PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

XVIII. Bolyai János Emlékverseny

– 2010.12.11 –

V. osztály

1. Adottak az $x = \left(3 + 5^6 : 5^4\right) : 2^2 \cdot 3 - 3^2$ és $y = \left[\left(8^{16} : 4^{22} - 2^3\right)^5 : 64^2\right]^{13} : 128^5$ számok. Igazold, hogy az $x^2 + y^2$ szám egy teljes négyzet!

2. Határozd meg az összes olyan háromjegyű számot, amelyet 67-tel osztva, a maradék egyenlő a hányados köbével!

3. Egy háromjegyű szám elé, majd mögé egy 1-est írunk. Az így kapott két négyjegyű szám különbsége 72. Melyik háromjegyű számról van szó? Keresd meg az összes megoldást!

4. Az apa, az anya és 3 lányuk együtt 98 évesek. Az anya 20 évvel idősebb, mint a 3 lány együtt. A szülők életkora közötti különbség éppen a legfiatalabb lány életkorával egyenlő. Az egyik lány 2 évvel fiatalabb, mint a másik, és ugyanannyival idősebb a harmadiknál. Hány évesek a gyerekek és a szülők?

Molnár Klára

PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

XVIII. Bolyai János Emlékverseny

– 2010.12.11 –

VI. osztály

1. Az a és b természetes számok összege 162, legnagyobb közös osztója pedig 18. Melyek ezek a számok?

2. Oldd meg a következő egyenletet a természetes számok halmazán, ahol a, b és c prímszámok:
$$\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}+\overline{abc}=900.$$

3. Adottak az $A_1, A_2, ..., A_n$ kollineáris pontok ebben a sorrendben úgy, hogy $A_1A_2=1$ cm, $A_2A_3=2$ cm, $A_3A_4=3$ cm… $A_{n-1}A_n=n-1$ cm, ahol $n\in\mathbb{N}^*$.
   a) Számítsd ki az A_1A_{100} szakasz hosszát!
   b) Határozd meg azt az $n\in\mathbb{N}^*$ számot, amelyre $A_7A_n=279$ cm!

4. Tudjuk, hogy $m(\widehat{AOB})=128°$. Legyen (OA_1 az $\widehat{AOB}$ szögfelezője, (OA_2 az $\widehat{AOA_1}$ szögfelezője, (OA_3 az $\widehat{AOA_2}$ szögfelezője… (OA_7 pedig az $\widehat{AOA_6}$ szögfelezője.
   Számítsd ki az $\widehat{A_2OA_5}$ és $\widehat{BOA_7}$ szögek mértékét!

Simon József

PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

XVIII. Bolyai János Emlékverseny

– 2010.12.11 –

VII. osztály

1. Határozd meg a következő kifejezés értékét:

$$E=\frac{1}{2}\cdot(-1)^n+\frac{1}{4}\cdot(-1)^{n+1}+\frac{3}{4}\cdot(-1)^{n+2}\text{, ahol } n\in\mathbb{N}\text{!}$$

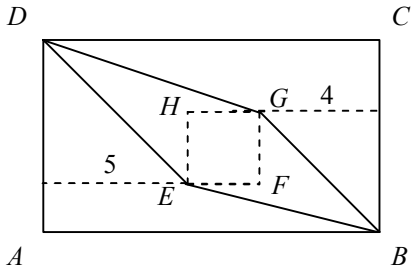
2. Oldd meg a következő egyenleteket a racionális számok halmazán:

a) $\left|x-\frac{1}{2^3}\right|=\frac{1}{2^4}$;

b) $\left[100-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{99}{100}\right)\right]\cdot x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{100}$.

3. Vedd fel az $ABC\triangle$ $[BC]$ oldalán a D és E pontokat úgy, hogy fennálljanak a $\frac{BD}{DC}=\frac{3}{7}$ és $\frac{CE}{EB}=\frac{2}{5}$ összefüggések! Tudod, hogy $T_{ABC}=140$ cm^2.
Számítsd ki az $ADE\triangle$ területét!

4. Az ábrán látható $ABCD$ téglalapban az E pont az $\widehat{ADC}$ szögfelezőjén, a G pont pedig az $\widehat{ABC}$ szögfelezőjén van. Az $EFGH$ négyszög egy olyan négyzet, amelynek oldalai párhuzamosak a téglalap oldalaival, a területe pedig 4 cm^2. Tudjuk, hogy az E pont az AD oldaltól 5 cm távolságra, G pedig a BC oldaltól 4 cm távolságra van. Számítsd ki:
a) az $ABCD$ téglalap területét;
b) a $DEBG$ négyszög területét!



Simon József

PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

XVIII. Bolyai János Emlékverseny

– 2010.12.11 –

VIII. osztály

1. Oldd meg a következő egyenleteket, ahol $x \in \mathbb{N}$:
   a) $\sqrt{1}+\sqrt{1+3}+\sqrt{1+3+5}+....+\sqrt{1+3+5+...+(2x+1)} = 201 \cdot 10\,055$;
   b) $\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+...+\frac{1}{1+2+3+...+x}=\frac{2010}{2011}$.

2. a) Hozd egyszerűbb alakra:
   $$\left[\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2011}+\frac{1}{\left(7-4\sqrt{3}\right)^{2010}}\right]\cdot\frac{\left(14-8\sqrt{3}\right)^{2010}}{2^{2010}}+4\sqrt{3};$$
   b) Ha n és a természetes számok, igazold, hogy $\sqrt{n^4+a(a+n)(a+2n)(a+3n)}$ szintén természetes szám!

3. Az $ABCDEFGH$ kockában $AC \cap BD = \{K\}$, $AG \cap EC = \{J\}$, $I \in (BC)$ úgy, hogy $[BI] \equiv [IC]$.
   a) Számítsd ki az $\left(\widehat{IJ, AH}\right)$ mértékét és az $\left(\widehat{EKG}\right)$ szinuszát!
   b) Igazold, hogy $IJ \parallel (AHC)$ és $EK \cdot AC = AG \cdot AE$!

4. Az $ABCD$ tetraéderben E az AB, F az AC, G az AD, H a BC, I a DC és J a BD szakasz felezőpontja, $EH \cap BF = \{K\}$ és $EJ \cap BG = \{L\}$.
   a) Ha $EFHB$ és $EGJB$ téglalapok, igazold, hogy $AB \perp DC$!
   b) Igazold, hogy $LK \parallel (ADC)$!
   c) Ha $LK = 4$ cm, számítsd ki a DC szakasz hosszát!
   d) Igazold, hogy FJ, EI és GH összefutó egyenesek!

Szőcs Péter