PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

XXII. Bolyai János Emlékverseny

– 2014.12.06 –

V. osztály

1. Valaki 2014-ben annyi éves volt, mint születési éve számjegyeinek összege. Mikor születhetett? (114 évesnél nem több)

2. Egy matematika versenyen 25 feladatot kellett megoldani. Minden helyesen megoldott feladat 6 pontot ért, a hibásan megoldott feladatért 3 pontot levontak. Péter minden feladatot megoldott, és 114 pontot kapott. Hány feladatot oldott meg helyesen?

3. Határozd meg azokat a természetes számokat, amelyeknek 100-zal való osztásakor a hányados egy teljes négyzet, a maradék pedig a hányados négyzetével egyenlő.

4. Anna 10 évvel fiatalabb, mint a testvére, Bence. Egy év múlva Bence 3-szor annyi idős lesz, mint Anna.
   a) Hány éves most a két testvér?
   b) Hány év múlva lesz Bence 2-szer idősebb Annánál?

Molnár Klára

PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

XXII. Bolyai János Emlékverseny

– 2014.12.06 –

VI. osztály

1. Ha az a számot elosztjuk a b számmal, ($a, b \in \mathbb{N}^*$) a hányados 7 és a maradék 12.
   a) Számítsd ki a $70a - 490b - 111$ számot!
   b) Igazold, hogy a kapott szám egy teljes négyzet, (négyzetszám) és ugyanakkor egy természetes szám harmadik hatványa is!

2. Tekintsük azokat a természetes számokat, amelyek prímtényezők szorzataként felírva csak a 2 és 3 hatványait tartalmazhatják.
   a) Melyek azok a számok, amelyeknek pontosan 24 osztója van?
   b) Határozd meg közülük a legkisebbet!

3. Adottak az O, A_1, A_2, A_3, …, A_{10} kollineáris pontok ebben a sorrendben. Tudjuk, hogy $OA_1 = A_1A_2 = 2$ cm, $A_2A_3 = 2^2$ cm, $A_3A_4 = 2^3$ cm, …, $A_9A_{10} = 2^9$ cm.
   a) Számítsd ki az OA_{10} szakasz hosszát!
   b) Mekkora az A_5A_9 szakasz hossza?

4. Az $\widehat{AOA_1}$, $\widehat{A_1OA_2}$, $\widehat{A_2OA_3}$, …, $\widehat{A_{n-1}OA_n}$ olyan egy pont körüli szögek, amelyekre $m(\widehat{A_1OA_2}) = 2 \cdot m(\widehat{AOA_1})$, $m(\widehat{A_2OA_3}) = 3 \cdot m(\widehat{AOA_1})$, …, $m(\widehat{A_{n-1}OA_n}) = n \cdot m(\widehat{AOA_1})$ és $A_n = A$.
   Tudjuk, hogy a szögek mértékei fokban kifejezve természetes számok.
   Hány szög keletkezett?
   Keresd meg az összes eseteket, és határozd meg a szögek mértékét minden esetben!

Simon József

PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

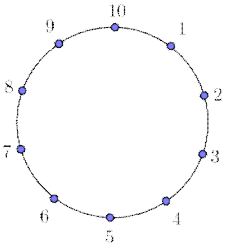
XXII. Bolyai János Emlékverseny

– 2014.12.06 –

VII. osztály

1. Számítsd ki:
   a) $1+2-3-4+5+6-7-8+9+10-11-12+\ldots+2010-2011-2012+2013+2014$;
   b) $\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{4}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2014}-1\right)$.

2. Tíz ember egy kerek asztal körül ül. Mindenki gondol egy számra, majd megsúgja azt a két szomszédjának. Ezután valamennyien hangosan kimondják az általuk hallott két szám átlagát. Ennek eredménye látható az ábrán. Melyik számra gondolt az, aki a 6-ost mondta?



3. Az $ABCD$ derékszögű trapézban $AB \parallel CD$, $m(\hat{A}) = 90°$, $m(\hat{B}) = 60°$, M pedig a BC oldal felezőpontja. Tudjuk, hogy a kisalap hossza egyenlő a BC oldal hosszának felével.
   a) Igazold, hogy $AC \perp DM$;
   b) Számítsd ki a $\frac{T_{DMC}}{T_{ABCD}}$ arány értékét!

4. Az A-ban derékszögű ABC háromszög B szögének szögfelezője az AC oldalt D-ben, a BC-re emelt merőlegest pedig az E pontban metszi. Tudjuk, hogy $EF \parallel AC$, ahol $F \in AB$.
   Bizonyítsd be, hogy:
   a) az $FECD$ négyszög rombusz;
   b) a BCF háromszög egyenlő szárú!

Molnár Klára

PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

XXII. Bolyai János Emlékverseny

– 2014.12.06 –

VIII. osztály

1. Adott az $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,|\,x=a^2+b^2;a,b\in\mathbb{Z}\right\}$ halmaz. Igazold, hogy:
   a) $100\in A$;
   b) ha $x,y\in A$, akkor $x\cdot y\in A$;
   c) $65^{65}\in A$.

2. Határozd meg azokat az $\overline{abc}$ háromjegyű számokat, amelyekre $\sqrt{\overline{abc}}=\overline{ab}-\sqrt{c}$.

3. Az $ABCD$ és $BCEF$ paralelogrammák különböző síkokban helyezkednek el. Igazold, hogy:
   a) $AD\parallel(BCEF)$;
   b) ha P az AB szakasz felezőpontja, akkor $AE\parallel(FPC)$;
   c) Ha $AE\cap FD=\{N\}$, $AC\cap BD=\{M\}$ és az MNP háromszög egyenlő oldalú, akkor $FC\perp BE$.

4. Az $ABCDA'B'C'D'$ kockában $AB=8$ cm, M a $[BC]$, N a $[B'C']$, P az $[AA']$ és R az $[A'D']$ felezőpontja.
   a) Igazold, hogy a BP, $B'A'$ és $C'R$ összefutó egyenesek!
   b) Ha $BP\cap A'B'=\{S\}$ és $NA'\cap MP=\{T\}$, számítsd ki a $[TS]$ hosszát!
   c) Számítsd ki a P pontnak a $C'A'M$ síktól való távolságát!

Szőcs Péter