VI. Dezső Gábor Emlékverseny – a matematika terén tehetséges tanulók fejlesztésének tehetségműhelyek együttműködésével megvalósuló jó gyakorlata
Csíkszentmárton, 2016. április 21.

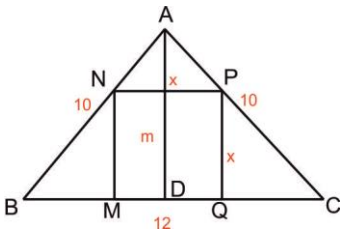
Írásbeli feladatlap

1. Dédi születése

Dani meséli, hogy dédapja, aki a 19. század második felében született, az x^2 évszámmal jelölt évben éppen x éves volt. Mikor született Dani dédapja?

2. Al-Khvárizmi és Hérón

Al-Khvárizmi Héróntól vette át a következő geometriai tárgyú feladatot:
Mekkora annak a négyzetnek egy oldala, amely olyan egyenlő szárú háromszögbe írható, amelynek alapja 12 és szárai 10 egység hosszúak?
A négyzetnek egyik oldala a háromszög alapjára illeszkedik, egy-egy csúcsa pedig a háromszög egy-egy szárára.



3. Lovagok és lókötők

Emma és Rozi a lovagok és lókötők szigetének lakói. Egyikük lovag, másikuk lókötő. A lovagok mindig igazat mondanak, a lókötők mindig hazudnak. Emma azt állította, hogy 2 rubin drágább, mint 3 zafír. Rozi azt mondta, hogy 3 rubin drágább, mint 4 zafír. Igaz-e, hogy 12 rubin drágább, mint 18 zafír?

4. ***Táncestély***

Egy táncestélyen 20 táncoló vett részt. Mária hét férfival táncolt, Olga nyolc férfival, Vera kilenccel és így tovább, egészen Ninái, aki minden férfival táncolt. Hány férfi volt az estélyen?

5. ***A tó mélysége (hindu feladat)***

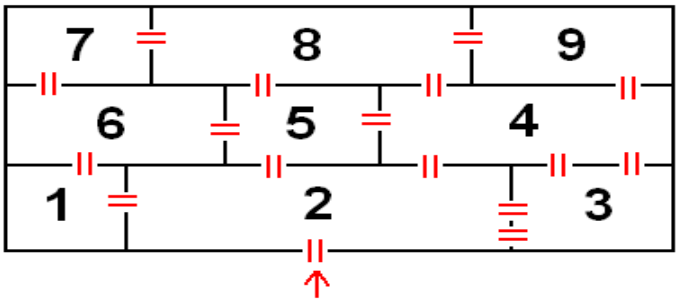
A régi hinduknál az a szokás járta, hogy a feladatokat és szabályokat versben fogalmazták meg.
Íme egy ilyen feladat:
“ A lótusz a tavon,
Féllábnyi hosszú szárán, virágot lengetett.
Magányosan nőtt ott. A szél egy zord napon
elsodorta. A víz felett
nem tündöklik virág már.
Ám tavasszal egy halász arra járván, *két lábnyira* a régi hely
Közelében rá lelt. Felelj:
A tónak mennyire mély itt vize?

6. ***Dudley Langford számai***

Dudley Langford skót matematikus tiszteletére nevezzük DudLa számoknak azokat a számokat, amelyeknek minden számjegye legalább kétszer szerepel a számban, és az is igaz, hogy bármely két ugyanolyan értékű számjegy között annyi darab más értékű számjegy áll, mint amennyi azok értéke. Például ilyen DudLa szám a 723 121 327, mert két 1-es között 1 db, két 2-es között 2 db, két 3-as között 3 db, két 7-es között 7 db tőle különböző értékű számjegy áll. Ebben a számban 3 darab 2-es van, a két szélső kettesre nem vonatkozik a szabály!!! Melyek a hétjegyű DudLa számok?

7. Euler- tétel a palotában

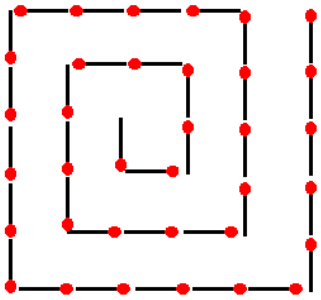
Az ábrán egy királyi palota alaprajza látható. Egy király minden reggel elmegy sétálni a palota körüli erdőbe. Ezután bemegy a palotába, és minden ajtón keresztül megy pontosan egyszer. Legvégül leül a trónteremben. Melyik helyiség a trónterem?



8. ***Verne Gyula hőse***

Verne Gyula valamelyik hőse kiszámította, hogy ha körbejárja a Földet az Egyenlítő mentén, akkor a fejebúbja mennyivel hosszabb távolságot tesz meg, mint a talpa. Számítsátok ki ti is, tudva azt, hogy a hős magassága 1,7m volt. $(\pi \approx 3{,}14)$

9. Csavard meg! Helyezz át a csigavonalból négy szál gyufát úgy, hogy a másik irányba csavarodjon!



10. Ükapám születésnapja

Valahányadik ükapám születési évszámát elosztom 11-gyel, 12-vel és 13-mal is, s a kapott osztási maradékokat összeadom, eredményül 33-at kapok. Melyik évben született az ősöm?

Pontozás: Minden feladat10 pontot ér.
Munkaidő: 90 perc

Regisztrált Tehetségpont

FELADATOK- JAVÍTÓKULCS

Pontozás: Minden feladat10 pontot ér.

1. Dédi születése

Dani meséli, hogy dédapja, aki a 19. század második felében született, az x^2 *évszámmal jelölt évben éppen* x *éves volt. Mikor született Dani dédapja?*

Megoldás:

Milyen x érték jöhet szóba?

Ha x=43, akkor x^2=1849, ez túl korai. (2p)

Ha x=44, akkor x^2=1936, ez jó lehet. (2p)

Ha x=45, akkor x^2=2025, ez már nem jó. (2p)

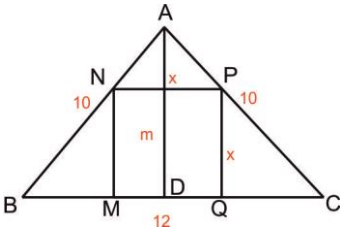
Tehát a dédapa 1936-ban 44 éves volt. (2p)

Vagyís 1936-44=1892-ben született. (2p)

2. Al-Khvárizmi Héróntól vette át a következő geometriai tárgyú feladatot:

Mekkora annak a négyzetnek egy oldala, amely olyan egyenlő szárú háromszögbe írható, amelynek alapja 12 és szárai 10 egység hosszúak?

A négyzetnek egyik oldala a háromszög alapjára illeszkedik, egy-egy csúcsa pedig a háromszög egy-egy szárára.



Megoldás:

Al-Khvárizmi (***Hérón*** is) először kiszámította a háromszög m magasságát, aztán felírta, hogy az egész háromszög területe egyenlő a négyzet és a részháromszögek területösszegével. Végül az így nyert másodfokú egyenletből x-et, a négyzetoldalt meghatározta. Vagy:

$$MN \| AD \Rightarrow ABD_{\Delta} \approx NBM_{\Delta} \Rightarrow \frac{AB}{NB} = \frac{BD}{BM} = \frac{AD}{NM} \qquad (3p)$$

$$\frac{6}{6-\frac{x}{2}} = \frac{m}{x} \quad (1p)$$

De $AD = m$, az ABC_{Δ} magassága.

$$DAB_{\Delta} - ben \begin{cases} m(\hat{D}) = 90° \\ AB = 10 \\ BD = 6 \end{cases} \Rightarrow AD = 8 \text{ (pitagorászi számok) (2p)}$$

$$\frac{6}{6-\frac{x}{2}} = \frac{8}{x} \Rightarrow 6x = 8 \cdot \left(6 - \frac{x}{2}\right)$$

$10x = 48$ (4p)

$x = 4{,}8(e)$

3*. *Lovagok és lókötők

Emma és Rozi a lovagok és lókötők szigetének lakói. Egyikük lovag, másikuk lókötő. A lovagok mindig igazat mondanak, a lókötők mindig hazudnak. Emma azt állította, hogy 2 rubin drágább, mint 3 zafír. Rozi azt mondta, hogy 3 rubin drágább, mint 4 zafír. Igaz-e, hogy 12 rubin drágább, mint 18 zafír?

Megoldás:

Ha Emma igazat mond, akkor 12 rubin drágább, mint 18 zafír.(2p)

Ha Rozi igazat mond, akkor 12 rubin drágább, mint 16 zafír.(2p)

18 zafír drágább 16 zafírnál, azaz, ha a 12 rubin 18 zafírnál drágább, akkor 16-nál is. (2p)

Tehát ha Emma igazat mond, akkor Rozi is.(2p)

Mivel csak egyikük mondhat igazat, ezért ez nem lehet, vagyis Emma nem mond igazat, tehát 12 rubin drágább 18 zafírnál.(2p)

4*. *Táncestély

Egy táncestélyen 20 táncoló vett részt. Mária hét férfival táncolt, Olga nyolc férfival, Vera kilenccel és így tovább, egészen Ináig, aki minden férfival táncolt. Hány férfi volt az estélyen?

Megoldás:

Jelöljük a nők számát x-el. (1p)

1. nő Mária ……..6+1 férfival táncolt

2. nő Olga ……6+2 férfival táncolt

3. nő Vera…….6+3 férfival táncolt

……

x-ik. nő Nina…….6+x férfival táncolt. (4p)

Mivel a férfiak és nők összesen 20-an voltak, ezért: x+(6+x)=20 (2p)

x=7 (1p)

Tehát az estélyen 20-7=13 férfi volt jelen. (2p)

5*. *A tó mélysége (hindu feladat)

A régi hinduknál az a szokás járta, hogy a feladatokat és szabályokat versben fogalmazták meg. Íme egy ilyen feladat:

“ A lótusz a tavon,

Féllábnyi *hosszú szárán, virágot lengetett.*

Magányosan nőtt ott. A szél egy zord napon

elsodorta. A víz felett

nem tündöklik virág már.

Ám tavasszal egy halász arra járván, két lábnyira *a régi hely*

Közelében rá lelt. Felelj:

A tónak mennyire mély itt vize?”

Megoldás:

Legyen CD a tó mélysége. Pitagorász-tétele szerint:

$BD^2 = CD^2 + BC^2$ (2p)

$AD = x + \frac{1}{2}, (2\text{p})$

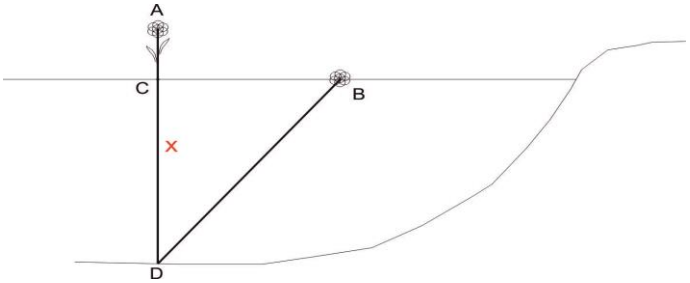
$AD = BD (2\text{p})$

$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + 2^2 (2\text{p})$

$x^2 + x + \frac{1}{4} = x^2 + 4$

$x + \frac{1}{4} = 4$

$x = 3\frac{3}{4} láb. (2\text{p})$



6. Dudley Langford számai

Dudley Langford skót matematikus tiszteletére nevezzük DudLa számoknak azokat a számokat, amelyeknek minden számjegye legalább kétszer szerepel a számban, és az is igaz, hogy bármely két ugyanolyan értékű számjegy között annyi darab más értékű számjegy áll, mint amennyi azok értéke. Például ilyen DudLa szám a 723 121 327, mert két 1-es között 1 db, két 2-es között 2 db, két 3-as között 3 db, két 7-es között 7 db tőle különböző értékű számjegy áll. Ebben a számban 3 darab 2-es van, a két szélső kettesre nem vonatkozik a szabály!!! Melyek a hétjegyű DudLa számok?

Megoldás:

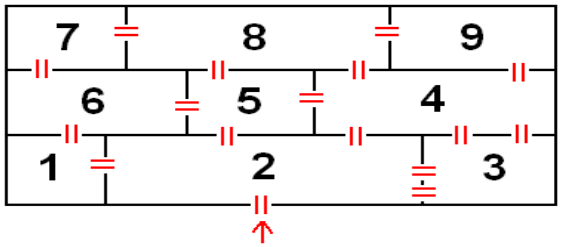
A keresett számokban 5-nél nagyobb számjegy nem szerepelhet, mert két számjegy között nem lehet 5-nél több számjegy. (1p)

Továbbá, mivel hét számjegy van, és minden számjegy legalább kétszer szerepel, ezért van egy számjegy, ami legalább 3-szor is szerepel és csak egy ilyen van (ez a számjegy csak a 0, az 1 vagy a 2 lehet). (2p)

A próbálgatások során aszerint haladhatunk, hogy mi a legnagyobb számjegye a felírandó számnak, továbbá aszerint, hogy melyiket tudjuk legalább 3-szor szerepeltetni. Így az alábbi lehetőségeket kapjuk: 5000005, 5300035, 4000141, 1410004, 1312132, 2312131, 2312132. (7p)

7. Euler-tétel a palotában

Az ábrán egy királyi palota alaprajza látható. Egy király minden reggel elmegy sétálni a palota körüli erdőbe. Ezután bemegy a palotába, és minden ajtón keresztül megy pontosan egyszer. Legvégül leül a trónteremben. Melyik helyiség a trónterem?



Megoldás:

Mivel minden szobán páros számú ajtó van, vagyis amelyikbe bement, onnan ki is fog jönni. (4p)

Egyedül a 6-oson van 3 ajtó, ahova ha másodszor bemegy, onnan már nem tud kijönni. (4p)

Tehát: a 6-os a trónterem, bármelyik útvonalon is halad a király.(2p)

8. Verne Gyula hőse

Verne Gyula valamelyik hőse kiszámította, hogy ha körbejárja a Földet az Egyenlítő mentén, akkor a fejebúbja mennyivel hosszabb távolságot tesz meg, mint a talpa. Számítsátok ki ti is, tudva azt, hogy a hős magassága 1,7m volt. $(\pi \approx 3{,}14)$

Megoldás:

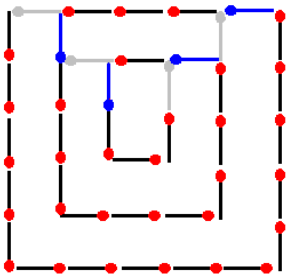
$K_{láb} = 2\pi R$, R –a Földgömb sugara (3p)

$K_{fej} = 2\pi(R+1{,}7)$ (3p)

$K_{fej} - K_{láb} = 2\pi(R+1{,}7) - 2\pi R = 2\pi \cdot 1{,}7 = 10{,}67 \approx 10{,}7m$ (4p)

9.Csavard meg! *Helyezz át a csigavonalból négy szál gyufát úgy, hogy a másik irányba csavarodjon!!*

Megoldás:



(10p)

10. Ükapám születésnapja

Valahányadik ükapám születési évszámát elosztom 11-gyel, 12-vel és 13-mal is, s a kapott osztási maradékokat összeadom, eredményül 33-at kapok. Melyik évben született az ősöm?

Megoldás:

Legyen x ükapám születési éve.

$x = 11 \cdot k + r_1$

$x = 12 \cdot p + r_2$ (3p)

$x = 13 \cdot q + r_3$

$\left.\begin{array}{l} r_1 + r_2 + r_3 = 33 \\ r_1 < 11 \\ r_2 < 12 \\ r_3 < 13 \end{array}\right\} \Rightarrow r_1 = 10, r_2 = 11, r_3 = 12$ (3p)

$\left.\begin{array}{l} x - 1 = 11 \cdot k \\ x - 1 = 12 \cdot p \\ x - 1 = 13 \cdot q \end{array}\right\} \Rightarrow x + 1 = [11,12,13] = 1716$ (3p)

$x = 1715$ ükapám születési éve . (1p)

Pontozás: Minden feladat10 pontot ér.

Munkaidő: 90 perc