PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

# XXI. Bolyai János Emlékverseny

– 2013.12.07 –

## V. osztály

1. Számítsd ki:
   a) $[2\,013:61+4\,026:11+1]:20^2$;
   b) $\left(4^5-5^4+1\right):\left(3^4-4^3-1\right)$.

2. Tekintsük azokat az $\overline{abcd}$ alakú természetes számokat, amelyekben $a\cdot b\cdot c\cdot d=210$.
   a) Határozd meg az *a*, *b*, *c* és *d* számjegyeket, majd keresd meg az összes ilyen természetes számokat! Hány számot kaptál?
   b) Írd fel a legkisebb és legnagyobb ilyen természetes számot!
   c) Számítsd ki az előbbi tulajdonsággal rendelkező számok összegét!

3. Számítsd ki az összes $\overline{ab}$ alakú természetes számok összegét, ahol az *a* és *b* egymástól különböző számjegyek!

4. Egy céllövő bajnokságon a 10 résztvevő összesen 3 480 pontot kapott. Az eredményhirdetésen kiderült, hogy a rangsorban Andrea mögött 2-szer annyian voltak, mint előtte, Anna előtt viszont 2-szer annyian voltak, mint mögötte. Tudjuk, hogy Andrea 24 ponttal kapott többet, mint Anna, és a rangsorban bármely két egymás után következő versenyző pontszámának a különbsége megegyezett.
   a) Hányadik lett a bajnokságon Andrea, illetve Anna?
   b) Hány pontot kapott a bajnok?
   c) Hány pontot kaptak a lányok külön-külön?

*Simon József*

PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

# XXI. Bolyai János Emlékverseny

– 2013.12.07 –

## VI. osztály

1. Keresd meg az olyan háromjegyű számpárokat, amelyek tagjainak különbsége 100, és amelyek közül a kisebb 6-tal, a nagyobb pedig 7-tel osztható! Hány ilyen számpár van?

2. Határozd meg az $a$ és $b$ természetes számokat, tudva, hogy $b$ prímszám és $(a+1)(a^2+2a)+b=213$.

3. Az $A$, $B$, $C$ és $D$ kollineáris pontok ebben a sorrendben úgy, hogy $AB+AD=2\cdot AC$ és $BD=2^{31}$. Határozd meg a $BC$ szakasz hosszát!

4. Adottak az $A_1OA_2$, $A_2OA_3$, $A_3OA_4$,…, $A_{12}OA_{13}$ egymás melletti szögek, ahol ($OA_1$ és ($OA_{13}$ ellentétes félegyenesek. A szögek mértékei sorrendben véve egymás utáni páros természetes számok.
   a) Határozd meg a szögek mértékét!
   b) Keress olyan félegyeneseket, amelyek derékszöget alkotnak!

*Molnár Klára*

PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

# XXI. Bolyai János Emlékverseny

– 2013.12.07 –

## VII. osztály

1. Adottak az $\overline{ab11}$, $\overline{ab12}$ és $\overline{ab13}$ természetes számok.
   a) Ha közülük két szám prímszám, igazold, hogy a harmadik szám osztható 12-vel!
   b) Keress egy példát az előbbi esetre!
   c) Adj példát az adott számok közül három olyan számra, amelyek közül egyik sem prímszám!

2. Igazold, hogy
   a) $1+3+5+\ldots+2\,013$ teljes négyzet!
   b) $\frac{1+2+3}{4}+\frac{5+6+7}{8}+\frac{9+10+11}{12}+\ldots+\frac{2\,301+2\,302+2\,303}{2\,304}+\frac{3}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{576}\right)\ldots$ teljes köb!

3. Az $ABCD$ négyzet $AC$ átlóját hosszabbítsd meg a $C$ ponton túl a $CF$ szakasszal úgy, hogy fennálljon a $[BF]\equiv[AC]$ összefüggés. Határozd meg az $AFB$ szög mértékét!

4. Az $ABC_{\triangle}$-ben ($AD$ oldalfelező, ahol $D\in(BC)$. Hosszabbítsd meg az ($AD$ oldalfelezőt a $[DE]\equiv[AD]$ szakasszal. Igazold, hogy:
   a) az $ABEC$ négyszög paralelogramma;
   b) $T_{ABD}=T_{DCE}$;
   c) ha $F$ a $CE$ szakasz felezőpontja és $AF\cap BC=\{M\}$, számítsd ki az $AMD$ és $ABD$ háromszögek területének arányát!

*Szőcs Péter*

PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

# XXI. Bolyai János Emlékverseny

– 2013.12.07 –

## VIII. osztály

1. Egy család (apa, anya és gyerekek) átlagéletkora 18 év. A 38 éves apa nélkül a többi tagok átlagéletkora 14 év. Hány gyerek van a családban?

2. Adottak az $x=\frac{a}{a^2+a+1}$ és $y=\frac{a}{a^2-a+1}$ valós számok, ahol $a\in\mathbb{R}_+^*$.

   a) Számítsd ki az $a+\frac{1}{a}$ kifejezés értékét $x$ függvényében, majd $y$ függvényében!

   b) Igazold, hogy $\left(\frac{1}{x}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{y}+1\right)\geq 4$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}_+^*$ esetén!

3. Adott az $ABCDA'B'C'D'$ kocka. Legyen $AC\cap BD=\{O\}$, $BC'\cap B'C=\{Q\}$, $E$ pedig a $DD'$ él felezőpontja. Igazold, hogy:
   a) $AC\perp(BDD'B')$;
   b) $OE\perp AQ$.

4. Legyen $A$, $B$, $C$ és $D$ négy olyan pont, amely nincs ugyanabban a síkban, $E$ és $F$ az $A$ pontból az $ABD$ és $ACD$ szögek szögfelezőire húzott merőlegesek talppontjai. Igazold, hogy $EF\parallel(BCD)$!

*Molnár Klára*