PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

XIV. Bolyai János Emlékverseny

– 2006.12.09 –

V. osztály

1. Számítsd ki:
   a) $\left(3^2-2^3\right)\cdot\left(4^2-2^4\right)\cdot\left(2^5-5^2\right)\cdot\left(2^6-6^2\right)\cdot\left(2^7-7^2\right)\cdot\left(2^8-8^2\right)$;
   b) $\left[5^{100}:\left(5^{7^2}\right)^2\right]\cdot\left[3^3-2\cdot3^2\right]+3\cdot\left(1+2+2^2+2^3+2^4\right)$.

2. Határozd meg az $\overline{ab}$ kétjegyű számot, tudva hogy:
   $$2^{\left(\overline{ab}\right)^2}=8^{57}-4^{85}-2^{169}.$$

3. Igazold, hogy:
   a) $A=2006+2\cdot\left(1+2+3+4+...+2005\right)$ teljes négyzet;
   b) $B=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot...\cdot n+2007$ nem teljes négyzet!

4. Két bokorban 31 veréb pihent. Egy zörejre az elsőről 5 átrepült a másodikra, arról pedig 7 egy közeli magas fára. Ezután az első bokron kétszer annyi veréb maradt, mint a másodikon. Hány veréb pihent eredetileg az egyik és a másik bokron?

Molnár Klára

PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

XIV. Bolyai János Emlékverseny

– 2006.12.09 –

VI. osztály

1. Egy 24 fős osztály tanulóinak $\frac{2}{3}$-a közepesnél nem rosszabb tanuló, $\frac{3}{8}$-a pedig közepesnél nem jobb tanuló. Hány közepes tanuló van az osztályban?

2. Határozd meg azt az $a \in \mathbb{N}$ számot, amelyre

$$a \cdot (a+1) \cdot (a+2) = 3\,360 .$$

3. a) Keresd meg azt a legnagyobb n természetes számot, amelyre a 3 396, 2 131 és 1283 számoknak rendre $4n$-nel, $2n$-nel, illetve n-nel való osztási maradékai 36, 31 és 23.
   b) Határozd meg az előbbi feltételeknek megfelelő legkisebb n természetes számot is!

4. Vedd fel az $(OA$, $(OB$, $(OX$, $(OY$ és $(OC$ félegyeneseket ebben a sorrendben úgy, hogy $(OX$ az $\widehat{AOY}$ és $(OY$ pedig a $\widehat{BOC}$ szögfelezője legyen! Tudjuk, hogy $m(\widehat{BOX}) = 15°$, valamint $\widehat{AOB}$ és $\widehat{YOC}$ pótszögek.
   a) Számítsd ki az $\widehat{AOC}$ mértékét!
   b) Számítsd ki az $\widehat{AOB}$ mértékét!
   c) Igazold, hogy az $\widehat{AOY}$ mértéke az $\widehat{AOC}$ és $\widehat{AOB}$ mértékeinek számtani közepe!

Simon József

PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

XIV. Bolyai János Emlékverseny

– 2006.12.09 –

VII. osztály

1. Számítsd ki:

   a) $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2\,005}\right)$;

   b) $\frac{1-3}{1\cdot 3}+\frac{3-5}{3\cdot 5}+\frac{5-7}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{2\,005-2\,007}{2\,005\cdot 2\,007}$.

2. Határozd meg az a, b, c, d és e természetes számokat, ha tudod, hogy az első három szám egyenesen arányos a 3^{2004}, 3^{2005} és 3^{2006} számokkal, az utolsó három pedig fordítottan arányos ugyanezekkel a számokkal, és $a+b+c+d+e=170$.

3. Egy téglalap egyik átlójának felezőmerőlegese a téglalap hosszabbik oldalát két olyan részre osztja, amelyek közül az egyik ugyanakkora, mint a rövidebb oldal. Mekkora szöget zárnak be a téglalap átlói?

4. Az ABC háromszög $[AD]$ oldalfelezőjét, $(D\in BC)$ meghosszabbítjuk a $[DN]\equiv[AD]$ szakasszal és az $[AB]$ oldalt az $[SB]\equiv[BC]$ szakasszal, $B\in(AS)$. Az $\widehat{ABC}$ szögfelezője a CN egyenest az M pontban metszi. Igazold, hogy:

   a) $ABNC$ paralelogramma;

   b) $BMCS$ paralelogramma.

Molnár Klára

PETŐFI SÁNDOR ISKOLA

XIV. Bolyai János Emlékverseny

– 2006.12.09 –

VIII. osztály

1. a) Ha $[a]$ az a valós szám egész részét jelöli, számítsd ki a következő összeget:
$$[-99{,}1]+[-98{,}1]+[-97{,}1]+\ldots+[-2{,}1]+[-1{,}1]+[-0{,}1].$$
b) Melyek azok az $x\in\mathbb{Z}$ számok, amelyekre $\frac{3x-7}{x+2}\in\mathbb{Z}$?
c) Igazold, hogy $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{12-\sqrt{108}}\in\mathbb{Q}$!

2. a) Írd fel kifejtett alakba a $(4k+1)^2$, $(4k+2)^2$ és $(4k+3)^2$ hatványokat!
b) Igazold, hogy egy teljes négyzet 4-gyel való osztási maradéka nem lehet sem 2, sem 3.
c) Igazold, hogy bármely n természetes szám esetén a $\sqrt{n\cdot(n+1)(n+2)(n+3)+2}$ irracionális szám!

3. Az $ABCDA'B'C'D'$ kockában M az AB, N pedig a BC él felezőpontja. Legyen $AN\cap DM=\{P\}$.
a) Igazold, hogy $D'A\perp AB$!
b) Bizonyítsd be, hogy $D'P\perp AN$!
c) Ha $AB=10$ cm, számítsd ki a $D'P$ szakasz hosszát!

4. Legyen M egy olyan pont, amely nincs az $ABCD$ paralelogramma síkjában. Tudjuk, hogy E, F, K és L rendre az AM, BM, CM és DM szakaszok felezőpontjai. Igazold, hogy:
a) $EFKL$ paralelogramma;
b) az AK, BL, CE és DF egyenesek egy pontban futnak össze;
c) az EF és AB szakaszok felezőpontjai és az M pont kollineárisak!

Szőcs Péter