PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

XV. Bolyai János Emlékverseny

– 2007.12.08 –

V. osztály

1. Számítsd ki:

   a) $5^2 \cdot 3^2 - 2^4 \cdot 3 + 7^2 \cdot 5 - 6^3 - 2 \cdot 10^2$;

   b) $3 + 2 \cdot \left(3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{2\,006}\right)$.

2. Adottak az $a = 2^{2\,007} - 2^{2\,006} - 2^{2\,005}$ és $b = 3^{1337} - 3^{1336}$ számok. Melyik szám nagyobb?

3. Két szám különbsége 1843. Ha a nagyobb számot elosztjuk a kisebb számmal, akkor a hányados 19 és a maradék 43. Melyek ezek a számok?

4. Igazold, hogy a következő számok teljes négyzetek:

   a) $25^n + 25^n \cdot 2^3$, ahol $n \in \mathbb{N}$;

   b) $49 + 147 + 245 + 343 + \ldots + 49\,049$.

Szőcs Péter

PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

XV. Bolyai János Emlékverseny

– 2007.12.08 –

VI. osztály

1. Írd növekvő sorrendbe a következő számokat:

   a) $a=\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{3}\right)$, $b=1+\left(\frac{2}{3}\right)^2$ és $c=\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\left[1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]$;

   b) $x=3^{47}-3^{46}$ és $y=2^{72}-2^{71}-2^{70}$.

2. Határozd meg azon számok összegét, melyeket 17-tel osztva a hányados c és a maradék r, 13-mal osztva pedig a hányados r és a maradék c.

3. Adottak az $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$ és $\widehat{DOA}$ olyan egy pont körüli szögek, amelyekre fennállnak a következő egyenlőségek:

$$m\left(\widehat{AOB}\right)=\frac{1}{2}m\left(\widehat{BOC}\right)=\frac{1}{3}m\left(\widehat{COD}\right)=\frac{1}{4}m\left(\widehat{DOA}\right).$$

   a) Számítsd ki az $\widehat{AOB}$ mértékét!

   b) Igazold, hogy az (OC ellentétes félegyenese az $\widehat{AOD}$ szögfelezője!

4. Legyen M az $[AB]$ szakasz felezőpontja, P pedig az $[MB]$ szakasz tetszőleges pontja. Legyen $Q\in[AB]$, úgy, hogy $[PQ]\equiv[PB]$.
   Igazold, hogy $AQ=2\cdot MP$!

Molnár Klára

PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

XV. Bolyai János Emlékverseny

– 2007.12.08 –

VII. osztály

1. Számítsd ki:
$$\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^0+\left(-\frac{1}{2}\right)^1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(-\frac{1}{2}\right)^4\right]:\left(-\frac{1}{2}\right)^5.$$

2. Néhány gyermek meg akar vásárolni egy csónakot. Ha mindegyik 450 lejt adna, akkor még hiányozna 250 lej, ha pedig egyenként 600 lejt adnának, akkor a csónak árának 20 %-ával gyűlne több pénz.
   a) Számítsd ki a csónak árát!
   b) Határozd meg a gyermekek számát!

3. Ha $x, y, z \in \mathbb{Z}$ és $7x-3y+14z=0$, igazold, hogy az $y\cdot(x+2z)$ szorzat osztható 21-gyel!

4. Az *ABCD* paralelogrammában *E* és *F* az *AB* és *AD* oldalak felezőpontjai.
   a) Számítsd ki a *CEF* háromszög és az *ABCD* paralelogramma területének arányát!
   b) Igazold, hogy az *ABCD* paralelogramma átlóinak metszéspontja egybeesik a *CEF* háromszög súlypontjával!

5. Az *ABC* háromszög oldalaira a háromszögön kívül megszerkesztjük az *ABD* és *ACE* egyenlő oldalú háromszögeket, az *A* pont és *BC* egyenes által meghatározott félsíkban pedig a *BCF* egyenlő oldalú háromszöget.
   a) Igazold, hogy az *ADFE* négyszög paralelogramma!
   b) Mi a feltétele annak, hogy az *ADFE* négyszög rombusz legyen?

Simon József

PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

XV. Bolyai János Emlékverseny

– 2007.12.08 –

VIII. osztály

1. a) Igazold, hogy két egymás utáni páratlan egész szám szorzatához 1-et hozzáadva, az eredmény teljes négyzet.

   b) Igazold, hogy 4 egymás utáni egész szám szorzatához 1-et hozzáadva az eredmény teljes négyzet.

2. Tudva, hogy $a,b,c \in \mathbb{R}_+ \setminus \{2\}$ és $a+b+c=2$, igazold, hogy:

$$\frac{ab}{2-c}+\frac{bc}{2-a}+\frac{ac}{2-b} \le 1.$$

3. Határozd meg azokat az a és b racionális számokat, amelyekre fennáll a következő összefüggés:

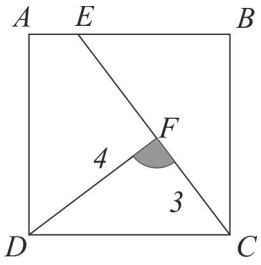
$$\frac{a}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}+\frac{b}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}=1.$$

4. Adottak az A,B,C és D nem egy síkban fekvő pontok. Legyenek M, N, P, illetve Q az $[AC]$, $[BM]$, $[NC]$ illetve $[BP]$ szakaszok felezőpontjai. Igazold, hogy A, N, Q és D egy síkban vannak és $MP \parallel (AQD)$!

5. Jelöljük T_n-nel az n oldalú konvex sokszög alapú hasáb testátlóinak számát. Határozd meg n értékét úgy, hogy fennálljon a következő egyenlőség:

$$T_n + T_{n+1} = T_{n+2}.$$

6. Egy 5 cm oldalhosszúságú négyzet egyik oldalára az ábrán látható módon olyan derékszögű háromszöget szerkesztünk, amelynek befogói 3 cm és 4 cm hosszúságúak. Legyen $CF \cap AB = \{E\}$. Mekkora az AE szakasz hossza?



Molnár Klára