XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 – 26.

I. forduló - 9. osztály

1. feladat:

Két játékos a következő játékot játsza: Az $1, 2, 3, \ldots, 2017$ véges számsorozatból váltakozva kiválasztanak egy-egy számot, és azt törlik a sorozatból. Bármelyikük látja, hogy milyen számot választott a másik. Mindketten feljegyzik a füzetükbe az általuk kiválasztott számokat. A játék akkor ér véget, amikor a megadott számsorozatban már nem marad szám. A játékot az a játékos nyeri meg, aki által kiválasztott számok összege nem osztható 3-mal. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

Szilágyi Judit, Kolozsvár, Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

2. feladat:

Az ABC hegyesszögű háromszögben, melyben $m(ABC\measuredangle) = 75°$. Legyen $M \in (BC)$ úgy, hogy $AM \perp BC$, valamint $N \in (AC)$ úgy, hogy $\frac{AN}{NC} = \frac{AM}{MC}$. Az $(MN$ félegyenesen jelöljük O – val azt a pontot, melyre $MO = \frac{1}{2}AB$.

a) Igazold, hogy $m(AOB\measuredangle) = 90°$.

b) Jelölje F az AB szakasz felezőpontját. Bizonyítsd be, hogy $OF \perp AB$.

Bíró Béla, Sepsziszentgyörgy

3. feladat:

Adott az $M = \{x^2 + 2^y \mid x, y \in \mathbb{N}\}$ halmaz. Igazold, hogy az M halmaz elemei között nincsenek 7-tel osztható egész számok.

Jakab Tibor, Sepsziszentgyörgy

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 – 26.

I. forduló - 9. osztály

4. feladat:

Az $ABC_{\triangle}$-ben $D, E \in (AB)$ úgy, hogy $[AD] \equiv [DE] \equiv [EB]$ és $F \in (AC)$ úgy, hogy $AF = \frac{1}{3}AC$.

Legyen $BF \cap CD = \{M\}$, $BF \cap CE = \{N\}$.

Igazold, hogy $\frac{T_{DENM}}{T_{CDE}} = \frac{5}{14}$.

Simon József, Csíkszereda

5. feladat:

Határozd meg azokat az x irracionális számokat, amelyekre $x(x+1)$ és $x^2(x+2)$ egész számok.

dr. Bencze Mihály, Bukarest

6. Feladat

Hányféleképpen lehet megadni három pozitív egész számot, melyekre $a < b < c$ és $abc = 30030$ teljesül?

Róka Sándor, Nyíregyháza

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

I. forduló - 10. osztály

1. feladat:

Igazold, hogy n^4+89n^2+2027 nem írható fel két prímszám összegeként egyetlen $n\in\mathbb{N}$ esetén se!

Dr. Bencze Mihály, Bukarest,

Dávid Géza, Székelyudvarhely

2. **feladat:**

Az első 1000 pozitív egész szám között hány olyan szám van, amelyeknek a pozitív osztóinak összege páratlan?

Róka Sándor, Nyíregyháza

3. **feladat:**

Adott kilenc, páronként különböző pozitív egész szám, melyeknek összege 130. Igazold, hogy létezik közöttük négy olyan, melyeknek összege legalább 70.

Bíró Béla, *Sepsiszentgyörgy*

4. **feladat:**

Az $ABCD$ konvex négyszög oldalaira kivülről megszerkesztjük az ABR, BCT, DCS és APD egyenlőoldalú háromszögeket. Legyen Q az AS és PC szakaszok, O pedig az AT és RC szakaszok metszéspontja. Igazold, hogy:

a) $\frac{PC}{RC}+\frac{AT}{AS}\geq 2$

b) $AQ+2DQ+QC=PQ+QS$ és $AO+2BO+OC=RO+OT$

c) $T_{AQCO}=\frac{\sqrt{3}}{4}(AQ\cdot QC+AO\cdot OC)$

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

I. forduló - 10. osztály

.

5. feladat:

Az *ABC* háromszög *C* csúcsán átmenő kör az *AB* oldalt a *D* pontban érinti, ahol *D* felezi a háromszög oldalát. A kör az *AC* és *BC* oldalakat az *M* és *N* pontban metszi, továbbá $AC : BC = 3 : 2$. Mekkora az *ADM* és a *DBN* háromszögek területének aránya?

Róka Sándor, Nyíregyháza

6. **feladat:**

Igazold, hogy ha az a, b, c oldalhosszú ABC háromszög területe $T = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{abc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$,

akkor a háromszög derékszögű!

Iakab Tibor, Sepsiszentgyörgy

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

I. forduló – 11-12. osztály

1. feladat: Oldd meg a valós számok halmazán az $\begin{cases} x+\frac{1}{x}=y^2+1 \\ y+\frac{1}{y}=z^2+1 \\ z+\frac{1}{z}=x^2+1 \end{cases}$ egyenletrendszert!

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

2. feladat: Igazold, hogy $2\sum_{n=1}^{2017} n\cdot 2^n+2018\cdot 2^{2018}$ osztható 2017-tel!

Komán Zsombor, Brassó

3. feladat: Szabályos háromszöglapokból és négyzetlapokból n oldalú konvex sokszögeket rakunk ki átfedés nélkül.Tudva, hogy a háromszöglapok illetve a négyzetlapok oldalainak hossza nem feltétlenül azonos, határozd meg az n lehetséges értékeit.

Róka Sándor, Nyíregyháza

4. feladat: Adott az $A=\{1,3,5,7,9\ldots,2017\}$ halmaz. Legalább hány elemet kell kiválasztani az A halmaz elemei közül, hogy a kiválasztott elemek között legyen legalább két elem, amelyek hányadosa 7 többszöröse?

Mátéfi István, Marosvásárhely

5. feladat: Adottak az $a,b\in\mathbb{C}$ úgy, hogy $|a^k+b^k|\le 2$, $\forall k\in\{3,5,7,\ldots,2n+1\}$, $n\in\mathbb{N}^*$ és $|a\cdot b|\le 1$. Igazold, hogy $|a+b|\le 2$.

Dr.Bencze Mihály, Bukarest

6. feladat: Az ABC háromszögben $AB=n+2$, $BC=n+1$, $AC=n$, ahol $n\in\mathrm{N}, n\ge 2$ és $(AD$ szögfelező. Az A csúcson átmenő kör a BC oldalt a D pontban érinti, az AB és AC oldalakat az E illetve F pontokban metszi.

a) Mutasd ki, hogy $EF \parallel BC$
b) Számítsd ki az EF szakasz hosszát!

Róka Sándor, Nyíregyháza

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 9. osztály

1. feladat:

Az ABC háromszög oldalainak hossza rendre az a, b, c pozitív valós számok. Ha fennáll az $\frac{a}{\sqrt{6}}+\frac{b}{\sqrt{3}}+\frac{c}{\sqrt{2}}\geq\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ egyenlőtlenség, igazold, hogy a háromszög derékszögű!

Vass Csilla, Sepsiszentgyörgy

2. feladat:

Az *ABC* háromszög *AB* és *AC* oldalát felosztjuk *n* egyenlő részre, $n\geq 2$. Az osztópontokat az *A*-tól kiindulva az *AB* oldalon $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$, illetve az *AC* oldalon $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$-el jelöljük.

a) Igazold, hogy a $\overrightarrow{B_1C_{n-1}}+\overrightarrow{B_2C_{n-2}}+\ldots+\overrightarrow{B_{n-1}C_1}$ összegvektor és a $\overrightarrow{BC}$ vektor kollineáris.

b) A $[B_1C_{n-1}]$ szakaszon felvesszük az M_1 pontot, a $[B_2C_{n-2}]$-n az M_2 pontot, … , a $[B_{n-1}C_1]$ szakaszon pedig az M_{n-1} pontot úgy, hogy $\frac{B_kM_k}{M_kC_{n-k}}=\frac{k}{n-k}$, bármely $k=\overline{1,n-1}$ esetén. Határozd meg a $\sum_{k=1}^{n-1}\overrightarrow{AM_k}$ összeget.

Mészár Julianna, Nagyszalonta

3. feladat:

Adott az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat úgy, hogy $a_1=0$, $a_2=1$ és az a_n, a_{n+1}, a_{n+2} számok minden *n* páratlan számra számtani haladványban és minden *n* páros számra mértani haladványban vannak. Igazold, hogy $\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2}{a_{2k-1}\cdot a_{2k}}=\frac{n-1}{n}$.

dr. Bencze Mihály, Bukarest

4. feladat:

Igazold, hogy $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{3}\right]+\left[\sqrt{5}\right]+\left[\sqrt{7}\right]+\ldots+\left[\sqrt{4n^2+4n-1}\right]=\frac{n(n+1)(8n+1)}{3}$, bármely $n\in\mathbb{N}^*$, ahol $[x]$ az *x* valós szám egész részét jelöli.

dr. Bencze Mihály, Bukarest

Megjegyzések:
- munkaidő 3 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 10. osztály

1. feladat:

Oldd meg a következő egyenletet:

$8^x + 27^x + 2\cdot 30^x + 54^x + 60^x = 12^x + 18^x + 20^x + 24^x + 45^x + 90^x$

Kovács Béla, Szatmárnémeti

2. feladat:

Igazold, hogy ha $a_k > 1,\ k \in \{1,2,\ldots,n\}$ és

$t = \frac{a_1^2}{(n-1)a_2 + a_3} + \frac{a_2^2}{(n-1)a_3 + a_4} + \ldots + \frac{a_n^2}{(n-1)a_1 + a_2}$, akkor $\sum_{k=1}^{n} \log_{a_k} t \geq n$

Dr.Bencze Mihály, Bukarest

3. feladat:

Az *ABCDEF* hatszög oldalaira kívülre egyenlő oldalú háromszögeket szerkesztünk, amelyeknek a középpontjait rendre M, N, O, P, Q és R-rel jelöljük, ahol *M* az *EF* oldalra szerkesztett háromszög középpontja. Igazold, hogy az *NPR* és *OQM* háromszögek súlypontjai akkor és csakis akkor esnek egybe, ha az *ACE* és *BDF* háromszögek súlypontjai is egybeesnek.

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

4. feladat:

Mutasd ki, hogy bármely *ABC* háromszögben fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$a \cdot m_a + b \cdot m_b \leq \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 + 4c^2)(a^2 + b^2)}}{2}$, ahol m_a, m_b az *a*, illetve *b* oldalakhoz tartozó oldalfelező hosszát jelöli. Mikor áll fenn az egyenlőség?

Zákány Mónika, Nagybánya

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 11. osztály

1. feladat: Tekintsük az összes olyan $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le 3\\ 1\le j\le 3}}$ harmadrendű négyzetes mátrixot,

amelyben $a_{ij}\in\{-2,2\}$ bármely $i,j\in\{1,2,3\}$ esetén. Ezen mátrixok halmazát jelöljük H -val.

a) Igazold, hogy minden H -beli mátrix determinánsa osztható 32 -vel!

b) Bizonyítsd be, hogy H -ban létezik legalább 171 olyan mátrix, amelyeknek determinánsai egyenlőek!

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

2. feladat: Igazold, hogy ha $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, akkor

$$\frac{8}{3}\det\left(A^2+A+I_2\right)\ge\left(1-\det(A)\right)^2+\left(1+\mathrm{Tr}(A)\right)^2$$

dr.Bencze Mihály, Bukarest

3. feladat: Egy 1×1-es téglalap (egységnyi oldalú négyzet) átlójára szerkesztünk egy téglalapot, amelynek hosszúsága megegyezik az előző téglalap átlójának a hosszával, szélessége pedig egységnyi. Folytatjuk a szerkesztést a következő módon: a keletkezett téglalap átlójára szerkesztünk egy újabb téglalapot, amelynek hosszúsága megegyezik a téglalap átlójának a hosszával, szélessége pedig az előző téglalap átlójának hosszával. A műveletet *n*-szer ismételjük. Jelölje T_n az n-edik téglalap területét, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{T_n}{T_{n-1}}$ határértéket!

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{T_k^2}\right)$ határértéket!

Pálhegyi–Farkas László, Nagyvárad és Mészár Julianna, Nagyszalonta

4. feladat: Legyen $x_{n+1}=x_n-x_n^{2017}$, $x_1\in(0,1)$ bármely $n\in\mathbb{N}^*$ esetén.

a) Igazold, hogy az $(x_n)_{n\ge1}$ sorozat konvergens, és számítsd ki a határértékét!

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_1^{2017}+x_2^{2017}+\ldots+x_n^{2017}\right)$ határértéket!

c) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2016]{n}\cdot x_n$ határértéket!

dr.Bencze Mihály, Bukarest

Megjegyzések:
- munkaidő 3 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 12. osztály

1. feladat: Legyen $M=\left\{\left.\frac{k}{2n+1}\right| k\in\{0,1,2,...,2n\}\right\}, n\in\mathbb{N}$ és $x*y=\{x+y\}$, ahol $\{a\}$ jelöli az *a* szám törtrészét. Mutasd ki, hogy $(M,*)$ Ábel féle csoport és $(M,*)\cong(\mathbb{Z}_{2n+1},+)$.

dr.Bencze Mihály, Bukarest

2. feladat: Adottak az $(A,*)$ és $(B,\circ)$ csoportok, amelyek semleges elemei e, illetve u. Ha az $f:A\to B$ függvény rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

i. $\forall\ x,y\in A$ esetén $f(x*y)=f(x)\circ f(y)$ és

ii. $f(x)\neq u,\ \forall x\in A\setminus\{e\}$ elemre,

igazold, hogy f injektív.

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

3. feladat: Adottak az $f_n:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{e^x\cdot\cos x\cdot\sin nx}{\sin x}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ függvények.

a) Számítsd ki: $\int\left(f_{2n+1}(x)-f_{2n-1}(x)\right)dx$.

b) Határozd meg az f_{2n+1} primitív függvényeinek a halmazát.

Mátéfi István, Marosvásárhely

4. feladat: Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, függvény, amelyre igaz, hogy $\left(f(x)\right)^5+5^{f(x)}=x$, bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén. Mutasd ki, hogy az *f* függvénynek van primitív függvénye.

dr.Bencze Mihály, Bukarest

Megjegyzések:
- munkaidő 3 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

I. forduló - 9. osztály

1. **feladat:**

Két játékos a következő játékot játssza: Az $1, 2, 3, \ldots, 2017$ véges számsorozatból váltakozva kiválasztanak egy-egy számot, és azt törlik a sorozatból. Bármelyikük látja, hogy milyen számot választott a másik. Mindketten feljegyzik a füzetükbe az általuk kiválasztott számokat. A játék akkor ér véget, amikor a megadott számsorozatban már nem marad szám. A játékot az a játékos nyeri meg, aki által kiválasztott számok összege nem osztható 3-mal. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája? Valamelyik játékos nyerő stratégiája azt jelenti, hogy függetlenül az ellenfél lépéseitől, az illető játékos nyer.

Szilágyi Judit, Kolozsvár, Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

Megoldás:

A kezdőjátékost nevezzük *A* – nak, a másikat *B* – nek. Vegyük észre, hogy a megadott számsorozatban 673 darab $3k+1$ alakú, 672 darab $3k$ alakú, illetve 672 darab $3k+2$ alakú szám van. (1)

A – nak van nyerő stratégiája és ez a következő:

Első választása egy $3k+1$ alakú szám. Ezzel a választással eléri, hogy úgy a $3k$, mint a $3k+1$, illetve $3k+2$ alakú számokból ugyanannyi, 672 darab marad a sorozatban.

Ettől kezdve amilyen típusú számot választ a második játékos, ugyan olyan típusút választ ő is. Mivel mindhárom típusból páros számú van, a játék végén a *B* játékosnak 336 darabja lesz mindegyik típusú számból, az *A* játékosnak pedig a $3k$ és $3k+2$ alakú számokból 336 a $3k+1$ alakúból pedig 337 darab szám lesz.

Így a *B* játékos számainak összege 3 többszöröse, az *A* játékosé pedig $3k+1$ alakú, vagyis nem osztható 3-mal. Tehát, bárhogy is játsszon a *B* játékos, ezzel a stratégiával az *A* játékos nyer.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

I. forduló - 9. osztály

2. feladat:

Az ABC hegyesszögű háromszögben, melyben $m(ABC\measuredangle) = 75°$. Legyen $M \in (BC)$ úgy, hogy $AM \perp BC$, valamint $N \in (AC)$ úgy, hogy $\frac{AN}{NC} = \frac{AM}{MC}$. Az $(MN$ félegyenesen jelöljük O – val azt a pontot, melyre $MO = \frac{1}{2}AB$.

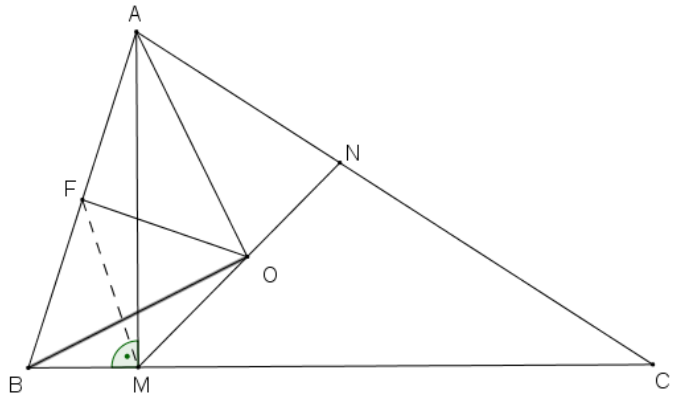
a) Igazold, hogy $m(AOB\measuredangle) = 90°$.

b) Jelölje F az AB szakasz felezőpontját. Bizonyítsd be, hogy $OF \perp AB$.

Bíró Béla, Sepsziszentgyörgy

Megoldás:

A bizonyítási gondolatmenet leírásához használjuk a mellékelt ábrát!



a) Mivel $m(ABC) = 75°$ és $m(AMB) = 90°$ ezért a $m(BAM) = 15°$

Tekintsük az FOM háromszöget, melyről kimutatjuk, hogy egyenlő oldalú.

Valóban: a feltevés alapján MF az ABM derékszögű háromszög átfogójához tartozó oldalfelező.

Ezért $FM = AF = FB$. (2)

(1)és **(**2**)**$\Rightarrow m(FMA\measuredangle) = m(FAM\measuredangle) = 15°$ (3)

A feladatban adott aránypárból, a szögfelező tétele alapján, következik, hogy az (MN félegyenes az $AMC\measuredangle$ szögfelezője, ezért $m(AMO\measuredangle) = 45°$**.** (4)

(3**)** és **(**4**)** $m(FMO\measuredangle) = m(FMA\measuredangle) + m(AMO\measuredangle) = 15° + 45° = 60°$ (5)

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

I. forduló - 9. osztály

Másrészt a feladat egyik feltevése alapján $MO = \frac{1}{2} AB = FB$. **(6)**

A (2) – es, (5) – ös és (6) – os egybevetéséből adódik, hogy az $FMO_{\triangle}$ egyenlő oldalú, ezért $FO = FM = FB = FA$, (7) vagyis az *A, O* és *B* pontok egy *F* középpontú és *AB* átmérőjű körön vannak. Innen adódik, hogy az $AOB\measuredangle$ félkörbe írt kerületi szög, tehát derékszög. Ezzel az a) alpont állítását igazoltuk.

b) Másrészt*:* Abból, hogy $m(AMB\measuredangle) = 90°$ és $m(AOB\measuredangle) = 90°$, adódik, hogy $AOMB$ húrnégyszög. Emiatt $m(BAM\measuredangle) = m(BOM\measuredangle) = 15°$ (lásd (1) - et)

A $BOM_{\triangle}$ háromszög szögeinek mértékét vizsgálva, az eddig megszerzett információk alapján következik, hogy $m(OBM\measuredangle) = 30°$. Ezt egybevetve azzal, hogy az *AOMB* négyszög körbeírható, kapjuk, hogy $m(OAM\measuredangle) = m(OBM\measuredangle) = 30°$. (8)

(1) és (8) $\Rightarrow$ $m(FAO\measuredangle) = 15° + 30° = 45°$ (9)

(7) $\Rightarrow FO = FA$, amit (9) - cel egybe vetve, kapjuk, hogy

$m(FAO\measuredangle) = m(FOA\measuredangle) = 45°$ és $m(AFO\measuredangle) = 90°$, azaz $OF \perp AB$.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

I. forduló - 9. osztály

3. feladat:

Adott az $M=\left\{x^2+2^y \,\middle|\, x,y\in\mathbb{N}\right\}$ halmaz. Igazold, hogy az M halmaz elemei között nincsenek 7-tel osztható egész számok.

Jakab Tibor, Sepsziszentgyörgy

Megoldás:

Megmutatjuk, hogy $\left(x^2+2^y\right)$ nem osztható 7-el, $\forall x,y\in N$ esetén. Az M halmaz egyetlen eleme sem osztható 7-el.

Írható, hogy $x^2\equiv 0,1,2,4\left(\mathrm{mod}\,7\right)$, az x^2 szám 7-el való osztási maradéka $0,1,2,4$ lehet, mert $x=7k+r$ alakú, ahol $r\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$

Hasonlóan, $2^y\equiv 1,2,4\left(\mathrm{mod}\,7\right)$, a 2^y alakú számok 7-el való osztási maradékai 3 periódussal ismétlődnek, mert $2^{k+3}-2^k=2^k\left(2^3-1\right)=7\cdot 2^k$ osztható 7-el.

Elkészítünk egy táblázatot az $\left(x^2+2^y\right)$ szám 7-el való osztási maradékaira.

2^y maradékai (->) x^2 maradékai (alább)	1	2	4
0	1	2	4
1	2	3	5
2	3	4	6
4	5	6	1

A táblázatban feltüntettük az $\left(x^2+2^y\right)$ szám 7-el való osztási maradékait. Mivel itt nem szerepel a 0, következik, hogy $\left(x^2+2^y\right)$ nem osztható 7-el, $\forall x,y\in N$ esetén.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

I. forduló - 9. osztály

4. feladat:

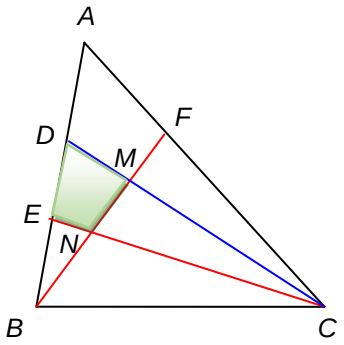
Az $ABC_{\triangle}$-ben $D,E\in(AB)$ úgy, hogy $[AD]\equiv[DE]\equiv[EB]$ és $F\in(AC)$ úgy, hogy $AF=\frac{1}{3}AC$.

Legyen $BF\cap CD=\{M\}$, $BF\cap CE=\{N\}$.

Igazold, hogy $\frac{T_{DENM}}{T_{CDE}}=\frac{5}{14}$.

Simon József, Csíkszereda

Megoldás:



Szükségünk lesz a $\frac{CN}{CE}$, $\frac{CM}{CD}$ arányokra, amelyeket Menelaosz tételének alkalmazásával kapunk meg.

Az $AEC_{\triangle}$ és B, N, F kollineáris pontok esetén Menelaosz tétel alkalmazásával $\frac{BA}{BE}\cdot\frac{FC}{FA}\cdot\frac{NE}{NC}=1\Rightarrow\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{NE}{NC}=1\Rightarrow$

$\frac{NC}{NE}=6\Rightarrow\frac{CN}{CE}=\frac{6}{7}$. (1)

Az $ADC_{\triangle}$ és B, M, F kollineáris pontok esetén Menelaosz tétel alkalmazásával

$\frac{BA}{BD}\cdot\frac{FC}{FA}\cdot\frac{MD}{MC}=1\Rightarrow\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{MD}{MC}=1\Rightarrow\frac{MC}{MD}=3\Rightarrow\frac{CM}{CD}=\frac{3}{4}$. (2)

Az (1) és (2) felhasználásával $\Rightarrow\frac{T_{CMN}}{T_{CDE}}=\frac{CM\cdot CN\cdot\sin(DCE)\cdot\frac{1}{2}}{CD\cdot CE\cdot\sin(DCE)\cdot\frac{1}{2}}=\frac{CM}{CD}\cdot\frac{CN}{CE}=\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{7}=\frac{9}{14}$.

Ugyanakkor $T_{DENM}=T_{DEC}-T_{CMN}$, ahonnan $\frac{T_{DENM}}{T_{DEC}}=\frac{5}{14}$.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

I. forduló - 9. osztály

5. feladat:

Határozd meg azokat az *x* irracionális számokat, amelyekre $x(x+1)$ és $x^2(x+2)$ egész számok.

dr. Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás:

Legyen $x(x+1)=a$ és $x^2(x+2)=b$, kijelent szerint $a,b\in\mathbb{Z}$.

A fenti összefüggésekből $x^2=a-x$ és $x\cdot x^2+2(a-x)=b$

$\Rightarrow x(a-x)+2a-2x=b \Rightarrow ax-x^2+2a-2x=b \Rightarrow ax-a+x+2a-2x=b \Rightarrow ax-x+a=b$
$\Rightarrow x(a-1)=b-a$.

1) Ha $a\neq 1\Rightarrow a-1\neq 0\Rightarrow x=\frac{b-a}{a-1}$, hamis mert $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ és $\frac{b-a}{a-1}\in\mathbb{Q}$

2) Ha $a=1\Rightarrow 0=b-a\Rightarrow a=b=1,\ x^2+x-1=0\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, és mivel ezek irracionálisak, ezért éppen ezek a megoldások.

Ellenőrizzük, hogy ezekre az *x* értékekre $a,b\in\mathbb{Z}$.

6. feladat:

Hányféleképpen lehet megadni három pozitív egész számot, melyekre $a<b<c$ és $abc=30030$ teljesül?

Róka Sándor, Nyíregyháza

Megoldás:

$30030=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13$ miatt nekünk 6 prímszámot (a 2, 3, 5, 7, 11 és 13 számokat) kell három halmazba szétosztani, és így adjuk meg az *a, b, c* számok prímtényezőit.

Ez a szétosztás 3^6-féleképp történhet, hiszen a hat prím mindegyikénél 3 választási lehetőség van: az első, a második vagy a harmadik halmazba tesszük őt.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

I. forduló - 9. osztály

Ezen szétosztások közül hármat kiveszünk, azokat amelyeknél mind a hat prím ugyanabba a halmazba került, az 1., a 2. vagy a 3. halmazba: ekkor az *a, b, c* számok egyike 30030, a másik kettő pedig 1.

Egy szétosztás esetén az 1., 2. és 3. halmazok sorrendjét megváltoztatva másik szétosztást kapunk, összesen $3!=6$-féle sorrend van. Ezek közül csak egyet számolunk, amikor teljesül az $a<b<c$ sorrend. Emiatt a keresett $\{a, b, c\}$ számhármasok száma $\frac{3^6-3}{6}=121$.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

I. forduló - 10. osztály

1. feladat:

Igazold, hogy n^4+89n^2+2027 nem írható fel két prímszám összegeként egyetlen $n\in\mathbb{N}$ esetén se!

Dr. Bencze Mihály, Bukarest,

Dávid Géza, Székelyudvarhely

Megoldás:

A n^4+89n^2+2027 páratlan minden $n\in\mathbb{N}$ esetén, tehát, ha felírható két prímszám összegeként, akkor az egyik pímszám 2 kell legyen.

Ezért n^4+89n^2+2025 prímszám kell legyen, ami ellentmondás, mert

$$n^4+89n^2+2025=\left(n^2+45\right)^2-n^2=\left(n^2-n+45\right)\left(n^2+n+45\right),$$

ahol mindkét tényező nagyobb, mint 1 bármely $n\in\mathbb{N}$ esetén.

2. **feladat:**

Az első 1000 pozitív egész szám között hány olyan szám van, amelyeknek a pozitív osztóinak összege páratlan?

Róka Sándor, Nyíregyháza

Megoldás.

Egy páratlan *n* szám minden osztója páratlan.

Ezen páratlan osztók összege akkor lesz páratlan, ha páratlan sok számot adunk össze. Mint tudjuk, a négyzetszámoknak és csakis nekik van páratlan számú osztója. Tehát a páratlan számok közül a négyzetszámok azok, melyek osztóinak összege páratlan.

Az $n=2^k\cdot m$ páros szám (ahol *m* páratlan) páros osztóinak összege páros, így *n* osztóinak összege akkor páratlan, ha a páratlan osztók összege páratlan, azaz a páratlan osztók száma páratlan. Az *n* páratlan osztói azonosak *m* osztóival. Az előbb már láttuk, ez azt jelenti, hogy az *m* páratlan szám négyzetszám, $m=b^2$, tehát $n=2^k\cdot m=2^k\cdot b^2$.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

I. forduló - 10. osztály

Ha a 2-hatványból a 2-es tényezőket párosával kiemeljük, akkor *n* vagy az $n = a^2$, vagy $n = 2a^2$ alakot ölti.

Azt kaptuk, hogy az a^2 és a $2a^2$ alakú számok azok, melyek osztóinak összege páratlan. 1000-ig 31 négyzetszám van, és 22 olyan szám, mely $2a^2$ alakú. A keresett számok száma $31 + 22 = 53$.

3. **feladat:**

Adott kilenc, páronként különböző pozitív egész szám, melyeknek összege 130. Igazold, hogy létezik közöttük négy olyan, melyeknek összege legalább 70.

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

Megoldás:

A számokat nagybetűkkel jelölve, állítsuk növekvő sorrendbe:

$A < B < C < D < E < F < G < H < I$

Ismert, hogy

$A + B + C + D + E + F + G + H + I = 130$

A középső számra összpontosítva, két esetet különböztetünk meg:

1) Ha az E pozitív egész szám legalább 15, akkor az $F + G + H + I$ összeg legalább $16 + 17 + 18 + 19 = 70$, ami a feladat állítását bizonyítja.
2) Ha az E pozitív egész szám legfennebb 14 akkor az $A + B + C + D + E$ összeg legfennebb $10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 60$. Így a többi négy szám összege, vagyis $F + G + H + I$ most is legalább $130 - 60 = 70$.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

4. **feladat:**

Az $ABCD$ konvex négyszög oldalaira kivülről megszerkesztjük az ABR, BCT, DCS és APD egyenlőoldalú háromszögeket. Legyen Q az AS és PC szakaszok, O pedig az AT és RC szakaszok metszéspontja. Igazold, hogy:

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

I. forduló - 10. osztály

a) $\dfrac{PC}{RC}+\dfrac{AT}{AS}\geq 2$

b) $AQ+2DQ+QC=PQ+QS$ és $AO+2BO+OC=RO+OT$

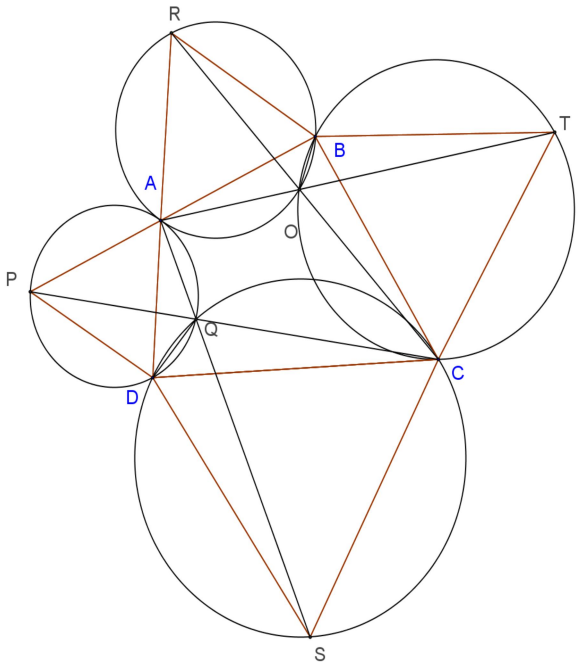
c) $T_{AQCO}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(AQ\cdot QC+AO\cdot OC)$

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Megoldás:

a) $m(\widehat{PDC})=m(\widehat{ADS})=60°+m(\widehat{ADC})$ $PD=AD$ és $DC=DS$. Tehát az ADS és PDC háromszögek kongruensek, ezért $PC=AS=a$. Hasonlóan igazoljuk, hogy $RC=AT=b$. Ezért

$$\frac{PC}{RC}+\frac{AT}{AS}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=2$$



b) Induljunk ki a négyszögből és a megszerkesztett háromszögekből. Legyenek Q és O az ABR és BTC háromszögek, illetve az APD és DCS háromszögek köré írt körök második metszéspontjai. Akkor

$m(\widehat{DQS})=m(\widehat{DCS})=60°$

$m(\widehat{DQP})=m(\widehat{DAP})=60°$ és $m(\widehat{PQA})=m(\widehat{PDA})=60°$. Tehát az A, Q, S pontok kollineárisak. Hasonlóan történik a P, Q, C pontok, az R, O, C pontok és A, O, T pontok kollinearitásának bizonyítása is.

Továbbá alkalmazzuk a Van Schooten tételt : ” Legyen P egy tetszőleges pont az ABC egyenlőoldalú háromszög köré írt körön. Ha P az A ponttól van a legtávolabb, akkor $PA=PB+PC$”, melyet az alábbiakban bizonyítunk:

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

I. forduló - 10. osztály

Alkalmazzuk Ptolemaiosz tételét az $ABPC$ körbeírható négyszögben:
$AP \cdot BC = AB \cdot PC + PB \cdot AC$. De a háromszög egyenlő oldalú, ezért azonnal következik, hogy $PA = PB + PC$.

Alkalmazzuk a fenti megállapítást az $AOBR$, $BOCT$, $APDQ$ és $QDSC$ körbeírható négyszögekre:

$PQ = AQ + QD$ (1)

$SQ = DQ + QC$ (2)

$OT = BO + OC$ (3)

$RO = BO + AO$ (4)

Ha összeadjuk az (1). és (2). , illetve a (3). és (4). összefüggéseket következik

$AQ + 2DQ + QC = PQ + QS$ és $AO + 2BO + OC = RO + OT$

c) $m(\widehat{PQS}) = m(\widehat{PQD}) + m(\widehat{DQS}) = m(\widehat{PAD}) + m(\widehat{DCS}) = 60° + 60° = 120°$. Hasonlóan igazoljuk, hogy $m(\widehat{AOC}) = 120°$.

Akkor $T_{AQCO} = T_{AQC} + T_{AOC} = \dfrac{AQ \cdot QC \cdot \sin 120°}{2} + \dfrac{AO \cdot OC \cdot \sin 120°}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(AQ \cdot QC + AO \cdot OC\right)$

.

5. feladat:

Az *ABC* háromszög *C* csúcsán átmenő kör az *AB* oldalt a *D* pontban érinti, ahol *D* felezi a háromszög oldalát. A kör az *AC* és *BC* oldalakat az *M* és *N* pontban metszi, továbbá $AC : BC = 3 : 2$. Mekkora az *ADM* és a *DBN* háromszögek területének aránya?

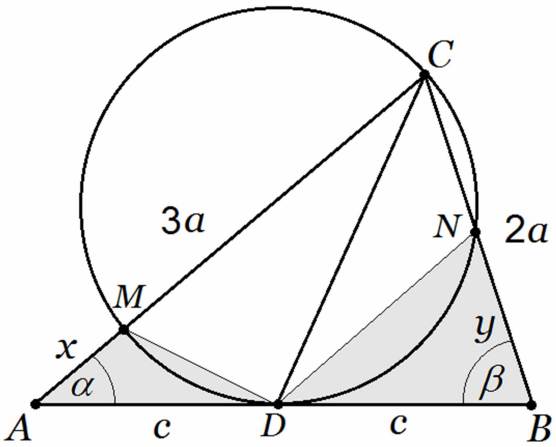
Róka Sándor, Nyíregyháza

Megoldás.

Az $AC : BC = 3 : 2$ arány miatt legyen $AC = 3a,\ BC = 2a$. Legyen $AM = x$, $BN = y$, és $AD = DB = c$; $m(\widehat{CAB}) = \alpha$ és. $m(\widehat{ABC}) = \beta$ (Lásd az ábrát.)

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

I. forduló - 10. osztály



Az ADM és a DBN háromszögek területének aránya: $\frac{T_{ADM}}{T_{DBN}} = \frac{(1/2)x \cdot c \cdot \sin\alpha}{(1/2)y \cdot c \cdot \sin\beta} = \frac{x \cdot \sin\alpha}{y \cdot \sin\beta}$.

A szinusztétel miatt $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{2}{3}$.

Az $ADM \triangle\sim ACD\triangle$ és az $BDN\triangle\sim CDB\triangle$ hasonlóságokból kapjuk, hogy: $3a \cdot x = c^2 = 2a \cdot y$,

így $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$.

Ezek alapján $\frac{T_{ADM}}{T_{DBN}} = \frac{(1/2)x \cdot c \cdot \sin\alpha}{(1/2)y \cdot c \cdot \sin\beta} = \frac{x \cdot \sin\alpha}{y \cdot \sin\beta} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

6. **feladat:**

Igazold, hogy ha az a,b,c oldalhosszú ABC háromszög területe $T = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$,

akkor a háromszög derékszögű!

Iakab Tibor, Sepsiszentgyörgy

1. Megoldás

Irható, hogy $T = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Leftrightarrow \frac{abc}{4R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

I. forduló - 10. osztály

a $T=\dfrac{abc}{4R}$ képletet használtuk) $\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2+c^2}=2\sqrt{2}R \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=8R^2 \Leftrightarrow$

$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2$,

az $a=2R\sin A$ képletet használtuk)

$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2 \Leftrightarrow$

$\sum(1-\cos 2A)=4$,

a $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ képletet használtuk) $\Leftrightarrow$

$3-(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)=4 \Leftrightarrow \cos 2A+\cos 2B+\cos 2C+1=0 \Leftrightarrow$

$(\cos 2A+\cos 2B)+(\cos 2C+1)=0$,

a tagokat csoportosítottuk) $\Leftrightarrow$

$2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2 C=0$,

a $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ és $\cos p+\cos q$ képleteket használtuk) $\Leftrightarrow$

$\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2(A+B)=0 \Leftrightarrow$

$\cos(A+B)[\cos(A-B)+\cos(A+B)]=0 \Leftrightarrow$

$2\cos(A+B)\cos A\cos B=0 \Leftrightarrow$

$\cos A\cos B\cos C=0$ $\Leftrightarrow$ az ABC háromszög derékszögű.

2. Megoldás

Adható egy kevésbé elegáns megoldás is, amelyben felhasználjuk az

$16T^2=2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4$ egyenlőséget. Ezt Heron képletéből kaphatjuk meg.

A feladatbeli egyenlőség így irható

$$T=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Leftrightarrow 2T^2\left(a^2+b^2+c^2\right)=a^2b^2c^2 \Leftrightarrow$$

$16T^2\left(a^2+b^2+c^2\right)=8a^2b^2c^2 \Leftrightarrow$ … (elvégezzük a szorzásokat) $\Leftrightarrow$

$$a^4b^2+a^2b^4+a^4c^2+a^2c^4+b^4c^2+b^2c^4-a^6-b^6-c^6-2a^2b^2c^2=0 \quad \Leftrightarrow$$

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

I. forduló - 10. osztály

$a^4\left(b^2+c^2-a^2\right)+2b^2c^2\left(b^2+c^2-a^2\right)-b^4\left(b^2+c^2-a^2\right)-c^4\left(b^2+c^2-a^2\right)=0 \Leftrightarrow$

$\left(b^2+c^2-a^2\right)\left[a^4-\left(b^2-c^2\right)^2\right]=0 \Leftrightarrow$

$\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)=0 \Leftrightarrow$ az ABC háromszög derékszögű.

Megjegyzés: Kezdetben úgy csoportosítjuk a tagokat, hogy tudjuk kiemelni a $\left(b^2+c^2-a^2\right)$ tényezőt.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

I. forduló – 11-12. osztály

1. feladat: Oldd meg a valós számok halmazán az $\begin{cases} x+\frac{1}{x}=y^2+1 \\ y+\frac{1}{y}=z^2+1 \\ z+\frac{1}{z}=x^2+1 \end{cases}$ egyenletrendszert!

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

Megoldás:

Az egyenletrendszer egyenértékű az $\begin{cases} \frac{x^2+1}{x}=y^2+1\ (1) \\ \frac{y^2+1}{y}=z^2+1\ (2) \\ \frac{z^2+1}{z}=x^2+1\ (3) \end{cases}$ és $x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0$ egyenletrendszerrel.

Ezek az egyenlőségek csak akkor teljesülnek, ha $x>0, y>0$ és $z>0$. Ennek figyelembe vételével és a számtani – mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenségek alkalmazásával írhatjuk, hogy $x+\frac{1}{x}\geq 2$, $y+\frac{1}{y}\geq 2$, $z+\frac{1}{z}\geq 2$.(4)

Az $(1),(2),(3)$és(4) egybevetésével kapjuk, hogy $x^2+1\geq 2$, $y^2+1\geq 2$, $z^2+1\geq 2$. Innen pedig $x\geq 1, y\geq 1$ és $z\geq 1$ (5).

Másrészt: az egyenletek megfelelő oldalainak összeszorzásával, egyszerűsítés után, kapjuk, hogy $x\cdot y\cdot z=1$ (6).

Az (5) és (6) együttes hatása miatt csak az $x=y=z=1$ jöhet számításba.

Megfordítva: közvetlenül ellenőrizhető, hogy az $(1,1,1)$ számhármas kielégíti a rendszer minden egyenletét.

Tehát az adott egyenletrendszernek egyetlen megoldása van, éspedig az $(1,1,1)$ számhármas.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

I. forduló – 11-12. osztály

2. feladat: Igazold, hogy $2\sum_{n=1}^{2017} n\cdot 2^n + 2018\cdot 2^{2018}$ osztható 2017-tel!

Komán Zsombor, Brassó

Megoldás:

Indukcióval igazolható, hogy $\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^k = (n-1)2^{n+1}+2, \forall n\in\mathbb{N}^*$ esetén.

Ahonnan

$$2\sum_{n=1}^{2017} n\cdot 2^n + 2018\cdot 2^{2018} = 2\left(2016\cdot 2^{2018}+2\right)+2018\cdot 2^{2018} = 2016\cdot 2^{2019}+2018\cdot 2^{2018}+4 =$$

$$= (2017-1)\cdot 2^{2019}+2018\cdot 2^{2018}+4 = 2017\cdot 2^{2019}-2^{2019}+2018\cdot 2^{2018}+4 =$$

$$= 2017\cdot 2^{2019}+2016\cdot 2^{2018}+4 = 2017\cdot 2^{2019}+2017\cdot 2^{2018}-2^{2018}+4 =$$

$$= 2017\cdot 2^{2019}+2017\cdot 2^{2018}-4\cdot\left(2^{2016}-1\right).$$

Mivel az összeg első két tagja osztható 2017-tel, csak azt kell bizonyítani, hogy $2^{2016}-1$ osztható 2017-tel, amely a kis Fermat-tétel alapján igaz.

Megjegyzés:

1. Legyen $S=\sum_{k=1}^{n} k\cdot x^k = 1\cdot x+2\cdot x^2+3\cdot x^3+\ldots+n\cdot x^n$, akkor

$xS = 1\cdot x^2+2\cdot x^3+3\cdot x^4+\ldots+n\cdot x^{n+1}$. A két egyenlőséget kivonva egymásból következik, hogy $(1-x)S = x+x^2+x^3+\ldots+x^n-n\cdot x^{n+1} = x\cdot\frac{1-x^n}{1-x}-n\cdot x^{n+1} = \frac{n\cdot x^{n+2}-(n+1)\cdot x^{n+1}+x}{1-x}$

ahonnan $S=\frac{n\cdot x^{n+2}-(n+1)\cdot x^{n+1}+x}{(1-x)^2}$.

2. $S=\sum_{k=1}^{n} k\cdot x^k = x\cdot\sum_{k=1}^{n} k\cdot x^{k-1} = x\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right)' = x\cdot\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)' = \frac{n\cdot x^{n+2}-(n+1)\cdot x^{n+1}+x}{(x-1)^2}$

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

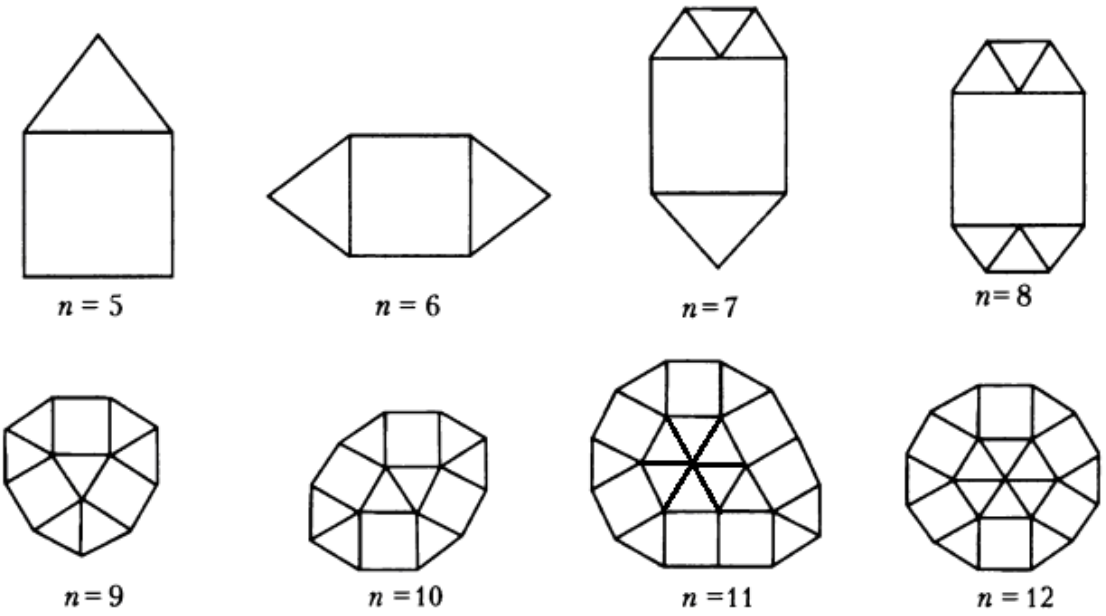
I. forduló – 11-12. osztály

3. feladat: Szabályos háromszöglapokból és négyzetlapokból *n* oldalú sokszögeket rakunk ki átfedés nélkül.Tudva, hogy a háromszöglapok illetve a négyzetlapok oldalainak hossza nem feltétlenül azonos, határozd meg az n lehetséges értékeit.

Róka Sándor, Nyíregyháza

Megoldás:

$n \in \{3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ esetén van olyan *n* oldalú konvex sokszög, mely a kívánt módon kirakható.



Ha egy konvex sokszöget az elvárt módon rakunk ki négyzetekből és szabályos háromszögekből, akkor a kirakott sokszög belső szögeinek mértéke $60°, 90°, 120°$ vagy $150°$ lehet, emiatt a külső szögek legalább $30°$-osak. A sokszög külső szögeinek összege $360°$, azaz $n \cdot 30° \leq 360°$,
tehát $n \leq 12$.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

I. forduló – 11-12. osztály

4. feladat: Adott az $A=\{1,3,5,7,9\ldots,2017\}$ halmaz. Legalább hány elemet kell kiválasztani az *A* halmaz elemei közül, hogy a kiválasztott elemek között legyen legalább két elem, amelyek hányadosa 7 többszöröse?

Mátéfi István, Marosvásárhely

Megoldás:

Az *A* halmaz elemeiből olyan részhalmazokat képezünk, amelyek $\{p,7p,7^2p,7^3p,\ldots\}$ alakúak.

Ha $p\in\{1,3,5\}$, akkor felírhatóak a $\{p,7p,7^2p,7^3p\}$ halmazok.

Ha $p\in\{9,11,13,\ldots,41\}\setminus\{21,35\}$, akkor a keresett halmaz $\{p,7p,7^2p\}$ alakúak.

Ha $p\in\{43,45,47,\ldots,285\}\setminus\{7k\,|\,k\in\{7,9,11,\ldots,39\}\}$, akkor a keresett halmaz $\{p,7p\}$ alakú.

A fentiekben felsoroltunk 3 olyan részhalmazt, amelynek 4 eleme van, 15 olyan részhalmazt, amelynek 3 eleme van, 105 olyan részhalmazt, amelynek 2 eleme van, tehát összesen 267 elem található a fenti halmazokban, maradt 742 elem.
A 742 elem bármely két elemének hányadosa nem lehet 7 többszöröse.
Ha kiválasztjuk az 742 elemet és egy-egy elemet a kételemű a háromelemű illetve a négyelemű halmazokból, akkor a kiválasztott elemek száma 865 és ezek közül bármely két elem hányadosa nem többszöröse 7-nek.
A továbbiakban, ha bármely elemet választjuk, akkor a kiválasztott elemek között biztosan van két elem, amelyek hányadosa 7 többszöröse.
Tehát legalább 866 elemet kell kiválasztani.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

I. forduló – 11-12. osztály

5. feladat: Adottak az $a,b\in\mathbb{C}$ úgy, hogy $\left|a^k+b^k\right|\le 2$, $\forall k\in\{3,5,7,\ldots,2n+1\}$, $n\in\mathbb{N}^*$ és $|a\cdot b|\le 1$. Igazold, hogy $|a+b|\le 2$.

Dr.Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás:

Newton binomiális tételét alkalmazva kapjuk, hogy:

$$(a+b)^{2n+1}=C_{2n+1}^0a^{2n+1}+C_{2n+1}^1a^{2n}b+C_{2n+1}^2a^{2n-1}b^2+\ldots+C_{2n+1}^{2n}ab^{2n-1}+C_{2n+1}^{2n+1}b^{2n+1}$$

Felhasználva a $C_{2n+1}^k=C_{2n+1}^{2n+1-k},\forall k=\overline{0,n}$ egyenlőségeket felírhatjuk, hogy:

$$(a+b)^{2n+1}=a^{2n+1}+b^{2n+1}+C_{2n+1}^1\left(a^{2n}b+ab^{2n}\right)+C_{2n+1}^2\left(a^{2n-1}b^2+a^2b^{2n-1}\right)+\ldots+C_{2n+1}^n\left(a^{n+1}b^n+a^nb^{n+1}\right)$$

ahonnan

$$(a+b)^{2n+1}=a^{2n+1}+b^{2n+1}+C_{2n+1}^1\left(a^{2n-1}+b^{2n-1}\right)ab+C_{2n+1}^2\left(a^{2n-3}+b^{2n-3}\right)a^2b^2+\ldots+C_{2n+1}^n(a+b)a^nb^n.$$

Alkalmazva a $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|,\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$, $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$ összefüggéseket kapjuk, hogy: $|a+b|^{2n+1}\le\left|a^{2n+1}+b^{2n+1}\right|+C_{2n+1}^1\left|a^{2n-1}+b^{2n-1}\right||ab|+\ldots+C_{2n+1}^n|a+b|\left|a^nb^n\right|$.

Jelölje $r=|a+b|\ge 0$, a fenti egyenlőtlenségből következik

$r^{2n+1}\le 2+2\cdot C_{2n+1}^1+2\cdot C_{2n+1}^2+\ldots+2\cdot C_{2n+1}^{n-1}+r\cdot C_{2n+1}^n$, felhasználva a

$C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+\ldots+C_{2n+1}^n=2^{2n}$ azonosságot kapjuk, hogy

$r^{2n+1}-2^{2n+1}+2C_{2n+1}^n-r\cdot C_{2n+1}^n\le 0$, ahonnan

$\left(r-2\right)\left(r^{2n}+2r^{2n-1}+4r^{2n-2}+8r^{2n-3}+\ldots+2^{2n-1}r+2^{2n}-C_{2n+1}^n\right)\le 0$, de mivel $2^{2n}-C_{2n+1}^n>0$ és

$r^{2n}+2r^{2n-1}+4r^{2n-2}+8r^{2n-3}+\ldots+2^{2n-1}r\ge 0$ kapjuk, hogy $r-2\le 0$ vagyis $|a+b|\le 2$.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

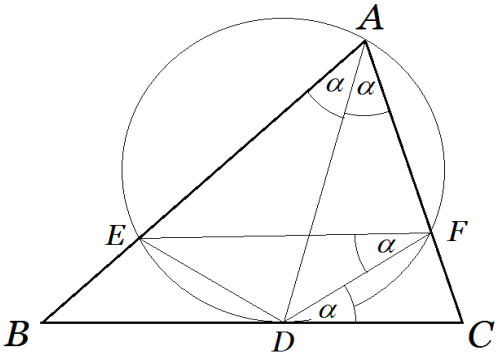
I. forduló – 11-12. osztály

6. feladat: Az ABC háromszögben $AB = n+2,\ BC = n+1,\ AC = n$, ahol $n \in \mathrm{N}, n \geq 2$ és $(AD$ szögfelező. Az A csúcson átmenő kör a BC oldalt a D pontban érinti, és az AB és AC oldalakat az E illetve F pontokban metszi.

a) Mutasd ki, hogy $EF \parallel BC$!
b) Számítsd ki az EF szakasz hosszát!

Róka Sándor, Nyíregyháza

Megoldás:



a) $(AD$ szögfelező $\Rightarrow m(BAD) = m(CAD) = u^\circ$ (1)

$m(EAD) = m(EFD) = u^\circ$ (kerületi szögek) (2)

$m(CAD) = m(FDC) = u^\circ$ (kerületi szögek) (3)

Az (1), (2), (3) $\Rightarrow EFD \equiv FDC \Rightarrow EF \parallel BC$ (belső váltó szögek).

b) Felhasználva a szögfelező tételét kapjuk, hogy:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{n+2}{n} = \frac{BD}{n+1-BD} \Rightarrow BD = \frac{n+2}{2} \quad (4)$$

Mivel $BDE\Delta \sim BAD\Delta \Rightarrow BD^2 = BE \cdot BA$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow} BE = \frac{n+2}{4} \Rightarrow AE = \frac{3}{4}(n+2) \quad (5)$$

Alkalmazva a hasonlóság alaptételét az ABC háromszögben $\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC}$

$$\overset{(5)}{\Rightarrow} EF = \frac{3}{4}(n+1).$$

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 9. osztály

1. feladat:

Az ABC háromszög oldalainak hossza rendre az a, b, c pozitív valós számok. Ha fennáll az $\frac{a}{\sqrt{6}}+\frac{b}{\sqrt{3}}+\frac{c}{\sqrt{2}}\geq\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ egyenlőtlenség, igazold, hogy a háromszög derékszögű!

Vass Csilla, Sepsiszentgyörgy

Megoldás:

$\frac{a}{\sqrt{6}}+\frac{b}{\sqrt{3}}+\frac{c}{\sqrt{2}}\geq\sqrt{a^2+b^2+c^2}\Leftrightarrow a+b\sqrt{2}+\sqrt{3}c\geq\sqrt{6}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ (1)

Alkalmazva a Cauchy-Bunyakovskij-Schwarz egyenlőtlenséget következik, hogy:

$\left(a+b\sqrt{2}+\sqrt{3}c\right)^2\leq\left(1^2+\sqrt{2}^2+\sqrt{3}^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)\Leftrightarrow a+b\sqrt{2}+\sqrt{3}c\leq\sqrt{6}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow a+b\sqrt{2}+\sqrt{3}c=\sqrt{6}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Mivel a Cauchy-Buniakovski-Schwarz egyenlőtlenségben, egyenlőség áll fenn következik, hogy: $\frac{a}{1}=\frac{b}{\sqrt{2}}=\frac{c}{\sqrt{3}}=\alpha>0$ ahonnan $a=\alpha$, $b=\alpha\sqrt{2}$ és $c=\alpha\sqrt{3}$.

Mivel $\alpha^2+\left(\alpha\sqrt{2}\right)^2=\left(\alpha\sqrt{3}\right)^2\Rightarrow a^2+b^2=c^2$ tehát az ABC háromszög derékszögű C-ben.

Megjegyzés: A feladat teljes négyzetek kialakításával is megoldható.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 9. osztály

2. feladat:

Az *ABC* háromszög *AB* és *AC* oldalát felosztjuk *n* egyenlő részre, $n \geq 2$. Az osztópontokat az *A*-tól kiindulva az *AB* oldalon $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$, illetve az *AC* oldalon $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$-el jelöljük.

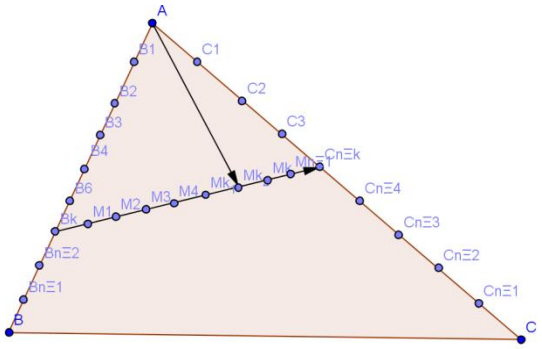
a) Igazold, hogy a $\overrightarrow{B_1C_{n-1}} + \overrightarrow{B_2C_{n-2}} + \ldots + \overrightarrow{B_{n-1}C_1}$ összegvektor és a $\overrightarrow{BC}$ vektor kollineáris.

b) A $[B_1C_{n-1}]$ szakaszon felvesszük az M_1 pontot, a $[B_2C_{n-2}]$-n az M_2 pontot, … , a $[B_{n-1}C_1]$ szakaszon pedig az M_{n-1} pontot úgy, hogy $\frac{B_kM_k}{M_kC_{n-k}} = \frac{k}{n-k}$, bármely $k = \overline{1,n-1}$ esetén. Határozd meg a $\sum_{k=1}^{n-1} \overrightarrow{AM_k}$ összeget.

Mészár Julianna, Nagyszalonta

Megoldás:

a)



$$\overrightarrow{B_kC_{n-k}} = \frac{n-k}{n}\overrightarrow{AC} - \frac{k}{n}\overrightarrow{AB}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\overrightarrow{B_kC_{n-k}} = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{n}\overrightarrow{AC} - \frac{k}{n}\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AC}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{n} - \overrightarrow{AB}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n} = \frac{n-1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

Tehát az összegvektor kollineáris a $\overrightarrow{BC}$ vektorral.

b) $$\overrightarrow{AM_k} = \frac{n-k}{n}\cdot\frac{k}{n}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{n}\cdot\frac{n-k}{n}\overrightarrow{AC}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\overrightarrow{AM_k} = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{(n-k)k}{n^2}\overrightarrow{AB} + \frac{k(n-k)}{n^2}\overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-k)k}{n^2} = \frac{\left(n^2-1\right)}{6n}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$$

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 9. osztály

3. feladat:

Adott az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat úgy, hogy $a_1 = 0,\ a_2 = 1$ és az $a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2}$ számok minden *n* páratlan számra számtani haladványban és minden *n* páros számra mértani haladványban vannak. Igazold, hogy $\sum_{k=2}^{n} \frac{k^2}{a_{2k-1}\cdot a_{2k}} = \frac{n-1}{n}$.

dr. Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás:

Kiszámítjuk a sorozat $a_3 = 2, a_5 = 6,\ a_7 = 12,\ a_9 = 20$ páratlan és

$a_4 = 4, a_6 = 9,\ a_8 = 16$ páros indexű néhány tagját.

Észrevesszük, hogy $a_{2n-1} = (n-1)n,\ a_{2n} = n^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Matematikai indukció módszerével kapjuk:

Ellenőrizzük $k = 1$-re $a_1 = 0,\ a_2 = 1$-igaz

Feltételezzük, *k*-ra igaz: $a_{2k-1} = (k-1)k,\ a_{2k} = k^2$

Bizonyítjuk *k*+1-re : $a_{2k+1} = k(k+1),\ a_{2k+2} = (k+1)^2$.

$a_{2k+1} = 2a_{2k} - a_{2k-1} = 2k^2 - (k-1)k = k^2 + k = k(k+1)$

$a_{2k+2} = \frac{a_{2k+1}^2}{a_{2k}} = \frac{k^2(k+1)^2}{k^2} = (k+1)^2$

Tehát $\sum_{k=2}^{n} \frac{k^2}{a_{2k-1}\cdot a_{2k}} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k^2}{(k-1)k^3} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{n-1}{n}$.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 9. osztály

4. feladat:

Igazold, hogy $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{3}\right]+\left[\sqrt{5}\right]+\left[\sqrt{7}\right]+...+\left[\sqrt{4n^2+4n-1}\right]=\frac{n(n+1)(8n+1)}{3}$, bármely $n\in\mathbb{N}^*$, ahol $\left[x\right]$ az x valós szám egész részét jelöli.

dr. Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás:

Észrevesszük, hogy az összegben az egészrész értelmezése alapján 2 darab 1-es, 2 darab 2-es, 4 darab 3-as, 4 darab 4-es, 6 darab 5-ös, 6 darab 6-os és így tovább, 2n darab (2n-1)-es és 2n darab 2n-es szám szerepel.

Valóban $2k-1$ lesz az egészrésze a $\sqrt{4k^2-4k+1},\sqrt{4k^2-4k+3},\ldots,\sqrt{4k^2-1}$ számoknak, és ezekből $\frac{4k^2-1-\left(4k^2-4k+1\right)}{2}+1=2k-1+1=2k$ darab van.

Hasonlóan $2k$ lesz az egészrésze a $\sqrt{4k^2+1},\sqrt{4k^2+3},\ldots,\sqrt{4k^2+4k-1}$ számoknak és ezekből $\frac{4k^2+4k-1-\left(4k^2+1\right)}{2}+1=2k-1+1=2k$ darab van.

Így az összeg: $2\cdot1+2\cdot2+4\cdot3+4\cdot4+6\cdot5+6\cdot6+\ldots+2n\cdot(2n-1)+2n\cdot2n=$

$$=2(1+2)+4(3+4)+6(5+6)+\ldots+2n(2n-1+2n)=\sum_{k=1}^{n}2k(4k-1)=8\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k=$$

$$=8\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-2\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(8n+1)}{3}.$$

Megjegyzés: A feladat a matematikai indukció módszerével is igazolható.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 10. osztály

1. feladat:

Oldd meg a következő egyenletet:

$8^x + 27^x + 2\cdot 30^x + 54^x + 60^x = 12^x + 18^x + 20^x + 24^x + 45^x + 90^x$

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Megoldás:

A számokat törzstényezőkre bontjuk és alkalmazzuk a hatványok tulajdonságait.

$2^{3x} + 3^{3x} + 2\cdot 2^x\cdot 3^x\cdot 5^x + 2^x\cdot 3^{3x} + 2^{2x}\cdot 3^x\cdot 5^x =$

$2^{2x}\cdot 3^x + 2^x\cdot 3^{2x} + 2^{2x}\cdot 5^x + 2^{3x}\cdot 3^x + 3^{2x}\cdot 5^x + 2^x\cdot 3^{2x}\cdot 5^x$

Használva a $2^x = a, 3^x = b,\ 5^x = c$ jelöléseket átrendezzük az egyenletet és szorzatot alakítunk ki.

$a^3 + b^3 + 2abc + ab^3 + a^2bc = a^2b + ab^2 + a^2c + a^3b + b^2c + ab^2c$

$a - b$ szorzótényezőt próbálunk kialakítani.

$a^3 - a^2b + b^3 - ab^2 + 2abc - a^2c - b^2c + ab^3 - a^3b + a^2bc - ab^2c = 0$

$a^2(a-b) - b^2(a-b) - c(a-b)^2 - ab(a^2-b^2) + abc(a-b) = 0$

$(a-b)(a^2 - b^2 - ac + bc - a^2b - ab^2 + abc) = 0$

A második zárójelben az a + b – c tényezőt alakítjuk ki.

$(a-b)(a^2 + ab - ac - b^2 - ab + bc - a^2b - ab^2 + abc) = 0$

$(a-b)(a(a+b-c) - b(b+a-c) - ab(a+b-c)) = 0$

$(a-b)(a+b-c)(a-b-ab) = 0$, ami csak az alábbi esetekben teljesül:

1) $a - b = 0$ esetben kapjuk, hogy $2^x = 3^x$ vagyis $x = 0$.

2) $a + b = c$ esetben kapjuk, hogy $2^x + 3^x = 5^x$ vagyis $\left(\frac{2}{3}\right)^x + 1 = \left(\frac{5}{3}\right)^x$.

Mivel a baloldali szigorúan csökkenő és a jobboldali szigorúan növekvő függvény, következik, hogy $x = 1$ az egyetlen megoldás.

3) $a - b = ab$ esetben kapjuk, hogy $2^x - 3^x = 6^x$ vagyis $\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1 = 2^x$.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 10. osztály

Mivel a baloldali szigorúan csökkenő és a jobboldali szigorúan növekvő függvény, következik, hogy $x = -1$ az egyetlen megoldás.

Az adott egyenlet megoldáshalmaza: $\{-1, 0, 1\}$.

2. feladat:

Igazold, hogy ha $a_k > 1,\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ és

$$t = \frac{a_1^2}{(n-1)a_2 + a_3} + \frac{a_2^2}{(n-1)a_3 + a_4} + \ldots + \frac{a_n^2}{(n-1)a_1 + a_2}, \text{ akkor } \sum_{k=1}^{n} \log_{a_k} t \geq n$$

Dr.Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás:

Használva a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenséget:

$$t = \sum \frac{a_1^2}{(n-1)a_2 + a_3} \geq \frac{\left(\sum a_1\right)^2}{\sum\left((n-1)a_2 + a_3\right)} = \frac{\left(\sum a_1\right)^2}{n\sum a_1} = \frac{1}{n}\sum a_1 \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}$$

kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \log_{a_k} t \geq \sum_{k=1}^{n} \log_{a_k} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \log_{a_k}\left(a_1 a_2 \ldots a_n\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\log_{a_k} a_1 + \log_{a_k} a_2 + \ldots + \log_{a_k} a_n\right) \geq \frac{1}{n} n^2 \cdot \sqrt[n^2]{\prod_{1 \leq i, j \leq n} \log_{a_i} a_j} = n$$

3. feladat:

Az *ABCDEF* hatszög oldalaira kívülre egyenlő oldalú háromszögeket szerkesztünk, amelyeknek a középpontjait rendre M, N, O, P, Q és R-rel jelöljük, ahol M az EF oldalra szerkesztett háromszög középpontja. Igazold, hogy az *NPR* és *OQM* háromszögek súlypontjai akkor és csakis akkor esnek egybe, ha az *ACE* és *BDF* háromszögek súlypontjai is egybeesnek.

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 10. osztály

Megoldás:

Jelöljük a pontok affixumait a megfelelő kisbetűvel. Legyen N az AF oldalra kivülről szerkesztett egyenlőoldalú háromszög középpontja. A háromszög legyen például FAG. Akkor az FA szakasznak az F körüli $60°$-os forgatásával megkapjuk az FG szakaszt, vagyis $g-f=\varepsilon(a-f)$, ahol $\varepsilon=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

Tehát $g=f+\varepsilon(a-f)$.

Innen megkapjuk a FAG háromszög súlypontját, legyen ennek a neve például N. Akkor az affixuma:

$$n=\frac{a+f+\varepsilon(a-f)}{3}.$$

A cirkuláris permutáció elve alapján kapjuk a többi középpont affixumát is:

$o=\frac{b+a+\varepsilon(b-a)}{3}$, $p=\frac{c+b+\varepsilon(c-b)}{3}$, $q=\frac{d+c+\varepsilon(d-c)}{3}$, $r=\frac{e+d+\varepsilon(e-d)}{3}$ és $m=\frac{f+e+\varepsilon(f-e)}{3}$.

Akkor NPR háromszög súlypontja: $\frac{a+f+c+b+e+d+\varepsilon(a-f+c-b+e-d)}{9}$

és az OQM háromszög súlypontjai pedig: $\frac{b+a+d+c+f+e+\varepsilon(b-a+d-c+f-e)}{9}$.

Ezek pedig akkor és csakis akkor egyenlőek, ha $a-f+c-b+e-d=b-a+d-c+f-e$

vagyis $a+c+e=b+d+f$ ami a $\frac{a+c+e}{3}=\frac{b+d+f}{3}$ felírásban pontosan az ACE és BDF súlypontjainak egybeesését jelenti.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 10. osztály

4. feladat:

Mutasd ki, hogy bármely *ABC* háromszögben fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$a \cdot m_a + b \cdot m_b \le \frac{\sqrt{\left(a^2+b^2+4c^2\right)\left(a^2+b^2\right)}}{2}$, ahol m_a, m_b az *a*, illetve *b* oldalakhoz tartozó oldalfelező hosszát jelöli. Mikor áll fenn az egyenlőség?

Zákány Mónika, Nagybánya

Megoldás: Alkalmazzuk Cauchy- Bunyakovszkij- Schwarz egyenlőtlenséget az a, b, valamint m_a, m_b számokra:

$$\left(m_a{}^2 + m_b{}^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right) \ge \left(a \cdot m_a + b \cdot m_b\right)^2.$$

Tudjuk, hogy $m_a{}^2 = \frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$.

Ezt felhasználva kapjuk:

$$\left(\frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2+2\left(a^2+c^2\right)-b^2}{4}\right)\cdot\left(a^2+b^2\right) \ge \left(a \cdot m_a + b \cdot m_b\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\frac{a^2+b^2+4c^2}{4}\cdot\left(a^2+b^2\right) \ge \left(a \cdot m_a + b \cdot m_b\right)^2$$

Négyzetgyököt vonva a kapott egyenlőtlenségből, kapjuk:

$$a \cdot m_a + b \cdot m_b \le \frac{\sqrt{\left(a^2+b^2+4c^2\right)\left(a^2+b^2\right)}}{2}$$

Egyenlőség akkor áll fenn, amikor a Cauchy- Bunyakovszkij- Schwarz egyenlőtlenségben is, vagyis:

$\frac{a}{m_a} = \frac{b}{m_b}$, ez a feltétel pontosan az egyenlő szárú háromszög esetén teljesül.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 10. osztály

Valóban, az egyenlőségi feltétel így alakul: $\frac{a^2}{b^2} = \frac{m_a^{\,2}}{m_b^{\,2}}$ és

$a^4 + a^2c^2 = b^4 + b^2c^2 \Leftrightarrow \left(a^2 - b^2\right)\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = 0 \Leftrightarrow a = b$.

Tehát egyenlő szárú háromszög esetén áll fenn az egyenlőség.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 11. osztály

1. feladat: Tekintsük az összes olyan $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le 3\\ 1\le j\le 3}}$ harmadrendű négyzetes mátrixot, amelyben $a_{ij}\in\{-2,2\}$ bármely $i, j\in\{1,2,3\}$ esetén. Ezen mátrixok halmazát jelöljük H -val.

a) Igazold, hogy minden H -beli mátrix determinánsa osztható 32 -vel!

b) Bizonyítsd be, hogy H -ban létezik legalább 171 olyan mátrix, amelyeknek determinánsai egyenlőek!

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

Megoldás:

a) Nyilvánvaló, hogy minden H -beli mátrix egész elemű, ezért determinánsaik is egész számok. Tehát értelme van az oszthatósági kérdés felvetésének.

Tekintsünk egy tetszőleges H -beli A mátrixot. A $\det(A)$ első sorát rögzítjük (melyben 2 és/vagy -2 szerepel csupán) és ezt rendre adjuk hozzá a második illetve a harmadik sorhoz. Ekkor a második és harmadik soron a $0, 4$ vagy -4 számok szerepelhetnek. Így $\det(A)$-nak az első sorából kiemelhetünk közös tényezőként 2 -t, míg a második illetve a harmadik sorból 4 -et, tehát a teljes determinánsból, $2\cdot 4\cdot 4=32$ -t úgy, hogy a kiemelés után maradt determináns elemei $0,-1,1$ egészek, így a determináns értéke is egész szám. Ezzel bizonyítottuk, hogy tetszőleges H -beli A mátrix determinánsa osztható 32 -vel.

b) A fenti gondolatmenetet folytatva: tetszőleges $A\in H$ esetén, $\det(A)$ determinánst háromszögszabállyal kifejtve 6 darab háromtényezős szorzat algebrai összegét kapjuk, ahol a tényezők 2 és/vagy -2.

Így $-48=6\cdot(-2)^3\le\det(A)\le 6\cdot 2^3=48$ és $\det(A)$ egész szám. Az a) alpontban bizonyított oszthatóságot is figyelembe véve azt kaptuk, hogy $\det(A)$ olyan 32 -vel osztható egész szám, amelyik a $[-48,48]$ intervallumban van. Ilyen szám csak három létezik, éspedig: $-32, 0$ és 32.

Mindhárom megvalósulhat determinánsértékként, például:

$$\begin{vmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&-2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}2&2&-2\\2&-2&2\\2&2&2\end{vmatrix}=-32 \text{ és } \begin{vmatrix}-2&-2&2\\2&-2&2\\2&2&2\end{vmatrix}=32$$

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 11. osztály

Tehát $\forall A \in H$ esetén $\det A \in \{-32, 0, 32\}$. Másrészt: H-ban összesen $2^9 = 512$ mátrix van. Ha a H-beli mátrixok közül legfennebb 170-nek lenne ugyanaz a szám a determinánsa, akkor legfennebb $3 \cdot 170 = 510$ mátrixról lehetne szó, ami ellentmond annak, hogy H számossága 512. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

2. feladat: Igazold, hogy ha $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, akkor

$$\frac{8}{3}\det\left(A^2 + A + I_2\right) \geq \left(1 - \det(A)\right)^2 + \left(1 + \mathrm{Tr}(A)\right)^2$$

dr.Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás: Legyen $P(x) = \det\left(A - xI_2\right) = x^2 - ax + b$, ahol $a = \mathrm{Tr}(A)$, $b = \det(A)$.

Másrészt $\det\left(A^2 + A + I_2\right) = \det\left(\left(A - \varepsilon I_2\right)\left(A - \varepsilon^2 I_2\right)\right) = P(\varepsilon) \cdot P\left(\varepsilon^2\right)$, ahol $\varepsilon^3 = 1,\ \varepsilon \neq 1$.

Így $\det\left(A^2 + A + I_2\right) = \left(\varepsilon^2 - a\varepsilon + b\right)\left(\varepsilon - a\varepsilon^2 + b\right) = a^2 + ab + a + b^2 - b + 1$.

Tehát a bizonyítandó egyenlőtlenség egyenértékű az alábbival:

$$8\left(a^2 + ab + a + b^2 - b + 1\right) - 3(1-b)^2 - 3(1+a)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4(b+a)^2 + (b-1)^2 + (a+1)^2 \geq 0$$

3. feladat: Egy 1×1-es téglalap (egységnyi oldalú négyzet) átlójára szerkesztünk egy téglalapot, amelynek hosszúsága megegyezik az előző téglalap átlójának a hosszával, szélessége pedig egységnyi. Folytatjuk a szerkesztést a következő módon: a keletkezett téglalap átlójára szerkesztünk egy újabb téglalapot, amelynek hosszúsága megegyezik a téglalap átlójának a hosszával, szélessége pedig az előző téglalap átlójának hosszával. A műveletet *n*-szer ismételjük. Jelölje T_n az n-edik téglalap területét, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{T_n}{T_{n-1}}$ határértéket!

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{T_k^2}\right)$ határértéket!

Pálhegyi–Farkas László, Nagyvárad és Mészár Julianna, Nagyszalonta

Megoldás:

a) A téglalapok átlóit Pitagorász tételével kiszámolva, a következő sorozathoz jutunk: $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{13}, \ldots$ Észrevesszük, hogy ezek a Fibonacci sorozat tagjainak a négyzetgyökei a harmadik tagtól kezdve: $\sqrt{F_n} = \sqrt{\left(\sqrt{F_{n-1}}\right)^2 + \left(\sqrt{F_{n-2}}\right)^2} = \sqrt{F_{n-1} + F_{n-2}}$, $n \geq 3$.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 11. osztály

Megjegyzés: $F_0 = 0, F_1 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \in \mathbb{N}$

A keresett területek: $T_1 = \sqrt{F_1 F_2}, T_2 = \sqrt{F_2 F_3}, T_3 = \sqrt{F_3 F_4}, \ldots, T_n = \sqrt{F_n \cdot F_{n+1}}, n \geq 1$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{T_n}{T_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{F_n \cdot F_{n+1}}}{\sqrt{F_{n-1} \cdot F_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{F_{n+1}}{F_{n-1}}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (az aranymetszet száma).

b) A határérték kiszámításánál felhasználjuk a Fibonacci sorozat általános tagjának az

alakját: $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n}{2^n} - \dfrac{\left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n} \right), n \geq 1.$

Egyrészt evidens, hogy $T_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$ másrészt igaz az úgynevezett Cassini azonosság:

$F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$, ezért

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{T_k^2} = \sum_{k=2}^{n} \frac{F_k^2 - F_{k-1} \cdot F_{k+1}}{F_k \cdot F_{k+1}} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{F_k}{F_{k+1}} - \frac{F_{k-1}}{F_k} \right) = \frac{F_2}{F_3} - \frac{F_1}{F_2} + \frac{F_3}{F_4} - \frac{F_2}{F_3} + \ldots + \frac{F_n}{F_{n+1}} - \frac{F_{n-1}}{F_n} =$$

$$= \frac{F_n}{F_{n+1}} - \frac{F_1}{F_2} = \frac{F_n}{F_{n+1}} - 1$$

Akkor: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{T_k^2} \right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{F_n}{F_{n+1}} \right) = \dfrac{2}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

A Cassini azonosság igazolása:

Tudjuk, hogy $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}\ \forall\ n \geq 1$ (indukcióval azonnal igazolható).

Számítsuk ki a determinánsukat és tegyük egyenlővé:

$$\det\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \right] = \left(\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)^n = (-1)^n = \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix} = F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2.$$

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 11. osztály

4. feladat: Legyen $x_{n+1}=x_n-x_n^{2017}$, $x_1\in(0,1)$ bármely $n\in\mathbb{N}^*$ esetén.

a) Igazold, hogy az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens, és számítsd ki a határértékét!

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_1^{2017}+x_2^{2017}+...+x_n^{2017}\right)$ határértéket!

c) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2016]{n}\cdot x_n$ határértéket!

dr.Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás:

a) A matematikai indukció módszerével igazoljuk, hogy $0<x_n<1$.

$x_{n+1}-x_n=-x_n^{2017}<0\Rightarrow x_{n+1}<x_n$ vagyis x_n szigorúan csökkenő és korlátos, tehát konvergens.

Legyen $\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\Rightarrow\lambda=\lambda-\lambda^{2017}\Rightarrow\lambda=0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_1^{2017}+x_2^{2017}+...+x_n^{2017}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(x_1-x_2\right)+\left(x_2-x_3\right)+...+\left(x_n-x_{n+1}\right)\right)=$
$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_1-x_{n+1}\right)=x_1$.

c) Mivel $(x_n)_{n\geq 1}$ szigorúan csökken a 0-hoz, következik, hogy $\left(\frac{1}{x_n^{2017}}\right)_{n\geq 1}$ növekvő és nem korlátos. Alkalmazva a Cesaro–Stolz- tételt következik:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2016]{n}\cdot x_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2016]{n\cdot x_n^{2016}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2016]{\frac{n}{\frac{1}{x_n^{2016}}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2016]{\frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}^{2016}}-\frac{1}{x_n^{2016}}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2016]{\frac{x_n^{2016}\cdot x_{n+1}^{2016}}{x_n^{2016}-x_{n+1}^{2016}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2016]{\frac{x_n^{2016}\cdot x_n^{2016}\left(1-x_n^{2016}\right)^{2016}}{x_n^{2016}-x_n^{2016}\left(1-x_n^{2016}\right)^{2016}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2016]{\frac{x_n^{2016}\cdot\left(1-x_n^{2016}\right)^{2016}}{1-\left(1-x_n^{2016}\right)^{2016}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2016]{\frac{\left(1-x_n^{2016}\right)^{2016}}{1+\left(1-x_n^{2016}\right)+\left(1-x_n^{2016}\right)^2+...+\left(1-x_n^{2016}\right)^{2015}}}=\frac{1}{\sqrt[2016]{2016}}.$$

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 12. osztály

1. feladat: Legyen $M=\left\{\dfrac{k}{2n+1}\middle| k\in\{0,1,2,...,2n\}\right\}, n\in\mathbb{N}$ és $x*y=\{x+y\}$, ahol $\{a\}$ jelöli az *a* szám törtrészét. Mutasd ki, hogy $(M,*)$ Ábel féle csoport és $(M,*)\cong(\mathbb{Z}_{2n+1},+)$.

dr.Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás: 1)

$\forall x,y\in M$ esetén, legyen $x=\dfrac{a}{2n+1}$ és $y=\dfrac{b}{2n+1}$, ahol $0\le a,b\le 2n; a,b\in\mathbb{N}$.

Ha $a+b\le 2n$, akkor $x*y=\left\{\dfrac{a+b}{2n+1}\right\}=\dfrac{a+b}{2n+1}\in M$.

Ha $2n+1\le a+b\le 4n\Rightarrow 0\le a+b-(2n+1)\le 2n-1$,tehát

$x*y=\left\{\dfrac{a+b}{2n+1}\right\}=\left\{1+\dfrac{a+b-(2n+1)}{2n+1}\right\}=\dfrac{a+b-(2n+1)}{2n+1}\in M$, mivel $\{x+n\}=\{x\},\forall n\in\mathbb{N}$ esetén. Tehát az *M* halmaz zárt a „$*$” műveletre nézve.

Asszociativitás:

$(x*y)*z=\{x+y\}*z=\{\{x+y\}+z\}=\{x+y-[x+y]+z\}=\{x+y+z\}$, $\forall x,y,z\in M$

$x*(y*z)=x*\{y+z\}=\{x+\{y+z\}\}=\{x+y+z-[y+z]\}=\{x+y+z\}$, $\forall x,y,z\in M$

Tehát a „*” művelet asszociatív.

A kommutativitás evidens.

Semleges elem létezése:

$\exists e\in M: x*e=x, x\in M\Rightarrow\{x+e\}=x,\forall x\in M\Rightarrow e=0\in M$ az *M* halmaz semleges eleme.

Szimetrizálhatóság:

$\forall x\in M\Rightarrow\exists x'\in M:\ x*x'=x'*x=0\Rightarrow\{x+x'\}=0\Rightarrow x+x'\in\left[0,\dfrac{4n}{2n+1}\right]\bigcap\mathbb{N}$.

Tehát, ha $x=0\Rightarrow x'=0\in M$, ha $x>0\Rightarrow x'=1-x\in M$.

A fentiekből következik, hogy $(M,*)$ Ábel féle csoport.

Az izomorfizmus igazolása:

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 12. osztály

Tekintsük az $F : M \to \mathbb{Z}_{2n+1}$, $F\left(\frac{k}{2n+1}\right) = k$ függvényt.

Ha $F\left(\frac{k_1}{2n+1}\right) = F\left(\frac{k_2}{2n+1}\right)$, $0 \le k_1, k_2 \le 2n \Rightarrow k_1 = k_2 \Rightarrow k_1 = k_2$ osztva $2n+1$-gyel

$\Rightarrow \frac{k_1}{2n+1} = \frac{k_2}{2n+1}$. Amiből kapjuk, hogy *F* injektív.

$\forall\ k \in \mathbb{Z}_{2n+1} \Rightarrow t = \frac{k}{2n+1} \in M$, azaz $F(t) = k$, tehát *F* szürjektív is, azaz *F* bijektív.

Kimutatjuk, hogy $F(x * y) = F(x) + F(y), \forall x, y \in M$ esetén.

Ha $x = \frac{k_1}{2n+1} \in M, y = \frac{k_2}{2n+1}, 0 \le k_1, k_2 \le 2n$

Ha $k_1 + k_2 \le 2n \Rightarrow\ 0 \le \frac{k_1 + k_2}{2n+1} \le \frac{2n}{2n+1}$. Tehát $\frac{k_1 + k_2}{2n+1} \in M$ és

$$F(x * y) = F(\{x + y\}) = F\left(\left\{\frac{k_1 + k_2}{2n+1}\right\}\right) = k_1 + k_2 = k_1 + k_2 = F(x) + F(y).$$

Ha $2n+1 \le k_1 + k_2 \le 4n \Rightarrow 0 \le \frac{k_1 + k_2 - 2n - 1}{2n+1} \le \frac{2n-1}{2n+1}$, így $\frac{k_1 + k_2 - (2n+1)}{2n+1} \in M$.

Ezek szerint

$$F(x * y) = F(\{x + y\}) = F\left(\left\{\frac{k_1 + k_2}{2n+1}\right\}\right) = F\left(\left\{\frac{k_1 + k_2 - 2n - 1}{2n+1}\right\}\right) = k_1 + k_2 - 2n - 1 = k_1 + k_2 = F(x) + F(y).$$

Tehát $(M, *) \cong (\mathbb{Z}_{2n+1}, +)$

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 12. osztály

2. feladat: Legyenek az $(A,*)$ és $(B,\circ)$ csoportok semleges elemei e, illetve u. Ha az $f:A\to B$ függvény rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

i. $\forall\ x,y\in A$ esetén $f(x*y)=f(x)\circ f(y)$ és

ii. $f(x)\neq u,\ \forall x\in A-\{e\}$ elemre,

igazold, hogy f injektív.

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Megoldás: x' a szokásos módon jelentse az x inverz elemét.

Legyen először $x=y=e$, akkor $f(e)=f(e*e)=f(e)\circ f(e)$.

Másrészt $u=f'(e)\circ f(e)=f'(e)\circ\big(f(e)\circ f(e)\big)=\big(f'(e)\circ f(e)\big)\circ f(e)=u\circ f(e)=f(e)$.

Tehát $f(e)=u$ (1)

Legyen most $x\in A$ és $y=x'$, akkor $u=f(e)=f(x*x')=f(x)\circ f(x')$ innen következik, hogy $f(x')=f'(x),\quad \forall x\in A$ esetén. (2)

Legyen most $x\in A$ és y helyett legyen y'.

Akkor $f(x*y')=f(x)\circ f(y')=f(x)\circ f'(y)$, alkalmaztuk a (2)-es tulajdonságot.

Tehát $\forall\ x,y\in A$ esetén $f(x*y')=f(x)\circ f'(y)$ (3)

Az injektivítás igazolása:

Feltételezzük, hogy $f(x_1)=f(x_2)$, akkor $f(x_1)\circ f'(x_2)=f(x_2)\circ f'(x_2)=u$, innen $u=f(x_1)\circ f'(x_2)=f(x_1*x_2')$, alkalmaztuk a (3)-as tulajdonságot.

Tehát $f(x_1*x_2')=u$, amiből az igazolt (1)-es tulajdonság és a (2)-es feltétel alapján következik, hogy $x_1*x_2'=e$ lehet csak, azaz $x_1=x_2$.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 12. osztály

3. feladat: Adottak az $f_n:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbf{R}$, $f_n(x)=\frac{e^x\cdot\cos x\cdot\sin nx}{\sin x}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ függvények.

a) Számítsd ki: $\int\left(f_{2n+1}(x)-f_{2n-1}(x)\right)dx$.

b) Határozd meg az f_{2n+1} primitív függvényeinek a halmazát.

Mátéfi István, Marosvásárhely

Megoldás:

a) $\int\left(f_{2n+1}(x)-f_{2n-1}(x)\right)dx=\int\frac{e^x\cdot\cos x\sin(2n+1)x}{\sin x}dx-\int\frac{e^x\cdot\cos x\sin(2n-1)x}{\sin x}dx=$

$\int\frac{e^x\cos x\left(\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x\right)}{\sin x}dx=\int\frac{e^x\cos x\cdot 2\sin x\cdot\cos 2nx}{\sin x}dx=$

$\int e^x 2\cos x\cdot\cos 2nxdx=\int e^x\cdot\left(\cos(2n+1)x+\cos(2n-1)x\right)dx$

De $\int e^x\cdot\cos\alpha xdx=\frac{e^x\cdot\left(\cos\alpha x+\alpha\sin\alpha x\right)}{1+\alpha^2}+\mathscr{C}$.

Tehát $\int\left(f_{2n+1}(x)-f_{2n-1}(x)\right)dx=$

$\frac{e^x\cdot\left(\cos(2n+1)x+(2n+1)\sin(2n+1)x\right)}{1+(2n+1)^2}+\frac{e^x\cdot\left(\cos(2n-1)x+(2n-1)\sin(2n-1)x\right)}{1+(2n-1)^2}+\mathscr{C}$

b) Legyen $k(2n+1)=\frac{e^x\cdot\left(\cos(2n+1)x+(2n+1)\sin(2n+1)x\right)}{1+(2n+1)^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$,

$\int\left(f_{2n+1}(x)-f_{2n-1}(x)\right)dx=k(2n+1)+k(2n-1)$

$\int\left(f_{2n-1}(x)-f_{2n-3}(x)\right)dx==k(2n-1)+k(2n-3)$

……

$\int\left(f_3(x)-f_1(x)\right)dx=k(3)+k(1)$.

Összeadva kapjuk, hogy: $\int\left(f_{2n+1}(x)-f_1(x)\right)dx=k(2n+1)+k(2n-1)+\ldots+k(1)\Rightarrow$

$\int f_{2n+1}(x)dx=k(2n+1)+k(2n-1)+\ldots+k(1)+\frac{e^x\cdot\left(\cos x+\sin x\right)}{2}+\mathscr{C}$.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 12. osztály

4. feladat: Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, függvény, amelyre igaz, hogy $\left(f\left(x\right)\right)^5+5^{f(x)}=x$, bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén. Mutasd ki, hogy az f függvénynek van primitív függvénye.

dr.Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás:

Legyen $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g\left(x\right)=x^5+5^x$.

Az $f^5\left(x\right)+5^{f(x)}=x$ összefüggés ekvivalens a $g\left(f\left(x\right)\right)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ egyenlőséggel.

A g függvény driválható és $g'\left(x\right)=5x^4+5^x ln5>0\Rightarrow$ a g függvény szigorúan növekvő az $\mathbb{R}$ halmazon. Tehát g injektív.

Mivel a g függvény folytonos az $\mathbb{R}$ halmazon, következik, hogy Darboux tulajdonságú és $\lim\limits_{x\to-\infty}g\left(x\right)=-\infty$ és $\lim\limits_{x\to\infty}g\left(x\right)=\infty$, vagyis $g\left(\mathbb{R}\right)=\mathbb{R}$ tehát a g függvény szürjektív.

A fentiekből következik, hogy a g függvény bijektív, tehát invertálható.

Mivel $g\left(f\left(x\right)\right)=x\Rightarrow f\left(x\right)=g^{-1}\left(x\right)\Rightarrow$ az f függvény folytonos az $\mathbb{R}$ halmazon, tehát az f függvénynek van primitív függvénye.

.