlőtlenséget, amely teljesül minden $x, y \geq 0$ esetén. Mivel $a \geq 2$, $b \geq 3$ és $c \geq 5$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{2})^2 + 4} &\leq \sqrt{a} - \sqrt{2} + 2 < \sqrt{a} + 1, \\ \sqrt{(\sqrt{b} - \sqrt{3})^2 + 9} &\leq \sqrt{b} - \sqrt{3} + 3 < \sqrt{b} + 2, \\ \sqrt{(\sqrt{c} - \sqrt{5})^2 + 1} &\leq \sqrt{c} - \sqrt{5} + 1 < \sqrt{c} - 1. \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

Ahonnan összegzés után kapjuk, hogy $A < \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 2 \leq 337$, tehát $6 \leq A < 337$. (1 pont)

b) Az előző alponthan bevezetett jelölést felhasználva $\frac{2022}{A} \in \mathbb{N}$. Ez akkor és csakis akkor teljesül, ha $A \in \{1, 2, 3, 6, 337, 674, 1011, 2022\}$. (1 pont)

Tudjuk, hogy $6 \leq A < 337$, így $A = 6$, (1 pont)

vagyis

$$\sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{2})^2 + 4} + \sqrt{(\sqrt{b} - \sqrt{3})^2 + 9} + \sqrt{(\sqrt{c} - \sqrt{5})^2 + 1} = 2 + 3 + 1,$$

tehát

$$(\sqrt{a} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{b} - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{c} - \sqrt{5})^2 = 0,$$

amely pontosan akkor igaz, ha $a = 2, b = 3, c = 5$. (2 pont)

Hivatalból (1 pont)



IV. országos magyar matematikaolimpia XXXI. EMMV

országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

IX. osztály – I. forduló

1. feladat (10 pont). Határozd meg azokat az x, y, z és t valós számokat, amelyekre

$$2x^2 + 5y^2 + 4z^2 + t^2 - 6xy - 2yz - 2zt - 2t + 2 = 0.$$

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Megoldás. Az egyenlőség mindkét oldalát beszorozzuk 2-vel, majd megfelelően csoportosítva a tagokat teljes négyzeteket alakítunk ki:

$$4x^2 + 10y^2 + 8z^2 + 2t^2 - 12xy - 4yz - 4zt - 4t + 4 = 0, \quad (1 \text{ pont})$$

$$(4x^2 - 12xy + 9y^2) + (y^2 - 4yz + 4z^2) + (4z^2 - 4zt + t^2) + (t^2 - 4t + 4) = 0,$$

$$(2x - 3y)^2 + (y - 2z)^2 + (2z - t)^2 + (t - 2)^2 = 0. \quad (4 \text{ pont})$$

A teljes négyzetek összege akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha minden tag nulla, vagyis

$$(2x - 3y)^2 = 0, \quad (y - 2z)^2 = 0, \quad (2z - t)^2 = 0 \quad \text{és} \quad (t - 2)^2 = 0, \quad (1 \text{ pont})$$

innen pedig $2x = 3y$, $y = 2z$, $2z = t$ és $t = 2$. (1 pont)

Ezért $t = 2$, $z = 1$, $y = 2$ és $x = 3$ az egyetlen valós számokból álló megoldás. (2 pont)

Hivatalból (1 pont)



2. feladat (10 pont). Igazold, hogy ha $a, b, c > 0$ és $a \cdot b \cdot c = 1$, akkor

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{b^3 + c^3 + 1} + \frac{1}{c^3 + a^3 + 1} \leq 1.$$

(***)

Megoldás. Mivel $a^2 + b^2 \geq 2ab$, ezért

$$a^3 + b^3 + 1 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab) + abc \quad (3 \text{ pont})$$

$$\geq (a + b)ab + abc = (a + b + c)ab \quad (2 \text{ pont})$$

$$= \frac{a + b + c}{c}. \quad (1 \text{ pont})$$

Innen következik, hogy

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + 1} \leq \frac{c}{a + b + c}. \quad (1 \text{ pont})$$

Hasonlóan

$$\frac{1}{b^3 + c^3 + 1} \leq \frac{a}{a + b + c} \quad \text{és} \quad \frac{1}{c^3 + a^3 + 1} \leq \frac{b}{a + b + c}. \quad (1 \text{ pont})$$

A kapott három egyenlőtlenséget összegezve kapjuk, hogy

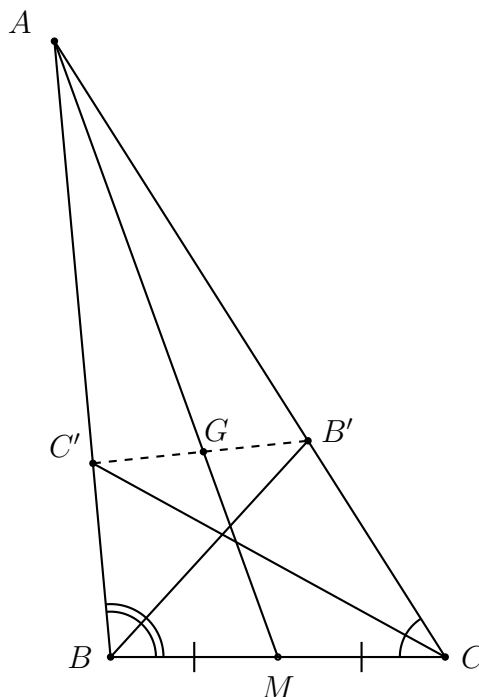
$$\frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{b^3 + c^3 + 1} + \frac{1}{c^3 + a^3 + 1} \leq \frac{a + b + c}{a + b + c} = 1. \quad (1 \text{ pont})$$

Hivatalból (1 pont)



3. feladat (10 pont). Legyen G az ABC általános háromszög súlypontja, B' és C' pedig rendre a B és a C csúsból kiinduló szögfelező talppontja. Igazold, hogy ha a B' , G és C' pontok kollineárisak, akkor $\frac{1}{BC} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}$. (***)

Első megoldás. Tekintsük a következő ábrát.



Legyen $AB = c$, $AC = b$ és $BC = a$.

Az ABC háromszögben a CC' -re felírt szögfelező tétel alapján

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{b}{a}, \quad \text{innen} \quad \frac{AC'}{AB} = \frac{b}{a+b}, \quad \text{vagyis} \quad \overrightarrow{AC'} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}. \quad (1 \text{ pont})$$

Hasonlóan a BB' -re felírt szögfelező tétel alapján

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{c}{a}, \quad \text{innen} \quad \frac{AB'}{AC} = \frac{c}{a+c}, \quad \text{vagyis} \quad \overrightarrow{AB'} = \frac{c}{a+c} \overrightarrow{AC}. \quad (1 \text{ pont})$$

Legyen M a BC oldal felezőpontja, ekkor

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \quad \text{és} \quad \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}). \quad (2 \text{ pont})$$

Írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GC'} &= \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{2b-a}{3(a+b)} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}, \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

és analóg módon

$$\overrightarrow{GB'} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{2c-a}{3(a+c)} \overrightarrow{AC}. \quad (1 \text{ pont})$$

A B' , G és C' pontok akkor és csak akkor kollineárisak, ha a $\overrightarrow{GB'}$ és $\overrightarrow{GC'}$ kollineáris, (1 pont)
vagyis ha

$$\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2b-a}{3(a+b)}} = \frac{\frac{2c-a}{3(a+c)}}{-\frac{1}{3}}.$$

A fenti egyenlőséget rendre az alábbi ekvivalens alakokba írhatjuk:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2b-a} &= \frac{2c-a}{a+c}, \\ (a+b)(a+c) &= (2b-a)(2c-a), \\ a^2 + ac + ab + bc &= 4bc - 2ab - 2ac + a^2, \\ 3ab + 3ac &= 3bc. \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

Elosztva mindkét oldalt $3abc$ -vel kapjuk, hogy

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a}, \quad \text{vagyis} \quad \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{BC}. \quad (1 \text{ pont})$$

Hivatalból

(1 pont) ■

Második megoldás. Az első megoldáshoz hasonlóan belátjuk, hogy

$$\overrightarrow{AC'} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AB'} = \frac{c}{a+c} \overrightarrow{AC} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}). \quad (4 \text{ pont})$$

A B' , G és C' pontok akkor és csak akkor kollineárisak, ha létezik $k \in \mathbb{R}$ úgy, hogy

$$\overrightarrow{AG} = k \overrightarrow{AB'} + (1-k) \overrightarrow{AC'}. \quad (1 \text{ pont})$$

Ez alapján

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = k \frac{c}{a+c} \overrightarrow{AC} + (1-k) \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}. \quad (1 \text{ pont})$$

Innen egyrészt $\frac{1}{3} = k \frac{c}{a+c}$, ahonnan $3k = \frac{a+c}{c} = 1 + \frac{a}{c}$, (1 pont)

másrészt $\frac{1}{3} = (1-k) \frac{b}{a+b}$, ahonnan $3 - 3k = \frac{a+b}{b}$, vagyis $3k = \frac{2b-a}{b} = 2 - \frac{a}{b}$. (1 pont)

Az előző összefüggések alapján

$$1 + \frac{a}{c} = 2 - \frac{a}{b},$$

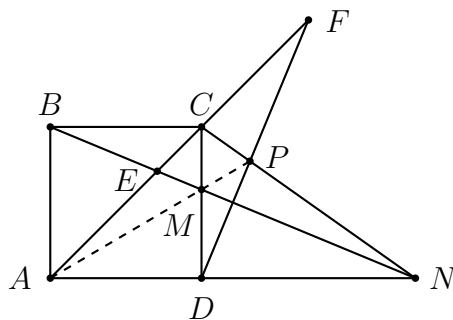
ahonnan $\frac{1}{c} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a}$, vagyis $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{BC}$. (1 pont)

Hivatalból

(1 pont) ■

4. feladat (10 pont). Adott az $ABCD$ négyzet. Felvesszük az E pontot az AC szakaszon, valamint az F pontot az AC egyenesen a négyzet külső tartományában úgy, hogy $AE = CF = AB$. Legyen a BE egyenes és a DC szakasz metszéspontja M , a BE egyenes és az AD egyenes metszéspontja N , valamint a CN egyenes és a DF egyenes metszéspontja P . Igazold, hogy az A , M és P pontok kollineárisak. (***)

Megoldás. Tekintsük a következő ábrát.



Az A , M és P pontok kollinearitása igazolható, ha alkalmazzuk a Meneláosz-tételt a DCF háromszögben az AP szelőre. Ehhez be kell látnunk, hogy

$$x = \frac{CA}{FA} \cdot \frac{FP}{DP} \cdot \frac{DM}{CM} = 1. \quad (1 \text{ pont})$$

Alkalmazva a Meneláosz-tételt a DAF háromszögben az N , P , C kollineáris pontokra kapjuk, hogy

$$\frac{AN}{DN} \cdot \frac{DP}{FP} \cdot \frac{FC}{AC} = 1, \quad (1 \text{ pont})$$

ahonnan következik, hogy

$$\frac{FP}{DP} = \frac{AN}{DN} \cdot \frac{CF}{AC}. \quad (1 \text{ pont})$$

Mivel $CD \parallel AB$, ezért a hasonlóság alaptétele szerint az ABN háromszög hasonló a DMN háromszöggel, ahonnan

$$\frac{AN}{DN} = \frac{AB}{DM}, \quad (1 \text{ pont})$$

valamint az ABE háromszög hasonló a CME háromszöggel, ahonnan

$$\frac{AB}{CM} = \frac{AE}{CE}. \quad (1 \text{ pont})$$

A fentiek alapján

$$x = \frac{AC}{AF} \cdot \left(\frac{AN}{DN} \cdot \frac{CF}{AC} \right) \cdot \frac{DM}{CM} = \frac{CF}{AF} \cdot \frac{AB}{DM} \cdot \frac{DM}{CM} = \frac{CF}{AF} \cdot \frac{AE}{CE}. \quad (1 \text{ pont})$$

Felhasználva, hogy $AB = AE = CF$, az $x = 1$ összefüggést rendre az alábbi ekvivalens alakokba írhatjuk:

$$\begin{aligned} AB^2 &= AF \cdot CE, \\ AB^2 &= (2 \cdot AE + CE) \cdot CE = 2 \cdot AE \cdot CE + CE^2, \\ 2AB^2 &= AE^2 + 2 \cdot AE \cdot CE + CE^2 = (AE + CE)^2 = AC^2, \\ AB\sqrt{2} &= AC, \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

ami igaz, mivel $ABCD$ négyzet.

Hivatalból

(2 pont)

(1 pont)



IV. országos magyar matematikaolimpia**XXXI. EMMV**

országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

X. osztály – I. forduló**1. feladat** (10 pont). Oldd meg a valós számok halmazán az

$$x^2 - 5x - 18 = 2(x - 3)\sqrt{x - 2}$$

egyenletet!

*Kovács Béla, Szatmárnémeti**Megoldás.* Az egyenletben megjelenő kifejezések akkor értelmezettek, ha $x \in [2, \infty)$.

Rendre az alábbi ekvivalens átalakításokat végezhetjük el:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 + x - 2 - 25 &= 2(x - 3)\sqrt{x - 2}, \\ (x - 3)^2 - 2(x - 3)\sqrt{x - 2} + x - 2 &= 25, \\ (x - 3 - \sqrt{x - 2})^2 &= 25. \end{aligned} \quad (4 \text{ pont})$$

Két esetünk van:

$$x - 3 - \sqrt{x - 2} = -5 \quad \text{vagy} \quad x - 3 - \sqrt{x - 2} = 5.$$

Az első esetben az alábbi ekvivalens egyenletekhez jutunk:

$$\begin{aligned} x + 2 &= \sqrt{x - 2}, \\ x^2 + 4x + 4 &= x - 2, \\ x^2 + 3x + 6 &= 0. \end{aligned}$$

A kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa kisebb, mint nulla, emiatt nincs valós megoldása.

(2 pont)A második esetben azt kapjuk, hogy $x - 8 = \sqrt{x - 2}$. Mivel $\sqrt{x - 2} \geq 0$, ezért $x - 8 \geq 0$, vagyis $x \geq 8$. Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve rendre kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (x - 8)^2 &= x - 2, \\ x^2 - 17x + 66 &= 0. \end{aligned}$$

A kapott másodfokú egyenletnek két valós gyöke van: $x_1 = 6$ és $x_2 = 11$. Az $x \geq 8$ feltétel miatt viszont csak a második gyök lesz az eredeti egyenletnek is a megoldása.A megoldáshalmaz tehát $M = \{11\}$.**(3 pont)**

Hivatalból

(1 pont)**2. feladat** (10 pont).a) Tanulmányozd az $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x - 2^x$ függvény monotonitását!

b) Oldd meg a természetes számok halmazán a

$$3^{3^x} \cdot 2^{2^x} - 3^{2^x} \cdot 2^{3^x} = x \cdot 6^{2^x}$$

egyenletet!

Dávid Géza, Székelyudvarhely

Megoldás.

a) Az $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény átírható az

$$f(x) = 3^x \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^x \right)$$

alakba.

Ha $0 \leq x_1 < x_2$, akkor $3^{x_1} < 3^{x_2}$ és $0 < \left(\frac{2}{3}\right)^{x_2} < \left(\frac{2}{3}\right)^{x_1} \leq 1$, tehát $0 \leq 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{x_1} < 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{x_2}$. Ezen egyenlőtlenségek alapján felírhatjuk, hogy

$$f(x_1) = 3^{x_1} \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{x_1} \right) < 3^{x_2} \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{x_2} \right) = f(x_2),$$

vagyis az f függvény szigorúan növekvő.

(2 pont)

b) Az egyenletet 6^x -nel elosztva a $3^{3^x-2^x} - 2^{3^x-2^x} = x$ vagyis az $f(f(x)) = x$ alakba írható.

(2 pont)

Az f szigorúan növekvő, ezért ha $x < f(x)$ akkor $x < f(x) < f(f(x))$. Hasonlóan, ha $x > f(x)$ akkor $x > f(x) > f(f(x))$. Összefoglalva, x pontosan akkor megoldása az egyenletnek, ha $f(x) = x$, vagyis, ha $3^x - 2^x = x$.

(2 pont)

Észrevesszük, hogy $x = 0$ és $x = 1$ megoldása az egyenletnek, és igazoljuk, hogy nincs több megoldás.

(1 pont)

A matematikai indukció módszerével igazoljuk, hogy ha $x \geq 2$ természetes szám, akkor $f(x) > x$. Ha $x = 2$, akkor $f(2) = 3^2 - 2^2 = 5 > 2$. Feltételezzük, hogy a kijelentés igaz $x = n$ -re és igazoljuk $x = n + 1$ -re. Tudjuk, hogy az f függvény szigorúan növekvő ezért $f(n + 1) > f(n)$. Az $f(n + 1)$ és $f(n)$ természetes számok, vagyis az előző egyenlőtlenség alapján $f(n + 1) \geq f(n) + 1$. Az indukciós feltételt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$f(n + 1) \geq f(n) + 1 > n + 1,$$

vagyis $f(x) > x$ bármilyen $x \geq 2$ természetes szám esetén.

Az egyenletnek tehát két természetes megoldása van a 0 és az 1.

(2 pont)

Hivatalból

(1 pont)



Megjegyzés. Az $x \geq 2$ természetes számok esetén az $f(x) > x$ kijelentés indukcióval igazolható az f monotonitásának felhasználása nélkül. Egy ekvivalens formába való átalakítással az $3^x > 2^x + x$ egyenlőtlenséget fogjuk igazolni, ami $x = 2$ -re igaz. Feltételezzük, hogy igaz $x = n$ -re és igazoljuk $x = n + 1$ -re. A $3^n > 2^n + n$ egyenlőtlenségből következik, hogy

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3 \cdot 2^n + 3 \cdot n > 2 \cdot 2^n + n + 1 = 2^{n+1} + n + 1,$$

bármilyen $n \geq 2$ természetes szám esetén, vagyis a matematikai indukció elve alapján igazoltuk az egyenlőtlenséget.

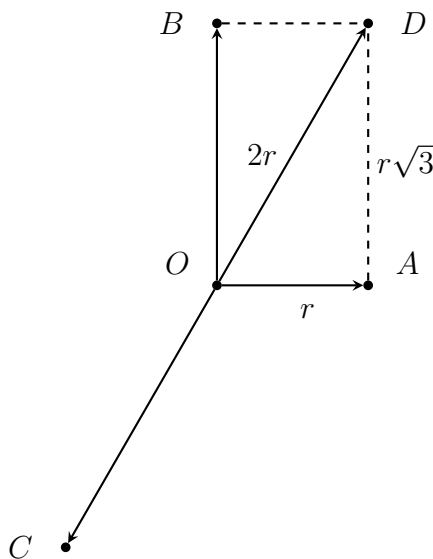
3. feladat (10 pont). A z_1, z_2, z_3 komplex számokra teljesülnek a következő összefüggések:

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| \quad \text{és} \quad z_1 + \sqrt{3}z_2 + 2z_3 = 0.$$

Igazold, hogy $z_1 + z_0 \cdot z_2 + z_3 = 0$, ahol $z_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$.

András Szilárd, Kolozsvár

Megoldás. Jelöljük r -el a z_1, z_2 és z_3 modulusát és értelmezzük geometriailag, hogy mit jelent a megadott feltétel (ehhez tekintsük a mellékelt ábrát).



Legyen O az origó, A a z_1 képe, B a $\sqrt{3}z_2$ képe és C a $2z_3$ képe. A z_1 és $\sqrt{3}z_2$ -re szerkesztett $OADB$ paralelogramma D csúcsa a C -nek az O pont szerinti szimmetrikusa. **(3 pont)**

Az OAD háromszögben $m(\widehat{ODA}) = 30^\circ$. **(1 pont)**

Ez alapján $m(\widehat{AOC}) = 120^\circ$, tehát $z_1 + z_3$ -nak az origó szerinti szimmetrikusa az OB -vel szintén 30° -os szöget zár be. **(2 pont)**

Emiatt $z_0 \cdot z_2$ épp a $z_1 + z_3$ képének O szerinti szimmetrikusa. **(3 pont)**

Hivatalból **(1 pont)** ■

4. feladat (10 pont). Adott az $f: \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+2}{2x-1}$ függvény. Az f_{n+1} függvényt a következőképpen értelmezzük: $f_1 = f$ és $f_{n+1} = f \circ f_n$, minden $n \geq 1$ esetén. Igazold, hogy az f_n értelmezett az $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ halmazon, bármilyen $n \in \mathbb{N}^*$ esetén és határozd meg az f_n függvényt!

Dávid Géza, Székelyudvarhely
Kaiser Dániel, Székelyudvarhely

Megoldás. Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}(x^2 + 2) + (2x - 1) &= (x + 1)^2, \\ (x^2 + 2) - 2(2x - 1) &= (x - 2)^2.\end{aligned}$$

Ez alapján

$$\begin{aligned}(x^2 + 2) &= \frac{2(x + 1)^2 + (x - 2)^2}{3}, \\ (2x - 1) &= \frac{(x + 1)^2 - (x - 2)^2}{3},\end{aligned}$$

vagyis

$$f_1(x) = \frac{2(x + 1)^2 + (x - 2)^2}{(x + 1)^2 - (x - 2)^2}. \quad \textbf{(3 pont)}$$

Teljesül, hogy

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{2(f_1(x) + 1)^2 + (f_1(x) - 2)^2}{(f_1(x) + 1)^2 - (f_1(x) - 2)^2} \\ &= \frac{2\left(\frac{2(x+1)^2+(x-2)^2}{(x+1)^2-(x-2)^2} + 1\right)^2 + \left(\frac{2(x+1)^2+(x-2)^2}{(x+1)^2-(x-2)^2} - 2\right)^2}{\left(\frac{2(x+1)^2+(x-2)^2}{(x+1)^2-(x-2)^2} + 1\right)^2 - \left(\frac{2(x+1)^2+(x-2)^2}{(x+1)^2-(x-2)^2} - 2\right)^2} \\ &= \frac{2(x+1)^4 + (x-2)^4}{(x+1)^4 - (x-2)^4}. \end{aligned}$$

A sejtésünk az, hogy

$$f_n(x) = \frac{2(x+1)^{2^n} + (x-2)^{2^n}}{(x+1)^{2^n} - (x-2)^{2^n}} \quad \text{és} \quad f_n(x) \neq \frac{1}{2},$$

minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ és $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, amit matematikai indukcióval igazolunk. **(2 pont)**

Az $n = 1$ és az $n = 2$ esetben a kijelentés igaz. Feltételezzük, hogy a kijelentés igaz n -re és igazoljuk $(n+1)$ -re. A következőket írhatjuk:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= f \circ f_n(x) = \frac{2(f_n(x) + 1)^2 + (f_n(x) - 2)^2}{(f_n(x) + 1)^2 - (f_n(x) - 2)^2} \\ &= \frac{2\left(\frac{2(x+1)^{2^n}+(x-2)^{2^n}}{(x+1)^{2^n}-(x-2)^{2^n}} + 1\right)^2 + \left(\frac{2(x+1)^{2^n}+(x-2)^{2^n}}{(x+1)^{2^n}-(x-2)^{2^n}} - 2\right)^2}{\left(\frac{2(x+1)^{2^n}+(x-2)^{2^n}}{(x+1)^{2^n}-(x-2)^{2^n}} + 1\right)^2 - \left(\frac{2(x+1)^{2^n}+(x-2)^{2^n}}{(x+1)^{2^n}-(x-2)^{2^n}} - 2\right)^2} \\ &= \frac{2(x+1)^{2^{n+1}} + (x-2)^{2^{n+1}}}{(x+1)^{2^{n+1}} - (x-2)^{2^{n+1}}}. \end{aligned} \quad \textbf{(2 pont)}$$

A fenti összetevés megvalósítható, mert $f_n(x) \neq \frac{1}{2}$, bármilyen $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ esetén. Valóban, ha létezik $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ úgy, hogy $f_n(x) = \frac{1}{2}$, akkor

$$\frac{2(x+1)^{2^n} + (x-2)^{2^n}}{(x+1)^{2^n} - (x-2)^{2^n}} = \frac{1}{2},$$

ahonnan $(x+1)^{2^n} + (x-2)^{2^n} = 0$, ami lehetetlen. **(1 pont)**

Ugyanakkor, ha $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, akkor f_{n+1} is értelmezett, mert $(x+1)^{2^{n+1}} \neq (x-2)^{2^{n+1}}$. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

összefüggés alapján az általános tag tetszőleges x_1 esetén felírható, hiszen

$$\frac{1}{x_n - 1} = \frac{1}{x_1 - 1} + n - 1,$$

tehát

$$x_n = 1 + \frac{1}{n - 1 + \frac{1}{x_1 - 1}}.$$

Természetesen az x_1 nem lehet $1 - \frac{1}{n-1}$ alakú, ahol $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Ugyanezt az eredményt kaptuk volna akkor is, ha a lineáris törttranszformációból származó rekurziók általános megoldási módszerét alkalmaztuk volna.

2. feladat (10 pont). Adott az $A = \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ mátrix.

a) Határozd meg az A^n mátrixot, ahol $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Adott az $f: \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{4}\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{4}\}$, $f(x) = \frac{9x-7}{8x-6}$ függvény és legyen $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\text{-szer}}$. Határozd meg az f_{2022} függvényt!

Bara Lajos, Zilah
Kocsis Attila, Déva

Megoldás. a) Legyen minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $A^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ u_n & v_n \end{pmatrix}$. Mivel

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ u_{n+1} & v_{n+1} \end{pmatrix} = A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ u_n & v_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x_n + 8y_n & -7x_n - 6y_n \\ 9u_n + 8v_n & -7u_n - 6v_n \end{pmatrix},$$

innen következik, hogy

$$\begin{cases} x_{n+1} = 9x_n + 8y_n \\ y_{n+1} = -7x_n - 6y_n \end{cases} \quad \text{és} \quad \begin{cases} u_{n+1} = 9u_n + 8v_n \\ v_{n+1} = -7u_n - 6v_n \end{cases} \quad (2 \text{ pont})$$

valamint tudjuk, hogy $x_1 = 9$, $y_1 = -7$, $u_1 = 8$ és $v_1 = -6$. Az első rendszer egyenleteinek megfelelő oldalait összeadva, következik, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$x_{n+1} + y_{n+1} = 2(x_n + y_n), \quad (1 \text{ pont})$$

tehát $x_n + y_n = 2^{n-1}(x_1 + y_1) = 2^n$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Felhasználva ezt az eredményt, írhatjuk, hogy minden $n \geq 1$ esetén

$$x_n = 9x_{n-1} + 8y_{n-1} = 9x_{n-1} + 8(2^{n-1} - x_{n-1}) = x_{n-1} + 2^{n-1}.$$

Összeadva ezeket az összefüggéseket $k = 2, 3, 4, \dots, n$ -re, azt kapjuk, hogy

$$x_n = x_1 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{n+2} = 9 + (2^{n+3} - 1) - 1 - 2 - 4 - 8 = 2^{n+3} - 7, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (2 \text{ pont})$$

Innen következik, hogy $y_n = -7 \cdot 2^n - 7$, $\forall n \geq 1$ és mivel az $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ és $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozatok is ugyanazt a rekurziórendszert teljesítik, mint az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, illetve az $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, csak más kezdeti értékekkel, analóg módon következik, hogy $u_n = 2^{n+3} - 8$, valamint $v_n = -7 \cdot 2^n + 8$ minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

(1 pont)

b) Az $f: \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ függvény homografikus (ha $ad - bc \neq 0$), és a hozzárendelt mátrixa az $M_f = A$. Tudjuk, hogy a homografikus függvények összetétele homografikus, és $M_{f \circ g} = M_f \cdot M_g$, tehát $M_{f^n} = (M_f)^n$. **(2 pont)**
Így az a) alpont alapján

$$M_{f^n} = A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+3} - 7 & -7(2^n - 1) \\ 8(2^n - 1) & 8 - 7 \cdot 2^n \end{pmatrix}, \quad \forall n \geq 1,$$

tehát

$$f_{2022}(x) = \frac{(2^{2025} - 7)x - 7(2^{2022} - 1)}{8(2^{2022} - 1)x + 8 - 7 \cdot 2^{2022}}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Hivatalból

(1 pont)

Második megoldás az a) alpontra. Az A mátrix karakterisztikus polinomja

$$p_A(x) = x^2 - \text{tr}(A)x + \det(A) = x^2 - 3x + 2,$$

amelynek a gyökei $x_1 = 1$ és $x_2 = 2$.

(1 pont)

Ezért a Cayley–Hamilton-tétel egyik következménye alapján léteznek a B és C mátrixok úgy, hogy

$$A^n = 1^n B + 2^n C, \quad \forall n \geq 1. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Meghatározzuk a B és C mátrixokat ebből az összefüggésből, felhasználva az $n = 1$ és $n = 2$ eseteket: mivel $A = B + 2C$ és $A^2 = B + 4C$, következik, hogy $2C = A^2 - A$, **(1 pont)**
ahonnan

$$C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 25 & -21 \\ 24 & -20 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad B = A - 2C = \begin{pmatrix} -7 & 7 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Tehát minden $n \geq 1$ esetén

$$A^n = \begin{pmatrix} -7 & 7 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+3} - 7 & -7(2^n - 1) \\ 8(2^n - 1) & 8 - 7 \cdot 2^n \end{pmatrix}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

3. feladat (10 pont). Legyen $\mathcal{A}$ azoknak az $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixoknak a halmaza, amelyek esetén $\det A = 1$, illetve $\det(A^4 + A^2 + I_2) = 1$.

a) Határozd meg a $\mathcal{T} = \{\text{tr}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ halmazt, ahol $\text{tr}(A)$ az A mátrix főátlón levő elemeinek összegét jelöli!

b) Határozd meg a $\mathcal{D} = \{\det(A + A^{-1}) \mid A \in \mathcal{A}\}$ halmazt!

Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. a) Észrevesszük, hogy $A^4 + A^2 + I_2 = A^4 + 2A^2 + I_2 - A^2 = (A^2 + I_2)^2 - A^2$ **(1 pont)**
A Cayley–Hamilton-tétel alapján a $\text{tr}(A) = t$ jelölést használva $A^2 - tA + \det A \cdot I_2 = O_2$, ahonnan azt kapjuk, hogy $A^2 + I_2 = tA$. **(2 pont)**

Ezt behelyettesítve az előző összefüggésbe, következik, hogy

$$A^4 + A^2 + I_2 = (tA)^2 - A^2 = (t^2 - 1)A^2. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Tehát a $\det(A^4 + A^2 + I_2) = 1$ egyenlőség egyenértékű azzal, hogy $(t^2 - 1)^2(\det A)^2 = 1$, ahonnan $(t^2 - 1)^2 = 1$, és így $t \in \{0, \pm\sqrt{2}\}$. **(1 pont)**

Belátható, hogy ha az A mátrix rendre a

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixok egyike, akkor egyrészt A teljesíti a feladat kijelentésében megadott feltételeket, másrészt pedig $\text{tr}(A)$ rendre 0 , $\sqrt{2}$, illetve $-\sqrt{2}$. Tehát $\mathcal{T} = \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$. **(1 pont)**

b) Írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \det(A + A^{-1}) &= \det(A + A^{-1}) \det A = \det((A + A^{-1})A) = \det(A^2 + I_2) \\ &= \det(tA) = t^2 \det A = t^2, \end{aligned} \quad \textbf{(2 pont)}$$

tehát $\det(A + A^{-1}) \in \{0, 2\}$. **(1 pont)**

Az a) alpont megoldásának a végén megadott A mátrixok esetén a $\det(A + A^{-1})$ felveszi a 0 -t és 2 -t. Tehát $\mathcal{D} = \{0, 2\}$.

Hivatalból **(1 pont)**

■

Második megoldás az a) alpontra. A Cayley–Hamilton-tétel alapján $A^2 - tA + \det A \cdot I_2 = O_2$, és innen következik, hogy $A^2 + I_2 = t \cdot A$. **(2 pont)**

Ez alapján $A^4 + A^2 + I_2 = A^4 + tA$. Tehát

$$\det(A^4 + A^2 + I_2) = \det(A^4 + tA) = \det A \cdot \det(A^3 + tI_2) = \det(A^3 + tI_2). \quad \textbf{(1 pont)}$$

Ugyanakkor, az $A^2 + I_2 = tA$ összefüggésből következik, hogy

$$A^3 + A = tA^2 = t(tA - I_2) = t^2A - tI_2,$$

tehát $A^3 = t^2A - tI_2 - A$. **(1 pont)**

Ezt felhasználva következik, hogy

$$\det(A^3 + tI_2) = \det(t^2A - A) = (t^2 - 1)^2 \det A = (t^2 - 1)^2.$$

Mivel $\det(A^4 + A^2 + I_2) = 1$, következik, hogy $(t^2 - 1)^2 = 1$, ahonnan $t \in \{0, \pm\sqrt{2}\}$. **(1 pont)**

Az első megoldásban megadott példák mutatják, hogy mindhárom t érték felvevődik. **(1 pont)**

■

4. feladat (10 pont). Az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ és $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozatokat az

$$x_n = (45 + \sqrt{2022})^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

illetve

$$y_n = (45 - \sqrt{2022})^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

képletekkel értelmeztük.

a) Igazold, hogy $x_n + y_n \in \mathbb{N}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

b) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\}^{\frac{x_n}{3n}}$ határértéket, ahol $\{a\}$ az a valós szám törtrészét jelöli!

Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. a) Newton binomiális képlete alapján írhatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\begin{aligned} x_n + y_n &= \sum_{k=0}^n C_n^k 45^{n-k} 2022^{\frac{k}{2}} + \sum_{k=0}^n C_n^k 45^{n-k} (-1)^k 2022^{\frac{k}{2}} \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k 45^{n-k} 2022^{\frac{k}{2}} (1 + (-1)^k) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ páros}}} C_n^k 45^{n-k} 2022^{\frac{k}{2}}, \end{aligned}$$

ahonnan következik, hogy $(x_n + y_n) \in \mathbb{N}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

(2 pont)

b) Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $x_n, y_n > 0$ és

$$y_n = (\sqrt{2025} - \sqrt{2022})^n = \left(\frac{3}{(\sqrt{2025} + \sqrt{2022})} \right)^n \in (0, 1).$$

Mivel az a) alpont alapján $\{x_n + y_n\} = 0$, ezért $\{x_n\} = 1 - y_n$.

(3 pont)

Ugyanakkor, $x_n \cdot y_n = (45 + \sqrt{2022})^n \cdot (45 - \sqrt{2022})^n = (2025 - 2022)^n = 3^n$,
ezért írhatjuk, hogy

(1 pont)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\}^{\frac{x_n}{3^n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - y_n)^{\frac{x_n \cdot y_n}{3^n \cdot y_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - y_n)^{\frac{3^n}{3^n \cdot y_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - y_n)^{\frac{1}{y_n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - y_n)^{-\frac{1}{y_n} \cdot (-1)} = \frac{1}{e}, \end{aligned}$$

mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.

(3 pont)

Hivatalból

(1 pont)



IV. országos magyar matematikaolimpia XXXI. EMMV

országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

XII. osztály – I. forduló

1. feladat (10 pont). Adott a $G = (-2022, 2022)$ halmaz és az

$$x * y = \frac{2022^2(x+y)}{2022^2 + xy}, \quad \forall x, y \in G$$

művelet.

a) Igazold, hogy $(G, *)$ csoport és az $f: (G, *) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \cdot)$,

$$f(x) = \frac{2022 - x}{2022 + x}$$

függvény csoportizomorfizmus!

b) Számítsd ki tetszőleges $n \geq 2$ természetes szám esetén a

$$\frac{2022}{7} * \frac{2022}{17} * \cdots * \frac{2022}{2n^2 - 1}$$

kifejezés értékét!

(***)

Megoldás. a) Igazoljuk, hogy „ $*$ ” belső művelet G -n. Legyenek $x, y \in G$ tetszőlegesek. Ekkor $|x| < 2022$ és $|y| < 2022$, ezért $|xy| < 2022^2$, tehát $2022^2 + xy > 0$. Innen következik, hogy az alábbi egyenlőtlenségek rendre ekvivalensek egymással:

$$\begin{aligned} -2022 &< x * y < 2022, \\ -1 &< \frac{2022(x+y)}{2022^2 + xy} < 1, \\ -2022^2 - xy &< 2022(x+y) < 2022^2 + xy, \\ -(x+2022)(y+2022) &< 0 < (2022-x)(2022-y), \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

ami igaz minden $x, y \in G$ esetén. Tehát beláttuk, hogy „ $*$ ” belső művelet G -n.

Belátjuk, hogy $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$, minden $x, y \in G$ esetén. Valóban, minden $x, y \in G$ esetén

$$\begin{aligned} f(x * y) &= f\left(\frac{2022^2(x+y)}{2022^2 + xy}\right) = \frac{2022 - \frac{2022^2(x+y)}{2022^2 + xy}}{2022 + \frac{2022^2(x+y)}{2022^2 + xy}} \\ &= \frac{1 - \frac{2022(x+y)}{2022^2 + xy}}{1 + \frac{2022(x+y)}{2022^2 + xy}} = \frac{2022^2 + xy - 2022(x+y)}{2022^2 + xy + 2022(x+y)} \\ &= \frac{(2022-x)(2022-y)}{(2022+x)(2022+y)} = f(x) \cdot f(y). \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

Az f függvény folytonos és deriválható a $(-2022, 2022)$ intervallumon, és

$$f'(x) = \frac{-2 \cdot 2022}{(2022+x)^2} < 0,$$

minden $x \in G$ esetén, tehát f szigorúan csökkenő a G -n, és ezért injektív is. Másrészt, $\lim_{x \searrow -2022} f(x) = +\infty$ és $\lim_{x \nearrow 2022} f(x) = 0$, ezért $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$, vagyis f szürjektív. Tehát f bijektív. (1 pont)

Mivel $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ csoport, ezért az előbbi tulajdonságok alapján $(G, *)$ is csoport és f csoportizomorfizmus. (1 pont)

b) Az a) alpont alapján minden $n \geq 2$ természetes szám esetén

$$f\left(\frac{2022}{7} * \frac{2022}{17} * \dots * \frac{2022}{2n^2 - 1}\right) = f\left(\frac{2022}{7}\right) \cdot f\left(\frac{2022}{17}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{2022}{2n^2 - 1}\right). \quad (1 \text{ pont})$$

Viszont minden $k \geq 2$ természetes szám esetén

$$f\left(\frac{2022}{2k^2 - 1}\right) = \frac{2022 - \frac{2022}{2k^2 - 1}}{2022 + \frac{2022}{2k^2 - 1}} = \frac{2 \cdot 2022k^2 - 2 \cdot 2022}{2 \cdot 2022k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}, \quad (1 \text{ pont})$$

ezért

$$f\left(\frac{2022}{7}\right) \cdot f\left(\frac{2022}{17}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{2022}{2n^2 - 1}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{n+1}{2n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2. \quad (2 \text{ pont})$$

Legyen $a_n = \frac{2022}{7} * \frac{2022}{17} * \dots * \frac{2022}{2n^2 - 1}$. Ekkor $f(a_n) = \frac{n+1}{2n}$, de ugyanakkor $f(a_n) = \frac{2022 - a_n}{2022 + a_n}$, tehát $a_n = \frac{2022(n-1)}{3n+1}$, minden $n \geq 2$ természetes szám esetén. (1 pont)

Hivatalból (1 pont) ■

Megjegyzés. Annak a bizonyítása, hogy „*” belső művelet G -n, valamint $(G, *)$ csoport, az f felhasználása nélkül összesen (3 pont)

2. feladat (10 pont). Határozd meg az $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sin x \cdot (3 - \sin 2x)}$$

függvény primitívjeit!

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Első megoldás. Az adott trigonometriai törtfüggvényt egyszerűbb törtekre bontjuk:

$$f(x) = \frac{1}{\sin x \cdot (3 - \sin 2x)} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{2 \cos x}{3 - \sin 2x} \right). \quad (2 \text{ pont})$$

Ekkor

$$I = \int f(x) dx = \frac{1}{3} \cdot \int \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{2 \cos x}{3 - \sin 2x} \right) dx = \frac{1}{3} I_1 + \frac{2}{3} I_2,$$

ahol

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{(\cos x)'}{\cos^2 x - 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C = \ln \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} + C = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

és $I_2 = \int \frac{\cos x}{3 - \sin 2x} dx$. Legyen $J_2 = \int \frac{\sin x}{3 - \sin 2x} dx$. Ekkor

$$I_2 + J_2 = \int \frac{\cos x + \sin x}{3 - \sin 2x} dx = \int \frac{(\sin x - \cos x)'}{2 + (\sin x - \cos x)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}} + C, \quad (2 \text{ pont})$$

valamint

$$I_2 - J_2 = \int \frac{\cos x - \sin x}{3 - \sin 2x} dx = \int \frac{(\sin x + \cos x)'}{4 - (\sin x + \cos x)^2} dx = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 + \sin x + \cos x}{2 - \sin x - \cos x} \right| + C. \quad (2 \text{ pont})$$

Összeadva az előbbi két eredményt, következik, hogy

$$I_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8} \ln \left| \frac{2 + \sin x + \cos x}{2 - \sin x - \cos x} \right| + C,$$

tehát

$$I = \frac{1}{3} I_1 + \frac{2}{3} I_2 = \frac{1}{3} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{12} \ln \left| \frac{2 + \sin x + \cos x}{2 - \sin x - \cos x} \right| + C. \quad (1 \text{ pont})$$

Hivatalból (1 pont)

■

Második megoldás. Írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\sin x \cdot (3 - \sin 2x)} dx = \int \frac{1}{\sin x \cdot (4 - (1 + \sin 2x))} dx \\ &= \int \frac{1}{\sin x \cdot (4 - (\sin x + \cos x)^2)} dx \\ &= \int \frac{1}{\sin x \cdot (2 - (\sin x + \cos x))(2 + (\sin x + \cos x))} dx. \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

A $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$ helyettesítést és a $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, valamint $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ képleteket használva következik, hogy

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} \left(2 - \frac{2t+1-t^2}{1+t^2}\right) \left(2 + \frac{2t+1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{(1+t^2)^2}{t(3t^2 - 2t + 1)(t^2 + 2t + 3)} dt = \frac{1}{3} \int \frac{1}{t} dt - \frac{1}{2} \int \frac{t-1}{3t^2 - 2t + 1} dt + \frac{1}{6} \int \frac{t-1}{t^2 + 2t + 3} dt, \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

ahol felhasználtuk az

$$\frac{(1+t^2)^2}{t(3t^2 - 2t + 1)(t^2 + 2t + 3)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt + C}{3t^2 - 2t + 1} + \frac{Dt + E}{t^2 + 2t + 3}$$

felbontást, ahonnan azt kaptuk, hogy $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2}$, $D = \frac{1}{6}$ és $E = -\frac{1}{6}$. A kapott integrálokat a következő módon számolhatjuk ki:

$$\begin{aligned} \int \frac{t-1}{3t^2 - 2t + 1} dt &= \frac{1}{6} \int \frac{(6t-2)-4}{3t^2 - 2t + 1} dt = \frac{1}{6} \cdot \ln(3t^2 - 2t + 1) - \frac{2}{3} \cdot \int \frac{1}{3t^2 - 2t + 1} dt \\ &= \frac{1}{6} \cdot \ln(3t^2 - 2t + 1) - \frac{2}{9} \cdot \int \frac{1}{\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}} dt \\ &= \frac{1}{6} \cdot \ln(3t^2 - 2t + 1) - \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t - \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} + C \\ &= \frac{1}{6} \cdot \ln(3t^2 - 2t + 1) - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{3t-1}{\sqrt{2}} + C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{t-1}{t^2+2t+3} dt &= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{(2t+2)-4}{t^2+2t+3} dt = \frac{1}{2} \cdot \ln(t^2+2t+3) - 2 \int \frac{1}{(t+1)^2+2} dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln(t^2+2t+3) - \frac{2}{\sqrt{2}} \arctg \frac{t+1}{\sqrt{2}} + C.\end{aligned}\quad (1 \text{ pont})$$

Tehát az eredeti integrál

$$I = \frac{1}{3} \ln t - \frac{1}{12} \ln(3t^2 - 2t + 1) + \frac{\sqrt{2}}{6} \arctg \frac{3t-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{12} \cdot \ln(t^2+2t+3) - \frac{\sqrt{2}}{6} \arctg \frac{t+1}{\sqrt{2}} + C,$$

ahol $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Hivatalból

(1 pont)

(1 pont)

■

3. feladat (10 pont). Határozd meg azokat az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, melyeknek létezik $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ primitív függvényük úgy, hogy $[f(x)] - \{f(x)\} = F(x)$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén, ahol $[a]$ az a valós szám egészrészét, $\{a\}$ pedig a törtrészét jelöli!

Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Az eredeti összefüggés ekvivalens az $[f(x)] - f(x) + [f(x)] = F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, vagyis az $f(x) + F(x) = 2 \cdot [f(x)]$, $\forall x \in \mathbb{R}$ összefüggéssel.

(1 pont)

A feltétel alapján az f függvény folytonos, az F deriválható, tehát folytonos, ezért az $f + F$ függvény is folytonos.

(1 pont)

Mivel $[f(x)] \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, az előbbi észrevételek alapján létezik olyan $k \in \mathbb{Z}$, amelyre $[f(x)] = k$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

(1 pont)

Innen kapjuk, hogy $f(x) + F(x) = 2k$, $\forall x \in \mathbb{R}$, és beszorozva ezt az összefüggést e^x -nel, az

$$(e^x \cdot F(x))' = (2k \cdot e^x)', \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

összefüggéshez jutunk.

(2 pont)

Innen következik, hogy $e^x \cdot F(x) = 2k \cdot e^x + c$, $\forall x \in \mathbb{R}$, vagyis

$$F(x) = 2k + c \cdot e^{-x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(1 pont)

A előbbi összefüggés alapján $f(x) = -ce^{-x}$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

(1 pont)

Mivel $[f(x)] = k$, $\forall x \in \mathbb{R}$, következik, hogy $[-ce^{-x}] = k$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Viszont $\lim_{x \rightarrow \infty} -ce^{-x} = 0$, ezért $k = 0$. Másrészt $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$, ezért $c = 0$. Tehát az egyetlen feltételnek megfelelő függvény a konstans nulla függvény.

(2 pont)

Hivatalból

(1 pont)

■

4. feladat (10 pont). Legyen $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan primitív függvénnyel rendelkező függvény, amelynek valamely $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ primitívjére a $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} tF\left(\frac{1}{t}\right)$ határérték véges. Jelöljük ezt a határértéket L -el. Bizonyítsd be, hogy a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

függvénynek pontosan akkor létezik primitív függvénye, ha $c = L$.

András Szilárd, Kolozsvár

Megoldás. Tekintsük a $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $H(x) = \begin{cases} -\frac{x^3}{2}F\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ függvényt. **(3 pont)**

Az értelmezés és a megadott feltételek alapján

$$H'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{H(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{2}F\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2}L. \quad \text{(2 pont)}$$

Ugyanakkor $x \neq 0$ esetén

$$H'(x) = -\frac{3}{2}x^2F\left(\frac{1}{x^2}\right) + f\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

tehát írhatjuk, hogy

$$H'(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x^2F\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ -\frac{3}{2}L, & x = 0 \end{cases} + \begin{cases} f\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ L, & x = 0 \end{cases} \quad \text{(2 pont)}$$

Mivel ebben a felírásban a jobb oldalon megjelenő első függvény folytonos, a második függvény két primitiválható függvény különbsége, tehát ő maga is primitiválható. **(1 pont)**

Másképpen csak egy konstans esetén lehet a g -nek primitívje, tehát a g pontosan akkor primitiválható, ha $c = L$. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**



IV. országos magyar matematikaolimpia

XXXI. EMMV

országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

X. osztály – II. forduló

- 1. feladat.** Oldd meg az egész számok halmazán a $615 + x^2 = 2^y$ egyenletet!
- 2. feladat.** Az $ABCD$ egységoldalú négyzet AB és AD oldalán a P , illetve Q olyan pontok, amelyekre az APQ háromszög kerülete 2. Határozd meg a PCQ szög mértékét!
- 3. feladat.** Igazold, hogy 202204 egy síkban fekvő egységvektor között mindig van 67402 olyan vektor, amelyek közül bármely kettőnek az összege legalább egységnyi hosszúságú!
- 4. feladat.** Tudva, hogy x és y az

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ y^3 - 3x^2y = -\sqrt{3} \end{cases}$$

egyenletrendszer valós megoldásai, számítsd ki az $(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ kifejezés értékét és oldd meg az egyenletrendszert!

5. feladat. Adott az AB szakasz és annak egy C belső pontja. Az AB -vel nem egybeeső, a C ponton áthaladó d egyenes az AC átmérőjű kört másodjára az E pontban, a BC átmérőjű kört másodjára az F pontban, valamint az AB átmérőjű kört a P és Q pontokban metszi. Igazold, hogy $PE = FQ$!

6. feladat. Határozd meg az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozatot, tudva, hogy bármely $m, n \in \mathbb{N}^*$ esetén $a_n \in \mathbb{N}^*$ és

$$a_{m \cdot n} = (m, a_n) \cdot [a_m, n].$$

Az (x, y) az x és y természetes számok legnagyobb közös osztóját, $[x, y]$ pedig a legkisebb közös többszörösét jelöli.

IV. országos magyar matematikaolimpia XXXI. EMMV

országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

XI-XII. osztály – II. forduló

1. feladat. Az ABC szabályos háromszög belsejében adott egy P pont, melyre $PA = \sqrt{3}$, $PB = 2$ és $PC = 1$. Határozd meg az ABC háromszög oldalainak hosszát!

2. feladat. Adott az ABC háromszög, valamint az $M \in (AB)$ és az $N \in (AC)$ pontok úgy, hogy $MN \nparallel BC$. Legyen $MN \cap BC = \{P\}$. Igazold, hogy az ABC , BMP , AMN és NCP háromszögek köré írt körök egy ponton mennek át!

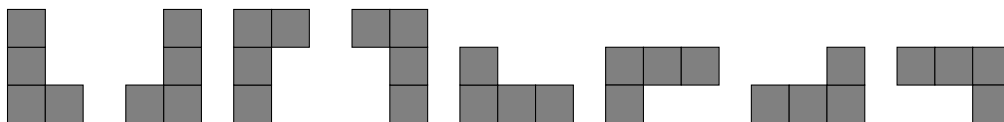
3. feladat. Oldd meg a valós számok halmazán az $x^6 + \left(\frac{2x}{x+2}\right)^6 = 65$ egyenletet!

4. feladat. Legyenek $a, b, c \in (0, \infty)$ valós számok úgy, hogy $abc = 1$. Igazold a

$$9a^3 + 9b^3 + 9c^3 \geq 9a^2 + 9b^2 + 9c^2 - 4a - 4b - 4c + 12$$

egyenlőtlenséget!

5. feladat. Egy 8×8 -as sakktáblán L alakú résznek (tetraminónak) nevezzük az alábbi ábrán látható alakzatokat:



a) Jelölj meg a sakktáblán 21 mezőt úgy, hogy a sakktábla minden L alakú részén legyen legalább egy megjelölt mező!

b) Bizonyítsd be, hogy ha csak 20 mezőt jelölünk meg a sakktáblán, akkor ez a tábla biztosan tartalmaz egy olyan L alakú részt, amelyen nincs egyetlen megjelölt mező sem!

6. feladat. A sík koordináta-rendszerének rácspontjaiból rácspontjaiba lépegetünk. Az $O(a_0, b_0)$ pontból indulunk, ahol $a_0 = b_0 = 0$. Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén az n -edik lépés azt jelenti, hogy az $(a_{n-1}, b_{n-1}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pontról átlépünk egy tőle pontosan 13 egység távolságra lévő $(a_n, b_n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pontra. Tudjuk, hogy az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatok monoton növekvők. Határozd meg, hogy legkevesebb hány lépéssel juthatunk el a $(2022, 2022)$ pontba!

IV. országos magyar matematikaolimpia**XXXI. EMMV**

országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

IX. osztály – II. forduló

1. feladat (10 pont). Igazold, hogy $2^{n^2} + 13$ osztható 15-tel, bármely n páratlan természetes szám esetén! (***)

Megoldás. Matematikai indukcióval igazoljuk az oszthatóságot. Ehhez ellenőrizzük az oszthatóságot $n = 1$, illetve $n = 3$ esetén.

$$n = 1 : 2^{1^2} + 13 = 2 + 13 = 15, \quad (1 \text{ pont})$$

$$n = 2 : 2^{3^2} + 13 = 512 + 13 = 525 = 35 \cdot 15.$$

Mindkét esetben a kapott szám osztható 15-tel.

Feltételezzük, hogy $2^{(2k+1)^2} + 13$ osztható 15-tel, és igazoljuk, hogy $2^{(2k+3)^2} + 13$ osztható 15-tel.

(1 pont)

Feltevés szerint $2^{(2k+1)^2} + 13 = 15l$, ahol $l \in \mathbb{N}^*$, vagyis $2^{(2k+1)^2} = 15l - 13$.

(1 pont)

Ekkor

$$\begin{aligned} 2^{(2k+3)^2} + 13 &= 2^{(2k+1)^2 + 4(2k+1) + 4} + 13 = 2^{(2k+1)^2} \cdot 2^{8k+8} + 13 \\ &= (15l - 13) \cdot 2^{8k+8} + 13 = 2^{8k+8} \cdot l \cdot 15 - 13 \cdot (2^{8k+8} - 1) & (1 \text{ pont}) \\ &= 2^{8k+8} \cdot l \cdot 15 - 13 \cdot (256^{k+1} - 1) & (1 \text{ pont}) \\ &= 2^{8k+8} \cdot l \cdot 15 - 13 \cdot (256 - 1)(256^k + 256^{k-1} + \dots + 256 + 1) & (1 \text{ pont}) \\ &= 2^{8k+8} \cdot l \cdot 15 - 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot (256^k + 256^{k-1} + \dots + 256 + 1) & (1 \text{ pont}) \\ &= [2^{8k+8} \cdot l - 13 \cdot 17 \cdot (256^k + 256^{k-1} + \dots + 256 + 1)] \cdot 15. & (1 \text{ pont}) \end{aligned}$$

Tehát $2^{(2k+3)^2} + 13$ is osztható 15-tel.

Következésképpen $2^{n^2} + 13$ osztható 15-tel, minden n páratlan természetes szám esetén.

(1 pont)

Hivatalból

(1 pont)



Második megoldás. Írhatjuk, hogy

$$2^{n^2} + 13 = 15 + 2 \cdot (2^{n^2-1} - 1) = 15 + 2 \cdot \left((2^4)^{\frac{(n-1)(n+1)}{4}} - 1 \right). \quad (4 \text{ pont})$$

Ha n páratlan, akkor $\frac{(n-1)(n+1)}{4} = m \in \mathbb{N}$, és ezért

$$\begin{aligned} 2^{n^2} + 13 &= 15 + 2 \cdot (16^m - 1) = 15 + 2 \cdot (16 - 1) \cdot (16^{m-1} + \dots + 16 + 1) \\ &= 15[1 + 2(16^{m-1} + \dots + 16 + 1)]. \end{aligned}$$

Tehát $2^{n^2} + 13$ osztható 15-tel.

(5 pont)

Hivatalból

(1 pont)



2. feladat (10 pont). Igazold, hogy akárhogy választunk ki 26 számot a $2, 3, 4, \dots, 100$ természetes számok közül, lesz két olyan, amely nem relatív prím! (***)

Megoldás. 1 és 100 között összesen 25 prím van, amelyek a következők:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Képezzünk 25 skatulyát és címkézzük fel őket ezekkel a prímekekkel. (3 pont)

A kiválasztott 26 szám mindegyikét abba a skatulyába helyezzük, amelynek a címkéje az adott szám legkisebb prímosztója. (3 pont)

Mivel 26 számot helyeztünk el a 25 skatulyába, ezért van olyan skatulya, amely legalább két számot tartalmaz. (2 pont)

Ezek a számok nem relatív prímekek, mert a skatulya címkéje (amely egy prímszám) mindkét számot osztja. (1 pont)

Hivatalból (1 pont)



3. feladat (10 pont). Adott $a, b, c > 0$ valós számok esetén léteznek-e olyan x, y, z valós számok, amelyekre

$$|x + a + b| + |y + b + c| + |z + c + a| + |x - a - b| + |y - b - c| + |z - c - a| = 3(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac})?$$

(***)

Megoldás. Tételezzük fel, hogy léteznek a feladat feltételeit teljesítő valós számok. Ekkor a modulusz tulajdonságai alapján

$$\begin{aligned} |x + a + b| + |x - a - b| &= |x + a + b| + | -x + a + b| \\ &\geq |x + a + b - x + a + b| \\ &= |2a + 2b| = 2a + 2b. \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

Hasonlóan

$$|y + b + c| + |y - b - c| \geq 2b + 2c, \quad (1 \text{ pont})$$

$$|z + c + a| + |z - c - a| \geq 2a + 2c. \quad (1 \text{ pont})$$

Az egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összeadva kapjuk, hogy

$$S = |x + a + b| + |y + b + c| + |z + c + a| + |x - a - b| + |y - b - c| + |z - c - a| \geq 4(a + b + c). \quad (1 \text{ pont})$$

Másrészt a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alapján

$$S = 3(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}) \leq 3 \left(\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2} \right) = 3(a + b + c). \quad (2 \text{ pont})$$

Az előbbi két észrevétel alapján

$$3(a + b + c) \geq 4(a + b + c),$$

ami lehetetlen, mivel $a, b, c > 0$.

(1 pont)

Tehát nem léteznek olyan x, y, z valós számok, amelyekre fennáll a kért összefüggés.

(1 pont)

Hivatalból

(1 pont)



Megjegyzés. Indoklás nélküli nemleges válasza nem jár pont.

4. feladat (10 pont). Az $a_1 = 2$ számból kiindulva minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén képezzük az a_n valós számot, a következő szabály szerint:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{(n+2)a_n}{3}.$$

Számítsd ki a $\sum_{k=1}^{2022} [\sqrt{a_k}]$ összeg értékét, ahol $[x]$ az x valós szám egészrészét jelöli! (***)

Megoldás. Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén az első $(n+1)$ szám összegére teljesül, hogy

$$\frac{(n+3)a_{n+1}}{3} = a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} = \frac{(n+2)a_n}{3} + a_{n+1}, \quad (1 \text{ pont})$$

ahonnan következik, hogy $n \cdot a_{n+1} = (n+2) \cdot a_n$, vagyis $a_{n+1} = \frac{n+2}{n} a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Ezért

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{n} a_n = \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{n \cdot (n-1)} a_{n-1} = \dots = \frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot 3}{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2} a_1, \quad (2 \text{ pont})$$

vagyis

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} a_1,$$

tehát $a_n = n(n+1)$, mert $a_1 = 2$. (1 pont)

Vegyük észre, hogy minden $k \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$k^2 \leq k^2 + k < (k+1)^2, \quad (1 \text{ pont})$$

ezért $k \leq \sqrt{a_k} < k+1$, ahonnan $[\sqrt{a_k}] = k$. (1 pont)

Innen következik, hogy

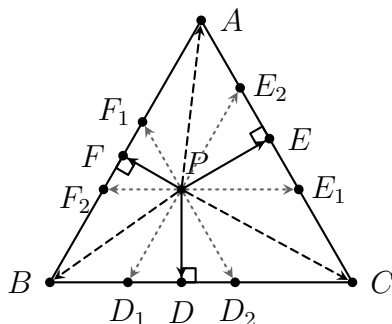
$$\sum_{k=1}^{2022} [\sqrt{a_k}] = \sum_{k=1}^{2022} k = \frac{2022 \cdot 2023}{2} = 2045253. \quad (2 \text{ pont})$$

Hivatalból (1 pont)



5. feladat (10 pont). Az ABC egyenlő oldalú háromszög P belső pontjából merőlegeseket húzunk az oldalakra, ezek talppontjai D, E és F . Legyen X az a pont a síkban, amelyre $\frac{2}{3}(\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF}) = \overrightarrow{PX}$. Igazold, hogy az X pont nem függ a P pont megválasztásától! (***)

Megoldás. A P ponton át párhuzamosokat húzunk az ABC háromszög oldalaival, (1 pont)
felvesszük a $D, E, F, D_1, E_1, F_1, D_2, E_2, F_2$ pontokat az alábbi ábra szerint. (Mivel a $\overrightarrow{PX}$ -ra megadott feltétel szimmetrikus, ezért mindegy, hogy a D, E, F pontokat melyik oldalakon vesszük fel.)



Az így keletkezett PD_1D_2 egyenlő oldalú háromszögben felírhatjuk, hogy

$$\overrightarrow{PD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PD_1} + \overrightarrow{PD_2}). \quad (1 \text{ pont})$$

Hasonlóan

$$\overrightarrow{PE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PE_1} + \overrightarrow{PE_2}) \quad \text{és} \quad \overrightarrow{PF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2}). \quad (2 \text{ pont})$$

A kapott összefüggéseket összeadva, és a vektorokat újracsoportosítva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF} &= \frac{1}{2} \left[(\overrightarrow{PD_1} + \overrightarrow{PF_2}) + (\overrightarrow{PE_1} + \overrightarrow{PD_2}) + (\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PE_2}) \right] \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PA}), \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

ahol felhasználtuk a paralelogramma-szabályt a PF_2BD_1 , PD_2CE_1 , PE_2AF_1 paralelogrammákban. (1 pont)

Innen következik, hogy

$$\overrightarrow{PX} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}), \quad (1 \text{ pont})$$

vagyis X az ABC háromszög súlypontja. Tehát az X pont független a P pont megválasztásától.

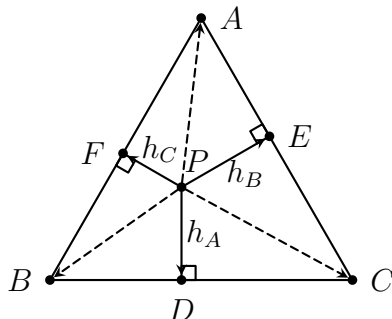
(2 pont)

Hivatalból

(1 pont)



Második megoldás. Tekintsük a következő ábrát, és használjuk a jelöléseit.



Tudjuk, hogy

$$\overrightarrow{r_P} = \frac{T_{BPC}}{T_{ABC}} \cdot \overrightarrow{r_A} + \frac{T_{CPA}}{T_{ABC}} \cdot \overrightarrow{r_B} + \frac{T_{APB}}{T_{ABC}} \cdot \overrightarrow{r_C} = \frac{h_A \cdot \overrightarrow{r_A} + h_B \cdot \overrightarrow{r_B} + h_C \cdot \overrightarrow{r_C}}{h},$$

ahol $h = h_A + h_B + h_C$ a háromszög magassága. (1 pont)

Továbbá

$$BD \cdot BC = BP \cdot BC \cdot \cos(\widehat{PBD}) = \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BC}. \quad (1 \text{ pont})$$

Tehát

$$\overrightarrow{BD} = \frac{\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BC}}{BC^2} \cdot \overrightarrow{BC}. \quad (1 \text{ pont})$$

A P pont helyzetvektorának ismeretében, a számolások elvégzése után, felírhatjuk, hogy

$$\overrightarrow{r_D} = \frac{2h_C + h_B}{2h} \cdot \overrightarrow{r_C} + \frac{2h_A + h_B}{2h} \cdot \overrightarrow{r_A}. \quad (1 \text{ pont})$$

Hasonlóan

$$\overrightarrow{r_E} = \frac{2h_A + h_C}{2h} \cdot \overrightarrow{r_A} + \frac{2h_B + h_A}{2h} \cdot \overrightarrow{r_B} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{r_F} = \frac{2h_B + h_A}{2h} \cdot \overrightarrow{r_B} + \frac{2h_C + h_A}{2h} \cdot \overrightarrow{r_C}. \quad (1 \text{ pont})$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_E} + \overrightarrow{r_F} &= \frac{4h_A + h_B + h_C}{2h} \cdot \overrightarrow{r_A} + \frac{h_A + 4h_B + h_C}{2h} \cdot \overrightarrow{r_B} + \frac{h_A + h_B + 4h_C}{2h} \cdot \overrightarrow{r_C} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}}{3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{h_A \cdot \overrightarrow{r_A} + h_B \cdot \overrightarrow{r_B} + h_C \cdot \overrightarrow{r_C}}{h} = \frac{3}{2} \cdot (\overrightarrow{r_G} + \overrightarrow{r_P}), \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

ahol G az ABC háromszög súlypontja.

Tehát $\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{PG}$, vagyis $\frac{2}{3} \cdot (\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF}) = \overrightarrow{PG}$. (1 pont)

Ebből következik, hogy $X = G$, azaz független a P pont megválasztásától. (1 pont)

Hivatalból (1 pont) ■

6. feladat (10 pont). Egy táblára felírunk legalább öt nemnulla természetes számot egy sorba. Egy lépésben a két szélső szám minimumát levonjuk a szélső számokból, és hozzáadjuk a második, illetve az utolsó előtti számhoz. Ha a felírt számok között megjelenik a 0, azt letöröljük. Így egy vagy két számmal kevesebb marad a táblán. Ezt a lépést mindaddig ismételjük, amíg a táblán egy vagy két szám marad. Mitől függ az, hogy a végén egy szám marad vagy kettő? Az alábbi két példa mutatja, hogy mindkét eset lehetséges.

3	4	7	8	2	1	2
1	6	7	8	2	3	
	7	7	8	3	2	
	5	9	8	5		
		14	13			

3	15	6	8	1	1	2
1	17	6	8	1	3	
	18	6	8	2	2	
	16	8	8	4		
	12	12	12			
		36				

András Szilárd, Kolozsvár

Megoldás. A megoldás kulcsötlete az, hogy amennyiben a sorban levő számokat tömegeknek fogjuk fel, a rendszer tömegközéppontja nem változik az átalakítások során, tehát pontosan akkor marad egy szám a végén, ha a tömegközéppont egész szám. A formális leírás a következő: ha a számok rendre $x_1, x_2, \dots, x_n$, és tekintjük az $S = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \dots + n \cdot x_n$ összeget, akkor ez az összeg nem változik. Valóban, egy lépés elvégzése után vagy az

$$S' = 1 \cdot (x_1 - x_n) + 2 \cdot (x_2 + x_n) + 3 \cdot x_3 + \dots + (n-1) \cdot (x_{n-1} + x_n) = S$$

összeget kapjuk, ha az utolsó szám volt a kisebb; vagy az

$$S'' = 2 \cdot (x_2 + x_1) + 3 \cdot x_3 + \dots + (n-1) \cdot (x_{n-1} + x_1) + n \cdot (x_n - x_1) = S$$

összeget kapjuk, ha az első szám volt a kisebb (egyenlőség esetén mindegy). **(4 pont)**
 Hasonló meggondolás alapján a számok

$$S_1 = x_1 + \dots + x_n$$

összege sem változik lépésről lépésre. **(3 pont)**

Így a tömegközéppont, vagyis az $\frac{S}{S_1}$ arány invariáns. Ha a végén egy szám marad (a k -ik oszlopban, az első sorhoz viszonyítva), akkor a tömegközéppont $\frac{S}{S_1} = \frac{k \cdot S_1}{S_1} = k$. Ha a végén két szám marad, ezek x és y (a k -ik, illetve $(k+1)$ -ik oszlopban), akkor a tömegközéppont

$$\frac{kx + (k+1)y}{x+y} = k + \frac{y}{x+y},$$

ami nem egész szám, mert x és y nemnulla természetes számok. Tehát pontosan akkor marad egy szám a végén, ha a tömegközéppont, azaz $\frac{S}{S_1}$ egy egész szám. **(2 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**



IV. országos magyar matematikaolimpia**XXXI. EMMV****országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.****X. osztály – II. forduló****1. feladat (10 pont).** Oldd meg az egész számok halmazán a $615 + x^2 = 2^y$ egyenletet!*Baricz Árpád, Sepsiszentgyörgy*

Megoldás. Mivel $615 + x^2$ természetes szám bármely x egész szám esetén, ezért 2^y is az kell legyen. Tehát y nem lehet negatív egész szám.

Az x^2 -nek a 3-mal való osztási maradéka 0 vagy 1; 615 osztható 3-mal; valamint 2^y -nak a 3-mal osztási maradéka 1, ha y páros és 2, ha y páratlan. **(2 pont)**

Tehát y páros kell legyen, vagyis $y = 2k$ alakú. **(1 pont)**

Így az eredeti egyenlet

$$(2^k - x)(2^k + x) = 615$$

alakba írható. Észrevesszük, hogy a bal oldalon szereplő tényezők közül az egyik biztosan pozitív, emiatt a másik is az kell legyen. Mivel

$$(2^k - x) + (2^k + x) = 2^{k+1},$$

ezért a 615-öt fel kell bontani két olyan természetes szám szorzatára, amelyeknek az összege 2-nek hatványa.

(3 pont)

A 615 prímtényezőkre való felbontása $615 = 3 \cdot 5 \cdot 41$, emiatt a lehetséges felbontások a

$$615 = 1 \cdot 615 = 3 \cdot 205 = 5 \cdot 123 = 15 \cdot 41$$

és ezek szimmetrikusai.

(1 pont)

Ezen felbontások közül csak az $5 \cdot 123$ esetén lesz a tényezők összege 2-nek hatványa. Tehát

$$2^{k+1} = 5 + 123 = 2^7,$$

ahonnan $k = 6$ és $y = 12$.

(1 pont)

Ekkor $x^2 = 2^{12} - 615 = 4096 - 615 = 3481 = 59^2$. Összefoglalva a $615 + x^2 = 2^y$ egyenletnek két megoldása van az egész számok halmazán: $(x, y) \in \{(-59, 12), (59, 12)\}$. **(1 pont)**

Hivatalból

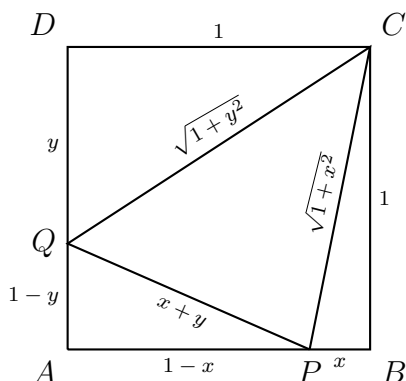
(1 pont)

Megjegyzés. Az $x^2 + d = a \cdot b^y$ alakú diofantoszi egyenleteket Ramanujan-Nagell típusú egyenleteknek nevezik a szakirodalomban. Az $x^2 + 7 = 2^y$ egyenletnek csak $y \in \{3, 4, 5, 7, 15\}$ esetén van megoldása. Ezt az állítást Srinivasa Ramanujan fogalmazta meg 1913-ban és tőle függetlenül Wilhelm Ljunggren, majd 1948-ban igazolta Trygve Nagell.

A $615 + x^2 = 2^y$ egyenletet a $x^2 - 25 = 2^y - 640$ alakba is írhatjuk, ahonnan $(x + 5)(x - 5) = 2^6(2^{y-6} - 10)$ és könnyen igazolható, hogy csak az $x + 5 = 2^6$ és $x - 5 = 2^{y-6} - 12$ esetén kapunk megoldást.

2. feladat (10 pont). Az $ABCD$ egységoldalú négyzet AB és AD oldalán a P , illetve Q olyan pontok, amelyekre az APQ háromszög kerülete 2. Határozd meg a PCQ szög mértékét! (***)

Megoldás. Legyen $PB = x$, $DQ = y$. Következik, hogy $AP = 1 - x$, $AQ = 1 - y$, $CP = \sqrt{1 + x^2}$, $CQ = \sqrt{1 + y^2}$ (lásd a mellékelt ábrát).



Az APQ háromszög kerülete 2, ezért $PQ = 2 - AP - AQ = x + y$. (2 pont)

Az APQ háromszög derékszögű, ezért $PQ^2 = AP^2 + AQ^2$, vagyis $(x + y)^2 = (1 - x)^2 + (1 - y)^2$, ahonnan

$$x + y = 1 - xy. \quad (2 \text{ pont})$$

Az előbbi összefüggés mindkét oldalát négyzetre emelve kapjuk, hogy $x^2 + 2xy + y^2 = 1 - 2xy + x^2y^2$, ahonnan $x^2y^2 = x^2 + y^2 + 4xy - 1$. A PCQ háromszögben

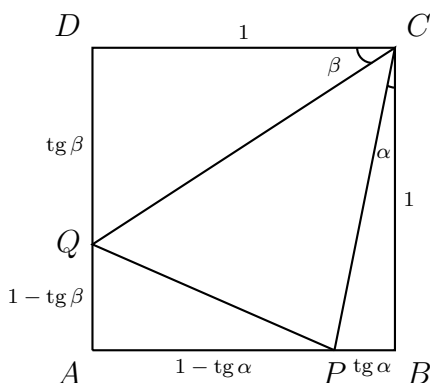
$$\begin{aligned} \cos \widehat{PCQ} &= \frac{CP^2 + CQ^2 - PQ^2}{2 \cdot PC \cdot CQ} = \frac{1 + x^2 + 1 + y^2 - (x + y)^2}{2\sqrt{1 + x^2}\sqrt{1 + y^2}} = \frac{1 - xy}{\sqrt{1 + x^2}\sqrt{1 + y^2}} \quad (2 \text{ pont}) \\ &= \sqrt{\frac{(1 - xy)^2}{(1 + x^2)(1 + y^2)}} = \sqrt{\frac{1 - 2xy + x^2y^2}{1 + x^2 + y^2 + x^2y^2}} = \sqrt{\frac{1 - 2xy + x^2 + y^2 + 4xy - 1}{1 + x^2 + y^2 + x^2 + y^2 + 4xy - 1}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (2 \text{ pont}) \end{aligned}$$

Innen következik, hogy a PCQ szög mértéke 45° . (1 pont)

Hivatalból (1 pont)

■

Második megoldás. Legyen a BCP szög mértéke α és a DCQ szög mértéke β . Következik, hogy $PB = \tan \alpha$, $DQ = \tan \beta$ (lásd a mellékelt ábrát). (1 pont)



Az APQ háromszög kerülete 2, vagyis $AP + PQ + QA = 2$, ahonnan $PQ = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta$. (2 pont)

Az APQ háromszögben $PQ^2 = AP^2 + AQ^2$, következik, hogy

$$(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)^2 = (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2 + (1 - \operatorname{tg} \beta)^2$$

vagyis

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = 1 - \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta, \quad (3 \text{ pont})$$

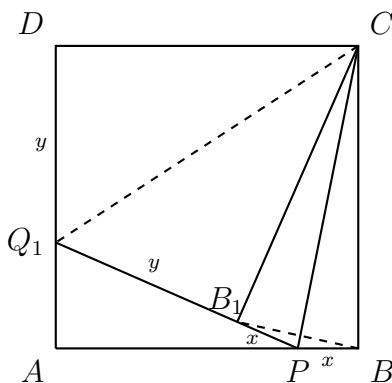
ahonnan

$$1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta), \quad (2 \text{ pont})$$

tehát $\alpha + \beta = 45^\circ$, ezért PCQ szög mértéke 45° . (1 pont)

Hivatalból (1 pont) ■

Harmadik megoldás. Legyen B_1 a B pontnak a CP egyenesre vonatkoztatott szimmetrikusa és Q_1 a PB_1 és az AD metszéspontja (lásd a mellékelt ábrát). (2 pont)



A szimmetria miatt a CB_1P háromszög kongruens a CBP háromszöggel, ezért $CB_1 = CB = 1$, $\widehat{CB_1P} = 90^\circ$, és ha $PB = x$, akkor $PB_1 = x$. (2 pont)

Mivel $CD = 1 = CB_1$, $\widehat{CDQ_1} = 90^\circ = \widehat{CB_1Q_1}$ és CQ_1 közös oldal, következik, hogy a CDQ_1 háromszög kongruens a CB_1Q_1 háromszöggel. (1 pont)

Tehát, ha $DQ_1 = y$, akkor $B_1Q_1 = y$. Ekkor $AQ_1 = 1 - y$, $AP = 1 - x$, tehát az APQ_1 háromszög kerülete $AP + PB_1 + B_1Q_1 + Q_1A = 1 - x + x + 1 - y + y = 2$. Ugyanakkor az APQ háromszög kerülete is 2. Tehát rögzített P esetén a Q_1 és Q pont egybeesik. (3 pont)

Mivel CQ a DCB_1 , a CP pedig BCB_1 szög szögfelezője, következik, hogy

$$\widehat{PCQ} = \frac{1}{2} \widehat{BCD} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ. \quad (1 \text{ pont})$$

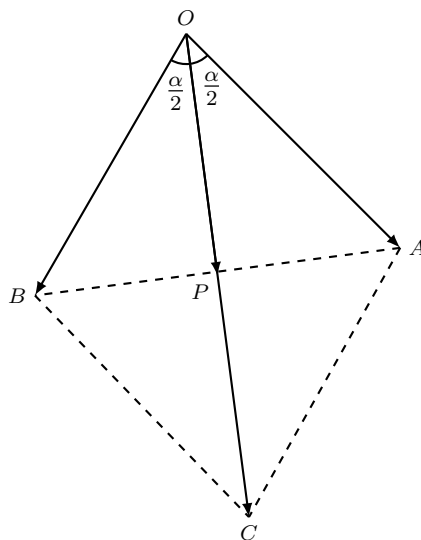
Hivatalból (1 pont) ■

3. feladat (10 pont). Igazold, hogy 202204 egy síkban fekvő egységvektor között mindig van 67402 olyan vektor, amelyek közül bármely kettőnek az összege legalább egységnyi hosszúságú!

Kovács Bálint, Székelyudvarhely

Megoldás. Tekinthejtük úgy, hogy a vektoroknak közös az O kezdőpontja és ekkor a végpontjaik az O középpontú egységsugarú körön helyezkednek el. (1 pont)

Tekintsük az $\vec{OA}$ és $\vec{OB}$ egységvektorokat és az $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$ vektort (lásd a mellékelt ábrát).



Az OAB egyenlő szárú háromszögben P az AB szakasz felezőpontja. Ekkor

$$|\vec{OC}| = |\vec{OA} + \vec{OB}| = |2 \cdot \vec{OP}| = 2 \cdot |\vec{OA}| \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \cdot \cos \frac{\alpha}{2},$$

ahol $\alpha \in [0, \pi]$ az $\vec{OA}$ és $\vec{OB}$ szöge. (2 pont)

Az $|\vec{OC}| \geq 1$ akkor és csak akkor teljesül, ha $2 \cos \frac{\alpha}{2} \geq 1$, ahonnan $\cos \frac{\alpha}{2} \geq \frac{1}{2}$, azaz $\frac{\alpha}{2} \leq 60^\circ$, tehát $\alpha \leq 120^\circ$. (2 pont)

Az O középpontú egységsugarú kört felosztjuk három diszjunkt 120° -os körívre. Mivel $202204 = 3 \cdot 67401 + 1$, ezért a vektorok között biztosan van 67402 olyan, amelyeknek a végpontjai ugyanazon a köríven helyezkednek el. Ezek közül bármely kettő összegének a hossza legalább 1. (4 pont)

Hivatalból (1 pont)



4. feladat (10 pont). Tudva, hogy x és y az

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ y^3 - 3x^2y = -\sqrt{3} \end{cases}$$

egyenletrendszer valós megoldásai, számítsd ki az $(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ kifejezés értékét és oldd meg az egyenletrendszert! (***)

Megoldás. A második egyenlet mindkét oldalát beszorozzuk $-i$ -vel, majd összeadjuk a két egyenlet megfelelő oldalait, és azt kapjuk, hogy

$$x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i = 1 + i\sqrt{3},$$

vagyis

$$(x + iy)^3 = 1 + i\sqrt{3}. \quad (3 \text{ pont})$$

Legyen $z = x + iy$.

(1 pont)

A kiszámolandó kifejezés

$$(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = |z|^3 = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2.$$

(2 pont)

Másrészt az $(x + iy)^3 = 1 + i\sqrt{3}$ egyenlet a következő alakba írható:

$$z^3 = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right),$$

amelynek megoldásai

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= \sqrt[3]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right), \\ &= \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{(6k+1)\pi}{9} + i \sin \frac{(6k+1)\pi}{9} \right), \quad k \in \{0, 1, 2\}. \end{aligned}$$

(1 pont)

De $z_{k+1} = x_{k+1} + iy_{k+1}$, ezért a megoldások

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{2} \cos \frac{\pi}{9}, & x_2 = \sqrt[3]{2} \cos \frac{7\pi}{9}, & x_3 = \sqrt[3]{2} \cos \frac{13\pi}{9}, \\ y_1 = \sqrt[3]{2} \sin \frac{\pi}{9}, & y_2 = \sqrt[3]{2} \sin \frac{7\pi}{9}, & y_3 = \sqrt[3]{2} \sin \frac{13\pi}{9}. \end{cases}$$

(2 pont)

Hivatalból

(1 pont)

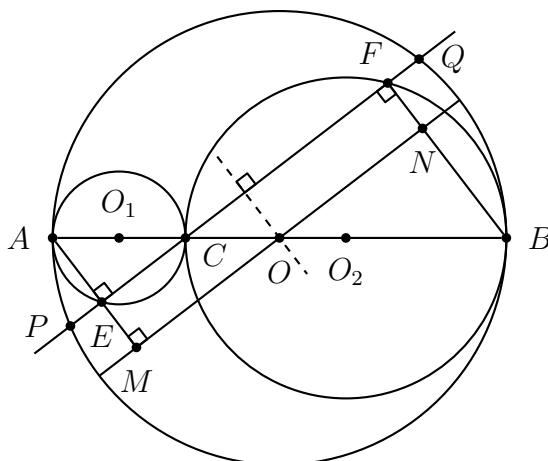
■

5. feladat (10 pont). Adott az AB szakasz és annak egy C belső pontja. Az AB -vel nem egybeeső, a C ponton áthaladó d egyenes az AC átmérőjű kört másodjára az E pontban, a BC átmérőjű kört másodjára az F pontban, valamint az AB átmérőjű kört a P és Q pontokban metszi. Igazold, hogy $PE = FQ$!

Dávid Géza, Székelyudvarhely

Megoldás. Legyen O az AB szakasz felezőpontja. Feltételezhetjük, hogy C az AO szakasz belsejében van. Meghúzzuk az O ponton áthaladó PQ -val párhuzamos egyenest, amely az AE egyenest az M pontban, és a BF egyenest az N pontban metszi.

(2 pont)



Az $\widehat{AEC}$, illetve $\widehat{CFB}$ félkörbe írt kerületi szögek, ezért derékszögek, tehát az $MNFE$ négyszög egy téglalap. (2 pont)

Az AMO és BNO háromszögek kongruensek, mert $OA = OB$, $\widehat{OMA} = \widehat{ONB} = 90^\circ$ és $\widehat{AOM} = \widehat{BON}$ (csúcsszögek). (1 pont)

Innen következik, hogy O az MN szakasz felezőpontja. (1 pont)

Tehát az O pontból a PQ húrra húzott merőleges a PQ szakaszt felezi, valamint az $MNFE$ téglalap szimmetriatengelye, így felezi az EF szakaszt is. (2 pont)

Tehát az EF és a PQ szakaszok felezőpontja közös, amiből következik, hogy $PE = FQ$. (1 pont)

Hivatalból (1 pont)

■

Megjegyzés. A fenti megoldás abban az esetben is érvényes, ha a P és a Q pontot felcseréljük. A bizonyítás tehát ábrafüggetlen.

6. feladat (10 pont). Határozd meg az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozatot, tudva, hogy bármely $m, n \in \mathbb{N}^*$ esetén $a_n \in \mathbb{N}^*$ és

$$a_{m \cdot n} = (m, a_n) \cdot [a_m, n].$$

Az (x, y) az x és y természetes számok legnagyobb közös osztóját és $[x, y]$ a legkisebb közös többszörösét jelöli.

Turdean Katalin, Zilah

Megoldás. A feltétel alapján

$$a_{m \cdot n} = (m, a_n) \cdot [a_m, n] = (n, a_m) \cdot [a_n, m] = a_{n \cdot m}, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*. \quad (1 \text{ pont})$$

Innen következik, hogy

$$a_{m \cdot n}^2 = (m, a_n) \cdot [m, a_n] \cdot (n, a_m) \cdot [n, a_m], \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Tudjuk, hogy ha $a, b \in \mathbb{N}^*$, akkor $a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b]$, ezért az előbbi összefüggés a következő alakba írható:

$$a_{m \cdot n}^2 = m \cdot n \cdot a_n \cdot a_m, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*. \quad (2 \text{ pont})$$

Ha $m = 1$, akkor bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $a_n^2 = n \cdot a_n \cdot a_1$, és mivel $a_n \neq 0$, ezért

$$a_n = na_1. \quad (1 \text{ pont})$$

A feltételből és az előbbi összefüggésből következik, hogy

$$m \cdot n \cdot a_1 = (m, na_1) \cdot [ma_1, n], \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Ha $m = 1$, akkor $na_1 = (1, na_1) \cdot [a_1, n] = 1 \cdot [a_1, n]$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. (2 pont)

Ugyanakkor $na_1 = (n, a_1) \cdot [n, a_1] = (n, a_1) \cdot na_1$, ahonnan $(n, a_1) = 1$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, ami csak akkor lehetséges, ha $a_1 = 1$. (2 pont)

Innen következik, hogy $a_n = n$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Ez a sorozat teljesíti a feladatban megadott feltételt. (1 pont)

Hivatalból (1 pont)

■

Második megoldás. Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ tetszőleges, ekkor

$$a_n = a_{n \cdot 1} = (n, a_1) \cdot [a_n, 1] = (n, a_1) \cdot a_n.$$

A feltétel szerint $a_n \neq 0$, ezért $(a_1, n) = 1$, bármilyen $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. **(4 pont)**

Ha $n = a_1$, akkor innen következik, hogy $(a_1, a_1) = 1$, vagyis $a_1 = 1$. Továbbá minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$a_n = a_{1 \cdot n} = (1, a_n) \cdot [a_1, n] = 1 \cdot [n, 1] = n. \quad \textbf{(4 pont)}$$

Tehát $a_n = n$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, valamint ez a sorozat teljesíti a kitűzött feltételt, mert

$$a_{m \cdot n} = m \cdot n = (m, n) \cdot [m, n] = (m, a_n) \cdot [a_m, n]. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Hivatalból **(1 pont)**



IV. országos magyar matematikaolimpia

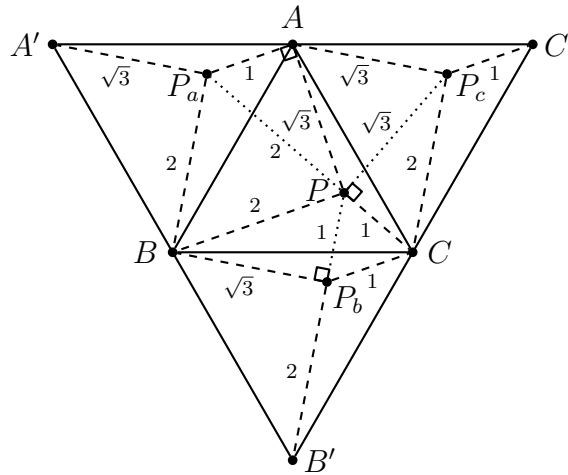
XXXI. EMMV

országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

XI-XII. osztály – II. forduló

1. feladat (10 pont). Az ABC szabályos háromszög belsejében adott egy P pont, melyre $PA = \sqrt{3}$, $PB = 2$ és $PC = 1$. Határozd meg az ABC háromszög oldalainak hosszát! (***)

Első megoldás. Az ABC háromszöget elforgatjuk 60° -kal trigonometriai irányban a B , C , illetve az A csúcs körül. **(2 pont)**



Használjuk az ábra jelöléseit. Így az $AP_aBP_bCP_c$ hatszög területe kétféleképpen írható fel:

$$2 \cdot T_{ABC} = T_{AP_aBP_bCP_c} = T_{PP_aB} + T_{PP_bC} + T_{PP_cA} + T_{PAP_a} + T_{PBP_b} + T_{PCP_c}. \quad (2 \text{ pont})$$

Mivel $1^2 + \sqrt{3}^2 = 2^2$, vagyis $AP_a^2 + AP^2 = PP_a^2$, ezért a PAP_a háromszög derékszögű.

Hasonlóan a PBP_b és a PCP_c háromszög is derékszögű. Így mindhárom háromszög területe $\frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2}$.

(1 pont)

A 60° -os forgatások miatt a PP_cA , PP_bC , PP_aB háromszögek egyenlő oldalúak.

(1 pont)

Ha a -val jelöljük az ABC háromszög oldalhosszát, akkor

$$2 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{2^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{1^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}^2 \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (2 \text{ pont})$$

ahonnan $2a^2 = 4 + 1 + 3 + 6$, vagyis $a^2 = 7$. Tehát $a = \sqrt{7}$.

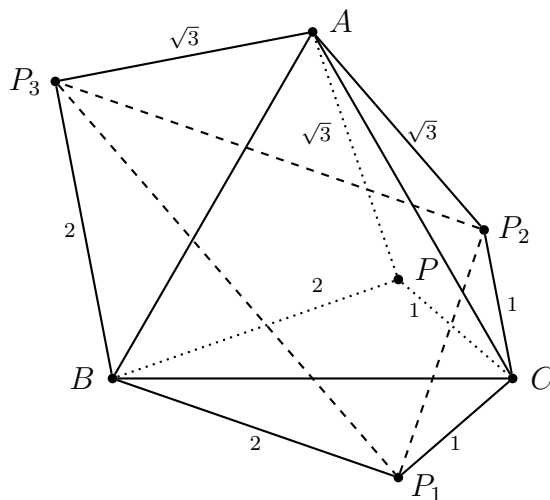
(1 pont)

Hivatalból

(1 pont)



Második megoldás. Jelöljük a P pont szimmetrikusait a BC , CA és AC oldalakra nézve rendre P_1 -gyel, P_2 -vel és P_3 -mal.



Ekkor $BPC_{\Delta} \equiv BP_1C_{\Delta}$, $CPA_{\Delta} \equiv CP_2A_{\Delta}$, $APB_{\Delta} \equiv AP_3B_{\Delta}$ és így $T_{AP_2CP_1BP_3} = 2 \cdot T_{ABC}$, valamint (2 pont)

$$\widehat{P_1CP_2} = \widehat{P_2AP_3} = \widehat{P_3BP_1} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ. \quad (2 \text{ pont})$$

Így a P_1CP_2 , P_2AP_3 , P_3BP_1 háromszögekben a koszinusz-tétel alapján

$$\begin{aligned} P_1P_2^2 &= 1^2 + 1^2 - 2 \cos 120^\circ = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3, \\ P_2P_3^2 &= 3 + 3 - 2 \cdot 3 \cos 120^\circ = 6 + 6 \cdot \frac{1}{2} = 9, \\ P_3P_1^2 &= 4 + 4 - 2 \cdot 4 \cos 120^\circ = 8 + 8 \cdot \frac{1}{2} = 12. \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

Tehát $P_1P_2^2 + P_2P_3^2 = P_3P_1^2$, ezért a $P_1P_2P_3$ háromszög derékszögű. Így

$$T_{P_1P_2P_3} = \frac{P_1P_2 \cdot P_2P_3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}. \quad (1 \text{ pont})$$

Ugyanakkor

$$\begin{aligned} T_{P_1CP_2} + T_{P_2AP_3} + T_{P_3BP_1} &= \frac{1 \cdot 1 \cdot \sin 120^\circ}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sin 120^\circ}{2} + \frac{2 \cdot 2 \cdot \sin 120^\circ}{2} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} \right) \sin 120^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}. \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

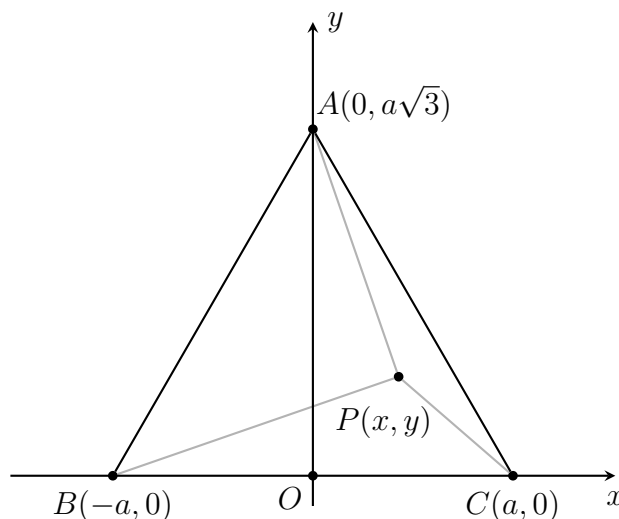
Ezeket felhasználva, az $AP_2CP_1BP_3$ hatszög területe

$$T_{AP_2CP_1BP_3} = T_{P_1P_2P_3} + T_{P_1CP_2} + T_{P_2AP_3} + T_{P_3BP_1} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} = \frac{7}{2}\sqrt{3}. \quad (1 \text{ pont})$$

Innen kapjuk, hogy $T_{ABC} = \frac{7}{4}\sqrt{3}$. Mivel $T_{ABC} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, ahol $AB = a$, ezért $a = \sqrt{7}$. (1 pont)
Hivatalból (1 pont)

■

Harmadik megoldás. Helyezzünk el egy xOy derékszögű koordináta-rendszert a mellékelt ábra szerint, és vegyük fel a $P(x, y)$ pontot a háromszög belsejében. (1 pont)



A BP szakasz hossza $BP = \sqrt{(x+a)^2 + y^2} = 2$, (1 pont)

a PC szakasz hossza $PC = \sqrt{(a-x)^2 + y^2} = 1$, (1 pont)

illetve az AP szakasz hossza $AP = \sqrt{x^2 + (y - a\sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$. (1 pont)

Így négyzetreemelés után felírhatjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 4 = a^2 + 2ax + x^2 + y^2 \\ 3 = 3a^2 - 2ay\sqrt{3} + y^2 + x^2 \\ 1 = a^2 - 2ax + x^2 + y^2. \end{cases}$$

Ebből ekvivalens átalakításokkal kapjuk, hogy

$$\begin{cases} 3 = 4ax, \\ \frac{5}{2} = a^2 + x^2 + y^2, \\ 1 = 4a^2 - 4ay\sqrt{3}. \end{cases} \quad (3 \text{ pont})$$

Az első egyenletből az $x = \frac{3}{4a}$, a harmadikból pedig az $y = \frac{4a^2-1}{4a\sqrt{3}}$ kifejezést kapjuk. Innen, a második egyenlet alapján

$$\frac{5}{2} = a^2 + \frac{9}{16a^2} + \frac{(4a^2-1)^2}{48a^2}.$$

Beszorozva $48a^2$ -tel, majd mindent egy oldalra rendezve, kapjuk, hogy

$$16a^4 - 32a^2 + 7 = 0. \quad (1 \text{ pont})$$

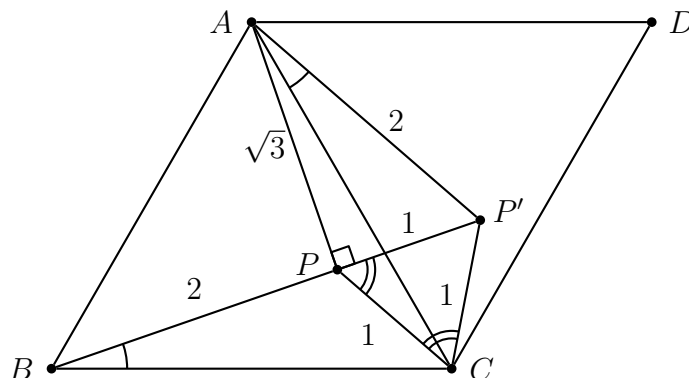
Ennek az a^2 -ben másodfokú egyenletnek a megoldásai $a^2 = \frac{7}{4}$, vagy $a^2 = \frac{1}{4}$. Azaz $AB = \sqrt{7}$ vagy $AB = 1$. Az utóbbi nem lehetséges, mert az APB háromszögben a háromszög-egyenlőtlenség alapján $AB > 1$. Így $AB = \sqrt{7}$. (1 pont)

Hivatalból (1 pont)



Negyedik megoldás. Az ABC háromszöget elforgatjuk a C pont körül 60° -os szöggel úgy, hogy a B pont az A pontba kerüljön. (2 pont)

Legyen D és P' az A -nak, illetve a P -nek a forgatás szerinti képe.



A $PP'C$ háromszög egyenlő oldalú, így $PP' = 1$. (1 pont)

Mivel $1^2 + \sqrt{3}^2 = 2^2$, ezért $PP'^2 + PA^2 = P'A^2$, vagyis az APP' háromszög derékszögű. (2 pont)

Ekkor

$$\widehat{APC} = \widehat{APP'} + \widehat{P'PC} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ. \quad (1 \text{ pont})$$

Az APC háromszögben a koszinusz-tétel alapján

$$\begin{aligned} AC^2 &= PA^2 + PC^2 - 2PA \cdot PC \cdot \cos \widehat{APC} \\ &= 3 + 1 - 2\sqrt{3} \cdot 1 \cdot \cos 150^\circ \\ &= 4 - 2\sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 7. \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

Tehát $AB = \sqrt{7}$. (2 pont)

Hivatalból (1 pont)



2. feladat (10 pont). Adott az ABC háromszög, valamint az $M \in (AB)$ és az $N \in (AC)$ pontok úgy, hogy $MN \nparallel BC$. Legyen $MN \cap BC = \{P\}$. Igazold, hogy az ABC , BMP , AMN és NCP háromszögek köré írt körök egy ponton mennek át! (***)

Megoldás. Az AMN és NCP háromszögek köré írt körök egyik metszéspontja N . Ha ezek a körök N -ben érintenék egymást, akkor azt kapnánk, hogy $AM \parallel PC$, ami nem igaz. Ezért a két körnek mindig lesz egy második metszéspontja, jelöljük ezt Q -val. (2 pont)

A továbbiakban az $x^6 + y^6 = 65$ egyenletet fogjuk megoldani, a $t = x - y$ jelölés és az $xy = 2t$ összefüggés segítségével.

Észrevesszük, hogy

$$x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy = t^2 + 4t. \quad (1 \text{ pont})$$

Hasonlóan az $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2$ összefüggésből következik, hogy

$$x^4 + y^4 = t^4 + 8t^3 + 8t^2. \quad (1 \text{ pont})$$

Analóg módon az

$$x^6 + y^6 = (x^2 + y^2)(x^4 + y^4 - x^2y^2) = (t^2 + 4t)(t^4 + 8t^3 + 4t^2) \quad (1 \text{ pont})$$

eredményhez jutunk, tehát az eredeti egyenlet a

$$(t^2 + 4t)(t^4 + 8t^3 + 4t^2) = 65 \quad (1 \text{ pont})$$

alakba írható. Ennek az egyenletnek csak a $t = \frac{x^2}{x+2}$ alakú megoldásai keressük, ahol x egy valós szám. Az x -et a t függvényében kifejezve, az $x^2 - tx - 2t = 0$ összefüggéshez jutunk. Ennek a diszkriminánsa $\Delta = t^2 + 8t$, ami akkor nem negatív, ha $t \geq 0$ vagy $t \leq -8$. (1 pont)

Ha $t \leq -8$, akkor a másodfokú függvények tulajdonságai alapján

$$(t^2 + 4t)(t^4 + 8t^3 + 4t^2) = t^2((t+2)^2 - 4)((t+4)^2 - 12) \geq 64 \cdot 32 \cdot 4 > 65,$$

vagyis ebben az esetben nem jutunk megoldáshoz. (1 pont)

Ha $t \geq 0$, akkor az $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = (t^2 + 4t)(t^4 + 8t^3 + 4t^2)$ függvény szigorúan növekvő és ezért ebben az esetben legfeljebb egy megoldásunk lehet. Észrevesszük, hogy $t = 1$ megoldás.

Összefoglalva az $x^6 + \left(\frac{2x}{x+2}\right)^6 = 65$ egyenletnek pontosan azok az x -ek a megoldásai, amelyekre $\frac{x^2}{x+2} = 1$, vagyis $x = -1$ és $x = 2$. (2 pont)

Hivatalból (1 pont)

■

Második megoldás. Értelmezzük az $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^6 + \left(\frac{2x}{x+2}\right)^6 - 65$ folytonos és deriválható függvényt. Ekkor $f'(x) = 6x^5(1 + 2^7(x+2)^{-7})$, vagyis $f'(x)$ pontosan akkor 0, ha $x = 0$ vagy $x = -4$. (2 pont)

Ezek alapján elkészítjük az f függvény változási táblázatát.

x	$-\infty$	-4	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	0	$+\infty \mid -\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$2^{13} - 65 > 0$	$+\infty \mid +\infty$	-65	$+\infty$

(5 pont)

Ennek alapján az $f(x) = 0$ egyenletnek pontosan két valós gyöke van, egy a $(-2, 0)$ intervallumban, egy pedig a $(0, \infty)$ intervallumban.

Észrevesszük, hogy $x = -1$ és $x = 2$ megoldás és az eddigiek alapján pontosan ez a két valós megoldása van ennek az egyenletnek. (2 pont)

Hivatalból (1 pont)

■

4. feladat (10 pont). Legyenek $a, b, c \in (0, \infty)$ valós számok úgy, hogy $abc = 1$. Igazold a

$$9a^3 + 9b^3 + 9c^3 \geq 9a^2 + 9b^2 + 9c^2 - 4a - 4b - 4c + 12$$

egyenlőtlenséget!

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Első megoldás. A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alapján $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$. (1 pont)

Az igazolandó egyenlőtlenség szimmetrikus, ezért feltételezhetjük, hogy $a \geq b \geq c > 0$. Ekkor a rendezési tétel alapján felírhatjuk az

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &\geq ba^2 + cb^2 + ac^2 \\ a^3 + b^3 + c^3 &\geq ca^2 + ab^2 + bc^2 \\ a^3 + b^3 + c^3 &\geq aa^2 + bb^2 + cc^2 \end{aligned} \quad (3 \text{ pont})$$

egyenlőtlenségeket. Ezen egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összeadva azt kapjuk, hogy

$$3(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2), \quad (2 \text{ pont})$$

ahonnan $3(a^3 + b^3 + c^3) \geq 3(a^2 + b^2 + c^2)$. Innen a

$$9(a^3 + b^3 + c^3) + 4(a + b + c) \geq 9(a^2 + b^2 + c^2) + 4(a + b + c) \quad (1 \text{ pont})$$

eredményhez jutunk. Mivel

$$4(a + b + c) \geq 4 \cdot 3 = 12, \quad (1 \text{ pont})$$

ezért a tagok átrendezése után a

$$9a^3 + 9b^3 + 9c^3 \geq 9a^2 + 9b^2 + 9c^2 - 4a - 4b - 4c + 12 \quad (1 \text{ pont})$$

igaz egyenlőtlenséget kapjuk.

Hivatalból

(1 pont) ■

Második megoldás. Tekintsük az $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{3x} - e^{2x} + \frac{4}{9}e^x$ függvényt. (2 pont)

Ekkor

$$f'(x) = 3e^{3x} - 2e^{2x} + \frac{4}{9}e^x \quad (1 \text{ pont})$$

és

$$f''(x) = 9e^{3x} - 4e^{2x} + \frac{4}{9}e^x = e^x \left(3e^x - \frac{2}{3} \right)^2 \geq 0, \quad (1 \text{ pont})$$

vagyis az f függvény konvex. Az $x = \ln a$, $y = \ln b$ és $z = \ln c$ valós számokra alkalmazva a Jensen-féle egyenlőtlenséget, az

$$\frac{f(x) + f(y) + f(z)}{3} \geq f\left(\frac{x + y + z}{3}\right) = f\left(\frac{\ln(abc)}{3}\right) = f(0) = \frac{4}{9}, \quad (3 \text{ pont})$$

eredményhez jutunk, vagyis $f(x) + f(y) + f(z) \geq \frac{4}{3}$. (1 pont)

Az $f(x) = e^{3 \ln a} - e^{2 \ln a} + \frac{4}{9}e^{\ln a} = a^3 - a^2 + \frac{4}{9}a$ összefüggés és ennek analógjai alapján írhatjuk, hogy

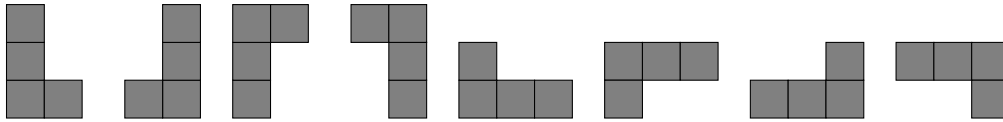
$$a^3 + b^3 + c^3 - a^2 - b^2 - c^2 - \frac{4}{9}(a + b + c) \geq \frac{4}{3}, \quad (1 \text{ pont})$$

ahonnan következik a kért egyenlőtlenség.

Hivatalból

(1 pont) ■

5. feladat (10 pont). Egy 8×8 -as sakktáblán L alakú résznek (tetraminónak) nevezzük az alábbi ábrán látható alakzatokat:

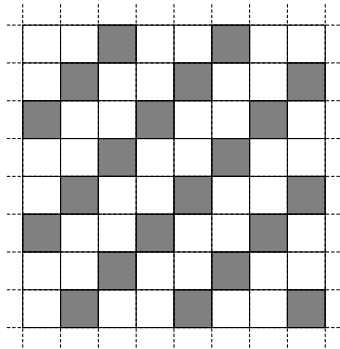


- a) Jelölj meg a sakktáblán 21 mezőt úgy, hogy a sakktábla minden L alakú részén legyen legalább egy megjelölt mező!
- b) Bizonyítsd be, hogy ha csak 20 mezőt jelölünk meg a sakktáblán, akkor ez a tábla biztosan tartalmaz egy olyan L alakú részt, amelyen nincs egyetlen megjelölt mező sem!

*Tóth György, Kolozsvár
András Szilárd, Kolozsvár*

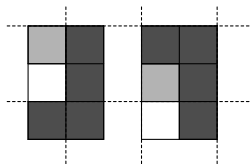
Megoldás.

- a) Az alábbi ábrán megjelölt 21 mező teljesíti a kért feltételeket.



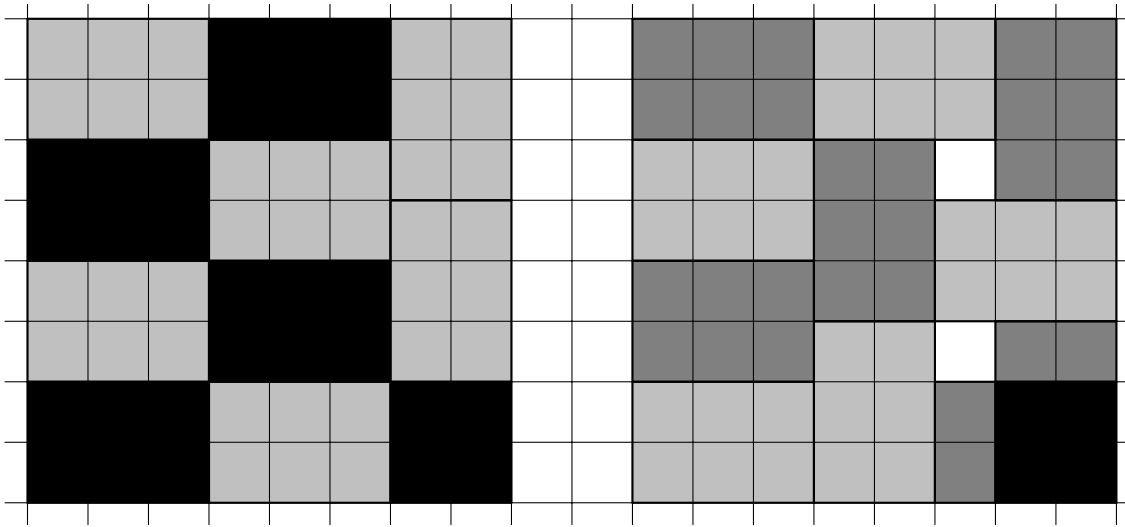
(4 pont)

- b) Vegyük észre, hogy egy 3×2 -es részen, ha nem jelölünk ki legalább két mezőt, akkor van azon a 3×2 -es részen egy üres L alakzat. Valóban, ha csak egy mezőt jelölünk meg, akkor az vagy sarokmező (a 2×3 -as részben) vagy nem. A mellékelt ábra mutatja, hogy mindkét esetben van olyan L alakzat, amely nem tartalmaz megjelölt mezőt.



Az eredeti tábla felbontható 10 diszjunkt 3×2 -es részre és egy 2×2 -es részre. Tehát, ha 20 mezőt jelöltünk meg, akkor két eset lehetséges: vagy üres a 2×2 -es és minden 3×2 -es részen van pontosan 2 megjelölt mező, vagy van olyan 3×2 -es rész, amelyen legfeljebb egy mezőt jelöltünk meg. A második esetben az első észrevétel alapján van a táblán olyan L alakzat, amely nem tartalmaz megjelölt mezőt (az egy megjelölt mezőt tartalmazó 3×2 -es részen). Az első esetben a 2×2 -es részt 3×3 -asra kiegészítve, ennek a darabnak 3 megjelölt mezőt kell tartalmaznia. Ennek a belátásához vegyünk két 2×3 -as részt, amely közös része 2×2 -es. Ha a közös rész üres, vagy egy megjelölt részt tartalmaz, akkor a közös részen kívüli 1×2 -es részek mindegyike egy vagy két megjelölt mezőt kell tartalmazzon, vagyis összesen legalább hármat tartalmaz a 3×3 -as rész. Ha a közös részen két megjelölt mező van akkor 3×3 -as rész megmaradt része (egy egyenlő szárú L alak), kell tartalmazzon legalább egy megjelölt mezőt. Így ebben az esetben is legalább 3 megjelölt mező van. A maradék táblán

viszont további 9 darab páronként diszjunkt 3×2 -es részt lehet beazonosítani, ezért ezek legalább további 18 megjelölt mezőt kellene tartalmazzanak ahhoz, hogy ne legyen olyan L alakzat, amely nem tartalmaz megjelölt mezőt. Ez nem lehetséges mivel összesen csak 20 mező van megjelölve és $18 + 3 = 21 > 20$. Tehát a 20 megjelölt mező esetén biztosan van olyan L alakzat a táblán, amely nem tartalmaz megjelölt mezőt. A következő két ábra szemlélteti a gondolatmenetnek ezt a részét.



(5 pont)

Hivatalból

(1 pont)



6. feladat (10 pont). A sík koordináta-rendszerének rácspontjaiból rácspontjaiba lépegetünk. Az $O(a_0, b_0)$ pontból indulunk, ahol $a_0 = b_0 = 0$. Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén az n -edik lépés azt jelenti, hogy az $(a_{n-1}, b_{n-1}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pontról átlépünk egy tőle pontosan 13 egység távolságra lévő $(a_n, b_n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pontra. Tudjuk, hogy az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatok monoton növekvők. Határozd meg, hogy legkevesebb hány lépéssel juthatunk el a $(2022, 2022)$ pontba!

*Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy
Zsombori Gabriella, Csíkszereda*

Megoldás. Minden lépésben a jelenlegi helyzetünkhöz a $(0, 13)$, $(13, 0)$, $(5, 12)$, $(12, 5)$ vektorok valamelyikét adjuk hozzá.

(1 pont)

A vektorokból rendre a, b, c és d darabot felhasználva az

$$a \cdot (0, 13) + b \cdot (13, 0) + c \cdot (5, 12) + d \cdot (12, 5)$$

pontba jutunk. Akkor jutunk el a $(2022, 2022)$ pontba, ha teljesül a

$$(2022, 2022) = a \cdot (0, 13) + b \cdot (13, 0) + c \cdot (5, 12) + d \cdot (12, 5)$$

összefüggés, ahol a megtett lépések száma $(a + b + c + d)$, aminek keressük a minimumát. (1 pont)
Az előbbi egyenlőség azt jelenti, hogy

$$\begin{cases} 13b + 5c + 12d = 2022, \\ 13a + 12c + 5d = 2022. \end{cases} \quad (2 \text{ pont})$$

Az előbbi egyenletek megfelelő oldalait összeadva kapjuk, hogy

$$13(a + b) + 17(c + d) = 4044. \quad (1 \text{ pont})$$

Legyen $p = a + b$ és $q = c + d$, tehát p és q természetes számok. A $p + q$ összeg minimumát keressük úgy, hogy a $13p + 17q = 4044$ feltétel is teljesüljön. Mivel

$$4044 = 13p + 17q = 13(p + q) + 4q,$$

ezért $p + q$ akkor minimális, ha q maximális. (1 pont)

A $13p + 17q = 4044$ diofantikus egyenlet megoldásai közül a feltételeknek megfelelő legnagyobb q a 231 és ekkor $p = 9$. Tehát $p + q = a + b + c + d$ minimuma $231 + 9 = 240$. (1 pont)

Ez a minimális lépés szám meg is valósítható, például ha a

$$(2022, 2022) = 1 \cdot (0, 13) + 8 \cdot (13, 0) + 122 \cdot (5, 12) + 109 \cdot (12, 5)$$

felbontást tekintjük.

(2 pont)

Hivatalból

(1 pont)



Megjegyzés. A $13p + 17q = 4044$ diofantikus egyenlet általános megoldása

$$p = 9 + 17t, \quad q = 231 - 13t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Annak a feltétele, hogy p, q természetes számok legyenek az, hogy $0 \leq t \leq 17$. Így a

$$p + q = 240 + 4t$$

kifejezés minimuma 240. Az a, b, c, d számok meghatározásához meg kell oldjuk a

$$\begin{cases} 13b + 5c + 12d = 2022, \\ 13a + 12c + 5d = 2022, \\ a + b = 9, \\ c + d = 231. \end{cases}$$

diofantikus egyenletrendszer a természetes számok halmazán. Két megoldás van, ezek

$$(1, 8, 122, 109) \quad \text{és} \quad (8, 1, 109, 122).$$