PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

XXIII. Bolyai János Emlékverseny

– 2015.12.05 –

V. osztály

1. Egy táblára felírtuk a számokat 1-től 49-ig. A tábláról letörlünk két számot, majd helyette felírjuk a két szám összegét. Az eljárást addig ismételjük, amíg a táblán csak egy szám marad meg.
   a) Melyik ez a szám?
   b) Igazold, hogy a megmaradt szám négyzetszám!

2. a) Számítsuk ki a 7^{2015} szám utolsó számjegyét!
   b) Határozzuk meg a $7^{2019} - 7^{2018} + 7^{2017} - 7^{2016}$ szám utolsó három számjegyét!

3. a) Keressük meg az összes 2015-nél kisebb olyan természetes számokat, amelyeket 5-tel szorozva legkevesebb 2015-öt kapunk. Hány ilyen szám van?
   b) Hány olyan természetes szám van 215 ás 2015 között, amely három egymás utáni természetes szám szorzataként írható fel? Melyek ezek a számok?

4. Határozzuk meg az összes $\overline{xyz}$ alakú természetes számokat, amelyeket 7-tel osztva a hányados $\overline{yz}$, a maradék pedig x.

Szőcs Péter

PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

XXIII. Bolyai János Emlékverseny

– 2015.12.05 –

VI. osztály

1. Határozzuk meg azokat az x és y természetes számokat, amelyekre $x^2 \cdot (y+1) = 6\,875$.

2. Oldjuk meg a prímszámok halmazán a következő egyenletet:
$$2a + 3b + 8c + 8c^2 = 2\,458.$$

3. Az AB szakaszt az A_1, A_2, A_3, ..., A_{999} pontok 1000 szakaszra osztják úgy, hogy $AA_1 = A_1A_2 = 1$ cm, $A_2A_3 = A_3A_4 = 2$ cm, $A_4A_5 = A_5A_6 = 3$ cm, és így tovább.
   a) Számítsuk ki az A_9A_{10} és $A_{20}A_{21}$ szakaszok hosszát!
   b) Igazoljuk, hogy A_4 az AA_6 szakasz felezőpontja!
   c) Mekkora az AB szakasz km-ben kifejezve?

4. Az $\widehat{AOB}$ és $\widehat{BOC}$ egymás melletti szögek mértékei 108°, illetve 68°. Az $[OM$, $[ON$ és $[OP$ félegyenesek az AOB, BOC és MON szögek szögfelezői. Legyen $[OP'$ az $[OP$ ellentétes félegyenese. Vegyük fel az AOP' szög belsejében a B' pontot úgy, hogy $m(\widehat{B'OP'}) = 10°$. Igazoljuk, hogy a B, O és B' pontok kollineárisak!

Molnár Klára

PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

XXIII. Bolyai János Emlékverseny

– 2015.12.05 –

VII. osztály

1. Az $\overline{abcd}$, $\overline{bcda}$, $\overline{cdab}$ és $\overline{dabc}$ természetes számok egyenesen arányosak az $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$ és $\overline{da}$ számokkal.
   a) Lehetséges-e, hogy az $\overline{abcd}$ szám teljes négyzet legyen?
   b) Határozd meg a 36-tal osztható, adott feltételeknek megfelelő $\overline{abcd}$ természetes számokat!

2. Melyik az a háromjegyű természetes szám, amely ötszöröse a számjegyei szorzatának?

3. Adott az $ABCD$ paralelogramma. A B pontnak az AD és DC szerinti szimmetrikusai H, illetve G, a D pontnak pedig az AB és BC szerinti szimmetrikusai E, illetve F.
   a) Igazold, hogy az $EFGH$ négyszög paralelogramma!
   b) Igazold, hogy a két paralelogramma középpontja egybeesik!
   c) Keress 4 olyan pontot az A, B, C, D, E, F és G pontok közül, amelyek paralelogrammát alkotnak! Írd fel az összes esetet! (indoklás)

4. a) Igazold, hogy ha egy háromszög oldalfelezőjének hossza egyenlő a hozzátartozó oldal hosszának a felével, akkor a háromszög derékszögű!
   b) Vegyünk fel 12 darab, O kezdőpontú, egymással kongruens szakaszt. Ezek 12 darab, egy pont körüli, egymással kongruens szöget alkotnak. Hány derékszögű háromszöget kapunk, ha a szakaszok O-tól különböző végpontjait hármanként összekötjük?

Simon József

PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

XXIII. Bolyai János Emlékverseny

– 2015.12.05 –

VIII. osztály

1. Keressük meg azokat az egész számokból álló (x, y) számpárokat, amelyekre $x \geq 0$ és $2x^2 - 2xy + y^2 = 289$.

2. Az a, b és c olyan pozitív racionális számok, amelyekre $ab + ac + bc = 1$. Igazoljuk, hogy $\sqrt{\left(a^2+1\right)\left(b^2+\right)\left(c^2+1\right)} \in \mathbb{Q}$.

3. Adott az $ABCDA'B'C'D'$ kocka.
   a) Mekkora szöget zárnak be a BD és AD' egyenesek?
   b) Igazoljuk, hogy $BD' \perp (AB'C)$!
   c) Ha $BD' \cap (AB'C) = \{P\}$, határozzuk meg a $\frac{PB}{PD'}$ arány értékét!

4. A $VABCD$ négyoldalú gúlában G_1 az ABC-, G_2 pedig a BCD háromszög súlypontja. Igazoljuk, hogy:
   a) $G_1G_2 \parallel AD$;
   b) $d \parallel (ABC)$, ahol $d = (VAD) \cap (VG_1G_2)$.

Molnár Klára