PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

XVII. Bolyai János Emlékverseny

– 2009.12.12 –

V. osztály

1. Keresd meg azokat az *a*, *b* és *c* számjegyeket, amelyek teljesítik a következő feltételeket:
$$\overline{aa}+\overline{ab}+\overline{bb}+\overline{ba}=\overline{abc} \text{ és } b=a+c\,!$$

2. Egy táblára felírtuk az 1, 2, 3, …, 2 008 számokat növekvő sorrendben. Anna letörli az első számot, Béla a maradéksorból a másodikat, Anna az újabb maradéksorból a harmadikat, Béla a maradéksorból a negyediket, és így tovább, amíg a sor végére nem érnek.
   a) Melyik az utolsó letörölt szám?
   b) Ki törölte le?
   c) Mely számok maradnak a táblán?
   d) Melyik szám lesz a megmaradtak között a 777. szám?

3. a) Legyen $n=100\cdot 99-99\cdot 98+98\cdot 97-97\cdot 96+\ldots+4\cdot 3-3\cdot 2+2\cdot 1$. Számítsd ki n értékét, és igazold, hogy $2n$ teljes négyzet!
   b) Legyen $x=[3^{121}:9^{60}+(5^3)^2:(5^2)^2]:2^2$ és
   $y=10^2:\{23+34:[(2\cdot 3^2)^2:18-17^0:1^{2009}]\}$.
   Igazold, hogy $x^{2009}+2008^y$ nem teljes négyzet!

4. Legyen $A=5+4\cdot 5+4\cdot 5^2+4\cdot 5^3+\ldots+4\cdot 5^{99}$, $B=25^{25}\cdot(5^{25})^2$ és $C=16^{25}$.
   a) Rendezd a számokat növekvő sorrendbe!
   b) Hány számjegyből áll a $C^2\cdot A\cdot B$ szám?

Szőcs Péter

PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

XVII. Bolyai János Emlékverseny

– 2009.12.12 –

VI. osztály

1. Határozd meg az n természetes számot a következő egyenlőségből:
$$\left[\left(\frac{5}{7}+\frac{55}{77}+\frac{555}{777}\right):\frac{5}{7}-\frac{111}{500}:\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{50}+\frac{1}{500}\right)\right]^n=512.$$

2. Határozd meg azokat a p és q prímszámokat, amelyekre teljesül a $p+p\cdot q=2\,010$ egyenlőség!

3. Határozd meg az $a+b$ összeg legnagyobb értékét, ha tudod, hogy az a egy kétjegyű természetes szám, b egy háromjegyű természetes szám, valamint az a és b számok legkisebb közös többszöröse 2 010.

4. Legyen M az AB szakasz egy tetszőleges pontja, ahol $AM < MB$, E és F pedig az AM és MB szakaszok felezőpontjai. Ha O az AB szakasz felezőpontja, igazold, hogy $[ME]\equiv[OF]$!

5. Az $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ és $\widehat{COD}$ egymás melletti szögek. Legyen (OE,(OG és (OF az $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ és $\widehat{COD}$ szögfelezője. A $\widehat{GOF}$ mértéke számtani közepe az $\widehat{AOB}$ és $\widehat{BOC}$ mértékének. Igazold, hogy (OG az $\widehat{EOF}$ szögfelezője!

Molnár Klára

PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

XVII. Bolyai János Emlékverseny

– 2009.12.12 –

VII. osztály

1. Adottak az $x = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{2003\cdot 2004}$ és
   $y = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{6\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{2004\cdot 2005}$ számok.
   a) Igazold, hogy $x > y$!
   b) Számítsd ki az x és y számtani közepét!
   c)
   d) Igazold, hogy $y < \frac{1002}{2005} < x$!

2. Az ABC egyenlő szárú háromszögben $[AB] \equiv [AC]$, $m(\widehat{BAC}) = 120°$ és D a BC oldal felezőpontja. A (DA félegyenesen vedd fel az M pontot úgy, hogy $AM = 2DA$. Igazold, hogy
   a) $AC \perp BM$;
   b) az $MBC_{\triangle}$ egyenlő oldalú!

3. Legyen O az $ABC_{\triangle}$-nek egy belső pontja, M és N pedig az O pontnak az AC és BC oldalak felezőpontja szerinti szimmetrikusai. Igazold, hogy az $ABNM$ négyszög egy paralelogramma!

4. a) Külön papírlapokra felírtuk a páratlan természetes számokat 1-től 500-ig. Húzunk egy számot. Mi a valószínűsége annak, hogy a kihúzott szám négyzetszám legyen? Hát annak, hogy köbszám legyen?
   b) Valamely hatjegyű szám utolsó számjegye 7. Ha letöröljük a szám végéről a 7-est, és ezt a többi számjegy elé írjuk, akkor 5-ször nagyobb számot kapunk. Melyik ez a szám?

Szőcs Péter

PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

XVII. Bolyai János Emlékverseny

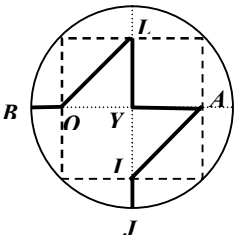
– 2009.12.12 –

VIII. osztály

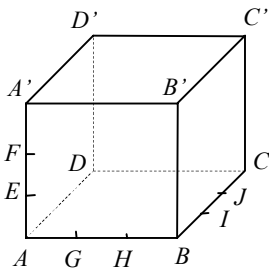
1. Az A *és* B intervallumok esetén $A \setminus B = \left(-\sqrt{2}; -1\right)$, $B \setminus \left(A \cap B\right) = \left(\sqrt{2}; \sqrt{3}\right)$ és $A \cup B = \left(-\sqrt{2}; \sqrt{3}\right)$.
   a) Határozd meg az A és B intervallumokat!
   b) Számítsd ki az $\left(A \cup B\right) \cap \mathbb{Z}$ halmazt!

2. a) Igazold, hogy $\frac{\sqrt{4}+\sqrt{5}}{\sqrt{20}} - \frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{\sqrt{30}} + \frac{\sqrt{4}+\sqrt{6}}{\sqrt{24}} \in \mathbb{N}$!
   b) Határozd meg azokat az x és y valós számokat, amelyekre $\sqrt{x^2 - 2x + 10} + \sqrt{y^2 - 6y + 90} = 12$.

3. Az ábrán látható körbe beírtunk egy négyzetet, és felvettünk két – egymásra merőleges – átmérőt. Tudjuk, hogy az átmérők párhuzamosak a négyzet oldalaival, és a kör sugarának hossza 465 cm. Mekkora a *BOLYAIJ* útvonal hossza?



4. Az ábrán látható *ABCDA'B'C'D'* kockában $AB = 3$ cm, az *E*, *F*, *G*, *H*, *I* és *J* pontok pedig az $[AA']$, $[AB]$, és $[BC]$ éleket 3-3 kongruens szakaszra osztják. Szerkeszd meg az *E* és *F* pontokat tartalmazó – *ABCD* síkkal párhuzamos – síkokat, a *G* és *H* pontokat tartalmazó – *ADD'A'* síkkal párhuzamos – síkokat, az *I* és *J* pontokat tartalmazó – *ABB'A'* síkkal párhuzamos – síkokat!
   a) Hány kocka keletkezett?
   b) Hány 1 cm × 2 cm × 3 cm méretű téglatest keletkezett?
   c) Hány – különböző méretű – téglatest van összesen?
   d) Hány téglatest van összesen?



Simon József