PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

XX. Bolyai János Emlékverseny

– 2012.12.08 –

V. osztály

1. a) Ha egy 0-ban végződő természetes számnak elhagyjuk az utolsó számjegyét, akkor a szám 72 504-gyel csökken. Határozd meg a természetes számot!

   b) Számítsd ki az $n = 28 \cdot 27^{12} - 3^{36} - 27^{13}$ számot!

2. Határozd meg azokat az $\overline{ab8}$ alakú természetes számokat, amelyeket $\overline{ba}$-val osztva, a hányados 19 és a maradék 35.

3. Hasonlítsd össze az *a* és *b* számokat, ha:

   a) $a = 3^4 \cdot 44^3$ és $b = 4^3 \cdot 33^4$;

   b) $a = 33^{44} \cdot 444^{33}$ és $b = 44^{33} \cdot 333^{44}$.

4. A 128, 69, 117, 51, 26, 40, 16, 37… számsorozat tagjait úgy képezzük, hogy az előző szám számjegyeinek négyzetét összeadjuk. (pl. a 16 után $1^2 + 6^2 = 37$ következik).

   a) Sorold fel a sorozat következő 8 tagját!

   b) Melyik szám lesz a sorozat 100. tagja?

Molnár Klára

PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

XX. Bolyai János Emlékverseny

– 2012.12.08 –

VI. osztály

1. a) Igazold, hogy bármely x, y, z, nullától különböző természetes számokra az $x^2+y^2+z^2+x+y+z$ szám páros!
   b) Igazold, hogy bármely x, y, z, 2-nél nagyobb vagy egyenlő természetes számokra $3^{(x^2-x)(y^2-y)(z^2-z)} : 81$.
   c) Határozd meg az $4^{x^2+x+y^2+y+z^2+z}-1$ szám 5-tel való osztási maradékát!

2. Határozd meg azokat az x, y, z természetes számokat, valamint azt a p prímszámot, amelyekre fennáll a következő egyenlőség:
$$p+(x+y)(y+z)(z+x)=142.$$

3. Legyen 11 különböző pont egy síkban.
   a) Legtöbb hány egyenest határoznak meg ezek a pontok?
   b) Hány kollineáris pont van közöttük, ha a pontok 50 egyenest határoznak meg?

4. Adottak az A, B, C, D, E és F kollineáris pontok ebben a sorrendben úgy, hogy $[AB]\equiv[BC]$, $[BD]\equiv[DE]$, $[CE]\equiv[EF]$ és $AF=80$ cm.
   a) Számítsd ki a DE szakasz hosszát!
   b) Ha tudjuk, hogy a DE és AF szakaszok felezőpontjai egybeesnek, számítsd ki az AB és EF szakaszok hosszát!

Szőcs Péter

PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

XX. Bolyai János Emlékverseny

– 2012.12.08 –

VII. osztály

1. Adott a következő racionális számsorozat:
$$a_1 = 1+1^{-1},\ a_2 = 1+2^{-1},\ a_3 = 1+3^{-1},\ \ldots,\ a_{2012} = 1+2012^{-1}.$$
   a) Hasonlítsd össze az a_{2011} és a_{2012} racionális számokat!
   b) Igazold, hogy $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2012}$ egy természetes szám!
   c) Határozd meg azt az $n \in \mathbb{N}^*$ számot, amelyre $a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} \in \mathbb{N}$.

2. a) Igazold, hogy $0,2(7)+0,7(2) \in \mathbb{N}$.
   b) Határozd meg az *a* és *b* számjegyeket, ha
$$\overline{0,a(b)}+\overline{0,b(a)} \in \mathbb{N}.$$

3. Az $ABC_{\triangle}$-ben $m(\hat{A}) = 90°$, Az *AD* magasság és a *CE* szögfelező a *G* pontban metszik egymást, $D \in (BC)$ és $E \in (AB)$. Legyen $EF \perp BC$, ahol $F \in (BC)$.
   Igazold, hogy
   a) az $AEG_{\triangle}$ egyenlő szárú;
   b) az *AEFG* négyszög rombusz;
   c) $FG \perp AC$!

4. Az *ABCD* trapéz nagyalapján fekvő $\hat{A}$ és $\hat{B}$ pótszögek, *M* és *K* pedig az *AB* és *CD* alapok felezőpontjai. Tudjuk, hogy *AB* = 24 cm és *CD* = 18 cm.
   a) Számítsd ki az *MK* szakasz hosszát!
   b) Igazold, hogy $T_{AMKD} = \frac{1}{2} \cdot T_{ABCD}$!

Molnár Klára

PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

XX. Bolyai János Emlékverseny

– 2012.12.08 –

VIII. osztály

1. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:
$$x^2 + y^2 + 5 = 2 \cdot (\sqrt{3}x + \sqrt{2}y) .$$

2. Számítsd ki a következő összeget:
$$1008 + 1015 + 1022 + \ldots + 2\,009 .$$

3. Határozd meg az a és b valós számokat, ha tudod, hogy
$$a + b = 6\sqrt{2} + 4\sqrt{3} \text{ és } a \cdot b = 30 + 12\sqrt{6} .$$

4. Az $ABCDA'B'C'D'$ kockában $AB = 6$ cm. Legyen $E \in (C'C$ úgy, hogy $CE = 6\sqrt{3}$ cm.
   a) Számítsd ki a $B'AC$ háromszög területét!
   b) Határozd meg a BE és $A'D$ egyenesek által alkotott szög mértékét!
   c) Mekkora szöget zár be az AB' egyenes az ED egyenessel?

5. Az $ABCD$ rombuszban $AB = 8\sqrt{3}$ cm és $m(\widehat{BAD}) = 60°$. Vedd fel a rombusz síkja fölött azt az M pontot, amelyre $MA = MC = 12\sqrt{2}$ cm és $[MD] \equiv [DO]$, ahol $\{O\} = AC \cap BD$. Legyen N az M pontnak az O pont szerinti szimmetrikusa.
   a) Igazold, hogy $MD \perp AC$!
   b) Számítsd ki az $ANCM$ négyszög területét!
   c) Határozd meg az MOD szög mértékét!
   d) Számítsd ki az $MDNB$ négyszög területét!

Simon József