

III. országos magyar matematikaolimpia

XXX. EMMV

Déva, 2020. február 11–16.

V. osztály

1. feladat. Tudor magassága $\frac{4}{3}$ -a Morgó magasságának, Szundi magassága pedig 10 cm-rel több, mint Morgó magasságának $\frac{2}{3}$ -a. Szundi, Hapci, Vidor, Szende és Kuka magasságai egymás utáni természetes számok ebben a sorrendben. Ha a hét törpe átlagmagassága 45 cm, határozd meg a magasságukat külön-külön!

2. feladat. Határozd meg azokat az x és y nullától különböző természetes számokat, amelyekre

$$7^{x+1} + 19^{y-1} - 382 = 2020.$$

3. feladat. Az Óperenciás-tenger Nevenincs szigetéről egy hajó indul a Kincsek szigetére. Két óra múlva néhány kalóz motorcsónakkal a hajó után indul. Újabb négy óra múlva a kalózok utolérik és megelőzik a hajót, így egy órával hamarabb érnek a Kincsek szigetére. Hány óra alatt tette meg a két sziget közötti utat a hajó, illetve a motorcsónak külön-külön, ha végig ugyanazon az útvonalon haladtak és végig állandó volt a sebességük?

4. feladat. Egy 3×3 -as táblázatot úgy töltünk ki egymástól különböző természetes számokkal, hogy minden sor, oszlop és átló mentén a középső szám négyzete egyenlő legyen a másik két szám szorzatával.

a) Töltsd ki a táblázatot, ha a középső négyzetben 6-os van!

	6	

b) Kitölthető-e a táblázat, ha a 6-os helyett a középső négyzetben egy prímszám szerepel?

c) Ha a középső négyzetben tetszőleges összetett szám van, akkor kitölthető-e a táblázat?

III. országos magyar matematikaolimpia

XXX. EMMV

Déva, 2020. február 11–16.

VI. osztály

1. feladat. A $\mathcal{C}(O; R)$ körön felvesszük az $A_1, A_2, \dots, A_{15}$ pontokat ebben a sorrendben. Tudjuk, hogy $\widehat{A_1A_2} = 5^\circ$, $\widehat{A_2A_3} = 8^\circ$, $\widehat{A_3A_4} = 11^\circ$, $\dots$, $\widehat{A_{14}A_{15}} = 44^\circ$ (mindegyik körív az előzőhöz képest 3° -kal nagyobb).

- Igazold, hogy A_2 és A_{11} átmérősen ellentett pontok!
- Számítsd ki az $\widehat{A_3OA_{12}}$ tulajdonképpeni szög mértékét!
- Legyen $X, Y \in \mathcal{C}$ úgy, hogy OX és OY az A_2OA_5 , illetve az A_5OA_{11} szög szögfelezője. Ha d az Y ponton átmenő, az OX -el párhuzamos egyenes, akkor igazold, hogy d a kör érintője!

2. feladat. Adottak az $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{4n+7}{3n+4} \text{ reducibilis} \right\}$ és $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = p^2, p \in \mathbb{N}\}$ halmazok.

- Határozd meg az A halmaz elemeit!
 - Igazold, hogy az A és B diszjunkt halmazok!
- 3. feladat.** Adott az ABC háromszög, ahol az A és B szögek mértékei, valamint a C külső szög mértéke fordítottan arányosak a 6,6, az 5,5 és az x számokkal.

- Határozd meg az x számot!
- Határozd meg a háromszög szögeinek mértékét, ha a C szög mértéke 4° -kal nagyobb a B szög mértékének 1,1-szeresénél!

4. feladat. Egy iskola VI. osztályaiban összesen 50-nél kevesebb tanuló van. Egy felmérés után a következőket tudtuk meg:

- nincs olyan hónap, amelyben ne ünnepelné születésnapját legalább 3 tanuló;
- a tanulók 50%-a lány;
- 6-szor kevesebb szemüveget viselő tanuló van, mint szemüveget nem viselő.

- Hány VI. osztályos tanuló van?
- A tanulók között szétosztottunk 902 csokit, mindenki kapott legalább egyet. Igazold, hogy létezik két olyan tanuló, aki ugyanannyi csokit kapott!

III. országos magyar matematikaolimpia

XXX. EMMV

Déva, 2020. február 11–16.

VII. osztály

1. feladat.

- a) Határozd meg az $n \in \mathbb{N}^*$ értékét úgy, hogy $A = \frac{2020}{1 \cdot 3} + \frac{2020}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{2020}{(2n-1)(2n+1)}$ természetes szám legyen!
- b) Igazold, hogy $\sqrt{(2^{2020} + 3^{2019} + 4^{2020})^{2020} + 2021}$ irracionális szám!
- c) Mutasd ki, hogy $\sqrt{2019 \cdot 2020 + \sqrt{2019 \cdot 2020 + \sqrt{2019 \cdot 2020}}} < 2020$.

2. feladat.

- a) Az $x \neq -5$, $y \neq -7$ és $z \neq -9$ racionális számokra fennáll a következő aránysor:

$$\frac{x-5}{x+5} = \frac{y-3}{y+7} = \frac{z-1}{z+9}.$$

Számítsd ki az x , y és z értékét, ha $x + y + z = 69$.

- b) Az $x \neq -5$, $y \neq -7$ és $z \neq -9$ racionális számokra fennáll a következő egyenlőség:

$$\frac{2020}{x+5} + \frac{2020}{y+7} + \frac{2020}{z+9} = 202.$$

Számítsd ki az $S = \frac{x-5}{x+5} + \frac{y-3}{y+7} + \frac{z-1}{z+9}$ összeg értékét!

3. feladat. Az $ABCD$ konvex négyszögben legyen M és P az AB , illetve CD oldal felezőpontja. Igazold, hogy $AB \parallel CD$ akkor és csak akkor, ha $T_{AMPD} \cdot T_{MPCB} = \frac{T_{ABCD}^2}{4}$.

4. feladat. Adott az $ABCD$ négyzet. Legyen $\mathcal{C}_1$ a B középpontú BA sugarú kör, valamint $\mathcal{C}_2$ a D középpontú DA sugarú kör. Egy az A ponton átmenő tetszőleges egyenes a $\mathcal{C}_1$ és $\mathcal{C}_2$ köröket az E és F pontokban metszi. A C pontból az EF egyenesre húzott merőleges egyenes az EF -et M -ben, a $\mathcal{C}_1$ kört másodszor P -ben metszi. A PA egyenes a CF egyenest N -ben, a $\mathcal{C}_2$ kört másodszor R -ben metszi. Igazold, hogy:

- a) az EFC egyenlő szárú derékszögű háromszög;
- b) a CPR egyenlő szárú derékszögű háromszög;
- c) az $AECR$ négyszög paralelogramma;
- d) $EP = FR$.

Megjegyzés: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér. Munkaidő 3 óra.

III. országos magyar matematikaolimpia

XXX. EMMV

Déva, 2020. február 11–16.

VIII. osztály

1. feladat. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$(2x^2 - 2x + 3)(45y^2 - 30y + 41) = 90.$$

2. feladat. Igazold, hogy

- a) $1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ és $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ esetén;
- b) $2020^{2020} - 1$ osztható 2019-cel;
- c) $\frac{2020^{2020} - 1}{2019}$ nem teljes négyzet!

3. feladat. Bűvös piramist építenek 1 cm oldalélű kockákból. Ennek minden szintje négyzet alakú és a szintek rendre $n^2, (n-1)^2, \dots, 3^2, 2^2, 1^2$ darab kockát tartalmaznak. Miután egymáshoz rögzítik az építőelemeket, egy 2352 cm^2 teljes felszíni testet nyernek. Hány szintes az elkészített piramis?

4. feladat. Az α, β és γ három páronként egymásra merőleges sík, melyek az O pontban metszik egymást, a teret 8 tényolcadra osztva. Legyen $\mathcal{A}$ azon pontok halmaza a térben, melyek távolsága az α, β és γ síktól rendre 8 cm, 6 cm és 4 cm, valamint $\mathcal{B}$ azon pontok halmaza a térben melyek távolsága az α, β és γ síktól rendre 12 cm, 9 cm és 6 cm.

- a) Igazold, hogy létezik, olyan $P \in \mathcal{A}$ és $Q \in \mathcal{B}$, amelyre az O, P és Q pontok kollineárisak!
- b) Hány olyan páronként egymással nem egybevágó téglatest létezik, amely rendelkezik az alábbi két tulajdonsággal:
- lapjai rendre párhuzamosak az α, β, γ síkok valamelyikével;
 - van olyan testátlója, amelynek az egyik végpontja az $\mathcal{A}$, a másik pedig a $\mathcal{B}$ halmaz eleme?
- c) Mennyi lehet a PQ szakasz hossza, ha $P \in \mathcal{A}$, $Q \in \mathcal{B}$ és mindkét pont ugyanabban a tényolc-
adban helyezkedik el?

III. országos magyar matematikaolimpia

XXX. EMMV

Déva, 2020. február 11–16.

IX. osztály – I. forduló

1. feladat. Legyen $A_n = \{x \in (0, +\infty) \mid x^\alpha + [x] \leq n\}$ és $B_n = \{x \in (0, +\infty) \mid [x^\alpha] + x \leq n\}$, ahol $[x]$ jelöli az x szám egész részét és $\alpha \in \mathbb{Z}$.

a) Igazold, hogy $A_n \subset B_{n+1}$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén!

b) Igazold, hogy $B_n \subset A_{n+1}$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén!

2. feladat. Oldd meg a valós számok halmazán az

$$1010 \cdot \left(\left(\frac{x}{a} \right)^{1010} + \left(\frac{a}{x} \right)^{1010} \right) = 2022 - \left(\left(\frac{y}{b} \right)^{2020} + \left(\frac{b}{y} \right)^{2020} \right)$$

egyenletet, ahol $a, b \in \mathbb{R}^*$.

3. feladat. Legyen $x_1 = 4$, $x_2 = 6$ és minden $n \geq 3$ esetén legyen x_n az a legkisebb összetett természetes szám, amely nagyobb, mint $2x_{n-1} - x_{n-2}$.

a) Határozd meg a sorozat 2020-adik tagját!

b) Igazold, hogy $\sum_{k=3}^n \frac{1}{x_k x_{k+1} x_{k+2}} < \frac{1}{1575}$.

4. feladat. Jelölje O az ABC háromszög köré írt kör középpontját. Legyen $k \in (0, 1)$ és E , illetve F két olyan pont amelyre $\overrightarrow{AE} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AF} = k \cdot \overrightarrow{AC}$.

a) Igazold, hogy $AB = AC$ akkor és csakis akkor, ha létezik olyan λ nullától különböző valós szám, amelyre $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CE} = \lambda \cdot \overrightarrow{OA}$.

b) Legyen $BF \cap CE = \{P\}$. Igazold, hogy ha $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{OA}$ és $OEPF$ négyszög paralelogramma, akkor P az ABC háromszög ortocentruma és $OEPF$ rombusz!

III. országos magyar matematikaolimpia

XXX. EMMV

Déva, 2020. február 11–16.

X. osztály – I. forduló

1. feladat. Adottak az $a_1, a_2, a_3 \in (1, +\infty)$ és

$$t = \frac{a_1^2}{2a_2 + a_3} + \frac{a_2^2}{2a_3 + a_1} + \frac{a_3^2}{2a_1 + a_2}$$

számok. Igazold, hogy $\log_{a_1} t + \log_{a_2} t + \log_{a_3} t \geq 3$.

2. feladat. Adott az O középpontú és egységsugarú körbe írt ABC háromszög és jelölje M , N és P rendre az AB , AC és BC oldalak felezőpontjait.

a) Igazold, hogy $9OG^2 + AB^2 + AC^2 + BC^2 = 9$, ahol G az ABC háromszög súlypontja!

b) Ha $4(MO^2 + NO^2 + PO^2) = 3$, igazold, hogy az ABC háromszög egyenlő oldalú!

3. feladat. Adott az $ABCDEF$ szabályos hatszög, melynek O a középpontja. Legyen $M \in (AB)$ és $N \in (BC)$ úgy, hogy $AM = BN$. Ha P felezőpontja az (NE) szakasznak, Q felezőpontja az (MP) szakasznak és R felezőpontja az (AO) szakasznak, igazold, hogy a C , Q , R pontok egy egyenesen helyezkednek el!

4. feladat. Adott az n rögzített természetes szám. Határozd meg azokat az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre

$$(xy)^n \cdot \lg(xy) \leq x^n f(y) + y^n f(x) \leq f(xy),$$

minden $x, y > 0$ esetén!

III. országos magyar matematikaolimpia

XXX. EMMV

Déva, 2020. február 11–16.

XI. osztály – I. forduló

1. feladat. Az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ valós számsorozatot a következőképpen értelmezzük:

$$x_1 = 1 \quad \text{és} \quad x_{n+1} = n \cdot x_n + n - 1,$$

bármely $n \geq 1$ esetén. Ha

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k} \quad \text{és} \quad b_n = \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{1+x_{k+1}},$$

számítsd ki a következő határértékeket:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

2. feladat. Ha $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, akkor igazold a

$$\frac{8}{3} \det(A^2 + A + I_2) \geq (1 - \det A)^2 + (1 + \text{Tr } A)^2$$

egyenlőtlenséget!

3. feladat. Az $(x_n)_{n \geq 1}$ sorozatot a következőképpen értelmezzük: $x_1 \in (0, 1)$ és $x_{n+1} = x_n - x_n^{k+1}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, ahol $k \in \mathbb{N}^*$ rögzített.

a) Igazold, hogy a sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!

b) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{k}} x_n$ határértékét!

4. feladat. Legyen $n \geq 2$ egy természetes szám és $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, úgy, hogy $\det(A) = 1$ és a B mátrix összes eleme egyes. Igazold, hogy ha $\det(A^{-1} + B) = 1$, akkor A elemeinek összege nulla!

III. országos magyar matematikaolimpia

XXX. EMMV

Déva, 2020. február 11–16.

XII. osztály – I. forduló

1. feladat. Adott az $M = \left\{ \frac{2m+1}{2n+1} \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\}$ halmaz. Minden $a, c \in M$ és $b, d \in \mathbb{Z}$ esetén értelmezzük a $G = M \times \mathbb{Z}$ halmazon a „ $\circ$ ” műveletet az

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac, b + d)$$

szabállyal.

- a) Igazold, hogy az $f: G \rightarrow \mathbb{Q}^*$, $f((a, b)) = a \cdot 2^b$ függvény bijektív!
- b) Igazold, hogy $(G, \circ)$ Abel-csoport!

2. feladat. Határozd meg az $f: \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\cos x(1 - \sin 2x)}$$

függvény primitív függvényeit!

3. feladat. Adott az $a < 1$ valós szám. Határozd meg az összes olyan x, y, z valós számot, amelyekre

$$x + y + z = \frac{3(a+1)}{2}, \quad xy + yz + zx = 3a$$

és az xyz értéke a lehető legkisebb!

4. feladat. A $(G, \cdot)$ csoportban teljesülnek a következő feltételek:

- a) a G elemeinek száma p^n , ahol p prímszám és $n \geq 2$ természetes szám;
- b) ha H_1 és H_2 olyan részcsoporthaj a G -nek, amelyekre $|H_1| = |H_2|$, akkor $H_1 = H_2$.

Igazold, hogy G -ben van olyan elem, amelynek a rendje p^n .

III. országos magyar matematikaolimpia

XXX. EMMV

Déva, 2020. február 11–16.

IX. osztály – II. forduló

1. feladat. A valós számok halmazán oldd meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} (x^2 + 2)(y^2 + 2) = 2(y + z)^2 \\ (y^2 + 2)(z^2 + 2) = 2(z + x)^2 \\ (z^2 + 2)(x^2 + 2) = 2(x + y)^2 \end{cases}.$$

2. feladat. Igazold, hogy a 2019, 20192019, ..., $\underbrace{20192019 \dots 2019}_{2022 \text{ db } 2019\text{-es}}$ számok közül van olyan, amelyik osztható 2021-gyel!

3. feladat. Az $ABCD$ konvex négyszögben legyen M az átlók metszéspontja. Igazold, hogy

a) $\sqrt{AM \cdot BM} + \sqrt{CM \cdot DM} \leq \sqrt{(AM + MC) \cdot (BM + MD)}$;

b) $\sqrt{T_{AMB}} + \sqrt{T_{BMC}} + \sqrt{T_{CMD}} + \sqrt{T_{DMA}} \leq 2\sqrt{T_{ABCD}}$.

4. feladat. Felírjuk a táblára 1-től 2020-ig az összes természetes számot. Letörölünk két olyan számot, melyek különbsége osztható 3-mal, és helyettük a két szám összegét írjuk fel. Ezt az eljárást addig ismételjük, ameddig lehetséges. Igazold, hogy az eljárás végén a táblán pontosan két szám marad!

5. feladat. Az $ABCD$ négyzet oldalain felvesszük az $M \in (CD)$ és $N \in (BC)$ pontokat, melyekre $\frac{DM}{MC} = \frac{CN}{NB} = k$. Határozd meg a k arány értékét úgy, hogy $\frac{T_{BPC}}{T_{ANM}} = \frac{9}{13}$, ahol $\{P\} = DN \cap AM$.

6. feladat. Legyen x egy olyan valós szám, amelyre $x^3 + 2x$ és $x^5 + 3x$ racionálisak. Igazold, hogy az x racionális szám!

III. országos magyar matematikaolimpia

XXX. EMMV

Déva, 2020. február 11–16.

X. osztály – II. forduló

1. feladat. Oldd meg a valós számok halmazán az

$$x \cdot (24 + 3\sqrt{15})^{\lg x} + 210 = 30 \cdot (15 + \sqrt{15})^{\lg x}$$

egyenletet!

2. feladat. Az ABC háromszögben a $\widehat{BAC}$ szögfelezője a D pontban metszi (BC) oldalt és tudjuk, hogy $AB = 15$, $AC = 10$, $AD = 6$. Számítsd ki az ABC háromszög köré írt kör sugarát!

3. feladat. Ha $a_1, a_2, \dots, a_n$ valós számok, $a_1 \geq 1$ és $a_{n+1} \geq a_n + 1$, minden $n \geq 1$ esetén, akkor igazold, hogy

a) $a_n a_{n+1} \geq 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$;

b) $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_{n+1} \geq 2 \sum_{k=1}^n (n - k + 1) a_k$.

4. feladat. Adottak a következő halmazok:

$$\{1\}; \quad \{3, 5\}; \quad \{7, 9, 11\}; \quad \{13, 15, 17, 19\}; \quad \dots$$

Jelölje S_n az n -edik halmaz elemeinek összegét. Igazold, hogy

$$\frac{(n-2)(n+5)}{24(n+1)(n+2)} < \sum_{k=3}^n \frac{1}{S_k} < \frac{(n-2)(n+3)}{12n(n+1)}.$$

5. feladat. Egy (a, b) pozitív egész számokból álló számpárt *dévainak* nevezünk, ha az $\frac{a}{b}$ egy valódi tört és az irreducibilis alakjában a számláló és a nevező páratlan. Igazold, hogy ha az $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ halmazból kiválasztunk véletlenszerűen 8 darab számot, akkor biztosan lesz közöttük két olyan szám, ami dévai számpárt alkot!

6. feladat. Az ABC háromszögben legyen $BC > AC$ és legyen D a BC oldal egy olyan pontja, amelyre $BD = AC$, és $m(\widehat{ADC}) < 90^\circ$, valamint $m(\widehat{B}) = m(\widehat{DAC}) = 30^\circ$.

a) Igazold, hogy $\sin 54^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$, esetleg használva, hogy egy hegyesszög szinusza egyenlő a pótszögének koszinuszával!

b) Számítsd ki az ABC háromszög szögeinek mértékét!

Megjegyzés: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér. Munkaidő 4 óra.

III. országos magyar matematikaolimpia

XXX. EMMV

Déva, 2020. február 11–16.

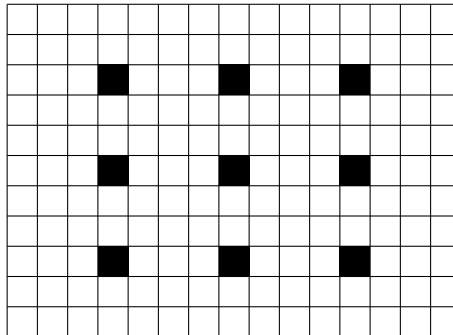
XI-XII. osztály – II. forduló

1. feladat. Ha egy háromszög oldalhosszai $a, b, c > 0$ és a területe T , akkor igazold, hogy

$$T \leq \frac{\sqrt{3}}{12}(ab + bc + ca),$$

és egyenlőség csak az $a = b = c$ esetben áll fenn!

2. feladat. Egy $(3n+2) \times (4n+3)$ -es, egységnyi négyzetekből álló táblázat minden harmadik sorának és minden negyedik oszlopának kereszteződésében található négyzetét feketére festettük. Hányféleképpen osztható fel a táblázat a rácsvonalak mentén egyenesekkel úgy, hogy minden darabban legyen legalább egy fekete négyzet? Az egyben hagyott táblázat is egy felosztásnak számít. A kifestett tábla $n = 3$ esetén a következő.



3. feladat. Ha $p > 3$ prímszám, akkor mennyi lehet $(p-1)$ darab számtani haladványban álló egész szám szorzatának a p -vel való osztási maradéka?

4. feladat. Egy háromszög köré írt kör sugara 5 cm és az oldalhosszai, centiméterben kifejezve, természetes számok. Mennyi lehet a háromszög területe?

5. feladat. Egy 2020×2020 -as táblázat minden cellájába tetszőlegesen beírjuk a „+”, illetve a „–” előjelek valamelyikét. Egy lépésben kiválasztunk egy cellát, majd a cella előjelét megváltoztatjuk, a vele egy sorban és oszlopban levő összes celláéval együtt.

Elérhető, hogy véges lépés után a táblázatban minden előjel egyforma legyen? Válaszodat indokold!

6. feladat. Adott egy $ABCD$ körbeírható négyszög és legyen E a négyszög egy olyan belső pontja, amelynek az AB , BC , CD és AD oldalra eső vetülete P , Q , R , illetve S . Igazold, hogy a $PQRS$ négyszög akkor és csakis akkor paralelogramma, ha E az $ABCD$ köré írt kör középpontja!

III. országos magyar matematikaolimpia

XXX. EMMV

Déva, 2020. február 11–16.

V. osztály

1. feladat. Tudor magassága $\frac{4}{3}$ -a Morgó magasságának, Szundi magassága pedig 10 cm-rel több, mint Morgó magasságának $\frac{2}{3}$ -a. Szundi, Hapci, Vidor, Szende és Kuka magasságai egymás utáni természetes számok ebben a sorrendben. Ha a hét törpe átlagmagassága 45 cm, határozd meg a magasságukat külön-külön!

*Nagy Örs, Kolozsvár
Vézi Gabriella, Marosvásárhely*

Megoldás. A 7 törpe átlagmagassága 45 cm, így magasságaiknak összege $45 \cdot 7 = 315$ cm. **(1 pont)**
Szakaszos ábrázolás módszerével kapjuk, hogy

$$\begin{array}{lcl}
 \text{M:} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & a & a \\ \hline \end{array} & \\
 \text{T:} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a & a & a & a \\ \hline \end{array} & \\
 \text{Szu:} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & a & 10 \\ \hline \end{array} & \\
 \text{H:} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & a & 11 \\ \hline \end{array} & \\
 \text{V:} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & a & 12 \\ \hline \end{array} & \\
 \text{Sze:} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & a & 13 \\ \hline \end{array} & \\
 \text{K:} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & a & 14 \\ \hline \end{array} &
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{M:} \\ \text{T:} \\ \text{Szu:} \\ \text{H:} \\ \text{V:} \\ \text{Sze:} \\ \text{K:} \end{array}} \right\} 315. \quad \textbf{(3 pont)}$$

Innen következik, hogy

$$a = \frac{315 - (10 + 11 + 12 + 13 + 14)}{17} = \frac{255}{17} = 15, \quad \textbf{(3 pont)}$$

ahonnan a törpék magassága rendre:

M: 45 cm; T: 60 cm; Szu: 40 cm; H: 41 cm; V: 42 cm; Sze: 43 cm; K: 44 cm. **(2 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**



2. feladat. Határozd meg azokat az x és y nullától különböző természetes számokat, amelyekre

$$7^{x+1} + 19^{y-1} - 382 = 2020.$$

*Nagy Örs, Kolozsvár
Vézi Gabriella, Marosvásárhely*

Első megoldás. A megadott összefüggés alapján

$$7^{x+1} + 19^{y-1} = 2402, \quad \text{minden } x, y \geq 1 \text{ esetén.} \quad (1 \text{ pont})$$

Mivel $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, $7^4 = 2401$ és $7^5 > 2402$, (1 pont)

következik, hogy az $(x + 1)$ szám 2, 3 vagy 4 lehet, tehát az x szám 1, 2 vagy 3 lehet. (1 pont)

Ha $x = 1$, akkor behelyettesítéssel a

$$49 + 19^{y-1} = 2402$$

összefüggést kapjuk, ahonnan következik, hogy $19^{y-1} = 2353$. Ez viszont lehetetlen, mert a 19 bármilyen természetes hatványának az utolsó számjegye 1-es vagy 9-es, tehát nem lehet 3-as. (2 pont)

Ha $x = 2$, akkor behelyettesítéssel a

$$343 + 19^{y-1} = 2402$$

összefüggést kapjuk, ahonnan következik, hogy $19^{y-1} = 2059$. Mivel $19^2 = 361 < 2059$, valamint $19^3 = 6859 > 2059$, ez az eset is lehetetlen. (2 pont)

Ha $x = 3$, akkor behelyettesítéssel a

$$2401 + 19^{y-1} = 2402$$

összefüggést kapjuk, ahonnan következik, hogy $19^{y-1} = 1$. Ez csak akkor lehetséges, ha $y - 1 = 0$, vagyis ha $y = 1$.

Tehát $x = 3$ és $y = 1$ az egyetlen megoldás. (2 pont)

Hivatalból (1 pont)



Második megoldás. A megadott összefüggés alapján

$$7^{x+1} + 19^{y-1} = 2402, \quad \text{minden } x, y \geq 1 \text{ esetén.} \quad (1 \text{ pont})$$

Mivel $19^0 = 1$, $19^1 = 19$, $19^2 = 361$ és $19^3 = 6859 > 2402$, (1 pont)

következik, hogy az $(y - 1)$ szám 0, 1, vagy 2 lehet, tehát az y szám 1, 2 vagy 3. (1 pont)

Ha $y = 1$, akkor behelyettesítéssel a

$$7^{x+1} + 1 = 2402$$

összefüggést kapjuk, ahonnan következik, hogy $7^{x+1} = 2401$. Ez viszont azt jelenti, hogy $x + 1 = 4$, vagyis $x = 3$. (2 pont)

Ha $y = 2$, akkor behelyettesítéssel a

$$7^{x+1} + 19 = 2402$$

összefüggést kapjuk, ahonnan következik, hogy $7^{x+1} = 2383$. Mivel $7^3 = 343 < 2383$, valamint $7^4 = 2402 > 2383$, ez az eset lehetetlen. (2 pont)

Ha $y = 3$, akkor behelyettesítéssel a

$$7^{x+1} + 361 = 2402$$

összefüggést kapjuk, ahonnan következik, hogy $7^{x+1} = 2041$. Mivel $7^3 = 343 < 2041$, valamint $7^4 = 2402 > 2041$, ez az eset is lehetetlen.

Tehát $x = 3$ és $y = 1$ az egyetlen megoldás.

(2 pont)

Hivatalból

(1 pont)



3. feladat. Az Óperenciás-tenger Nevenincs szigetéről egy hajó indul a Kincsek szigetére. Két óra múlva néhány kalóz motorcsónakkal a hajó után indul. Újabb négy óra múlva a kalózok utolérlik és megelőzik a hajót, így egy órával hamarabb érnek a Kincsek szigetére. Hány óra alatt tette meg a két sziget közötti utat a hajó, illetve a motorcsónak külön-külön, ha végig ugyanazon az útvonalon haladtak és végig állandó volt a sebességük?

*Nagy Örs, Kolozsvár
Vérszi Gabriella, Marosvásárhely*

Megoldás. A találkozás pillanatáig a hajó 6 órát, míg a motorcsónak 4 órát haladt a vízen.

(2 pont)

Ezért ugyanazt a távot a hajó 3 óra alatt, míg a motorcsónak 2 óra alatt teszi meg.

(2 pont)

Mivel a motorcsónak 1 órával hamarabb ért a célba, ezért a csónak még 2 órát és a hajó még 3 órát haladt.

(3 pont)

Így összesen a hajó $6 + 3 = 9$ óra alatt, míg a motorcsónak $4 + 2 = 6$ óra alatt tette meg a távot.

(2 pont)

Hivatalból

(1 pont)



4. feladat. Egy 3×3 -as táblázatot úgy töltünk ki egymástól különböző természetes számokkal, hogy minden sor, oszlop és átló mentén a középső szám négyzete egyenlő legyen a másik két szám szorzatával.

a) Töltsd ki a táblázatot, ha a középső négyzetben 6-os van!

	6	

b) Kitölthető-e a táblázat, ha a 6-os helyett a középső négyzetben egy prímszám szerepel?

c) Ha a középső négyzetben tetszőleges összetett szám van, akkor kitölthető-e a táblázat?

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. a) A középső 6-os szám négyzete a következő módokon bontható fel két szám szorzatára:

$$6^2 = 36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9. \quad (2 \text{ pont})$$

Ezért az átlókra, a középső oszlopra és sorra az

1 és 36, 2 és 18, 3 és 12, 4 és 9

számpárok kerülnek a 6-os mellé. Az 1-es szám csak a sarokban szerepelhet, a vele szemben lévő sarkokba a 36-os kerül. Írjuk az 1-est például a jobb alsó, míg a 36-ost a bal felső sarokba.

36		
	6	
		1

A 2-est és a 3-ast nem írhatjuk a maradék sarkokba, mert $1 \cdot 2$ és $1 \cdot 3$ nem négyzetszámok.

Ha a 2-es a 36-os mellett szerepel, akkor a 2-es másik oldalán a $\frac{36}{2^2} = 9$ -es számnak kell szerepelnie. Emiatt a 6-ra nézve a 9-essel szembe a 4-est kell írni. De ekkor a 6-ra nézve a 2-essel szembe is 2-est kellene írunk, mert $2^2 = 1 \cdot 4$, ami nem megengedett. Tehát a 2-es nem szerepelhet a 36-os mellett.

36		4
2	6	2
9		1

36	2	9
	6	
4	2	1

Hasonlóan az előző esethez, ha a 3-as a 36-os mellett szerepel, akkor a 3-as másik oldalán a $\frac{36}{3^2} = 4$ számnak kell szerepelnie. Emiatt a 6-ra nézve a 4-essel szembe a 9-est kell írni. De ekkor a 6-ra nézve a 3-assal szembe is 3-ast kellene írunk, mert $3^2 = 1 \cdot 9$, ami nem megengedett. Tehát a 3-as sem szereplhet a 36-os mellett.

36		9
3	6	3
4		1

36	3	4
	6	
9	3	1

Arra jutottunk, hogy a 2-es is és a 3-as is az 1-es mellett kell legyen. Emiatt a 2-es melletti másik sarokba a 4-es kerül, míg a 3-as melletti másik sarokba a 9-es. (2 pont)

A 4-es és a 36-os közé a 12-es kerül, mert $4 \cdot 36 = 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 12^2$. A 9-es és a 36-os közé a 18-as kerül, mert $9 \cdot 36 = 9 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9 = 18^2$. Így kapjuk az alábbi kitöltést. (1 pont)

36	18	9
12	6	3
4	2	1

(1)

Megjegyzés. Az 1-est írhatjuk más sarokba is, illetve a 2-es és a 3-as is kerülhet más sorrendben az 1-es mellé, így még 7 fajta kitöltése van a táblázatnak.

36	12	4
18	6	2
9	3	1

1	2	4
3	6	12
9	18	36

1	3	9
2	6	18
4	12	36

4	12	36
2	6	18
1	3	9

9	18	36
3	6	12
1	2	4

9	3	1
18	6	2
36	12	4

4	2	1
12	6	3
36	18	9

- b) Egy p prímszámot nem írhatunk a 6-os helyére, mert p^2 csak egyféleképpen bontható fel úgy, hogy ne ismétlődjenek a számok: $p^2 = 1 \cdot p$. Így legfeljebb csak egy átlót, sort vagy oszlopot tudunk kitölteni anélkül, hogy számokat ismételnénk. **(2 pont)**

- c) A 6 helyett egy $a \cdot b$ ($a \neq b$, $a > 1$, $b > 1$) összetett számot írva a táblázat a következőképpen tölthető ki:

36	18	9
12	6	3
4	2	1

→

$2^2 \cdot 3^2$	$2 \cdot 3^2$	3^2
$2^2 \cdot 3$	$2 \cdot 3$	3
2^2	2	1

→

$a^2 \cdot b^2$	$a \cdot b^2$	b^2
$a^2 \cdot b$	$a \cdot b$	b
a^2	a	1

(2 pont)

Hivatalból

(1 pont)



III. országos magyar matematikaolimpia

XXX. EMMV

Déva, 2020. február 11–16.

VI. osztály

1. feladat. A $\mathcal{C}(O; R)$ körön felvesszük az $A_1, A_2, \dots, A_{15}$ pontokat ebben a sorrendben. Tudjuk, hogy $\widehat{A_1A_2} = 5^\circ$, $\widehat{A_2A_3} = 8^\circ$, $\widehat{A_3A_4} = 11^\circ$, $\dots$, $\widehat{A_{14}A_{15}} = 44^\circ$ (mindegyik körív az előzőhöz képest 3° -kal nagyobb).

- Igazold, hogy A_2 és A_{11} átmérősen ellentett pontok!
- Számítsd ki az $\widehat{A_3OA_{12}}$ tulajdonképpeni szög mértékét!
- Legyen $X, Y \in \mathcal{C}$ úgy, hogy OX és OY az A_2OA_5 , illetve az A_5OA_{11} szög szögfelezője. Ha d az Y ponton átmenő, az OX -el párhuzamos egyenes, akkor igazold, hogy d a kör érintője!

Zajzon Csaba, Barót
Mátyás Ildikó Beáta, Szatmárnémeti
Szász Szilárd, Marosszentkirály

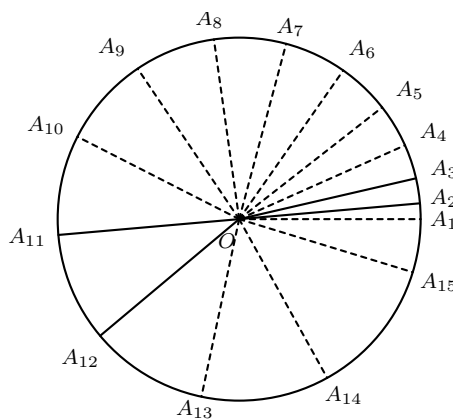
Megoldás.

- Írhatjuk, hogy

$$\widehat{A_2OA_{11}} = \widehat{A_2OA_3} + \widehat{A_3OA_4} + \dots + \widehat{A_{10}OA_{11}} \quad (1 \text{ pont})$$

$$\begin{aligned} &= 8^\circ + (8^\circ + 3^\circ) + \dots + (8^\circ + 8 \cdot 3^\circ) \\ &= 9 \cdot 8^\circ + (1 + 2 + \dots + 8) \cdot 3^\circ, \\ &= 72^\circ + 108^\circ = 180^\circ \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

vagyis A_2 és A_{11} átmérősen ellentett pontok. (1 pont)



b) Az $\widehat{A_3OA_{12}}$ szöget felbontjuk a következő módon:

$$\begin{aligned}\widehat{A_3OA_{12}} &= \widehat{A_2OA_{11}} - \widehat{A_2OA_3} + \widehat{A_{11}OA_{12}} \\ &= 180^\circ - 8^\circ + 35^\circ = 207^\circ > 180^\circ,\end{aligned}\quad (1 \text{ pont})$$

ami nem a tulajdonképpeni szög. (1 pont)

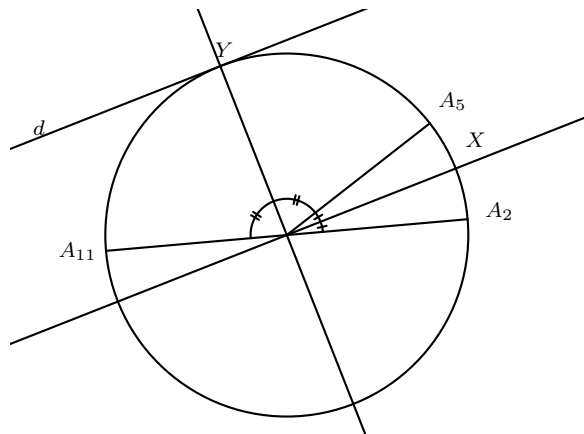
Innen következik, hogy a tulajdonképpeni szög $\widehat{A_3OA_{12}} = 360^\circ - 207^\circ = 153^\circ$. (1 pont)

c) Az $\widehat{A_2OA_5}$ és $\widehat{A_5OA_{11}}$ szögek kiegészítő szögek, ahonnan

$$\widehat{XOY} = \frac{\widehat{A_2OA_5}}{2} + \frac{\widehat{A_5OA_{11}}}{2} = 90^\circ. \quad (1 \text{ pont})$$

Mivel az $\widehat{XOY}$ derékszög és $d \parallel OX$, ezért $d \perp OY$. (1 pont)

Így az OY szakasz hossza az O pont és a d egyenes közötti távolság. Mivel az OY szakasz a kör sugara, ezért d a kör érintője. (1 pont)



Hivatalból (1 pont)

2. feladat. Adottak az $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{4n+7}{3n+4} \text{ reducibilis} \right\}$ és $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = p^2, p \in \mathbb{N}\}$ halmazok.

a) Határozd meg az A halmaz elemeit!

b) Igazold, hogy az A és B diszjunkt halmazok!

Zajzon Csaba, Barót
Mátyás Ildikó Beáta, Szatmárnémeti
Szász Szilárd, Marosszentkirály

Megoldás. a) Legyen $d = (4n + 7, 3n + 4)$ a $4n + 7$ és $3n + 4$ legnagyobb közös osztója. (1 pont)

Mivel $d \mid (4n + 7)$ és $d \mid (4n + 3)$, ezért d osztja a $3 \cdot (4n + 7) - 4 \cdot (3n + 4) = 5$ számot, ahonnan $d = 1$ vagy $d = 5$. Mivel $\frac{4n + 7}{3n + 4}$ reducibilis, ezért d nem lehet 1, tehát $d = 5$. (2 pont)

Mivel $5 \mid (4n + 7)$ és $5 \mid (3n + 4)$, így 5 osztja a $(4n + 7) - (3n + 4) = n + 3$ számot, tehát $n + 3 = 5k$, vagyis $n = 5k - 3$ alakú. (2 pont)

Összegezve, $A = \{5k - 3 \mid k \in \mathbb{N}^*\} = \{2, 7, 12, 17, \dots\}$. (1 pont)

b) Az $n \in A$ szám $5k - 3$ alakú, ezért az n utolsó számjegye 2 vagy 7, (1 pont)
ezért az n nem négyzetszám. (1 pont)

Mivel a B halmaz elemei négyzetszámok, ezért $A \cap B = \emptyset$, vagyis az A és B halmazok diszjunktak. (1 pont)

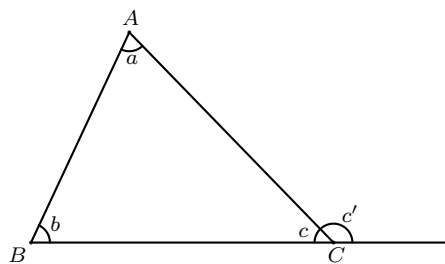
Hivatalból (1 pont) ■

3. feladat. Adott az ABC háromszög, ahol az A és B szögek mértékei, valamint a C külső szög mértéke fordítottan arányosak a 6,6, az 5,5 és az x számokkal.

- a) Határozd meg az x számot!
- b) Határozd meg a háromszög szögeinek mértékét, ha a C szög mértéke 4° -kal nagyobb a B szög mértékének 1,1-szeresénél!

Zajzon Csaba, Barót

Megoldás. Jelöljük az A , B és C belső szögek mértékeit a , b és c betűkkel, valamint a C külső szög mértékét c' -vel.



- a) Az a , b és c' szögmértékek fordítottan arányosak a 6,6, az 5,5 és az x számokkal, ezért

$$a \cdot 6,6 = b \cdot 5,5 = c' \cdot x,$$

vagyis az a , b és c' szögmértékek egyenesen arányosak az $\frac{1}{6,6}$, az $\frac{1}{5,5}$ és az $\frac{1}{x}$ számokkal:

$$\frac{a}{\frac{1}{6,6}} = \frac{b}{\frac{1}{5,5}} = \frac{c'}{\frac{1}{x}}. \quad (1 \text{ pont})$$

Az aránypárok származtatásával kapjuk, hogy

$$\frac{a}{\frac{1}{6,6}} = \frac{b}{\frac{1}{5,5}} = \frac{a+b}{\frac{1}{6,6} + \frac{1}{5,5}} = \frac{c'}{\frac{1}{x}}. \quad (1)$$

Az ABC háromszögben az A és a B belső szögek mértékeinek összege egyenlő a C külső szögének mértékével:

$$a + b = c'. \quad (2 \text{ pont})$$

Ezt felhasználva az $\frac{a+b}{\frac{1}{6,6} + \frac{1}{5,5}} = \frac{c'}{\frac{1}{x}}$ aránypárban kapjuk, hogy $\frac{c'}{\frac{1}{6,6} + \frac{1}{5,5}} = \frac{c'}{\frac{1}{x}}$, ahonnan $\frac{1}{x} = \frac{1}{6,6} + \frac{1}{5,5}$. Közös nevezőre hozunk, a jobb oldalon az első törtet bővítve 5-tel és a másodikat pedig 6-tal:

$$\frac{1}{x} = \frac{5}{6,6} + \frac{6}{5,5} = \frac{5}{33} + \frac{6}{33} = \frac{11}{33} = \frac{1}{3}.$$

Innen kapjuk, hogy $x = 3$. (1 pont)

b) A megadott feltételekből a C belső szögének c mértékére a

$$c = 1,1 \cdot b + 4^\circ \quad (2)$$

összefüggés írható fel. (1 pont)

Az ABC háromszög belső szögeinek összege $a + b + c = 180^\circ$, ahova behelyettesítjük a (2)-es összefüggésben kifejezett c -t és így kapjuk, hogy $a + b + 1,1 \cdot b + 4^\circ = 180^\circ$, ahonnan

$$a + 2,1 \cdot b = 176^\circ. \quad (3)$$

(1 pont)

Az első alpontban felírt $\frac{a}{\frac{1}{6,6}} = \frac{b}{\frac{1}{5,5}}$ aránypárban a második arányt bővítjük 2,1-del $\frac{a}{\frac{1}{6,6}} = \frac{2,1 \cdot b}{\frac{1}{5,5}}$ és kapjuk, hogy $\frac{a}{\frac{1}{6,6}} = \frac{2,1 \cdot b}{\frac{1}{5,5}}$. A számlálókat és nevezőket összeadva származtatjuk az aránypárt, majd a nevezőben közös nevezőre hozunk és a kapott számlálóban felhasználjuk a (3)-as összefüggést:

$$\frac{a}{\frac{1}{6,6}} = \frac{b}{\frac{1}{5,5}} = \frac{a + 2,1 \cdot b}{\frac{5}{6,6} + \frac{6 \cdot 2,1}{5,5}} = \frac{a + 2,1 \cdot b}{\frac{5}{33} + \frac{6 \cdot 2,1}{33}} = \frac{a + 2,1 \cdot b}{\frac{17,6}{33}} = \frac{176^\circ}{\frac{17,6}{33}} = 330^\circ. \quad (1 \text{ pont})$$

Innen kapjuk az $\frac{a}{\frac{1}{6,6}} = 330^\circ$ és $\frac{b}{\frac{1}{5,5}} = 330^\circ$ összefüggéseket, ahonnan $a = 50^\circ$ és $b = 60^\circ$. (1 pont)

Végül a (2)-es összefüggésbe behelyettesítve a $b = 60^\circ$ -ot kapjuk, hogy

$$c = 60^\circ \cdot 1,1 + 4^\circ = 66^\circ + 4^\circ = 70^\circ. \quad (1 \text{ pont})$$

Hivatalból

(1 pont)



4. feladat. Egy iskola VI. osztályaiban összesen 50-nél kevesebb tanuló van. Egy felmérés után a következőket tudtuk meg:

- nincs olyan hónap, amelyben ne ünnepelné születésnapját legalább 3 tanuló;
- a tanulók 50%-a lány;
- 6-szor kevesebb szemüveget viselő tanuló van, mint szemüveget nem viselő.

a) Hány VI. osztályos tanuló van?

b) A tanulók között szétosztottunk 902 csokit, mindenki kapott legalább egyet. Igazold, hogy létezik két olyan tanuló, aki ugyanannyi csokit kapott!

*Zajzon Csaba, Barót
Mátyás Ildikó Beáta, Szatmárnémeti
Szász Szilárd, Marosszentkirály*

Megoldás. a) Legyen x a tanulók száma. Az első feltétel alapján

$$\begin{aligned} 3 \cdot 12 &\leq x < 50, \\ 36 &\leq x < 50. \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

A második feltétel alapján $x : 2$. (1 pont)

Az harmadik feltétel alapján $x : 7$. (1 pont)

Az utóbbi két összefüggés alapján az x szám a 2 és 7 többszöröse, tehát $x : 14$. (1 pont)

A fentiekből következik, hogy $x = 42$. (1 pont)

b) Ha mindegyik tanuló különböző darabszámú csokit kapna, akkor

$$1 + 2 + \dots + 42 = 903$$

csokit kellene szétosztani. (2 pont)

Mivel 902 csokit osztottak szét, ezért legalább 2 tanuló ugyanannyi csokit kell kapjon. (1 pont)

Hivatalból (1 pont)



III. országos magyar matematikaolimpia

XXX. EMMV

Déva, 2020. február 11–16.

VII. osztály

1. feladat.

- a) Határozd meg az $n \in \mathbb{N}^*$ értékét úgy, hogy $A = \frac{2020}{1 \cdot 3} + \frac{2020}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{2020}{(2n-1)(2n+1)}$ természetes szám legyen!
- b) Igazold, hogy $\sqrt{(2^{2020} + 3^{2019} + 4^{2020})^{2020} + 2021}$ irracionális szám!
- c) Mutasd ki, hogy $\sqrt{\sqrt{2019 \cdot 2020} + \sqrt{2019 \cdot 2020 + \sqrt{2019 \cdot 2020}}} < 2020$.

Păcurar Mária, Temesvár

Megoldás. a) Mivel

$$\frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1},$$

minden $k \in \mathbb{N}^*$ esetén, ezért

$$\begin{aligned} A &= 1010 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= 1010 \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = 1010 - \frac{1010}{2n+1} \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

Az A akkor és csak akkor természetes szám, ha $2n+1 \mid 1010$. (1 pont)

Mivel $2n+1$ páratlan, így $2n+1 \mid 505$, vagyis

$$2n+1 \in \{1, 5, 101, 505\} \quad \text{és} \quad n \in \{2, 50, 252\}. \quad (1 \text{ pont})$$

- b) Legyen $B = (2^{2020} + 3^{2019} + 4^{2020})^{2020} + 2021$. Jelölje $u(B)$ a B szám utolsó számjegyét.

Ekkor

$$u(B) = u((6+7+6)^{2020} + 2021) \quad (1 \text{ pont})$$

$$= u(9^{2020} + 2021) = 1 + 1 = 2. \quad (1 \text{ pont})$$

Mivel $u(B) = 2$, így B nem négyzetszám, ezért $\sqrt{B}$ irracionális szám. (1 pont)

- c) Teljesül, hogy

$$\sqrt{2019 \cdot 2020} < \sqrt{2020 \cdot 2020} = 2020. \quad (1 \text{ pont})$$

Innen következik, hogy

$$\begin{aligned}\sqrt{2019 \cdot 2020 + \sqrt{2019 \cdot 2020 + \sqrt{2019 \cdot 2020}}} &< \sqrt{2019 \cdot 2020 + \sqrt{2019 \cdot 2020 + 2020}} \\ &= \sqrt{2019 \cdot 2020 + \sqrt{2020 \cdot 2020}} \quad (1 \text{ pont}) \\ &= \sqrt{2019 \cdot 2020 + 2020} = 2020. \quad (1 \text{ pont})\end{aligned}$$

Hivatalból (1 pont)



2. feladat.

a) Az $x \neq -5$, $y \neq -7$ és $z \neq -9$ racionális számokra fennáll a következő aránysor:

$$\frac{x-5}{x+5} = \frac{y-3}{y+7} = \frac{z-1}{z+9}.$$

Számítsd ki az x , y és z értékét, ha $x + y + z = 69$.

b) Az $x \neq -5$, $y \neq -7$ és $z \neq -9$ racionális számokra fennáll a következő egyenlőség:

$$\frac{2020}{x+5} + \frac{2020}{y+7} + \frac{2020}{z+9} = 202.$$

Számítsd ki az $S = \frac{x-5}{x+5} + \frac{y-3}{y+7} + \frac{z-1}{z+9}$ összeg értékét!

Simon József, Csíkszereda

Megoldás.

a) Legyen

$$\frac{x-5}{x+5} = \frac{y-3}{y+7} = \frac{z-1}{z+9} = k.$$

Mivel $\frac{x-5}{x+5} = k$, ezért $x = \frac{5k+5}{1-k}$, ahol $k \neq 1$. (1 pont)

Hasonlóan

$$y = \frac{7k+3}{1-k}, k \neq 1 \quad \text{és} \quad z = \frac{9k+1}{1-k}, k \neq 1. \quad (1 \text{ pont})$$

Az $x + y + z = 69$ egyenletbe behelyettesítve a fenti kifejezéseket kapjuk, hogy

$$\frac{5k+5}{1-k} + \frac{7k+3}{1-k} + \frac{9k+1}{1-k} = 69,$$

ahonnan $21k + 9 = 69 - 69k$, ahonnan $k = \frac{2}{3}$. (1 pont)

A keresett számok tehát $x = 25$, $y = 23$ és $z = 21$ (1 pont)

b) Teljesül, hogy

$$S = \frac{x+5-10}{x+5} + \frac{y+7-10}{y+7} + \frac{z+9-10}{z+9} = 3 - \frac{10}{x+5} - \frac{10}{y+7} - \frac{10}{z+9}. \quad (2 \text{ pont})$$

A

$$\frac{2020}{x+5} + \frac{2020}{y+7} + \frac{2020}{z+9} = 202$$

összefüggés mindkét oldalát osztva 202-vel azt kapjuk, hogy

$$\frac{10}{x+5} + \frac{10}{y+7} + \frac{10}{z+9} = 1, \quad (2 \text{ pont})$$

ahonnan $S = 3 - 1 = 2$. (1 pont)

Hivatalból (1 pont)



Megjegyzés. A feladat a) alpontja a következő módszerrel is megoldható.

Ha a megadott törtek számlálójából kivonjuk a nevezőjüket, majd az aránysort szorozzuk -1 -gyel, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{10}{x+5} = \frac{10}{y+7} = \frac{10}{z+9}. \quad (2 \text{ pont})$$

Innen következik, hogy

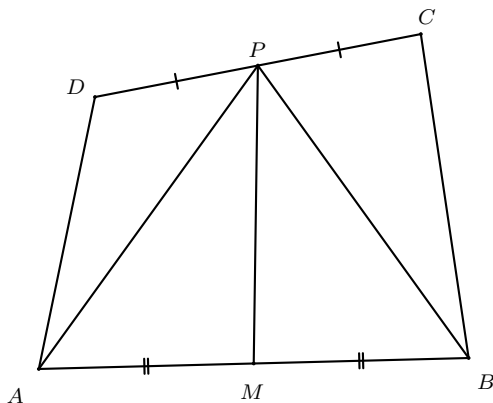
$$\frac{10}{x+5} = \frac{10}{y+7} = \frac{10}{z+9} = \frac{10+10+10}{x+y+z+21} = \frac{30}{90} = \frac{10}{30}, \quad (1 \text{ pont})$$

ahonnan $x = 25$, $y = 23$ és $z = 21$. (1 pont)

3. feladat. Az $ABCD$ konvex négyszögben legyen M és P az AB , illetve CD oldal felezőpontja. Igazold, hogy $AB \parallel CD$ akkor és csak akkor, ha $T_{AMPD} \cdot T_{MPCB} = \frac{T_{ABCD}^2}{4}$.

Koczinger Éva, Szatmárnémeti

Megoldás. A megoldáshoz tekintsük a következő ábrát.



„ $\Rightarrow$ ” Mivel $AB \parallel CD$, ezért az $AMPD$ és $MBCP$ négyszögek trapézok, vagy paralelogrammák, és magasságaik egyenlők.

Teljesül továbbá, hogy $AM = MB$ és $DP = PC$, és így $T_{AMPD} = T_{MPCB}$. (1 pont)

Azt kaptuk, hogy $T_{AMPD} = T_{MPCB} = \frac{1}{2}T_{ABCD}$, ahonnan

$$T_{AMPD} \cdot T_{MPCB} = \left(\frac{1}{2}T_{ABCD}\right)^2 = \frac{T_{ABCD}^2}{4}. \quad (1 \text{ pont})$$

„ $\Leftarrow$ ” A T_{AMPD} és T_{MPCB} mennyiségekre alkalmazzuk a mértani és számtani közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{T_{AMPD} \cdot T_{MPCB}} \leq \frac{T_{AMPD} + T_{MPCB}}{2}, \quad (2 \text{ pont})$$

ahonnan

$$T_{AMPD} \cdot T_{MPCB} \leq \frac{T_{ABCD}^2}{4}. \quad (1 \text{ pont})$$

A fenti egyenlőtlenségben a feltétel alapján egyenlőség áll fenn, ami pontosan akkor teljesül, ha $T_{AMPD} = T_{MPCB}$. (1 pont)

A PAB háromszögben PM oldalfelező, így $T_{PAM} = T_{PBM}$. (1 pont)

Innen következik, hogy $T_{ADP} = T_{BCP}$. Ebben a két háromszögben $DP = CP$, így az A -ból, illetve a B -ből húzott magasságok egyenlők. (1 pont)

Innen pedig $AB \parallel CD$. (1 pont)

Hivatalból (1 pont) ■

4. feladat. Adott az $ABCD$ négyzet. Legyen $\mathcal{C}_1$ a B középpontú BA sugarú kör, valamint $\mathcal{C}_2$ a D középpontú DA sugarú kör. Egy az A ponton átmenő tetszőleges egyenes a $\mathcal{C}_1$ és $\mathcal{C}_2$ köröket az E és F pontokban metszi. A C pontból az EF egyenesre húzott merőleges egyenes az EF -et M -ben, a $\mathcal{C}_1$ kört másodszor P -ben metszi. A PA egyenes a CF egyenest N -ben, a $\mathcal{C}_2$ kört másodszor R -ben metszi. Igazold, hogy:

- a) az EFC egyenlő szárú derékszögű háromszög;
- b) a CPR egyenlő szárú derékszögű háromszög;
- c) az $AECR$ négyszög paralelogramma;
- d) $EP = FR$.

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. A megoldáshoz tekintsük a következő ábrát.

- Hivatalból (1 pont)

5/5

III. országos magyar matematikaolimpia

XXX. EMMV

Déva, 2020. február 11–16.

VIII. osztály

1. feladat. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$(2x^2 - 2x + 3)(45y^2 - 30y + 41) = 90.$$

dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. A megadott egyenlet ekvivalens az

$$\left[\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{5}{4} \right] \cdot \left[\left(y - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{4}{5} \right] = 1 \quad (3 \text{ pont})$$

egyenlettel. Mivel minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{5}{4} \geq \frac{5}{4} \quad \text{és} \quad \left(y - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{4}{5} \geq \frac{4}{5}, \quad (2 \text{ pont})$$

ezért minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\left[\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{5}{4} \right] \cdot \left[\left(y - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{4}{5} \right] \geq 1, \quad (1 \text{ pont})$$

és egyenlőség akkor és csak akkor állhat fent, ha $\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 = 0$ és $\left(y - \frac{1}{3} \right)^2 = 0$. (1 pont)

Innen következik, hogy az egyenletnek egy megoldása van:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3}. \end{cases} \quad (1-1 \text{ pont})$$

Hivatalból (1 pont)



2. feladat. Igazold, hogy

a) $1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ és $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ esetén;

b) $2020^{2020} - 1$ osztható 2019-cel;

c) $\frac{2020^{2020} - 1}{2019}$ nem teljes négyzet!

Kovács Bálint, Székelyudvarhely

Megoldás. a) Írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} S &= 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} \\ a \cdot S &= a + a^2 + \dots + a^{n-1} + a^n. \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

Az alsó egyenlőségből kivonva a felső egyenlőség megfelelő oldalait, azt kapjuk, hogy $S(a-1) = a^n - 1$ és így $S = \frac{a^n - 1}{a - 1}$. (1 pont)

b) Alkalmazzuk az a) alpontban bizonyított egyenlőséget $a = n = 2020$ esetén. (1 pont)
Ekkor írhatjuk, hogy

$$\frac{2020^{2020} - 1}{2019} = 1 + 2020 + \dots + 2020^{2019}, \quad (1 \text{ pont})$$

ahonnan

$$2020^{2020} - 1 = 2019(1 + 2020 + \dots + 2020^{2019}),$$

vagyis $2020^{2020} - 1$ osztható 2019-cel. (1 pont)

c) A reductio ad absurdum módszerét alkalmazzuk. Legyen

$$S = \frac{2020^{2020} - 1}{2019} = 1 + 2020 + \dots + 2020^{2019}$$

és tételezzük fel, hogy S teljes négyzet. Mivel S páratlan, ezért létezik $k \in \mathbb{Z}$ úgy, hogy

$$S = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4 \underbrace{k(k+1)}_{\div 2} + 1. \quad (2 \text{ pont})$$

Ebből következik, hogy

$$2020 + 2020^2 + \dots + 2020^{2019} = 2020(1 + 2020 + \dots + 2020^{2019})$$

osztható 8-cal, ami ellentmondás, mert $2020 = 4 \cdot 505$ és $1 + 2020 + \dots + 2020^{2019}$ páratlan. (2 pont)

Hivatalból (1 pont)



3. feladat. Bűvös piramist építenek 1 cm oldalélű kockákból. Ennek minden szintje négyzet alakú és a szintek rendre $n^2, (n-1)^2, \dots, 3^2, 2^2, 1^2$ darab kockát tartalmaznak. Miután egymáshoz rögzítik az építőelemeket, egy 2352 cm^2 teljes felszínű testet nyernek. Hány szintes az elkészített piramis?

Hodgyai Edit, Micske

Megoldás.

Az n szintű piramis alakú test vízszintes oldallapjainak az összterülete $2n^2 \text{ cm}^2$, (2 pont)
függőleges oldallapjainak az összterülete pedig

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + \dots + 4 \cdot n = 4(1 + 2 + 3 + \dots + n) = 2(n+1)n. \quad (2 \text{ pont})$$

Innen következik, hogy az elkészült piramis felszíne

$$2n^2 + 2(n+1)n = 2n^2 + 2n^2 + 2n = 4n^2 + 2n = 2n(2n+1). \quad (2 \text{ pont})$$

A megadott feltétel alapján innen azt kapjuk, hogy $2n(2n+1) = 2352$. Viszont a 2352 szám két egymásutáni természetes szám szorzatára egyedül csak a $2352 = 48 \cdot 49$ módon bontható fel.

(2 pont)

Ez alapján $2n = 48$, vagyis $n = 24$. Tehát 24 szintes a 2352 cm^2 felületű piramis.

(1 pont)

Hivatalból

(1 pont)



4. feladat. Az α , β és γ három páronként egymásra merőleges sík, melyek az O pontban metszik egymást, a teret 8 térfelcsekre osztva. Legyen $\mathcal{A}$ azon pontok halmaza a térben, melyek távolsága az α , β és γ síktól rendre 8 cm, 6 cm és 4 cm, valamint $\mathcal{B}$ azon pontok halmaza a térben melyek távolsága az α , β és γ síktól rendre 12 cm, 9 cm és 6 cm.

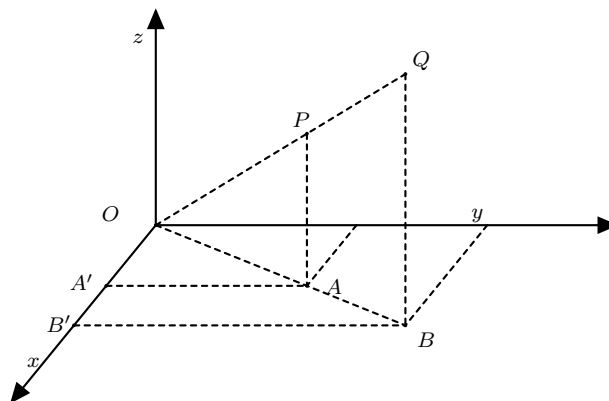
- Igazold, hogy létezik, olyan $P \in \mathcal{A}$ és $Q \in \mathcal{B}$, amelyre az O , P és Q pontok kollineárisak!
- Hány olyan páronként egymással nem egybevágó téglatest létezik, amely rendelkezik az alábbi két tulajdonsággal:
 - lapjai rendre párhuzamosak az α , β , γ síkok valamelyikével;
 - van olyan testátlója, amelynek az egyik végpontja az $\mathcal{A}$, a másik pedig a $\mathcal{B}$ halmaz eleme?
- Mennyi lehet a PQ szakasz hossza, ha $P \in \mathcal{A}$, $Q \in \mathcal{B}$ és mindkét pont ugyanabban a térfelcseben helyezkedik el?

Császár Sándor, Csíkmadaras

Megoldás. Vezessük be az $Ox = \beta \cap \gamma$, $Oy = \alpha \cap \gamma$ és $Oz = \alpha \cap \beta$ jelöléseket.

- A $P \in \mathcal{A}$, $Q \in \mathcal{B}$ és O pontok csak akkor lehetnek kollineárisak, ha a P és Q pontok vagy ugyanabban, vagy ellentétes térfelcseben vannak. (1 pont)

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor P és Q ugyanabban a térfelcseben vannak.



Legyen A és B a P és Q pont γ síkra eső vetülete, valamint A' és B' az A , illetve B pont Ox -re eső vetülete. Először igazoljuk, hogy O , A és B kollineáris. Ennek feltétele, hogy $\widehat{A'OA} = \widehat{B'OA}$. Az $AA'O$ és $BB'O$ derékszögű háromszögekben

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{A'O}{B'O},$$

tehát a háromszögek hasonlóak, ahonnan következik, hogy O , A és B kollineáris. **(2 pont)**

Mivel PA és QB merőlegesek a γ síkra, ezért A , B , P , Q és O ugyanarra a síkra illeszkednek. Ahhoz, hogy O , P és Q kollineáris legyen, elég igazolni, hogy $\widehat{AOP} = \widehat{BOQ}$. Az AOP és BOQ derékszögű háromszögekben

$$\frac{OA}{OB} = \frac{10}{15} = \frac{4}{6} = \frac{PA}{QB},$$

így a háromszögek hasonlóak, tehát O , P és Q kollineáris. **(2 pont)**

Ha P és Q ellentétes tényolcadban van, akkor a P , Q és O pontok kollinearitása visszavezetődik, a P , Q' és O pontok kollinearitására, ahol Q' a Q pont O szerinti szimmetrikusa.

- b) Legyen $P \in \mathcal{A}$ és $Q \in \mathcal{B}$. Megszerkesztjük azt a téglatestet, amelynek oldalai rendre párhuzamosak az α , β , γ síkok, valamelyikével és amelynek egyik testátlója PQ . Legyen rendre a , b és c a megszerkesztett téglatest Ox -el, Oy -nal, illetve Oz -vel párhuzamos oldalainak hossza.

Felírhatjuk, hogy

$$a = |(\pm 8) - (\pm 12)|, \quad b = |(\pm 6) - (\pm 9)| \quad \text{és} \quad c = |(\pm 4) - (\pm 6)|,$$

ahonnan

$$a \in \{4, 20\}, \quad b \in \{3, 15\} \quad \text{és} \quad c \in \{2, 10\}.$$

Ez alapján 8 darab páronként nem egybevágó téglatest létezik, ezek méretei rendre

$$(4, 3, 2); (4, 3, 10); (4, 15, 2); (4, 15, 10); (20, 3, 2); (20, 3, 10); (20, 15, 2); (20, 15, 10). \quad \textbf{(2 pont)}$$

- c) A PQ egy olyan téglatestnek a testátlója, amelynek az élhosszai rendre $12 - 8 = 4$, $9 - 6 = 3$, $6 - 4 = 2$. Ekkor $PQ = \sqrt{16 + 9 + 4} = \sqrt{29}$. **(2 pont)**

Hivatalból **(1 pont)** ■

III. országos magyar matematikaolimpia

XXX. EMMV

Déva, 2020. február 11–16.

IX. osztály – I. forduló

1. feladat. Legyen $A_n = \{x \in (0, +\infty) \mid x^\alpha + [x] \leq n\}$ és $B_n = \{x \in (0, +\infty) \mid [x^\alpha] + x \leq n\}$, ahol $[x]$ jelöli az x szám egész részét és $\alpha \in \mathbb{Z}$.

a) Igazold, hogy $A_n \subset B_{n+1}$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén!

b) Igazold, hogy $B_n \subset A_{n+1}$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén!

dr. Bencze Mihály, Brassó
Kocsis Attila, Déva

Megoldás.

a) Ha $x \in A_n$, akkor $x^\alpha + [x] \leq n$, ahonnan $x^\alpha + [x] + 1 \leq n + 1$.

De $[x^\alpha] \leq x^\alpha$ és $x \leq [x] + 1$, így (2 pont)

$$[x^\alpha] + x \leq x^\alpha + [x] + 1 \leq n + 1, \quad \text{(2 pont)}$$

vagyis $x \in B_{n+1}$. (1 pont)

b) Ha $x \in B_n$, akkor $[x^\alpha] + x \leq n$, ahonnan $[x^\alpha] + x + 1 \leq n + 1$.

De $x^\alpha \leq [x^\alpha] + 1$ és $[x] \leq x$, így (2 pont)

$$x^\alpha + [x] \leq [x^\alpha] + 1 + x \leq n + 1,$$

vagyis $x \in A_{n+1}$. (2 pont)

Hivatalból (1 pont)



2. feladat. Oldd meg a valós számok halmazán az

$$1010 \cdot \left(\left(\frac{x}{a} \right)^{1010} + \left(\frac{a}{x} \right)^{1010} \right) = 2022 - \left(\left(\frac{y}{b} \right)^{2020} + \left(\frac{b}{y} \right)^{2020} \right)$$

egyenletet, ahol $a, b \in \mathbb{R}^*$.

Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. Az egyenlet akkor értelmezett, ha $x, y \neq 0$.

Mivel $\left(\frac{x}{a}\right)^{1010}$ és $\left(\frac{y}{b}\right)^{2020}$ pozitív, ezért

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{1010} + \left(\frac{a}{x}\right)^{1010} \geq 2 \quad \text{és} \quad \left(\frac{y}{b}\right)^{2020} + \left(\frac{b}{y}\right)^{2020} \geq 2. \quad (3 \text{ pont})$$

Innen következik, hogy

$$1010 \cdot \left(\left(\frac{x}{a}\right)^{1010} + \left(\frac{a}{x}\right)^{1010} \right) \geq 2020 \quad \text{és} \quad 2022 - \left(\left(\frac{y}{b}\right)^{2020} + \left(\frac{b}{y}\right)^{2020} \right) \leq 2020. \quad (1 \text{ pont})$$

A megadott egyenlőség akkor és csakis akkor teljesülhet, ha

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{1010} + \left(\frac{a}{x}\right)^{1010} = 2 \quad \text{és} \quad \left(\frac{y}{b}\right)^{2020} + \left(\frac{b}{y}\right)^{2020} = 2. \quad (2 \text{ pont})$$

Ez csak akkor lehetséges, ha

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{1010} = 1 \quad \text{és} \quad \left(\frac{y}{b}\right)^{2020} = 1,$$

innen

$$\frac{x}{a} = \pm 1, \quad \text{ahonnan} \quad x = \pm a,$$

valamint

$$\frac{y}{b} = \pm 1, \quad \text{ahonnan} \quad y = \pm b. \quad (2 \text{ pont})$$

Következésképpen

$$M = \{(a; b), (-a; b), (a; -b), (-a; -b)\}. \quad (1 \text{ pont})$$

Hivatalból

(1 pont) ■

3. feladat. Legyen $x_1 = 4$, $x_2 = 6$ és minden $n \geq 3$ esetén legyen x_n az a legkisebb összetett természetes szám, amely nagyobb, mint $2x_{n-1} - x_{n-2}$.

a) Határozd meg a sorozat 2020-adik tagját!

b) Igazold, hogy $\sum_{k=3}^n \frac{1}{x_k x_{k+1} x_{k+2}} < \frac{1}{1575}$.

Turdean Katalin, Zilah

Megoldás. a) Kiszámoljuk a sorozat első néhány tagját:

(1 pont)

$$\begin{aligned} 2x_2 - x_1 &= 2 \cdot 6 - 4 = 8, & \text{ahonnan} & \quad x_3 = 9 = \frac{3(3+3)}{2} \\ 2x_3 - x_2 &= 2 \cdot 9 - 6 = 12, & \text{ahonnan} & \quad x_4 = 14 = \frac{4(4+3)}{2} \\ 2x_4 - x_3 &= 2 \cdot 14 - 9 = 19, & \text{ahonnan} & \quad x_5 = 20 = \frac{5(5+3)}{2} \\ 2x_5 - x_4 &= 2 \cdot 20 - 14 = 26, & \text{ahonnan} & \quad x_6 = 27 = \frac{6(6+3)}{2} \\ 2x_6 - x_5 &= 2 \cdot 27 - 20 = 34, & \text{ahonnan} & \quad x_7 = 35 = \frac{7(7+3)}{2}. \end{aligned}$$

Matematikai indukcióval igazoljuk, hogy $x_n = \frac{n(n+3)}{2}$, bármely $n \geq 3$ esetén. **(1 pont)**

A korábbi számolások alapján az állítás igaz $n \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$ esetén. Feltételezzük, hogy

$$x_k = \frac{k(k+3)}{2}, \quad \text{valamint} \quad x_{k+1} = \frac{(k+1)(k+4)}{2},$$

és igazoljuk, hogy $x_{k+2} = \frac{(k+2)(k+5)}{2}$.

Teljesül, hogy

$$\begin{aligned} 2x_{k+1} - x_k &= 2 \frac{(k+1)(k+4)}{2} - \frac{k(k+3)}{2} = \frac{2(k^2 + 5k + 4) - (k^2 + 3k)}{2} \\ &= \frac{k^2 + 7k + 8}{2} = \frac{k^2 + 7k + 10}{2} - 1 = \frac{(k+2)(k+5)}{2} - 1. \end{aligned}$$

Mivel $(k+2)$ és $(k+5)$ közül az egyik páros, ezért $\frac{(k+2)(k+5)}{2}$ természetes és összetett, valamint pontosan 1-gyel nagyobb, mint $2x_{k+1} - x_k$. Azt kaptuk, hogy $x_{k+2} = \frac{(k+2)(k+5)}{2}$.

A matematikai indukció alapján $x_n = \frac{n(n+3)}{2}$, minden $n \geq 3$ esetén. Innen következik, hogy $x_{2020} = 1010 \cdot 2023$. **(3 pont)**

b) A következőket írhatjuk

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^n \frac{1}{x_k x_{k+1} x_{k+2}} &= \sum_{k=3}^n \frac{1}{\frac{k(k+3)}{2} \cdot \frac{(k+1)(k+4)}{2} \cdot \frac{(k+2)(k+5)}{2}} \\ &= 8 \sum_{k=3}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)} \end{aligned} \quad \textbf{(1 pont)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{8}{5} \sum_{k=3}^n \frac{(k+5) - k}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)} \\ &= \frac{8}{5} \sum_{k=3}^n \left(\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)} \right) \end{aligned} \quad \textbf{(2 pont)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{8}{5} \left(\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} \right) \\ &< \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{1}{1575}. \end{aligned} \quad \textbf{(1 pont)}$$

Hivatalból

(1 pont)

■

4. feladat. Jelölje O az ABC háromszög köré írt kör középpontját. Legyen $k \in (0, 1)$ és E , illetve F két olyan pont amelyre $\overrightarrow{AE} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AF} = k \cdot \overrightarrow{AC}$.

a) Igazold, hogy $AB = AC$ akkor és csak akkor, ha létezik olyan λ nullától különböző valós szám, amelyre $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CE} = \lambda \cdot \overrightarrow{OA}$.

- b) Legyen $BF \cap CE = \{P\}$. Igazold, hogy ha $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{OA}$ és $OEPF$ négyszög paralelogramma, akkor P az ABC háromszög ortocentruma és $OEPF$ rombusz!

Betuker Enikő, Margitta
Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. a) Legyen A' a BC oldal felezőpontja. Ekkor teljesül, hogy

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF},$$

ahonnan $\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$.

Mivel $\overrightarrow{BE} = (k-1) \cdot \overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CF} = (k-1) \cdot \overrightarrow{AC}$ ezért

$$\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BF} = (k-1) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 2(k-1)\overrightarrow{AA'}. \quad (2 \text{ pont})$$

„ $\Rightarrow$ ” Ha $AB = AC$, akkor $AA' \perp BC$, tehát $O \in AA'$. Innen következik, hogy létezik $q \in \mathbb{R}^*$ úgy, hogy $\overrightarrow{AA'} = q \cdot \overrightarrow{OA}$, ahonnan

$$\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BF} = 2q(k-1) \cdot \overrightarrow{OA},$$

tehát $\lambda = 2q(k-1) \in \mathbb{R}^*$. (1 pont)

„ $\Leftarrow$ ” Tudjuk, hogy $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CE} = \lambda \cdot \overrightarrow{OA}$, ahol $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Másrészt $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CE} = 2(k-1)\overrightarrow{AA'}$. Innen kapjuk, hogy $\lambda \overrightarrow{OA} = 2(k-1)\overrightarrow{AA'}$, ahonnan $\overrightarrow{OA} = \frac{2(k-1)}{\lambda} \cdot \overrightarrow{AA'}$, vagyis az O, A, A' pontok kollineárisak.

Mivel $OA' \perp BC$, ezért $AA' \perp BC$, és így $AB = AC$. (2 pont)

- b) A $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CE} = \lambda \cdot \overrightarrow{OA}$ összefüggésből $\lambda = 1$ esetén kapjuk a $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{OA}$ egyenlőséget, tehát $AB = AC$. Másrészt teljesül, hogy

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CE} &= \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{OH}, \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

ahol H az ABC háromszög ortocentruma.

Mivel $OEPF$ paralelogramma, ezért $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OP}$. Azt kaptuk, hogy $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OP}$, ahonnan $P = H$. (1 pont)

Mivel $AB = AC$, ezért $OE = OF$, tehát $OEPF$ rombusz. (1 pont)

Hivatalból (1 pont)



III. országos magyar matematikaolimpia

XXX. EMMV

Déva, 2020. február 11–16.

X. osztály – I. forduló

1. feladat. Adottak az $a_1, a_2, a_3 \in (1, +\infty)$ és

$$t = \frac{a_1^2}{2a_2 + a_3} + \frac{a_2^2}{2a_3 + a_1} + \frac{a_3^2}{2a_1 + a_2}$$

számok. Igazold, hogy $\log_{a_1} t + \log_{a_2} t + \log_{a_3} t \geq 3$.

dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Alkalmazva a Bergström-egyenlőtlenséget (vagy a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség következményét), azt kapjuk, hogy

$$t = \frac{a_1^2}{2a_2 + a_3} + \frac{a_2^2}{2a_3 + a_1} + \frac{a_3^2}{2a_1 + a_2} \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{(2a_2 + a_3 + 2a_3 + a_1 + 2a_1 + a_2)} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}. \quad (2 \text{ pont})$$

Felhasználva a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget, miszerint $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$, következik, hogy

$$t \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}, \quad \forall a_1, a_2, a_3 \in (1, \infty). \quad (2 \text{ pont})$$

Így

$$\begin{aligned} \log_{a_1} t + \log_{a_2} t + \log_{a_3} t &\geq \log_{a_1} \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} + \log_{a_2} \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} + \log_{a_3} \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} \\ &= \frac{1}{3} \cdot (\log_{a_1} a_1 + \log_{a_1} a_2 + \log_{a_1} a_3 + \dots + \log_{a_3} a_1 + \log_{a_3} a_2 + \log_{a_3} a_3) \\ &\quad (2 \text{ pont}) \\ &= \frac{1}{3} \cdot [3 + (\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_1) + (\log_{a_2} a_3 + \log_{a_3} a_2) + (\log_{a_3} a_1 + \log_{a_1} a_3)] \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left[3 + \left(\log_{a_1} a_2 + \frac{1}{\log_{a_1} a_2} \right) + \dots + \left(\log_{a_3} a_1 + \frac{1}{\log_{a_3} a_1} \right) \right] \\ &\geq \frac{1}{3} \cdot (3 + 2 + 2 + 2) = 3, \quad (2 \text{ pont}) \end{aligned}$$

ahol alkalmaztuk az $x + \frac{1}{x} \geq 2, \forall x > 0$ egyenlőtlenséget a $\log_a b > 0$ számokra, ahol $a, b \in (1, +\infty)$.

Mivel a megoldás során alkalmaztuk a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget az $a_1, a_2, a_3 > 1$ számokra, következik, hogy egyenlőség csak akkor állhat fent, ha $a_1 = a_2 = a_3$. Ebben az esetben valóban fennáll az egyenlőség. (1 pont)

Hivatalból

(1 pont) ■

Megjegyzés. (dr. Bencze Mihály) Az előbbi megoldáshoz hasonlóan igazolható a következő, általánosabb állítás is:

Ha $n \geq 3$, természetes szám, $a_1, a_2, \dots, a_n > 1$ valós számok és

$$t = \frac{a_1^2}{(n-1)a_2 + a_3} + \frac{a_2^2}{(n-1)a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-2}^2}{(n-1)a_{n-1} + a_n} + \frac{a_{n-1}^2}{(n-1)a_n + a_1} + \frac{a_n^2}{(n-1)a_1 + a_2},$$

akkor

$$\sum_{k=1}^n \log_{a_k} t \geq n.$$

2. feladat. Adott az O középpontú és egységsugarú körbe írt ABC háromszög és jelölje M , N és P rendre az AB , AC és BC oldalak felezőpontjait.

a) Igazold, hogy $9OG^2 + AB^2 + AC^2 + BC^2 = 9$, ahol G az ABC háromszög súlypontja!

b) Ha $4(MO^2 + NO^2 + PO^2) = 3$, igazold, hogy az ABC háromszög egyenlő oldalú!

Mátéfi István, Marosvásárhely

Megoldás.

a) Komplex számok segítségével oldjuk meg a feladatot. Tekintsünk egy O középpontú koordináta-rendszert és jelölje $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, és $G(g)$ a pontok affixumait. Innen következik, hogy

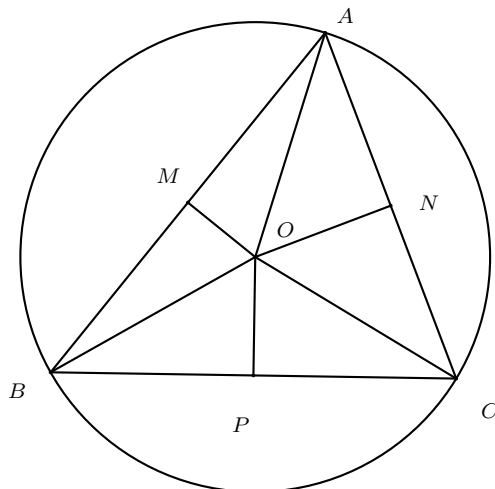
$$9OG^2 + AB^2 + AC^2 + BC^2 = 9|g|^2 + |b-a|^2 + |c-a|^2 + |c-b|^2. \quad (2 \text{ pont})$$

Felhasználva a $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ összefüggést, azt kapjuk, hogy (1 pont)

$$\begin{aligned} 9 \left| \frac{a+b+c}{3} \right|^2 + |b-a|^2 + |c-a|^2 + |c-b|^2 &= \\ &= (a+b+c)(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) + (b-a)(\bar{b} - \bar{a}) + (c-a)(\bar{c} - \bar{a}) + (c-b)(\bar{c} - \bar{b}) \\ &= a\bar{a} + a\bar{b} + a\bar{c} + b\bar{a} + b\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a} + c\bar{b} + c\bar{c} + \\ &\quad + b\bar{b} - b\bar{a} - a\bar{b} + a\bar{a} + c\bar{c} - c\bar{a} - a\bar{c} + a\bar{a} + c\bar{c} - c\bar{b} - b\bar{c} + b\bar{b} \\ &= 3|a|^2 + 3|b|^2 + 3|c|^2 = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 9, \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

ahol felhasználtuk, hogy $|a| = |b| = |c| = OA = OB = OC = 1$.

b)



Az AOB háromszögben felírjuk az oldalfelező tételét:

$$OM^2 = \frac{2(OA^2 + OB^2) - AB^2}{4},$$

ahonnan $4OM^2 = 4 - AB^2$. Megismételve a fenti gondolatmenetet az AOC , illetve a BOC háromszögekben, azt kapjuk, hogy

$$4ON^2 = 4 - AC^2 \quad \text{és} \quad 4OP^2 = 4 - BC^2. \quad (2 \text{ pont})$$

Összeadva a kapott összefüggéseket, azt kapjuk, hogy

$$4(MO^2 + NO^2 + PO^2) = 12 - (AB^2 + AC^2 + BC^2). \quad (1 \text{ pont})$$

Az a) alpont alapján innen következik, hogy

$$3 = 12 - 9 + 9OG^2,$$

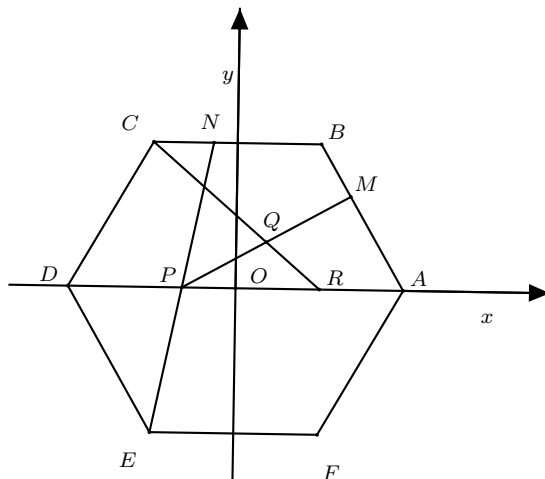
vagyis $OG^2 = 0$ és $O = G$. Tehát az ABC háromszögben a köré írt kör középpontja egybeesik a súlyponttal, ezért az ABC háromszög egyenlő oldalú. (1 pont)

Hivatalból

(1 pont) ■

3. feladat. Adott az $ABCDEF$ szabályos hatszög, melynek O a középpontja. Legyen $M \in (AB)$ és $N \in (BC)$ úgy, hogy $AM = BN$. Ha P felezőpontja az (NE) szakasznak, Q felezőpontja az (MP) szakasznak és R felezőpontja az (AO) szakasznak, igazold, hogy a C, Q, R pontok egy egyenesen helyezkednek el!
Turdean Katalin, Zilah

Első megoldás. Komplex számok segítségével oldjuk meg a feladatot. Az xOy koordináta-rendszert úgy választjuk meg, hogy annak kezdőpontja egybeessen a hatszög középpontjával, valamint az A pont affixuma 1 legyen.



Innen következik, hogy a szabályos hatszög csúcsainak affixuma a következőképpen írható:

$$A(1); \quad B(\omega); \quad C(\omega^2); \quad D(-1); \quad E(-\omega); \quad F(-\omega^2),$$

ahol $\omega = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$, vagyis $\omega^3 = -1$ és $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. (2 pont)

Mivel $AM = BN$ és $AB = BC$, következik, hogy

$$\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = k, \quad \text{ahol } k > 0.$$

A szakaszt adott arányban osztó pont affixuma alapján

$$z_M = \frac{z_A + kz_B}{1+k} = \frac{1+k\omega}{1+k} \quad \text{és} \quad z_N = \frac{z_B + kz_C}{1+k} = \frac{\omega+k\omega^2}{1+k}. \quad (2 \text{ pont})$$

Felírjuk a P, Q, R pontok affixumát. Mivel $\omega^2 - \omega + 1 = 0$, ezért

$$\begin{aligned} z_P &= \frac{z_N + z_E}{2} = \frac{\frac{\omega+k\omega^2}{1+k} - \omega}{2} = \frac{k\omega^2 - k\omega}{2(1+k)} = \frac{k(\omega^2 - \omega)}{2(1+k)} = -\frac{k}{2(1+k)}, \\ z_Q &= \frac{z_M + z_P}{2} = \frac{\frac{1+k\omega}{1+k} - \frac{k}{2(1+k)}}{2} = \frac{2+2k\omega-k}{4(1+k)}, \\ z_R &= \frac{z_O + z_A}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

Az előbbi összefüggésekből következik, hogy

$$\begin{aligned} \frac{z_Q - z_R}{z_C - z_R} &= \frac{\frac{2+2k\omega-k}{4(1+k)} - \frac{1}{2}}{\omega^2 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{2k\omega-3k}{4(1+k)}}{\frac{2\omega^2-1}{2}} = \frac{k(2\omega-3)}{2(1+k)(2\omega^2-1)} \\ &= \frac{k(2\omega-3)}{2(1+k)(2(\omega-1)-1)} = \frac{k}{2(1+k)} \in \mathbb{R}^*, \end{aligned} \quad (3 \text{ pont})$$

és ezért a C, Q, R pontok egy egyenesen helyezkednek el.

Hivatalból

(1 pont) ■

Második megoldás. Legyen $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ és $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Innen következik, hogy $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{OD} = -\vec{a}$ és $\overrightarrow{OE} = -\vec{b}$. (2 pont)

Mivel $AM = BN$ és $AB = BC$, következik, hogy $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = k$ valamilyen $k > 0$ esetén. Az előző összefüggések alapján

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{1+k} = \frac{\vec{a} + k\vec{b}}{1+k} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC}}{1+k} = \frac{\vec{b} + k(\vec{b} - \vec{a})}{1+k} = \frac{-k\vec{a} + (1+k)\vec{b}}{1+k}. \quad (2 \text{ pont})$$

Innen következik, hogy

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \frac{\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OE}}{2} = \frac{\frac{-k\vec{a} + (1+k)\vec{b}}{1+k} - \vec{b}}{2} = \frac{-k\vec{a}}{2(1+k)}, \\ \overrightarrow{OQ} &= \frac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP}}{2} = \frac{\frac{\vec{a} + k\vec{b}}{1+k} - \frac{k\vec{a}}{2(1+k)}}{2} = \frac{(2-k)\vec{a} + 2k\vec{b}}{4(1+k)}, \\ \overrightarrow{OR} &= \frac{\vec{a}}{2}. \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

Az előző összefüggések alapján

$$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR} = \frac{(2-k)\vec{a} + 2k\vec{b}}{4(1+k)} - \frac{\vec{a}}{2} = \frac{-3k\vec{a} + 2k\vec{b}}{4(1+k)} = \frac{k}{4(1+k)}(-3\vec{a} + 2\vec{b}),$$

valamint

$$\overrightarrow{CR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OC} = \frac{\vec{a}}{2} - (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{3\vec{a} - 2\vec{b}}{2} = -\frac{(-3\vec{a} + 2\vec{b})}{2},$$

tehát $\overrightarrow{RQ} = -\frac{k}{2(1+k)} \cdot \overrightarrow{CR}$. Innen következik, hogy C, Q, R kollineárisak. (3 pont)

Hivatalból (1 pont) ■

4. feladat. Adott az n rögzített természetes szám. Határozd meg azokat az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre

$$(xy)^n \cdot \lg(xy) \leq x^n f(y) + y^n f(x) \leq f(xy),$$

minden $x, y > 0$ esetén!

dr. Bencze Mihály, Brassó

Első megoldás. Ha $x = y = 1$, akkor a megadott feltétel alapján $1^n \cdot \lg 1 \leq 1^n \cdot f(1) + 1^n \cdot f(1) \leq f(1)$, ahonnan

$$0 \leq f(1) + f(1) \leq f(1), \quad \text{tehát} \quad f(1) = 0. \quad (1)$$

(2 pont)

Ha $y = 1$, akkor $x^n \lg x \leq x^n f(1) + 1^n \cdot f(x) \leq f(x)$. Felhasználva az (1) összefüggést, következik, hogy minden $x > 0$ esetén

$$x^n \cdot \lg x \leq f(x). \quad (2)$$

(2 pont)

Ha most $y = \frac{1}{x}$ -et helyettesítünk a kezdeti feltételbe, akkor az

$$\left(x \cdot \frac{1}{x}\right)^n \lg \left(x \cdot \frac{1}{x}\right) \leq x^n \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^n} \cdot f(x) \leq f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

összefüggést kapjuk minden $x > 0$ esetén. Innen következik, hogy

$$1 \lg 1 \leq x^n \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^n} \cdot f(x) \leq f(1)$$

minden $x > 0$ esetén, amiből ugyancsak az (1) összefüggés alapján azt kapjuk, hogy

$$0 \leq x^n \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^n} \cdot f(x) \leq 0,$$

minden $x > 0$ esetén. Ez alapján $x^n \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^n} \cdot f(x) = 0$, tehát $f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^{2n}} \cdot f(x)$, minden $x > 0$ esetén. **(2 pont)**

A (2) egyenlőtlenségből az $x \mapsto \frac{1}{x}$ helyettesítéssel következik, hogy

$$\frac{1}{x^n} \cdot \lg\left(\frac{1}{x}\right) \leq f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^{2n}} \cdot f(x), \quad \forall x > 0, \quad \textbf{(1 pont)}$$

vagyis $-\frac{1}{x^n} \lg x \leq -\frac{1}{x^{2n}} f(x)$, minden $x > 0$ esetén. Ezt az összefüggést beszorozva $(-x^{2n})$ -nel, az

$$x^n \cdot \lg x \geq f(x), \quad \forall x > 0 \quad \textbf{(3)}$$

(1 pont)

egyenlőtlenséghez jutunk. A (2) és (3) egyenlőtlenségek alapján egyetlen ilyen f függvény létezik és

$$f(x) = x^n \cdot \lg x, \quad \forall x > 0. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Hivatalból

(1 pont)



Második megoldás. Ha osztjuk a megadott egyenlőtlenségeket az $(xy)^n > 0$ számmal minden $x, y > 0$ esetén, akkor az

$$\lg(xy) \leq \frac{f(y)}{y^n} + \frac{f(x)}{x^n} \leq \frac{f(xy)}{(xy)^n}, \quad \forall x, y > 0 \quad \textbf{(1 pont)}$$

ekvivalens egyenlőtlenséghez jutunk. Vezessük be a $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x)}{x^n}$ függvényt. Az f -re megadott egyenlőtlenségek így egyenértékűek a

$$\lg(xy) \leq g(x) + g(y) \leq g(xy), \quad \forall x, y > 0 \quad \textbf{(1 pont)}$$

egyenlőtlenségekkel. Innen a az alábbi következtetéseket vonhatjuk le:

a) az $x = y = 1$ helyettesítésből következik, hogy $0 \leq 2g(1) \leq g(1)$, tehát $g(1) = 0$; **(1 pont)**

b) az $y = \frac{1}{x}$ helyettesítésből következik, hogy $0 \leq g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) \leq g(1) = 0$, tehát $g\left(\frac{1}{x}\right) = -g(x)$, minden $x > 0$ esetén; **(1 pont)**

c) az $y = 1$ helyettesítésből következik, hogy $\lg x \leq g(x)$, minden $x > 0$ esetén; (1 pont)

A c) és b) alpontok alapján az $x \mapsto \frac{1}{x}$ helyettesítésből azt kapjuk, hogy

$$-\lg x = \lg \frac{1}{x} \leq g\left(\frac{1}{x}\right) = -g(x), \quad \forall x > 0, \quad (2 \text{ pont})$$

tehát $\lg x \geq g(x)$, minden $x > 0$ esetén. Innen viszont a c) alpont alapján azt kapjuk, hogy $g(x) = \lg x$, vagyis $f(x) = x^n \cdot \lg x$, minden $x > 0$ esetén. (2 pont)

Hivatalból (1 pont) ■

Megjegyzés. A második megoldásban bemutatott gondolatmenet alapján teljesül, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq 2$, akkor a

$$\lg \left(\prod_{k=1}^n x_k \right) \leq \sum_{k=1}^n g(x_k) \leq g \left(\prod_{k=1}^n x_k \right), \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_n > 0$$

függvényegyenlőtlenség megoldása $g(x) = \lg x$.

III. országos magyar matematikaolimpia

XXX. EMMV

Déva, 2020. február 11–16.

XI. osztály – I. forduló

1. feladat. Az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ valós számsorozatot a következőképpen értelmezzük:

$$x_1 = 1 \quad \text{és} \quad x_{n+1} = n \cdot x_n + n - 1,$$

bármely $n \geq 1$ esetén. Ha

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k} \quad \text{és} \quad b_n = \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{1+x_{k+1}},$$

számítsd ki a következő határértékeket:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

*dr. Bencze Mihály, Brassó
Szilágyi Judit, Kolozsvár*

Megoldás.

a) Mivel $x_{n+1} + 1 = n(x_n + 1)$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, így rendre írhatjuk, hogy (1 pont)

$$\begin{aligned} x_n + 1 &= (n-1) \cdot (x_{n-1} + 1) \\ x_{n-1} + 1 &= (n-2) \cdot (x_{n-2} + 1) \\ &\vdots \\ x_2 + 1 &= 1 \cdot (x_1 + 1). \end{aligned}$$

Az egyenleteket összeszorozva kapjuk, hogy $x_n = 2(n-1)! - 1$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

(3 pont)

Innen

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \right),$$

tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{e}{2}$.

(2 pont)

b) Írhatjuk, hogy

$$b_n = \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{1+x_{k+1}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k!} \quad (1 \text{ pont})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{1}{1!}\right) + \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n!}\right), \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

$$\text{innen } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2}.$$

Hivatalból (1 pont)



2. feladat. Ha $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, akkor igazold a

$$\frac{8}{3} \det(A^2 + A + I_2) \geq (1 - \det A)^2 + (1 + \text{Tr } A)^2$$

egyenlőtlenséget!

dr. Bencze Mihály, Brassó
Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Legyen az A mátrix karakterisztikus polinomja

$$p_A(x) = \det(A - xI_2) = x^2 - ax + b,$$

ahol $a = \text{Tr}(A)$ és $b = \det(A)$. (2 pont)

Teljesül, hogy

$$\det(A^2 + A + I_2) = \det(A - \varepsilon I_2) \det(A - \varepsilon^2 I_2) = p_A(\varepsilon) \cdot p_A(\varepsilon^2),$$

ahol $\varepsilon^3 = 1$ és $\varepsilon \neq 1$. (2 pont)

Azt kapjuk, hogy

$$\det(A^2 + A + I_2) = (\varepsilon^2 - a \cdot \varepsilon + b)(\varepsilon - a \cdot \varepsilon^2 + b) = a^2 + b^2 + ab + a - b + 1. \quad (2 \text{ pont})$$

Igazoljuk, hogy

$$\frac{8}{3}(a^2 + b^2 + ab + a - b + 1) \geq (1 - b)^2 + (1 + a)^2.$$

Ezt rendezve kapjuk, hogy

$$5a^2 + 8ab + 2a + 5b^2 - 2b + 2 \geq 0,$$

ami ekvivalens a

$$(2a + 2b)^2 + (a + 1)^2 + (b - 1)^2 \geq 0 \quad (3 \text{ pont})$$

egyenlőtlenséggel, ami igaz bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén.

Hivatalból (1 pont)



3. feladat. Az $(x_n)_{n \geq 1}$ sorozatot a következőképpen értelmezzük: $x_1 \in (0, 1)$ és $x_{n+1} = x_n - x_n^{k+1}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, ahol $k \in \mathbb{N}^*$ rögzített.

a) Igazold, hogy a sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!

b) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{k}} x_n$ határértékét!

*dr. Bencze Mihály, Brassó
Ványi Emese, Szatmárnémeti*

Megoldás.

a) Indukcióval igazoljuk, hogy $x_n \in (0, 1)$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Ha $x_n \in (0, 1)$, akkor $x_n^k \in (0, 1)$. Innen következik, hogy $1 - x_n^k \in (0, 1)$, tehát $x_{n+1} = x_n(1 - x_n^k) \in (0, 1)$, vagyis $(x_n)_{n \geq 1}$ korlátos. (1 pont)

Ugyanakkor $x_{n+1} - x_n = -x_n^{k+1} < 0$, tehát a sorozat szigorúan csökkenő. Mivel a sorozat monoton és korlátos, így konvergens is. (1 pont)

Létezik $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$. Határértékre téve a rekurziós összefüggésben az $l = l - l^{k+1}$ összefüggést kapjuk, ahonnan $l = 0$. (1 pont)

b) Legyen $y_n = n^{\frac{1}{k}} \cdot x_n$, ekkor $y_n^k = n \cdot x_n^k$. Kiszámítjuk a $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^k$ határértékét. (1 pont)
Teljesül, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x_n^k}.$$

Mivel $x_n^k \in (0, 1)$ és x_n^k szigorúan csökkenő, valamint $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, az $\frac{1}{x_n^k}$ sorozat növekvő és nem korlátos. (1 pont)

A következőket írhatjuk:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}^k} - \frac{1}{x_n^k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^k x_{n+1}^k}{x_n^k - x_{n+1}^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^k x_n^k (1 - x_n^k)^k}{x_n^k - x_n^k (1 - x_n^k)^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^k (1 - x_n^k)^k}{1 - (1 - x_n^k)^k} \quad (1 \text{ pont})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^k (1 - x_n^k)^k}{k x_n^k - C_k^2 x_n^{2k} + \dots - (-1)^k x_n^{k^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - x_n^k)^k}{k - C_k^2 x_n^k + \dots - (-1)^k x_n^{k^2-k}} \quad (1 \text{ pont})$$

$$= \frac{1}{k},$$

mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^k = 0$, az előző alpont alapján. (1 pont)

A Cesaro–Stolz tétel értelmében, azt kapjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^k = \frac{1}{k}$, ahonnan $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$.

(1 pont)

Hivatalból

(1 pont)



4. feladat. Legyen $n \geq 2$ egy természetes szám és $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, úgy, hogy $\det(A) = 1$ és a B mátrix összes eleme egyes. Igazold, hogy ha $\det(A^{-1} + B) = 1$, akkor A elemeinek összege nulla!

Kajántó Sándor, BBTE

Lukács Andor, BBTE

Első megoldás. A feltétel alapján

$$1 = \det(A) \det(A^{-1} + B) = \det(AB + I_n). \quad (2 \text{ pont})$$

Ha $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$, akkor

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 & s_1 & \dots & s_1 \\ s_2 & s_2 & \dots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_n & \dots & s_n \end{pmatrix}, \quad (2 \text{ pont})$$

ahol s_k jelöli az A mátrix k -adik sorában lévő elemek összegét, minden $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén. Ekkor a következőket írhatjuk

$$1 = \begin{vmatrix} s_1 + 1 & s_1 & \dots & s_1 \\ s_2 & s_2 + 1 & \dots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_n & \dots & s_n + 1 \end{vmatrix} = \left(1 + \sum_{k=1}^n s_k\right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ s_2 & s_2 + 1 & \dots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_n & \dots & s_n + 1 \end{vmatrix} \quad (3 \text{ pont})$$

$$= \left(1 + \sum_{k=1}^n s_k\right) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 + \sum_{k=1}^n s_k. \quad (1 \text{ pont})$$

Innen következik, hogy A elemeinek összege $\sum_{k=1}^n s_k = 0$. (1 pont)

Hivatalból (1 pont)

■

Megjegyzés. Ha $1 = \det(A^{-1} + B) \det(A) = \det(BA + I_n)$ -ből indulunk ki, akkor BA mátrix elemei az oszloponkénti összegek lesznek és így az $1 = 1 + \sum_{k=1}^n o_k$ egyenlőséghez jutunk.

Második megoldás. Észrevesszük, hogy A elemeinek összege $\text{Tr}(AB)$. Egyrészt

$$1 = \det(A) \det(A^{-1} + B) = \det(AB + I_n) = p_{AB}(-1),$$

ahol p_{AB} az AB karakterisztikus polinomja. Másrészt, mivel $\text{rang}(A) = n$ és $\text{rang}(B) = 1$, ezért $\text{rang}(AB) = 1$. A karakterisztikus polinom tulajdonságai alapján ez azt eredményezi, hogy

$$p_{AB}(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \text{Tr}(AB) x^{n-1},$$

minden $x \in \mathbb{C}$ esetén. Az előbbieket alapján

$$1 = p_{AB}(-1) = 1 + \text{Tr}(AB),$$

ahonnan $\text{Tr}(AB) = 0$, vagyis A elemeinek összege nulla. ■

Harmadik megoldás. Ha $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$ és $A^{-1} = [\alpha_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$, a $\det(A) = 1$ feltételből következik, hogy $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \delta_{ji}$ az a_{ji} algebrai komplementuma. Hasonlóan, az $(A^{-1})^{-1} = A$ összefüggésből (és mivel $\det(A^{-1}) = 1$), következik, hogy $a_{ij} = (-1)^{i+j} d_{ji}$ az α_{ji} algebrai komplementuma. Legyen O_k az A^{-1} mátrix k -adik oszlopa, valamint $V = (1 \ 1 \ \dots \ 1)^T$ a B mátrix k -adik oszlopa, minden $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén. A determináns tulajdonságai alapján írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \det(A^{-1} + B) &= \det(O_1 + V, O_2 + V, \dots, O_n + V) \\ &= \det A + \sum_{k=1}^n \det(O_1, \dots, O_{k-1}, V, O_{k+1}, \dots, O_n) \\ &= \det A + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} d_{kl} \\ &= \det A + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{lk}. \end{aligned}$$

A megadott feltételek alapján innen következik, hogy A elemeinek összege nulla. ■

III. országos magyar matematikaolimpia

XXX. EMMV

Déva, 2020. február 11–16.

XII. osztály – I. forduló

1. feladat. Adott az $M = \left\{ \frac{2m+1}{2n+1} \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\}$ halmaz. Minden $a, c \in M$ és $b, d \in \mathbb{Z}$ esetén értelmezzük a $G = M \times \mathbb{Z}$ halmazon a „ $\circ$ ” műveletet az

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac, b + d)$$

szabállyal.

- a) Igazold, hogy az $f: G \rightarrow \mathbb{Q}^*$, $f((a, b)) = a \cdot 2^b$ függvény bijektív!
- b) Igazold, hogy $(G, \circ)$ Abel-csoport!

dr. Bencze Mihály, Brassó

Első megoldás. a) Igazoljuk, hogy f injektív. Tegyük fel, hogy $f((a_1, b_1)) = f((a_2, b_2))$, ahol $b_2 \geq b_1$. Innen következik, hogy $a_1 \cdot 2^{b_1} = a_2 \cdot 2^{b_2}$, tehát

$$\frac{a_1}{a_2} = 2^{b_2 - b_1}.$$

Mivel az $\frac{a_1}{a_2}$ tört felírható két páratlan egész szám arányaként és $b_2 - b_1 \in \mathbb{N}$, innen következik, hogy $2^{b_2 - b_1} = 1$, vagyis $b_1 = b_2$. Ez viszont azt eredményezi, hogy $a_1 = a_2$, tehát f injektív.

(2 pont)

Igazoljuk, hogy f szürjektív. Legyen $p \in \mathbb{Q}^*$. Meghatározzunk egy-egy olyan $q \in M$ és $k \in \mathbb{Z}$ számot, amelyre $q \cdot 2^k = p$. A p racionális szám irreducibilis tört alakban vett felírásából következik, hogy vagy $p = \frac{m \cdot 2^r}{n}$, vagy $p = \frac{m}{n \cdot 2^r}$, ahol m, n páratlan egészek és relatív prímek, valamint $r \in \mathbb{N}$. Ha $p = \frac{m \cdot 2^r}{n}$, akkor $q = \frac{m}{n} \in M$ és $k = r \in \mathbb{Z}$, ha pedig $p = \frac{m}{n \cdot 2^r}$, akkor $q = \frac{m}{n} \in M$ és $k = -r \in \mathbb{Z}$. Tehát az f függvény szürjektív.

(3 pont)

- b) Igazoljuk, hogy f művelettartó. Valóban,

$$f((a, b) \circ (c, d)) = f(ac, b + d) = ac \cdot 2^{b+d} = (a \cdot 2^b) \cdot (c \cdot 2^d) = f((a, b)) \cdot f((c, d)),$$

minden $(a, b), (c, d) \in G$ esetén.

(2 pont)

Mivel f művelettartó és bijektív, valamint $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ Abel-csoport, következik, hogy $(G, \circ)$ is Abel-csoport és izomorf a $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ csoporttal.

(2 pont)

Hivatalból

(1 pont)



Második megoldás a b) alpontra.

- A „ $\circ$ ” művelet belső művelet a G -n, mivel „ $\frac{\text{páratlan}}{\text{páratlan}}$ ” alakú racionális számok szorzata ugyanilyen alakú, valamint az egész számok összege belső művelet a $\mathbb{Z}$ -n.
- A „ $\circ$ ” művelet asszociatív, mivel a szorzás asszociatív a $\mathbb{Q}^*$ halmazon, tehát akkor az $M \subseteq \mathbb{Q}$ halmazon is az, valamint az egész számok összeadása asszociatív.
- A „ $\circ$ ” művelet kommutatív, mivel a szorzás kommutatív a $\mathbb{Q}^*$ halmazon, tehát akkor az $M \subseteq \mathbb{Q}$ halmazon is az, valamint az egész számok összeadása kommutatív.
- A „ $\circ$ ” műveletre vonatkozóan $(1, 0)$ semleges elem, mivel $(1, 0) \in G$, illetve $(a, b) \circ (1, 0) = (a \cdot 1, b + 0) = (a, b)$ minden $(a, b) \in G$ esetén és a kommutativitást már igazoltuk.
- Ha $a \in M$, akkor $\frac{1}{a}$ is „ $\frac{\text{páratlan}}{\text{páratlan}}$ ” alakú, tehát eleme M -nek, és így az $(a, b) \in G$ inverze a „ $\circ$ ” műveletre nézve az $\left(\frac{1}{a}, -b\right) \in G$ elem. (4 pont)

■

Harmadik megoldás a b) alpontra. Igazoljuk, hogy $(M, \cdot)$ részcsoportha a $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ csoportnak. A részcsoporthok jellemzési tétele alapján elég belátni, hogy M nem üres, valamint hogy ha $a_1, a_2 \in M$, akkor $\frac{a_1}{a_2} \in M$. Mindkét állítás nyilvánvaló: egyrészt $1 \in M$, másrészt két „ $\frac{\text{páratlan}}{\text{páratlan}}$ ” alakú szám aránya is ugyanilyen alakú.

Felhasználva a „ $\circ$ ” művelet értelmezését, következik, hogy a $(G, \circ)$ algebrai struktúra az $(M, \cdot)$ és $(\mathbb{Z}, +)$ Abel-csoportok direkt (Descartes) szorzata, tehát Abel-csoport. (4 pont)

■

2. feladat. Határozd meg az $f: \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\cos x(1 - \sin 2x)}$$

függvény primitív függvényeit!

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Első megoldás. A következő átalakításokat végezhetjük el:

$$\frac{1}{\cos x(1 - \sin 2x)} = \frac{1}{\cos x} + \frac{2 \sin x}{1 - \sin 2x} = \frac{1}{\cos x} + \frac{2 \sin x}{(\sin x - \cos x)^2}. \quad (2 \text{ pont})$$

Ez alapján a kiszámolandó integrál felbontható az $I = I_1 + I_2$ összegre, ahol

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{1}{\cos x} dx = \int -\frac{\cos x}{\sin^2 x - 1} dx = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| + C_1 \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \right) + C_1, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right), \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

valamint $I_2 = 2 \cdot \int \frac{\sin x}{(\sin x - \cos x)^2} dx$. Vezessük be az

$$F = \int \frac{\sin x}{(\sin x - \cos x)^2} dx \quad \text{és} \quad G = \int \frac{\cos x}{(\sin x - \cos x)^2} dx \quad (1 \text{ pont})$$

jelöléseket. Innen következik, hogy

$$\begin{aligned} F - G &= \int \frac{1}{\sin x - \cos x} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{\sin(x - \frac{\pi}{4})} dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{1 - \cos^2(x - \frac{\pi}{4})} dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{\cos(x - \frac{\pi}{4}) - 1}{\cos(x - \frac{\pi}{4}) + 1} \right| + \mathcal{C}_2 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \frac{\sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8})}{\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8})} + \mathcal{C}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \right) + \mathcal{C}_2, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{4} \right), \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

valamint

$$F + G = \int \frac{(\sin x - \cos x)'}{(\sin x - \cos x)^2} dx = -\frac{1}{\sin x - \cos x} + \mathcal{C}_3, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{4} \right). \quad (1 \text{ pont})$$

Az előbbi összefüggések alapján írhatjuk, hogy

$$I_2 = 2F = (F - G) + (F + G) = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \right) - \frac{1}{\sin x - \cos x} + \mathcal{C}, \quad (1 \text{ pont})$$

tehát

$$I = I_1 + I_2 = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \right) - \frac{1}{\sin x - \cos x} + \mathcal{C}, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{4} \right). \quad (1 \text{ pont})$$

Hivatalból

(1 pont)



Második megoldás. Alkalmazzuk a $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ helyettesítést.

(1 pont)

Innen következik, hogy a kiszámolandó integrál

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \left(\frac{2t-1+t^2}{1+t^2} \right)^2} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= 2 \int \frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)(t^2+2t-1)^2} dt. \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

Az egyenlő együtthatók módszerét alkalmazva írhatjuk, hogy

$$\frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)(t^2+2t-1)^2} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t-1+\sqrt{2}} + \frac{D}{(t-1+\sqrt{2})^2} + \frac{E}{t-1-\sqrt{2}} + \frac{F}{(t-1-\sqrt{2})^2}, \quad (1 \text{ pont})$$

ahonnan a számolások elvégzése után az

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad D = \frac{-2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}, \quad E = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{és} \quad F = \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \quad (3 \text{ pont})$$

együtthatókhoz jutunk. Tehát

$$I = -\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right| + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right| - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2} \right| - \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}} + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2} \right| + \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}} + \mathcal{C}, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right). \quad (2 \text{ pont})$$

Hivatalból

(1 pont) ■

Harmadik megoldás. Legyen

$$I = \int \frac{1}{\cos x(1 - \sin 2x)} dx.$$

A $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$I = \int \left(\frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} \left(1 - 2\frac{1-t^2}{1+t^2} \frac{2t}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} \right) dt = \int \frac{2(t^2+1)^2}{(1-t^2)((t^2+1)^2 - 4t(1-t^2))} dt \\ = 2 \int \frac{(t^2+1)^2 - 4t(1-t^2) + 4t(1-t^2)}{(1-t^2)((t^2+1)^2 - 4t(1-t^2))} dt = 2 \int \left(\frac{1}{1-t^2} + \frac{4t}{(t^2+1)^2 - 4t(1-t^2)} \right) dt \\ = 2 \int \left(\frac{1}{1-t^2} + \frac{4t}{(t^2+2t-1)^2} \right) dt = 2 \int \left(\frac{1}{1-t^2} + \frac{4t}{((t+1)^2 - 2)^2} \right) dt \\ = 2 \int \left(\frac{1}{1-t^2} + \frac{4(t+1)}{((t+1)^2 - 2)^2} - \frac{4}{((t+1)^2 - 2)^2} \right) dt \\ = \int \frac{2}{1-t^2} dt + 4 \int \frac{((1+t)^2)'}{((1+t)^2 - 2)^2} dt - 8 \int \frac{1}{((t+1)^2 - 2)^2} dt. \quad (4 \text{ pont})$$

Mivel $t \in (0, 1)$, ezért

$$I = \ln \frac{1+t}{1-t} - \frac{4}{(t+1)^2 - 2} - 8 \int \frac{1}{((t+1)^2 - 2)^2} dt.$$

A következőkben kiszámoljuk a $J = \int \frac{1}{(u^2 - 2)^2} du$ integrált. Vegyük észre, hogy

$$\int \frac{1}{u^2 - 2} du = \int \frac{u^2 - 2}{(u^2 - 2)^2} du = \int \frac{u^2}{(u^2 - 2)^2} du - 2J. \quad (1 \text{ pont})$$

Innen következik, hogy

$$J = \frac{1}{2} \int \frac{u^2}{(u^2 - 2)^2} du - \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2 - 2} du = \frac{1}{4} \int \frac{(u^2)'}{(u^2 - 2)^2} u du - \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2 - 2} du \\ = \frac{1}{4} \frac{u}{2 - u^2} + \frac{1}{4} \int \frac{1}{u^2 - 2} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2 - 2} du \\ = \frac{1}{4} \frac{u}{2 - u^2} - \frac{1}{4} \int \frac{1}{u^2 - 2} du = \frac{1}{8} \left(\frac{2u}{2 - u^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} - u}{\sqrt{2} + u} \right| \right) + \mathcal{C}. \quad (3 \text{ pont})$$

A fentiek alapján

$$I = \ln \frac{1+t}{1-t} - \frac{4}{(t+1)^2-2} - \frac{2(t+1)}{2-(t+1)^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}-t-1}{\sqrt{2}+t+1} \right| + \mathcal{C}$$

$$= \frac{2t-2}{(t+1)^2-2} + \ln \frac{1+t}{1-t} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}-1-t}{\sqrt{2}+1+t} + \mathcal{C}. \quad (1 \text{ pont})$$

Hivatalból (1 pont) ■

3. feladat. Adott az $a < 1$ valós szám. Határozd meg az összes olyan x, y, z valós számot, amelyekre

$$x + y + z = \frac{3(a+1)}{2}, \quad xy + yz + zx = 3a$$

és az xyz értéke a lehető legkisebb!

dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(t) = (t-x)(t-y)(t-z)$$

harmadfokú függvényt.

(2 pont)

Írhatjuk, hogy

$$f(t) = t^3 - (x+y+z)t^2 + (xy+yz+zx)t - xyz = t^3 - \frac{3(a+1)}{2}t^2 + 3at - xyz,$$

így $f'(t) = 3t^2 - 3(a+1)t + 3a = 3(t-a)(t-1)$.

(1 pont)

A függvény változási táblázata

t	$-\infty$			a				1			$+\infty$
$f'(t)$	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$.

(1 pont)

Kiszámoljuk az $f(a)$ -t és az $f(1)$ -et:

$$f(a) = a^3 - \frac{3(a+1)}{2} \cdot a^2 + 3a^2 - xyz = \frac{a^3(3-a)}{2} - xyz,$$

$$f(1) = 1 - \frac{3(a+1)}{2} + 3a - xyz = \frac{3a-1}{2} - xyz. \quad (1 \text{ pont})$$

Mivel az x, y, z valós számok f -nek gyökei, ezért az egyik a $(-\infty, a]$ intervallumban van, a másik az $[a, 1]$ -ben, a harmadik pedig az $[1, +\infty)$ -ben. Tehát $f(a) \geq 0$ és $f(1) \leq 0$, vagyis

$$\frac{a^2(3-a)}{2} \geq xyz \geq \frac{3a-1}{2}. \quad (2 \text{ pont})$$

Innen következik, hogy ahhoz, hogy xyz minimális legyen, kell teljesülnie az $f(1) = 0$ feltételnek, vagyis az x, y, z közül kettő egyenlő kell legyen 1-gyel. A szimmetria miatt feltételezhetjük, hogy

$y = z = 1$. Innen következik, hogy $x = \frac{3a-1}{2}$, ami kisebb a -nál, mert $a < 1$. (1 pont)

Összegezve a fenti eredményeket, a megoldáshalmaz

$$M = \left\{ \left(\frac{3a-1}{2}, 1, 1 \right), \left(1, \frac{3a-1}{2}, 1 \right), \left(1, 1, \frac{3a-1}{2} \right) \right\}. \quad (1 \text{ pont})$$

Hivatalból (1 pont) ■

4. feladat. A $(G, \cdot)$ csoportban teljesülnek a következő feltételek:

- a) a G elemeinek száma p^n , ahol p prímszám és $n \geq 2$ természetes szám;
- b) ha H_1 és H_2 olyan részcsoporthaj a G -nek, amelyekre $|H_1| = |H_2|$, akkor $H_1 = H_2$.

Igazold, hogy G -ben van olyan elem, amelynek a rendje p^n .

*Baja Zsolt, Kolozsvár
Lukács Andor, Kolozsvár
Tóth György, Kolozsvár*

Megoldás. Tegyük fel, hogy nem létezik olyan $x \in G$, amelyre $\text{ord}(x) = p^n$. Innen Lagrange tétele alapján következik, hogy minden $x \in G$ esetén $\text{ord}(x) = p^k$ alakú, valamilyen $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ értékre. (2 pont)

Legyen

$$A_k = \{x \in G \mid \text{ord } x = p^k\}, \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Mivel $G = \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$ következik, hogy

$$|G| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |A_k|. \quad (1)$$

(2 pont)

Legyen $x_0 \in G$ úgy, hogy $\text{ord}(x_0) = p^k$. Ha létezik $y \in G$ úgy, hogy $\text{ord}(y) = \text{ord}(x_0)$, akkor

$$\{x_0, x_0^2, \dots, x_0^{p^k}\} \quad \text{és} \quad \{y, y^2, \dots, y^{p^k}\} \quad (2 \text{ pont})$$

ugyanannyi elemű részcsoporthaj a G -nek, tehát a b) feltétel alapján megegyeznek. Ez viszont azt jelenti, hogy $y \in \{x_0, x_0^2, \dots, x_0^{p^k}\}$. Innen következik, hogy

$$A_k = \{x \in G \mid \text{ord}(x) = \text{ord}(x_0)\} \subseteq \{x_0, x_0^2, \dots, x_0^{p^k}\}, \quad (2 \text{ pont})$$

vagyis $|A_k| \leq p^k$. Felhasználva az (1) összefüggést, következik, hogy

$$|G| \leq \sum_{k=0}^{n-1} p^k = \frac{p^n - 1}{p - 1} \leq p^n - 1 < p^n = |G|,$$

ami ellentmondás. Tehát létezik olyan $x \in G$, amelyre $\text{ord}(x) = p^n$. (1 pont)

Hivatalból (1 pont) ■

III. országos magyar matematikaolimpia

XXX. EMMV

Déva, 2020. február 11–16.

IX. osztály – II. forduló

1. feladat. A valós számok halmazán oldd meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} (x^2 + 2)(y^2 + 2) = 2(y + z)^2 \\ (y^2 + 2)(z^2 + 2) = 2(z + x)^2 \\ (z^2 + 2)(x^2 + 2) = 2(x + y)^2 \end{cases}.$$

dr. Bencze Mihály, Brassó

Első megoldás. Összeadva a három egyenletet kapjuk, hogy

$$(x^2 + 2)(y^2 + 2) + (y^2 + 2)(z^2 + 2) + (z^2 + 2)(x^2 + 2) - 2(y + z)^2 - 2(z + x)^2 - 2(x + y)^2 = 0, \quad (1 \text{ pont})$$

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 12 - 2(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 2zx) &= 0, \\ x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - 4xy - 4yz - 4zx + 12 &= 0, \\ (xy - 2)^2 + (yz - 2)^2 + (zx - 2)^2 &= 0, \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

$$\text{ahonnan } xy = 2, yz = 2, zx = 2. \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{Ezeket összeszorozva } x^2y^2z^2 = 8, \text{ ahonnan } xyz = \pm 2\sqrt{2}. \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{Ha } xyz = -2\sqrt{2}, \text{ akkor } z = \frac{xyz}{xy} = \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \text{ és hasonlóan } x = -\sqrt{2}, y = -\sqrt{2}. \quad (2 \text{ pont})$$

$$\text{Ha } xyz = 2\sqrt{2}, \text{ akkor } z = \frac{xyz}{xy} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \text{ és hasonlóan } x = \sqrt{2}, y = \sqrt{2}.$$

$$\text{Összegezve, az egyenletrendszer lehetséges megoldásai } (x, y, z) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ és } (x, y, z) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}). \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{Visszahelyettesítve a kapott két számhármast az egyenletrendszerbe, azt kapjuk, hogy azok valóban megoldások.} \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{Hivatalból} \quad (1 \text{ pont})$$



Második megoldás. A Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség alapján bármely $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} (x^2 + 2)(y^2 + 2) &\geq (x\sqrt{2} + y\sqrt{2})^2 = 2(x + y)^2, \\ (y^2 + 2)(z^2 + 2) &\geq (y\sqrt{2} + z\sqrt{2})^2 = 2(y + z)^2, \\ (z^2 + 2)(x^2 + 2) &\geq (z\sqrt{2} + x\sqrt{2})^2 = 2(z + x)^2. \end{aligned}$$

Ezeket az egyenlőtlenségeket összeszorozva és felhasználva az egyenletrendszert következik, hogy mindhárom fenti egyenlőtlenségben egyenlőség áll fenn. Innen következik, hogy

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

ahonnan $x = y = z$. Az első egyenletből kapjuk, hogy

$$(x^2 + 2)^2 = 2(2x)^2,$$

amelynek megoldásai $x = \pm\sqrt{2}$, tehát a rendszer lehetséges megoldásai $(x, y, z) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ és $(x, y, z) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$. ■

2. feladat. Igazold, hogy a 2019, 20192019, ..., $\underbrace{20192019 \dots 2019}_{2022 \text{ db } 2019\text{-es}}$ számok közül van olyan, amelyik osztható 2021-gyel!

Turdean Katalin, Zilah

Megoldás. Legyen

$$x_k = \underbrace{20192019 \dots 2019}_{k \text{ db } 2019\text{-es}},$$

ahol $k \in \{1, 2, \dots, 2022\}$.

A 2021-gyel való osztáskor 2021 különböző maradékot kaphatunk, ezek a $0, 1, \dots, 2020$. **(1 pont)**

Mivel 2022 számunk és 2021 különböző maradékunk van, ezért létezik két olyan szám, amelynek a 2021-gyel való osztási maradéka megegyezik. Legyen ez a két szám x_k és x_l , ahol $1 \leq k < l \leq 2022$. **(2 pont)**

Innen következik, hogy az $x_l - x_k = x_{l-k} \cdot 10^{4k}$ osztható 2021-el. **(3 pont)**

A 10^{4k} és 2021 relatív prímek, **(2 pont)**

ezért x_{l-k} osztható 2021-gyel. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

3. feladat. Az $ABCD$ konvex négyszögben legyen M az átlók metszéspontja. Igazold, hogy

a) $\sqrt{AM \cdot BM} + \sqrt{CM \cdot DM} \leq \sqrt{(AM + MC) \cdot (BM + MD)}$;

b) $\sqrt{T_{AMB}} + \sqrt{T_{BMC}} + \sqrt{T_{CMD}} + \sqrt{T_{DMA}} \leq 2\sqrt{T_{ABCD}}$.

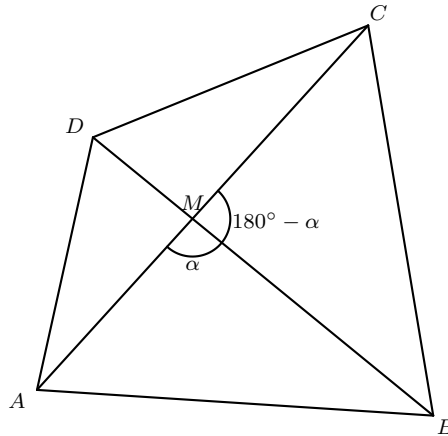
dr. Bencze Mihály, Brassó

Első megoldás. a) A feladatbeli egyenlőtlenség mindkét oldalát négyzetre emelve kapjuk a következő vele egyenértékű egyenlőtlenségeket:

$$\sqrt{AM \cdot BM} + \sqrt{CM \cdot DM} \leq \sqrt{(AM + MC) \cdot (BM + MD)},$$

$$AM \cdot BM + CM \cdot DM + 2\sqrt{AM \cdot BM \cdot CM \cdot DM} \leq AM \cdot BM + AM \cdot MD + MC \cdot BM + MC \cdot MD,$$

$$0 \leq \left(\sqrt{AM \cdot MD} - \sqrt{MC \cdot BM} \right)^2. \quad \textbf{(2 pont)}$$



b) Legyen $m(\widehat{AMB}) = \alpha$, így $m(\widehat{BMC}) = 180^\circ - \alpha$. Felírjuk a háromszögek területét

$$\begin{aligned} T_{AMB} &= \frac{MB \cdot MA \cdot \sin \alpha}{2}, & T_{CMD} &= \frac{MC \cdot MD \cdot \sin \alpha}{2}, \\ T_{BMC} &= \frac{MB \cdot MC \cdot \sin \alpha}{2}, & T_{DMA} &= \frac{MA \cdot MD \cdot \sin \alpha}{2}, \end{aligned}$$

ahol figyelembe vettük, hogy $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$. (2 pont)

$$\begin{aligned} T_{ABCD} &= T_{AMB} + T_{BMC} + T_{CMD} + T_{DMA} \\ &= \frac{[MB \cdot (MA + MC) + MD \cdot (MA + MC)] \cdot \sin \alpha}{2} \\ &= \frac{(MA + MC) \cdot (MB + MD) \cdot \sin \alpha}{2}. \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

Használva az a) alpontban kapott egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$\sqrt{T_{AMB}} + \sqrt{T_{CMD}} \leq \sqrt{T_{ABCD}}. \quad (1)$$

Hasonlóan $\sqrt{MB \cdot MC} + \sqrt{MA \cdot MD} \leq \sqrt{(MA + MC) \cdot (MB + MD)}$, ahonnan

$$\sqrt{T_{BMC}} + \sqrt{T_{DMA}} \leq \sqrt{T_{ABCD}}. \quad (2)$$

Az (1)-es és (2)-es egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összeadva megkapjuk a kért egyenlőtlenséget. (2 pont)
(1 pont)

Hivatalból (1 pont)

■

Második megoldás. a) Legyen $AM = a^2$, $BM = b^2$, $CM = c^2$ és $DM = d^2$, ahol $a, b, c, d > 0$.

A Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség alapján tudjuk, hogy

$$(a^2 + c^2)(b^2 + d^2) \geq (ab + cd)^2.$$

Gyököt vonva a fenti egyenlőtlenség mindkét oldalából következik az igazolandó egyenlőtlenség.

- b) Legyen $T_{AMB} = x^2$, $T_{BMC} = y^2$, $T_{CMD} = z^2$ és $T_{DMA} = t^2$, ahol $x, y, z, t > 0$. Ez alapján $T_{ABCD} = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$. Az x, y, z, t számokra felírt számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenségből következik az igazolandó egyenlőtlenség.



Megjegyzés. A második megoldás alapján a feladatban megadott egyenlőtlenségek az $ABCD$ konvex tetszőleges M belső pontjára fennállnak.

4. feladat. Felírjuk a táblára 1-től 2020-ig az összes természetes számot. Letörölünk két olyan számot, melyek különbsége osztható 3-mal, és helyettük a két szám összegét írjuk fel. Ezt az eljárást addig ismételjük, ameddig lehetséges. Igazold, hogy az eljárás végén a táblán pontosan két szám marad!

*Zajzon Csaba, Barót
Mátyás Ildikó Beáta, Szatmárnémeti
Szász Szilárd, Marosszentkirály*

Első megoldás. Két szám különbsége pontosan akkor osztható 3-mal, ha a 3-mal való osztási maradékuk megegyezik. A táblán szereplő számok közül 674 darab $3k + 1$ alakú, 673 darab $3k + 2$ és 673 darab $3k$ alakú.

(1 pont)

Két $3k$ alakú szám összege is $3k$ alakú, ezért ha két ilyen számot választunk ki letörlésre, akkor a táblán lévő $3k$ alakú számok száma egyel csökken. Ezért, ha már nem folytatható az eljárás, akkor a $3k$ alakú számok közül pontosan egy maradt a táblán.

(1 pont)

Két $3k + 1$ alakú szám összege $3k + 2$ alakú, ezért ha két ilyen számot törölünk le, akkor helyettük egy $3k + 2$ alakú szám kerül fel a táblára. Ebben az esetben a táblán lévő $3k + 1$ alakú számok száma 2-vel csökken, míg a $3k + 2$ alakú számoké 1-gyel növekszik.

(1 pont)

Két $3k + 2$ alakú szám összege $3k + 1$ alakú, ezért ha két ilyen számot törölünk le, akkor helyettük egy $3k + 1$ alakú szám kerül fel a táblára. Ebben az esetben a táblán lévő $3k + 2$ alakú számok száma 2-vel csökken, míg a $3k + 1$ alakú számoké 1-gyel növekszik.

(1 pont)

A fentiek alapján a $3k + 1$ alakú és $3k + 2$ alakú számok számának különbsége 3 többszörösével változik.

(2 pont)

Az eljárás elején ez a különbség $674 - 673 = 1$, így a végén a különbség 3-mal való osztási maradéka 1 kell legyen.

(1 pont)

Az eljárás befejeződésekor úgy a $3k + 1$ alakú számok száma, mint a $3k + 2$ alakú számok száma legfeljebb egy. Másrészt az előző észrevétel alapján ekkor a táblán $3k + 1$ alakú számból legalább egyel több kell legyen, mint $3k + 2$ alakúból. Ez csak úgy lehetséges, ha $3k + 1$ alakú számból egy darab marad és $3k + 2$ alakúból egy sem.

Összegezve, ha már az eljárás nem folytatható, akkor a táblán maradt egy $3k$ alakú és egy $3k + 1$ alakú szám, vagyis a végén 2 szám marad a táblán. A fenti gondolatmenetet felhasználva adható egy olyan algoritmus, amely végrehajtásával elérhető hogy a táblán pontosan két szám maradjon.

(2 pont)

Hivatalból

(1 pont)



Második megoldás. Vegyük észre, hogy a táblán lévő számok összege nem változik, illetve az összeg 3-mal való osztási maradéka 1. (2 pont)

Két $3k$ alakú szám helyett egy $3k$ alakú kerül mindig vissza a táblára, tehát az eljárás végén a táblán marad egy $3k$ alakú szám. (1 pont)

Háromnál több szám nem maradhat a táblán, mert a skatulya elv alapján ekkor lenne kettő amelynek a 3-mal való osztási maradéka megegyezik, és ez esetben az eljárás tovább folytatódna. (2 pont)

Ha három szám maradna a táblán, akkor azok 3-mal való osztási maradéka páronként különböző kell legyen, ellenkező esetben az eljárás folytatódna. Viszont, ha a maradékok páronként különbözőek, akkor ezeknek az összege 3, ami ellentmond annak, hogy a táblán lévő számok 3-mal való osztási maradéka 1. (2 pont)

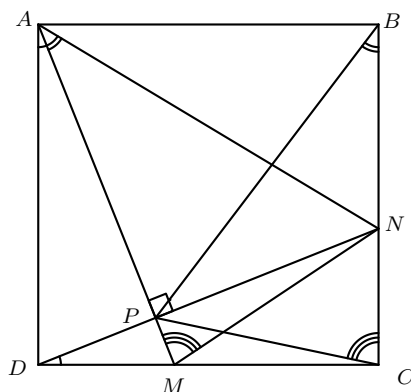
Ugyanakkor a táblán legalább két számnak kell maradnia, mert biztosan marad egy 3-mal osztható és tudjuk, hogy a fentmaradó számok összegének a 3-mal való osztási maradéka 1. (1 pont)

Az eljárás során minden lépésben egyel csökken a táblán levő számok száma, ezért 2018 lépés után mindig elérjük, hogy a táblán két szám legyen. (1 pont)
Hivatalból (1 pont) ■

5. feladat. Az $ABCD$ négyzet oldalain felvesszük az $M \in (CD)$ és $N \in (BC)$ pontokat, melyekre $\frac{DM}{MC} = \frac{CN}{NB} = k$. Határozd meg a k arány értékét úgy, hogy $\frac{T_{BPC}}{T_{ANM}} = \frac{9}{13}$, ahol $\{P\} = DN \cap AM$.

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Tekintsük az alábbi ábrát.



Egyrészt az M és N pontok ugyanolyan arányban osztják a (CD) , illetve a (BC) oldalakat, ezért könnyű belátni, hogy $ADM_{\Delta} \equiv DCN_{\Delta}$, ahonnan $m(\widehat{DAM}) = m(\widehat{CDN}) = \alpha$. (2 pont)

Másrészt az APD háromszögben a szögösszege vonatkozó tétel alapján

$$m(\widehat{APD}) = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ,$$

vagyis $AM \perp DN$. (1 pont)

Emiatt az $APNB$ és $CNPM$ négyszögek körbeírhatóak. (2 pont)

Innen már következik, hogy az ANM és BPC háromszögekben két-két szög kongruens, ezért ez a két háromszög hasonló. (1 pont)

Harmadrészt, felhasználva, hogy két hasonló háromszög területének aránya egyenlő a hasonlósági arány négyzetével, írhatjuk, hogy

$$\frac{9}{13} = \frac{T_{BPC}}{T_{ANM}} = \frac{BC^2}{AM^2} = \frac{a^2}{a^2 \left(1 + \frac{k^2}{(k+1)^2}\right)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{2k^2 + 2k + 1}. \quad (2 \text{ pont})$$

Innen az $5k^2 - 8k - 4 = 0$ egyenlethez jutunk, ahonnan a $k > 0$ feltétel miatt $k = 2$ adódik.

(1 pont)

Hivatalból

(1 pont)



6. feladat. Legyen x egy olyan valós szám, amelyre $x^3 + 2x$ és $x^5 + 3x$ racionálisak. Igazold, hogy az x racionális szám!
dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Bevezetjük az

$$a = x^3 + 2x \in \mathbb{Q} \quad \text{és} \quad b = x^5 + 3x \in \mathbb{Q}$$

jelöléseket. Ha $a = 0$ vagy $b = 0$, akkor $x = 0$, ami racionális.

(1 pont)

A továbbiakban az $x \neq 0$ esetet vizsgáljuk. A bevezetett jelölések alapján

$$-ax^2 = -(x^3 + 2x)x^2 = -x^5 - 2x^3.$$

Innen $b - ax^2 = (x^5 + 3x) - x^5 - 2x^3 = -2x^3 + 3x$.

(2 pont)

A $b - ax^2 = -2x^3 + 3x$ összefüggésbe $x^3 = a - 2x$ -et helyettesítve kapjuk, hogy $-2(a - 2x) + 3x = b - ax^2$, tehát

$$ax^2 + 7x - (2a + b) = 0. \quad (1)$$

(2 pont)

Az utóbbi összefüggést beszorozva x -szel kapjuk, hogy $ax^3 + 7x^2 - (2a + b)x = 0$. Az utóbbi összefüggésbe $x^3 = a - 2x$ -et helyettesítve kapjuk, hogy $a(a - 2x) + 7x^2 - (2a + b)x = 0$, ami

$$7x^2 - (b + 4a)x + a^2 = 0 \quad (2)$$

alakra hozható.

(1 pont)

Az (1)-es összefüggés 7-szereséből kivonva a (2)-es összefüggés a -szorosát kapjuk, hogy

$$x(4a^2 + ab + 49) = a^3 + 7(2a + b). \quad (1 \text{ pont})$$

Mivel $4a^2 + ab + 49 = x^8 + 6x^6 + 19x^4 + 22x^2 + 49$ nem lehet nulla, ezért x kifejezhető két racionális szám arányaként

$$x = \frac{a^3 + 7(2a + b)}{4a^2 + ab + 49},$$

tehát x racionális, ha a és b racionálisak.

(2 pont)

Hivatalból

(1 pont)



III. országos magyar matematikaolimpia

XXX. EMMV

Déva, 2020. február 11–16.

X. osztály – II. forduló

1. feladat. Oldd meg a valós számok halmazán az

$$x \cdot (24 + 3\sqrt{15})^{\lg x} + 210 = 30 \cdot (15 + \sqrt{15})^{\lg x}$$

egyenletet!

dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Ahhoz, hogy az egyenletnek legyen értelme, $x > 0$ kell teljesüljön. **(1 pont)**

Mivel $x = 10^{\lg x}$, ezért a következő ekvivalens átalakításokat végezhetjük el az egyenleten: **(1 pont)**

$$\begin{aligned} 10^{\lg x} \cdot (24 + 3\sqrt{15})^{\lg x} + 210 &= 30 \cdot (15 + \sqrt{15})^{\lg x}, \\ (240 + 30\sqrt{15})^{\lg x} - 30 \cdot (15 + \sqrt{15})^{\lg x} + 210 &= 0, \\ \left[(15 + \sqrt{15})^2 \right]^{\lg x} - 30 \cdot (15 + \sqrt{15})^{\lg x} + 210 &= 0, \\ \left[(15 + \sqrt{15})^{\lg x} \right]^2 - 30 \cdot (15 + \sqrt{15})^{\lg x} + 210 &= 0. \end{aligned} \quad \textbf{(1 pont)}$$

Az $y = (15 + \sqrt{15})^{\lg x}$ jelöléssel az egyenlet $y^2 - 30y + 210 = 0$ alakra hozzuk, aminek a gyökei

$$y_1 = 15 + \sqrt{15} \quad \text{és} \quad y_2 = 15 - \sqrt{15}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Ezeket a gyököket visszahelyettesítve az y -t megadó összefüggésbe. Az első esetben a

$$(15 + \sqrt{15})^{\lg x} = 15 + \sqrt{15} \quad \textbf{(1 pont)}$$

összefüggést kapjuk, ahonnan $\lg x = 1$, vagyis $x = 10$. **(1 pont)**

A második esetben a

$$(15 + \sqrt{15})^{\lg x} = 15 - \sqrt{15}$$

összefüggést kapjuk, ahonnan $\lg x = \frac{\lg(15 - \sqrt{15})}{\lg(15 + \sqrt{15})}$, vagyis $x = 10^{\frac{\lg(15 - \sqrt{15})}{\lg(15 + \sqrt{15})}}$. **(2 pont)**

Összefoglalva, a feladatbeli egyenlet megoldásai az $x = 10$ és az $x = 10^{\frac{\lg(15 - \sqrt{15})}{\lg(15 + \sqrt{15})}}$.

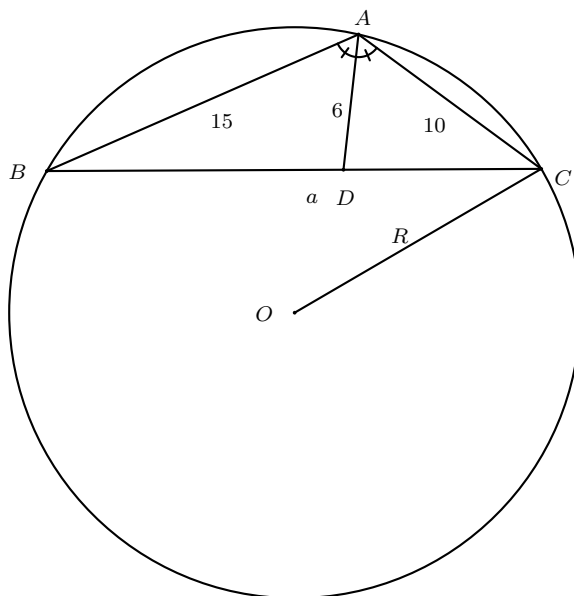
Hivatalból **(1 pont)**



2. feladat. Az ABC háromszögben a $\widehat{BAC}$ szögfelezője a D pontban metszi (BC) oldalt és tudjuk, hogy $AB = 15$, $AC = 10$, $AD = 6$. Számítsd ki az ABC háromszög köré írt kör sugarát!

*Mátéfi István, Marosvásárhely
Oláh-Ilkei Árpád, Sepsiszentgyörgy*

Első megoldás.



Az A szöghöz tartozó AD szögfelező hosszára vonatkozó $AD = \frac{2 \cdot AC \cdot AB}{AC + AB} \cdot \cos \frac{\widehat{BAC}}{2}$ összefüggés alapján $6 = \frac{2 \cdot 10 \cdot 15}{10 + 15} \cdot \cos \frac{\widehat{BAC}}{2}$, ahonnan $\cos \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{1}{2}$, vagyis $m(\widehat{BAC}) = 120^\circ$. **(3 pont)**

Az ABC háromszög területe

$$T = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC}}{2} = \frac{15 \cdot 10 \cdot \sin 120^\circ}{2} = 75 \cdot \sin 60^\circ = \frac{75\sqrt{3}}{2}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Kiszámítjuk a BC oldal hosszát az ABC háromszögben felírt koszinus-tétel segítségével:

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A, \\ BC^2 &= 15^2 + 10^2 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right), \\ BC^2 &= 475, \\ BC &= 5\sqrt{19}. \end{aligned} \quad \textbf{(2 pont)}$$

Végül kiszámítjuk a köré írt kör sugarát:

$$R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4 \cdot T} = \frac{10 \cdot 15 \cdot 5\sqrt{19}}{4 \cdot \frac{75\sqrt{3}}{2}} = \frac{5\sqrt{57}}{3}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Hivatalból

(1 pont)



Második megoldás. Bevezetjük a $BD = x$, $DC = y$ és $m(\widehat{BAD}) = \alpha$. Az ABC háromszögben felírt szögfelező-tétel alapján $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$, ahonnan

$$x = \frac{3}{2}y. \quad (1)$$

(1 pont)

Kifejezzük a $\cos \alpha$ -t kétféleképpen. Az ABD háromszögben a koszinus-tétel alapján

$$\cos \alpha = \frac{AB^2 + AD^2 - DB^2}{2 \cdot AB \cdot AD} = \frac{15^2 + 6^2 - x^2}{2 \cdot 6 \cdot 15} = \frac{261 - x^2}{180}, \quad (1 \text{ pont})$$

és az ACD háromszögben a koszinus-tétel alapján

$$\cos \alpha = \frac{AC^2 + AD^2 - DC^2}{2 \cdot AC \cdot AD} = \frac{10^2 + 6^2 - y^2}{2 \cdot 10 \cdot 6} = \frac{136 - y^2}{120}. \quad (2)$$

(1 pont)

Ezeket egyenlővé téve kapjuk, hogy $\frac{261 - x^2}{180} = \frac{136 - y^2}{120}$, ahonnan $2x^2 - 3y^2 = 114$. Ebbe behelyettesítve az (1)-es összefüggésben kifejezett x -et kapjuk az $3y^2 = 228$ egyenletet, ahonnan $y = 2\sqrt{19}$ és $x = 3\sqrt{19}$.

Kiszámítjuk az $BC = BD + DC = x + y = 5\sqrt{19}$ oldalhosszat és a (2)-es összefüggés alapján $\cos \alpha = \frac{136 - 76}{120} = \frac{1}{2}$, vagyis $\alpha = 60^\circ$ és $m(\widehat{BAC}) = 120^\circ$. (2 pont)

Az ABC háromszög területe $T = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC}}{2} = 75 \cdot \sin 120^\circ = \frac{75\sqrt{3}}{2}$. (2 pont)

Végül az ABC háromszög köré írt kör sugara $R = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4T} = \frac{5\sqrt{57}}{3}$. (2 pont)

Hivatalból (1 pont) ■

3. feladat. Ha $a_1, a_2, \dots, a_n$ valós számok, $a_1 \geq 1$ és $a_{n+1} \geq a_n + 1$, minden $n \geq 1$ esetén, akkor igazold, hogy

a) $a_n a_{n+1} \geq 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$;

b) $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_{n+1} \geq 2 \sum_{k=1}^n (n - k + 1) a_k$.

dr. Bencze Mihály, Brassó
Vass Ferenc, Szováta

Megoldás. a) Belátjuk az állítást $n = 1$ -re.

Mivel $a_1 \geq 1$ és $a_2 \geq a_1 + 1 \geq 2$, ezért $a_1 a_2 \geq 2a_1$. (1 pont)

Tételezzük, fel hogy $a_k a_{k+1} \geq 2(a_1 + a_2 + \dots + a_k)$. Ekkor

$$\begin{aligned} a_{k+1} a_{k+2} &\geq a_{k+1} (a_k + 2) = a_{k+1} a_k + 2a_{k+1} \\ &\geq 2(a_1 + a_2 + \dots + a_k) + 2a_{k+1} = 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1}). \end{aligned} \quad (3 \text{ pont})$$

A matematikai indukció alapján következik, hogy $a_n a_{n+1} \geq 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$, minden $n \geq 2$ esetén. **(1 pont)**

b) Az a) alpont alapján teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

$$\begin{aligned} a_1 a_2 &\geq 2a_1 \\ a_2 a_3 &\geq 2(a_1 + a_2) \\ a_3 a_4 &\geq 2(a_1 + a_2 + a_3) \\ &\vdots \\ a_n a_{n+1} &\geq 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n). \end{aligned} \quad \textbf{(2 pont)}$$

A megfelelő oldalakat összeadva azt kapjuk, hogy

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_{n+1} \geq 2(na_1 + (n-1)a_2 + \dots + a_n) = 2 \sum_{k=1}^n (n-k+1)a_k. \quad \textbf{(2 pont)}$$

A fenti egyenlőtlenségben egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a_n = n$, minden $n \geq 1$ esetén. Hivatalból **(1 pont)** ■

4. feladat. Adottak a következő halmazok:

$$\{1\}; \quad \{3, 5\}; \quad \{7, 9, 11\}; \quad \{13, 15, 17, 19\}; \quad \dots$$

Jelölje S_n az n -edik halmaz elemeinek összegét. Igazold, hogy

$$\frac{(n-2)(n+5)}{24(n+1)(n+2)} < \sum_{k=3}^n \frac{1}{S_k} < \frac{(n-2)(n+3)}{12n(n+1)}.$$

*dr. Bencze Mihály, Brassó
Spier Tünde, Arad*

Megoldás. Az első n halmaz összesen

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \textbf{(1 pont)}$$

darab elemet tartalmaz. Mivel az első m darab páratlan szám összege

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2m-1) = m^2,$$

ezért

$$S_n = \frac{(n(n+1))^2}{4} - \frac{(n(n-1))^2}{4} = n^3. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Ha $k \geq 3$, akkor rendre az alábbi ekvivalens egyenlőtlenségeket írhatjuk:

$$(k-1)k(k+1) < k^3 < k(k+1)(k+2), \quad (1 \text{ pont})$$

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} < \frac{1}{k^3} < \frac{1}{(k-1)k(k+1)}, \quad (1 \text{ pont})$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) < \frac{1}{k^3} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k(k-1)} - \frac{1}{k(k+1)} \right), \quad (1 \text{ pont})$$

$$\sum_{k=3}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) < \sum_{k=3}^n \frac{1}{S_k} < \sum_{k=3}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k(k-1)} - \frac{1}{k(k+1)} \right),$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) < \sum_{k=3}^n \frac{1}{S_k} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{n(n+1)} \right). \quad (2 \text{ pont})$$

Elvégezve a számításokat és tényezőkre bontva a számlálót, következik, hogy

$$\frac{(n-2)(n+5)}{24(n+1)(n+2)} < \sum_{k=3}^n \frac{1}{S_k} < \frac{(n-2)(n+3)}{12n(n+1)}. \quad (1 \text{ pont})$$

Hivatalból (1 pont)



5. feladat. Egy (a, b) pozitív egész számokból álló számpárt *dévainak* nevezzük, ha az $\frac{a}{b}$ egy valódi tört és az irreducibilis alakjában a számláló és a nevező páratlan. Igazold, hogy ha az $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ halmazból kiválasztunk véletlenszerűen 8 darab számot, akkor biztosan lesz közöttük két olyan szám, ami dévai számpárt alkot!
Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Vegyük észre, hogy az (a, b) pozitív egészekből álló számpár akkor és csak akkor dévai, ha $a = 2^k a_1$ és $b = 2^k b_1$ alakú, ahol $a_1 < b_1$, a_1, b_1 páratlan és $k \in \mathbb{N}$. (3 pont)

Legyen

$$O_k = \{a \in A \mid a = 2^{k-1} \cdot p, \text{ ahol } p \text{ páratlan}\},$$

minden $k \in \{1, 2, 3, \dots, 7\}$ esetén, vagyis

$$\begin{aligned} O_1 &= \{1, 3, 5, 7, \dots, 99\}, \\ O_2 &= \{2, 6, 10, 14, \dots, 98\}, \\ O_3 &= \{4, 12, 20, 28, \dots, 100\}, \\ O_4 &= \{8, 24, 40, 56, \dots, 88\}, \\ O_5 &= \{16, 48, 80\}, \\ O_6 &= \{32, 96\}, \\ O_7 &= \{64\}. \end{aligned} \quad (3 \text{ pont})$$

A felsorolt hét halmaz páronként diszjunkt és egyesítésük kiadja az A halmazt. Másrészt, minden $k \in \{1, 2, \dots, 7\}$ esetén az O_k halmaz elemeiből alkotott számpárok dévai számpárt alkotnak.

(1 pont)

Ha az A halmazból 8 elemet választunk ki, akkor viszont a skatulyaelv alapján létezik közöttük kettő amely ugyanabban az O_k halmazban van, emiatt a két szám páros szám párt alkot. **(2 pont)**

Hivatalból **(1 pont)** ■

6. feladat. Az ABC háromszögben legyen $BC > AC$ és legyen D a BC oldal egy olyan pontja, amelyre $BD = AC$, és $m(\angle ADC) < 90^\circ$, valamint $m(\angle B) = m(\widehat{DAC}) = 30^\circ$.

a) Igazold, hogy $\sin 54^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$, esetleg használva, hogy egy hegyesszög szinusza egyenlő a pótszögének koszinuszával!

b) Számítsd ki az ABC háromszög szögeinek mértékét!

Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. a) Felhasználva, hogy 36° és 54° pótszögek, valamint $36^\circ = 2 \cdot 18^\circ$ és $54^\circ = 3 \cdot 18^\circ$, ezért

$$\sin 36^\circ = \cos 54^\circ, \quad (1 \text{ pont})$$

$$\sin(2 \cdot 18^\circ) = \cos(3 \cdot 18^\circ),$$

$$2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ = 4 \cos^3 18^\circ - 3 \cos 18^\circ,$$

$$2 \sin 18^\circ = 4 \cos^2 18^\circ - 3,$$

$$2 \sin 18^\circ = 4(1 - \sin^2 18^\circ) - 3, \quad (2 \text{ pont})$$

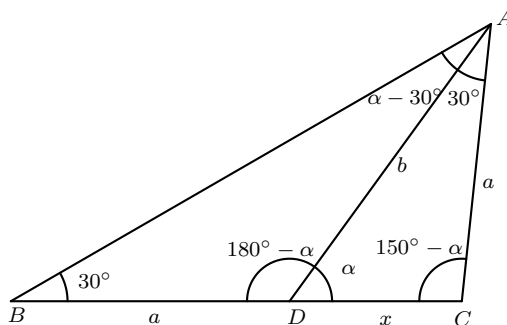
ahonnan a következő másodfokú egyenletet kapjuk a $\sin 18^\circ$ -ra

$$4 \sin^2 18^\circ + 2 \sin 18^\circ - 1 = 0.$$

Innen $\sin 18^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$, mivel $\sin 18^\circ > 0$. Végezetül

$$\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = \cos(2 \cdot 18^\circ) = 1 - 2 \sin^2 18^\circ = 1 - 2 \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \right)^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}. \quad (1 \text{ pont})$$

b)



Tekintsük a mellékelt ábrát és vezessük be a következő jelöléseket: $AC = BD = a$, $AD = b$ és $m(\widehat{ADC}) = \alpha$. Innen kapjuk, hogy

$$m(\widehat{ADB}) = 180^\circ - \alpha, \quad m(\widehat{C}) = 150^\circ - \alpha \quad \text{és} \quad m(\widehat{DAB}) = \alpha - 30^\circ. \quad (1 \text{ pont})$$

Az ADB háromszögben a szinusz-tétel alapján $\frac{a}{\sin(\alpha - 30^\circ)} = \frac{b}{\sin 30^\circ}$, ahonnan

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha - 30^\circ)}{\sin 30^\circ}. \quad (1)$$

(1 pont)

Felírjuk a szinusz-tételt az ADC háromszögben is $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin(150^\circ - \alpha)}$, ahonnan

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + 30^\circ)}. \quad (2)$$

(1 pont)

Az (1) és (2) összefüggésekből kapjuk, hogy $\frac{\sin(\alpha - 30^\circ)}{\sin 30^\circ} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + 30^\circ)}$, ahonnan

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - 30^\circ) \cdot \sin(\alpha + 30^\circ) &= \sin \alpha \cdot \sin 30^\circ, \\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \cdot \cos \alpha \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot \cos \alpha \right) &= \sin \frac{\alpha}{2}, \\ \frac{3}{4} \cdot \sin^2 \alpha - \frac{1}{4} \cdot \cos^2 \alpha &= \frac{\sin \alpha}{2}, \\ \frac{3}{4} \cdot \sin^2 \alpha - \frac{1}{4} \cdot (1 - \sin^2 \alpha) &= \frac{\sin \alpha}{2}, \\ \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha - \frac{1}{4} &= 0, \\ 4 \sin^2 \alpha - 2 \cdot \sin \alpha - 1 &= 0. \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

Figyelembe véve, hogy $\sin \alpha > 0$, minden $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$ esetén azt kapjuk, hogy $\sin \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$, ahonnan $\alpha = 54^\circ$. Tehát a háromszög szögei $m(\widehat{A}) = 54^\circ$, $m(\widehat{B}) = 30^\circ$ és $m(\widehat{C}) = 96^\circ$.

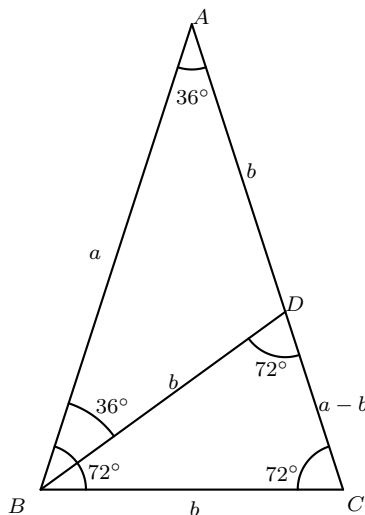
(1 pont)

Hivatalból

(1 pont)



Második megoldás az a) alpontra. Tekintsünk egy olyan ABC egyenlő szárú háromszöget, amelyben $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 72^\circ$ és a $\widehat{B}$ szögfelezője metszi az AC oldalt D -ben.



Vezessük be az $AB = AC = a$, $BC = BD = AD = b$ jelöléseket. Ezek alapján $CD = a - b$.

(2 pont)

Mivel $ABC_{\Delta} \sim BCD_{\Delta}$, azt kapjuk, hogy $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$. Ez az összefüggés a $b^2 + ab - a^2 = 0$, b -ben

másodfokú egyenlethez vezet, amelynek a gyökei $b_{1,2} = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}$.

(1 pont)

Mivel $b > 0$, következik, hogy

$$b = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \cdot a. \quad (1)$$

Felhasználva a koszinusz-tételt az ABC háromszögben, azt kapjuk, hogy

$$\cos 36^\circ = \frac{2a^2 - b^2}{2a^2}. \quad (2)$$

Az (1) és (2) összefüggések alapján $\cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, innen pedig $\sin 54^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

(1 pont)

■

Második megoldás a b) alpontra. Mivel $ADC_{\Delta} \sim BAC_{\Delta}$, ezért $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{AC}{BC}$. Használva az

$AC = a$ és $DC = x$ jelöléseket, következik, hogy $\frac{AD}{AB} = \frac{x}{a} = \frac{a}{a+x}$.

(2 pont)

Ebből az összefüggésből az $x^2 + ax - a^2 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek a gyökei $x_{1,2} = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}$. Mivel $x > 0$, ezért csak $x = \frac{-a + a\sqrt{5}}{2}$ lehetséges.

(1 pont)

Az ADC háromszögben a szinusztétel alapján $\frac{DC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin D}$, ezért

$$-a + a\sqrt{5} = \frac{a}{\sin \alpha}. \quad (1 \text{ pont})$$

Kifejezve ebből az összefüggésből a $\sin \alpha$ -t, azt kapjuk, hogy $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$. Az a) alpont alapján ez viszont azt jelenti, hogy $\alpha = 54^\circ$, mivel $\alpha \in (0, 90^\circ)$. Tehát $m(\hat{A}) = \alpha = 54^\circ$, $m(\hat{B}) = 30^\circ$ és $m(\hat{C}) = 180^\circ - 54^\circ - 30^\circ = 96^\circ$.

(1 pont)

■

III. országos magyar matematikaolimpia

XXX. EMMV

Déva, 2020. február 11–16.

XI-XII. osztály – II. forduló

1. feladat. Ha egy háromszög oldalhosszai $a, b, c > 0$ és a területe T , akkor igazold, hogy

$$T \leq \frac{\sqrt{3}}{12}(ab + bc + ca),$$

és egyenlőség csak az $a = b = c$ esetben áll fenn!

Szilágyi Zsolt, Kolozsvár

Első megoldás. A szokásos jelöléseket használva, a $T = \frac{bc \sin A}{2}$, $T = \frac{ca \sin B}{2}$, $T = \frac{ab \sin C}{2}$ területképletek segítségével a feladatban szereplő egyenlőtlenség rendre a következő formákba írható:

$$\begin{aligned} T &\leq \frac{\sqrt{3}}{12}(ab + bc + ca), \\ T &\leq \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{2T}{\sin C} + \frac{2T}{\sin A} + \frac{2T}{\sin B} \right), \\ \frac{6}{\sqrt{3}} &\leq \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}. \end{aligned} \quad (1)$$

(2 pont)

Mivel $A, B, C \in (0, \pi)$, ezért $\sin A, \sin B, \sin C > 0$, így alkalmazhatjuk a számtani és harmonikus közepek közti egyenlőtlenséget:

$$\frac{\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}}{3} \geq \frac{3}{\sin A + \sin B + \sin C}. \quad (2)$$

(2 pont)

Ugyanakkor, mivel a szinuszfüggvény konkáv a $(0, \pi)$ intervallumon, a Jensen-egyenlőtlenség értelmében $\sin \left(\frac{A + B + C}{3} \right) \geq \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}$, ahonnan **(3 pont)**

$$\frac{3}{\sin A + \sin B + \sin C} \geq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad (3)$$

A (2) és (3) összefüggésekből következik, hogy $\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq \frac{6}{\sqrt{3}}$. **(1 pont)**

Mivel a szinuszfüggvény a $(0, \pi)$ intervallumon szigorúan konkáv, ezért a Jensen-egyenlőtlenségben pontosan akkor van egyenlőség, ha $A = B = C$ vagyis a háromszög egyenlő oldalú, és ebben az esetben a (2)-es egyenlőtlenségben is teljesül az egyenlőség. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

Megjegyzés. Az (1)-es egyenlőtlenség a következőképpen is bizonyítható:

Tekintsük az $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ függvényt. Ekkor $f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ és

$$f''(x) = \frac{\sin x \cdot \sin^2 x + \cos x \cdot 2 \sin x \cdot \cos x}{\sin^4 x} = \frac{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}{\sin^3 x} = \frac{1 + \cos^2 x}{\sin^3 x} > 0,$$

minden $x \in (0, \pi)$ esetén, tehát f konvex a $(0, \pi)$ intervallumon. Így a Jensen-egyenlőtlenség alapján

$$\frac{f(x) + f(y) + f(z)}{3} \geq f\left(\frac{x + y + z}{3}\right), \quad \forall x, y, z \in (0, \pi).$$

Az $x = A$, $y = B$, $z = C$ választásra $\frac{f(A) + f(B) + f(C)}{3} \geq f\left(\frac{A + B + C}{3}\right)$, azaz

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq 3 \cdot f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6}{\sqrt{3}}.$$

Második megoldás. A háromszög területére felírjuk Héron-képletet:

$$T = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}, \quad \text{ahol } s = \frac{a + b + c}{2}.$$

A gyök alatt szereplő szorzótényezőket az

$$s = \frac{(b + c) + a}{2}, \quad s - a = \frac{(b + c) - a}{2}, \quad s - b = \frac{a - (b - c)}{2}, \quad s - c = \frac{a + (b - c)}{2},$$

alakba írva a rövidített számítási képletek alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} s(s - a)(s - b)(s - c) &= \frac{(b + c)^2 - a^2}{4} \cdot \frac{a^2 - (b - c)^2}{4} \\ &= \frac{1}{4^2} [(b + c)^2 \cdot a^2 - (b + c)^2 \cdot (b - c)^2 - a^4 + a^2 \cdot (b - c)^2] \\ &= \frac{1}{4^2} [(b^2 + 2bc + c^2) \cdot a^2 - ((b + c) \cdot (b - c))^2 - a^4 + a^2 \cdot (b^2 - 2bc + c^2)] \\ &= \frac{1}{4^2} [2(b^2 + c^2) \cdot a^2 - (b^2 - c^2)^2 - a^4] \\ &= \frac{1}{4^2} (2c^2 a^2 + 2a^2 b^2 + 2b^2 c^2 - b^4 - c^4 - a^4). \end{aligned}$$

Mivel $a, b, c, T > 0$, ezért a feladatbeli egyenlőtlenség átírható

$$T \leq \frac{\sqrt{3}}{12}(ab + bc + ca) \iff T^2 \leq \frac{3}{12^2}(ab + bc + ca)^2$$

alakba. Felhasználva az előbbi számolásokat a következő egyenlőtlenséghez jutunk:

$$\frac{1}{4^2} (2c^2 a^2 + 2a^2 b^2 + 2b^2 c^2 - b^4 - c^4 - a^4) \leq \frac{1}{3 \cdot 4^2} (a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 + 2a^2 bc + 2b^2 ca + 2c^2 ab),$$

Beszorozva $3 \cdot 4^2$ -tel és egy oldalra hozva a tagokat kapjuk, hogy

$$3a^4 + 3b^4 + 3c^4 - 5a^2 b^2 - 5b^2 c^2 - 5c^2 a^2 + 2a^2 bc + 2b^2 ca + 2c^2 ab \geq 0.$$

Az a^4, b^4, c^4 tagok felhasználásával teljes négyzeteket alakítunk ki, majd a maradék tagokkal is hasonlóan cselekszünk. Ezt a következő csoportosításokkal érjük el:

$$\begin{aligned} & [3a^4 + 3b^4 + 3c^4 - 3a^2b^2 - 3b^2c^2 - 3c^2a^2] - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 + 2a^2bc + 2b^2ca + 2c^2ab \geq 0, \\ & \frac{3}{2} [(a^4 - 2a^2b^2 + b^4) + (b^4 - 2b^2c^2 + c^4) + (c^4 - 2c^2a^2 + a^4)] - (a^2b^2 + b^2c^2 - 2b^2ca) \\ & \quad - (b^2c^2 + c^2a^2 - 2c^2ba) - (c^2a^2 + a^2b^2 - 2a^2bc) \geq 0, \\ & \frac{3}{2} [(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2] - (ab - bc)^2 - (bc - ca)^2 - (ca - ab)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Az így kapott teljes négyzeteket a következőképpen csoportosítjuk:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2] + [(a^2 - b^2)^2 - (bc - ca)^2] + [(b^2 - c^2)^2 - (ca - ab)^2] + \\ & \quad + [(c^2 - a^2)^2 - (ab - bc)^2] \geq 0, \\ & \frac{1}{2} [(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2] + (a - b)^2 \cdot [(a + b)^2 - c^2] + (b - c)^2 \cdot [(b + c)^2 - a^2] + \\ & \quad + (c - a)^2 \cdot [(c + a)^2 - b^2] \geq 0. \end{aligned}$$

Összegezve az eddigi számításokat, a $T \leq \frac{\sqrt{3}}{12}(ab + bc + ac)$ egyenlőtlenség egyenértékű a következővel

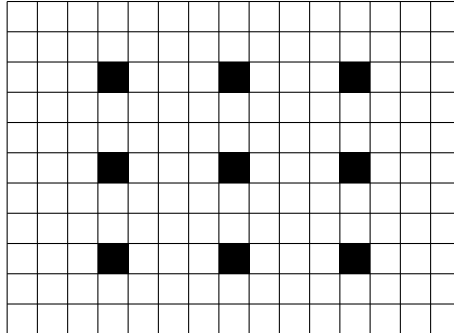
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2] + (a - b)^2 \cdot [(a + b)^2 - c^2] + (b - c)^2 \cdot [(b + c)^2 - a^2] + \\ & \quad + (c - a)^2 \cdot [(c + a)^2 - b^2] \geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Így elég belátni, hogy $(a + b)^2 - c^2 \geq 0$, $(b + c)^2 - a^2 \geq 0$, $(c + a)^2 - b^2 \geq 0$, amiket a háromszög-egyenlőtlenségek négyzetre emelésével kapunk:

$$\begin{aligned} a + b \geq c & \iff (a + b)^2 \geq c^2 \iff (a + b)^2 - c^2 \geq 0, \\ b + c \geq a & \iff (b + c)^2 \geq a^2 \iff (b + c)^2 - a^2 \geq 0, \\ c + a \geq b & \iff (c + a)^2 \geq b^2 \iff (c + a)^2 - b^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Az (1)-es egyenlőtlenségben az egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha az összeg minden tagja nulla. Innen következik, hogy $a = b = c$. ■

2. feladat. Egy $(3n+2) \times (4n+3)$ -es, egységnyi négyzetekből álló táblázat minden harmadik sorának és minden negyedik oszlopának kereszteződésében található négyzetét feketére festettük. Hányféleképpen osztható fel a táblázat a rácsvonalak mentén egyenesekkel úgy, hogy minden darabban legyen legalább egy fekete négyzet? Az egyben hagyott táblázat is egy felosztásnak számít. A kifestett tábla $n = 3$ esetén a következő.



Dávid Géza, Székelyudvarhely

Megoldás. Válasszunk ki egy olyan sort, amelyben fekete négyzetek vannak. A felosztás bármely függőleges vágása, valamelyik két szomszédos fekete négyzet között kell áthaladjon. Ugyanakkor a kiválasztott sorban lévő bármely két szomszédos fekete négyzet között legfeljebb egy vágás lehet. Ezért vagy nincs vágás, vagy pedig egy vágás van a két négyzet közötti négy darab rácsvonal valamelyike mentén, ami összesen öt lehetőség. **(3 pont)**

Két szomszédos fekete négyzetet az adott sorban $(n-1)$ -féleképpen választhatunk ki, ezért a függőleges vágásokra 5^{n-1} lehetőség van. **(3 pont)**

Analóg módon a vízszintes vágásokra 4^{n-1} lehetőség van. **(2 pont)**

Így a táblázat felosztására $5^{n-1} \cdot 4^{n-1} = 20^{n-1}$ lehetőség van. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**



3. feladat. Ha $p > 3$ prímszám, akkor mennyi lehet $(p-1)$ darab számtani haladványban álló egész szám szorzatának a p -vel való osztási maradéka?

Kovács Bálint, Székelyudvarhely

Megoldás. Legyen a $p-1$ db szám növekvő sorrendben

$$x, x+r, x+2r, \dots, x+(p-2)r,$$

ahol $x \in \mathbb{Z}$ és $r \in \mathbb{N}$.

Ha a haladvány valamelyik tagja osztható p -vel, akkor a szorzat p -vel való osztási maradéka 0.

(2 pont)

Ha egyik tag sem osztható p -vel, akkor két esetet különböztetünk meg.

- Ha p osztja az r -et, akkor a szorzat p -vel való osztási maradéka egyenlő x^{p-1} -nek a p -vel való osztási maradékával. Mivel egyik tag sem osztható p -vel, így x se, tehát $(p, x) = 1$. A kis Fermat-tétel szerint x^{p-1} -nek a p -vel való osztási maradéka 1. **(3 pont)**

- Ha p nem osztja az r -et, akkor $(p, r) = 1$. Megvizsgáljuk, hogy a haladvány két különböző tagjának lehet-e azonos a p -vel való osztási maradéka.

Ha $x + ir \equiv x + jr \pmod{p}$, akkor $r(i - j) \equiv 0 \pmod{p}$.

Mivel $(p, r) = 1$, ezért $(i - j) \equiv 0 \pmod{p}$, de $0 \leq i, j \leq p - 2$ és így $i = j$.

Azt kaptuk, hogy a $p - 1$ tagból álló haladvány tagjainak a p -vel osztási maradékai páronként különbözőek. Mivel egyik tag sem osztható p -vel, ezért a tagok p -vel való osztási maradékainak halmaza pontosan

$$\{1; 2; \dots; p - 1\}.$$

Így a tagok szorzatának p -vel való osztási maradéka egyenlő a $(p - 1)!$ -nak a p -vel való osztási maradékával, ami a Wilson-tétel alapján $p - 1$. **(4 pont)**

Tehát a lehetséges maradékok: $0, 1, p - 1$. Hivatalból **(1 pont)**



4. feladat. Egy háromszög köré írt kör sugara 5 cm és az oldalhosszai, centiméterben kifejezve, természetes számok. Mennyi lehet a háromszög területe?

*Dávid Géza, Székelyudvarhely
Szilágyi Judit, Kolozsvár*

Megoldás. Jelölje $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ a háromszög oldalainak hosszát és tételezzük fel, hogy $a \leq b \leq c$.

A szinusz-tétel értelmében

$$\sin A = \frac{a}{2R} = \frac{a}{10} \in \mathbb{Q}, \quad \textbf{(1 pont)}$$

a koszinusz-tétel értelmében pedig

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \in \mathbb{Q}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Ugyanakkor

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = \frac{100 - a^2}{100} \in \mathbb{Q},$$

így létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, amelyre $100 - a^2 = k^2$, ahonnan $100 = a^2 + k^2$. **(1 pont)**

Innen következik, hogy $a = 10$, vagy $(a, k, 10)$ egy olyan pitagoraszai számhármast alkot, amelynek a legnagyobb eleme 10.

Ugyanez a másik két oldalra is fennáll.

Mivel azok a 10-nél kisebb számok, amelyek a 10-zel pitagoraszai számhármast alkotnak csak a 6 és a 8, ezért a háromszög oldalai csak a 6, 8 és 10 számok közül kerülhetnek ki. Ez alapján csak a

$(6, 6, 6); (6, 6, 8); (6, 6, 10); (6, 8, 8); (6, 8, 10); (6, 10, 10); (8, 8, 8); (8, 8, 10); (8, 10, 10); (10, 10, 10)$

oldalhosszú háromszögek jöhetnek szóba. **(2 pont)**

Mivel $T = \frac{abc}{4R}$ szintén racionális, így az egyenlő oldalú háromszögek kizárhatóak. Valóban, ha $a \in \mathbb{N}^*$, akkor $T = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \notin \mathbb{Q}$. **(1 pont)**

Az (a, a, b) oldalhosszú egyenlő szárú háromszögek esetén, ahhoz, hogy a terület racionális legyen, az alaphoz tartozó magasság is racionális kell legyen. A Pitagorasz-tétel értelmében a $\frac{b}{2}$ és a egy olyan pitagorasz számhármashoz tartoznak, amelyben a a legnagyobb elem. Innen következik, hogy a

$$(6, 6, 8); (6, 6, 10); (8, 8, 6); (8, 8, 10); (10, 10, 6); (10, 10, 8)$$

esetek nem megfelelőek, mert

$$(x, 4, 6); (x, 5, 6); (x, 3, 8); (x, 5, 8); (x, 3, 10); (x, 4, 10)$$

alakú pitagorasz számhármashoz nem léteznek (a 10-nél kisebb vagy egyenlő számok körében csak a $(3, 4, 5)$, illetve $(6, 8, 10)$ pitagorasz számhármashoz léteznek).

Azt kaptuk, hogy a felsorolt tíz lehetőség közül, csak a $(6, 8, 10)$ oldalú háromszöget kell vizsgálnunk. **(2 pont)**

Ez a háromszög derékszögű, mert $(6, 8, 10)$ pitagorasz számhármashoz tartozik. A köréírt körének sugara $R = \frac{10}{2} = 5$, oldalhosszai egészek, így teljesíti a feltételeket, területe $T = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ cm}^2$. **(1 pont)**
Hivatalból **(1 pont)** ■

5. feladat. Egy 2020×2020 -as táblázat minden cellájába tetszőlegesen beírjuk a „+”, illetve a „−” előjelek valamelyikét. Egy lépésben kiválasztunk egy cellát, majd a cella előjelét megváltoztatjuk, a vele egy sorban és oszlopban levő összes cellával együtt.

Elérhető, hogy véges lépés után a táblázatban minden előjel egyforma legyen? Válaszodat indokold!

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Megoldás. Bebizonyítjuk, hogy minden cellában megváltoztatható az előjel anélkül, hogy a többi cellában változna az előjel.

Valóban, válasszuk ki az i . sor és j . oszlop kereszteződésében levő cellát, majd az i . sorban és a j . oszlopban minden cellának pontosan egyszer változtassuk meg az előjelét. **(3 pont)**

Ekkor:

- Az i . sor és j . oszlop kereszteződésében levő cella előjele $2020 + 2019 = 4039$ -szer változik, azaz eredeti állapotához képest megváltozik. **(2 pont)**
- Az i . sorban, illetve j . oszlopban levő összes többi cella előjele 2020 -szor változik, azaz eredeti állapotához képest nem változik. **(2 pont)**
- Minden más cellában az előjel kétszer változik, egyszer amikor az i . sorban és a vele egy oszlopban levő előjelet változtatjuk, egyszer pedig amikor a j . oszlopban és a vele egy sorban levő előjelet változtatjuk. Tehát ezekben a cellákban sem változnak az előjelek az eredeti állapotukhoz képest. **(2 pont)**

Tehát az i . sor és j . oszlop kereszteződésében levő cella előjelét megváltoztattuk anélkül, hogy a többi cella előjele változott volna. Ezért elérhető, hogy véges lépésben a táblázatban minden előjel egyforma legyen. Például, ha csak „+” előjeleket szeretnénk, akkor az összes „−” előjelű cella előjelét szerre megváltoztatjuk.

Hivatalból

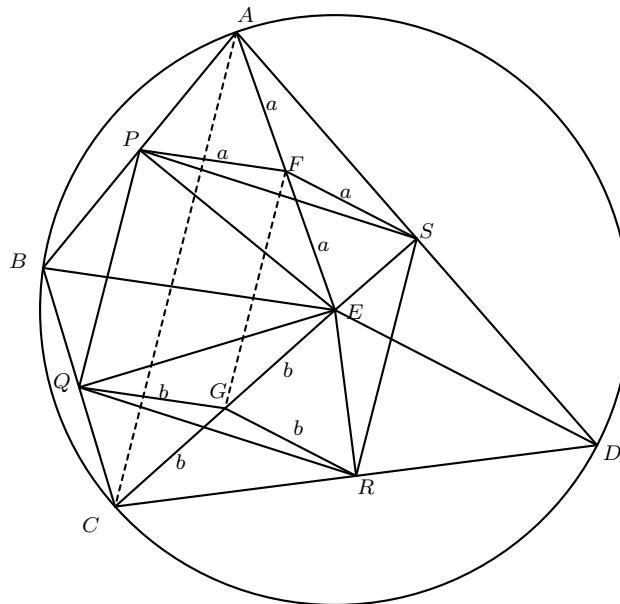
(1 pont)



6. feladat. Adott egy $ABCD$ körbeírható négyszög és legyen E a négyszög egy olyan belső pontja, amelynek az AB , BC , CD és AD oldalra eső vetülete P , Q , R , illetve S . Igazold, hogy a $PQRS$ négyszög akkor és csak akkor paralelogramma, ha E az $ABCD$ köré írt kör középpontja!

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Megoldás. A megoldáshoz tekintsük a következő ábrát.



„ $\Leftarrow$ ” Ha E a kör középpontja, akkor EP , EQ , ER és ES rendre felezőmerőlegese az AB , BC , CD és DA szakasznak. Ez alapján az ABC háromszögben PQ középvonal, az ACD háromszögben pedig RS középvonal. Így

$$PQ \parallel AC \parallel RS \quad \text{és} \quad PQ = \frac{1}{2} \cdot AC = RS,$$

vagyis $PQRS$ paralelogramma.

(2 pont)

„ $\Rightarrow$ ” Mivel $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$, ezért az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy $\widehat{BAD}$ nem tompaszög. Vegyük észre, hogy az $APES$ és $EQCR$ négyszög körbeírható.

Az $APES$ köré írható kör F középpontja az AE átló felezőpontja. Ekkor

$$FA = FP = FE = FS = a \quad \text{és} \quad \widehat{PFS} = 2 \cdot \widehat{PAS}. \quad (1)$$

(1 pont)

Az $EQCR$ négyszög köré írható kör G középpontja az EC átló felezőpontja. Ekkor

$$GE = GQ = GC = GR = b \quad \text{és} \quad \widehat{QGR} = 2 \cdot \widehat{QER} = 2 \cdot (180^\circ - \widehat{QCR}). \quad (2)$$

(1 pont)

Mivel $ABCD$ körbeírható, ezért $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$, azaz $\widehat{PAS} + \widehat{QCR} = 180^\circ$, így az (1)-es és (2)-es összefüggések alapján

$$\widehat{PFS} = \widehat{QGR}, \quad (3)$$

de az FPS és GQR háromszögek egyenlő szárúak, ezért minden megfelelő szögük egyenlő.

(1 pont)

Mivel $PQRS$ paralelogramma, ezért

$$PS \parallel QR \quad \text{és} \quad PS = QR,$$

így a (3)-as összefüggés alapján $FPS_\Delta \equiv GQR_\Delta$.

(1 pont)

Emiatt $FP = GQ$ és $FP \parallel GQ$, így $PQGF$ paralelogramma, azaz

$$PQ \parallel FG \quad \text{és} \quad PQ = FG. \quad (4)$$

Az AEC háromszögben FG középvonal és így

$$FG \parallel AC \quad \text{és} \quad FG = \frac{1}{2}AC. \quad (5)$$

A (4)-es és (5)-ös összefüggésekből következik, hogy

$$PQ \parallel AC \quad \text{és} \quad PQ = \frac{1}{2}AC, \quad (1 \text{ pont})$$

azaz PQ középvonal az ABC háromszögben. Innen következik, hogy EP az AB szakasz felezőmerőlegese, EQ pedig a BC szakasz felezőmerőlegese. (1 pont)

Mivel $ABCD$ körbeírható és E két oldalfelező merőlegesének a metszéspontja, így E az $ABCD$ négyszög köréírt kör középpontja. (1 pont)

Hivatalból

(1 pont)

