SZILÁRD ANDRÁS, HAJNALKA CSAPÓ, ÖRS NAGY
KINGA SIPOS, ANNA SOÓS, JUDIT SZILÁGYI

PREDAREA MATEMATICII PRIN METODE BAZATE PE CURIOZITATE ŞI INVESTIGAŢII

EDITURA STÁTUS
MIERCUREA CIUC, 2013

Traducerea: Sándor Koros-Fekete, Zsuzsánna Koros-Fekete
Cristina Blaga, Margit Dénes

Referent ştiinţific: Blaga Cristina
Corector: Doina Baltă

ISBN 978-606-8052-33-5

Publicat de Editura Státus
Director: Birtók József

Tiparul executat la Tipografia Státus
http://www.status.com.ro
Email: office@status.com.ro

Editura Status, Miercurea-Ciuc
Tiparul executat sub comanda nr. 75/2013
la Status Printers - Siculeni

Cartea a fost realizată şi publicată cu sprijinul
Proiectului PRIMAS
(Promoting Inquiry in Mathematics and Science Education)
finanţat de Comisia Europeană
şi de partenerul proiectului PRIMAS în România,
Universitatea Babeş-Bolyai

Pagina web oficială a proiectului PRIMAS:

http://www.primas-project.eu

Pagina web în limba română:

http://www.primas-project.ro

Instituţiile partenere ale proiectului PRIMAS:

- Pädagogische Hochschule Freiburg, Germania
- Universitatea in Geneva, Elveţia
- Universitatea din Utrecht, Olanda
- Universitatea din Nottingham, Regatul Unit al Marii Britanii şi al Irlandei de Nord
- Universitatea din Jaén, Spania
- Universitatea „Constantin Filozoful” din Nitra, Slovacia
- Universitatea din Szeged, Ungaria
- Universitatea Tehnică din Cipru, Cipru
- Universitatea din Malta
- Universitatea din Roskilde, Danemarca
- Universitatea din Manchester, Regatul Unit al Marii Britanii şi al Irlandei de Nord
- Universitatea Babeş-Bolyai, România
- Universitatea Sør-Trondelag, Norvegia
- Universitatea din Kiel, Germania

CUPRINS

Autorii capitolelor cărţii:

1. Prolog – Szilárd András
2. Introducere – Judit Szilágyi
3. Prea puţine biciclete – Szilárd András
4. De la probleme de turnare la ecuaţiile diofantice liniare – Örs Nagy, Szilárd András
5. Beţe de chibrituri şi pătrate – Szilárd András, Kinga Sipos
6. Operaţii de bază – Szilárd András
7. Cifre şi configuraţii – Szilárd András
8. Traversarea deşertului – Szilárd András
9. Triunghiuri podare – Szilárd András
10. Cutii – Örs Nagy, Szilárd András
11. Scheme de dobândă şi funcţia exponenţială – Hajnalka Csapó, Szilárd András
12. Algebra liniară într-o abordare centrată pe probleme şi investigaţii – Judit Szilágyi, Szilárd András
14. În lumea probabilităţilor – Anna Soós
15. Cubul puzzle Happy Cube – Szilárd András, Andrea Bartos Kocsis, Kinga Sipos, Anna Soós

Activităţile cu elevii au avut loc pe de o parte în taberele de sprijinire a talentelor organizate de Asociaţia SimpleX şi în cadrul taberei organizate de Uniunea Cadrelor Didactice Maghiare din România în Centrul Educaţional Teleki, iar pe de altă parte la Liceul Teoretic „Márton Áron” din Miercurea Ciuc şi la Liceul Teoretic „Báthory István” din Cluj. Toate capitolele cărţii au fost testate cu studenţii Universităţii Babeş-Bolyai, câteva teme fiind abordate şi cu ocazia formărilor continue a profesorilor în cadrul universităţii. Dorim să mulţumim studenţilor noştri care au participat la activităţi, precum şi colegilor noştri, fără sprijinul cărora o parte a activităţilor ar fi fost imposibil de realizat. Adresăm mulţumirile noastre deosebite lui Géza Dávid şi lui Csaba Tamási pentru sprijinul acordat în organizarea activităţilor şi în pregătirea materialelor.

1. Prolog

Învăţământul este în criză, printre altele din cauza crizei financiare globale, ce influenţează toate domeniile vieţii, inclusiv învăţământul. O altă cauză o constituie reglementările haotice şi deseori contradictorii ale politicii, care ar trebui să asigure buna funcţionare a sistemului de învăţământ, dar care de multe ori degradează şi dezintegrează sistemul, făcând imposibilă funcţionarea proceselor de dezvoltare de lungă durată. Învăţământul este în criză şi pentru că se încearcă adaptarea unor modele economice care, pe de o parte, consideră că rezolvarea problemelor esenţiale ale învăţământului nu este un proces ce trebuie optimizat, şi care, pe de altă parte, au eşuat spectaculos şi în domeniul economiei. Pe lângă acestea, intervine şi asigurarea calităţii, o aberaţie globalizată, având în vedere că întotdeauna asigură numai un nivel minim de calitate şi nu însăşi calitatea, care se situează la nivel superior. Am mai putea aminti că alinierea la tendinţele internaţionale provoacă contradicţii la nivel local. Problema este însă mult mai adâncă, mai complexă şi mai nuanţată – de fapt nici nu există acolo unde o sesizăm. Noi vedem numai consecinţele problemei, manifestarea ei în interiorul sistemului. A confunda această manifestare cu problema însăşi este o greşeală gravă.

În privinţa conţinutului, învăţământul s-a concentrat întotdeauna asupra trecutului, încercând să reevalueze şi să păstreze înţelepciunea empirică acumulată de-a lungul timpului. Astfel, rolul fundamental al profesorilor este păstrarea şi îngrijirea tradiţiilor. În acelaşi timp, şcoala trebuie să facă faţă cerinţelor actuale ale societăţii. Să nu uităm că extinderea Imperiului Roman a dus la extinderea accentuată a sistemului şcolar instituţional, care a constituit baza sistemului de învăţământ tradiţional, în mod evident corespunzător necesităţilor Imperiului. Mai târziu, în şcolile bisericeşti, învăţământul clasic a fost completat cu doctrinele religioase, iar odată cu apariţia statelor naţionale au fost integrate în învăţământ ideile şi aspiraţiile naţionale. În societăţile de după Iluminism, sistemul necesităţilor sociale şi obiectivul izvorât din tradiţii s-au despărţit tot mai mult. În societăţile moderne aceste două principii sunt complet separate. Din acest motiv au loc discuţii tot mai aprinse privind materiile care trebuie predate, precum şi metodele utilizate. Mai mult, în zilele noastre, centrul de greutate al dezbaterilor s-a deplasat atât de mult, încât subiectul disputelor îl constituie competenţele care ar trebui dezvoltate în şcoală. Bineînţeles, acest principiu are în vedere doar satisfacerea nevoilor sociale, deoarece competenţele cheie au exclusiv motivaţii sociale. Printre aceste competenţe nu apare aprecierea, gândirea aprofundată, transmiterea inteligentă a tradiţiei şi eventual reevaluarea ei (ca să nu mai evocăm competenţa morală, competenţa responsabilităţii şi multe altele, pe care nu le vom aborda aici). Se pare că societatea – sau mai degrabă economia de piaţă – nu are nevoie de aceste competenţe. Prin urmare, scrisul şi cititul par a fi necesare de fapt doar pentru a nu rămâne surzi şi muţi în faţa campaniilor publicitare, să fim capabili de a ne adapta la noile trenduri şi să putem percepe mesajul scris, măcar pe calea etichetării sociale. Poate că ar costa prea mult sau ar fi prea poetic să fim vizionari şi îndrumaţi din interiorul nostru, nu din exterior. Într-un cuvânt, ni se cere ca funcţiile noastre de bază, necesare pentru a fi dirijaţi din exterior, să fie activate. Acest lucru reiese foarte bine din terminologia internaţională, unde denumirile instruirii derivă, în cele mai multe cazuri, din verbul englez *to train* care, în adevăratul sens al cuvântului, este de fapt mai aproape de dresaj, decât de învăţare sau educare. În mod firesc acest lucru se reflectă şi în şcoli, în întregul sistem de învăţământ şi în exigenţele cu care se confruntă. Deoarece şcoala nu poate nici ea să slujească în acelaşi timp la doi stăpâni, mai ales dacă unul dintre ei este Buddha Manjushri, iar celălalt Mara, situaţia existenţială actuală devine din ce în ce mai gravă, haosul şi întunericul spiritual o deformează într-atât, încât în majoritatea cazurilor trebuie să decidem dacă îl slujim pe Lucifer sau pe Belial, eventual să alegem între Lucifer şi Leviatan. În acelaşi timp, în lumea noastră modernă – accelerată, împânzită de cabluri şi digitalizată – cunoştinţele şi convingerile individuale nu mai au importanţă. Pentru societate şi mai ales pentru piaţă este mult mai important ca oamenii să devină buni consumatori. Numai că în societatea modernă, bazată pe cunoştinţe, nimeni nu poate deveni un bun consumator fără cunoştinţe tehnice şi informatice corespunzătoare. Astfel, a apărut necesitatea ca predarea matematicii, informaticii şi a ştiinţelor naturii să fie dezvoltată pentru a corespunde întru totul scopurilor mai sus amintite. Altfel spus, toată lumea trebuie să ajungă să se descurce în mod eficient la nivel de consumator şi utilizator. De obicei, această exigenţă este susţinută cu toate argumentele şi pretextele posibile, ca toate lucrurile care necesită o explicaţie. Există două motivaţii larg acceptate: pe de o parte, raporturile şi studiile realizate pentru Comisia Europeană, pe de altă parte, cercetările psihologiei. Potrivit acestora, o parte tot mai mică a populaţiei este dispusă să-şi asume eforturile necesare pentru înţelegerea ştiinţelor exacte. Pe de altă parte, nu există transfer automat între cunoştinţele matematice/ştiinţifice abstracte şi aptitudinea de a le aplica în practică. Astfel nu există altă posibilitate decât cea de a preda matematica şi ştiinţele naturii concentrându-se asupra aplicaţiilor. Aceasta coincide cu recomandarea majorităţii forurilor profesionale şi a Comisiei Europene, precum şi cu aşteptările elevilor. Singura problemă este că motivaţia nu este destul de puternică şi, tocmai din acest motiv, se poate preconiza că problema reală nu se va putea rezolva nici prin introducerea metodei centrate pe aplicaţii. În dezvoltarea matematicii, aplicaţiile au avut întotdeauna un rol de forţă motrice centrală. Cealaltă forţă motrice, însă, este tendinţa intrinsecă a matematicii spre claritate şi autonomie. Cele mai multe noţiuni şi teorii exacte, formale, ale matematicii au fost mult devansate de raţionamentele intuitive, euristice, folosite pentru rezolvarea problemelor. Astfel, înţelegerea funcţionării matematicii cuprinde de fapt şi cristalizarea raţionamentelor intuitive mai puţin sau deloc formalizate. Acest lucru poate fi transmis atât prin exerciţii practice, aplicabile în viaţa cotidiană, cât şi într-un mediu complet abstract. Totodată, detaliile esenţiale pot rămâne ascunse atât pe parcursul rezolvării exerciţiilor centrate pe aplicaţie, cât şi în cadrul discutării problemelor abstracte.

În acest volum prezentăm câteva dintre activităţile, materialele şi ideile noastre de predare pe care le-am folosit în cadrul proiectului FP7 „Promoting Inquiry in Mathematics and Science Education Across Europe". Acest proiect (şi celelalte proiecte europene la care am participat) ne oferă posibilitatea de a face accesibile şi eventual aplicabile ideile şi experienţele noastre neformalizate cu privire la predarea matematicii. Scopul nostru este să punem în evidenţă o abordare a matematicii care – dincolo de proiecte, rapoarte, pretexte şi motivaţii – să considere matematica drept una din activităţile fundamentale ale omului.

2. Introducere

În ultimul deceniu ne confruntăm cu un fenomen foarte îngrijorător. În secolul tehnologiilor, tot mai puţini tineri arată interes pentru matematică şi ştiinţele naturii. În timp ce numărul persoanelor cu diplomă universitară este în creştere, în Europa şi în ţara noastră, scade numărul celor care îşi aleg o carieră în domeniul matematicii sau al ştiinţelor naturii; în general sunt tot mai puţini cei ce doresc să se dedice unei cariere ştiinţifice oarecare. Situaţia a fost analizată în detaliu la nivel european de mai multe comisii de specialişti.

Conform raportului Gago prezentat în aprilie 2004, la Bruxelles, în Uniunea Europeană existau $5,7$ cercetători la 1000 de locuitori, iar în ţările care aşteptau aderarea, acest număr era de $2,6$ cercetători la mia de locuitori. Susţinerea dezvoltării economice şi tehnologice necesită o medie de cel puţin 8 cercetători la mia de locuitori, ceea ce înseamnă că Europa are nevoie de încă o jumătate de milion de oameni care ar trebui să lucreze în cercetare. Situaţia este deosebit de gravă în domeniul ştiinţelor naturii, în special în cel al fizicii şi al matematicii. În unele ţări europene, nu numai numărul cercetătorilor, ci şi cel al profesorilor este insuficient în aceste domenii. În alte ţări, efectivul este acum suficient, dar în viitorul apropiat nu va mai fi de ajuns. Conform studiului MAPS (Mapping Physics Students in Europe) din raportul Gago, în perioada $1997 - 2002$, în Europa, numărul absolvenţilor facultăţilor de fizică a scăzut cu 17%. Raportul analizează un număr mare de cauze şi face propuneri pentru îmbunătăţirea situaţiei. În legătură cu predarea acestor materii, unul dintre factorii importanţi, ce determină acest fenomen, este următorul: predarea matematicii şi a ştiinţelor naturii în şcoli se desfăşoară *într-o lume aparte*, care nu poate ţine pasul cu dezvoltarea ce are loc în domeniile ştiinţifice. Elevii consideră că acest mod de predare este prea abstract, fiindcă încearcă să transmită idei esenţiale fără un fundal corespunzător constituit din experimente, observaţii şi interpretări. Predarea este mult prea formală, în consecinţă nu trezeşte suficient atenţia şi interesul elevilor. Majoritatea elevilor consideră predarea irelevantă şi greu de înţeles.

Raportul Rocard (Science Education Now) din 2007 confirmă constatările raportului anterior şi chiar constată o agravare a situaţiei. O propunere importantă a acestui raport este aducerea în prim-plan a predării bazate pe investigaţie. Autorii raportului înţeleg prin învăţare bazată pe investigaţie un proces care urmăreşte dezvăluirea problemelor, analiza experimentelor, găsirea alternativelor, planificarea unor mici cercetări, formularea ipotezelor, adunarea informaţiilor, construirea modelelor şi formularea unor argumente coerente (Lim, Davis, Bell 2004). Comunitatea profesorilor de matematică foloseşte denumirea de *învăţare centrată pe probleme* pentru metoda prin care predarea începe cu o problemă pentru a cărei rezolvare elevul de obicei are toate cunoştiinţele necesare. Pe de altă parte, în pedagogia generală, acelaşi termen (PBL - Problem Based Learning) este folosit pentru situaţiile în care predarea începe cu o problemă, iar pentru rezolvarea ei elevul trebuie să-şi însuşească cunoştinţe corespunzătoare (deci în momentul formulării problemei elevul nu are toate cunoştinţele necesare rezolvării problemei). Învăţarea bazată pe curiozitate şi investigaţie este tot o abordare centrată pe probleme (în sensul pedagogiei generale), cu următoarele specificităţi:

- problemele pot să nu fie formulate dinainte (deci putem avea numai un context, o situaţie problemă sau o sarcină practică) şi astfel formularea unor probleme concrete legate de context îi revine elevului;
- este posibil ca instrumentele, cunoştinţele, informaţiile necesare rezolvării să nu fie la îndemâna elevilor (nici măcar parţial, cel puţin la prima vedere);
- se pune un accent mult mai mare pe formularea ipotezelor, a conjecturilor, pe investigarea diferitelor posibilităţi, pe experimente (abstracte, numerice sau de orice fel).

Raportul Miclea din 2007, privitor la situaţia sistemului de învăţământ românesc, abordează de asemenea problema amintită în rapoartele de mai sus. Numărul publicaţiilor ştiinţifice raportat la numărul de locuitori denotă o performanţă de 11 ori mai mică în România faţă de media UE, de cinci ori mai mică faţă de Ungaria şi de două ori mai mică faţă de Bulgaria. Indicele capacităţii de inovaţie în România în anul 2006 a fost de două ori mai mic faţă de Bulgaria, de trei ori mai mic faţă de Ungaria şi de cinci ori mai mic faţă de media UE, şi prezenta cea mai pronunţată tendinţă descrescătoare printre ţările evaluate. Raportul Miclea consideră şi el ca una din cauze starea actuală a sistemului învăţământului şi propune transformarea radicală a acestuia. Pe lângă mai multe probleme importante de rezolvat, un rol deosebit de important se acordă predării bazate pe competenţele elevilor. Conform raportului, curriculumul actual este supraîncărcat şi irelevant din punctul de vedere al pieţei muncii. Comunicarea informaţiilor devansează în mod absolut dezvoltarea competenţelor care ajută la rezolvarea problemelor. Nu se ştie ce fel de cunoştinţe aşteptăm de la un tânăr absolvent de liceu. Toate acestea duc la un învăţământ fără perspectivă şi la o evaluare internă care nu oglindeşte absolut nimic. Iar elevii au tot mai puţin respect pentru un sistem de învăţământ, care refuză modalităţile actuale de producere şi de difuzare a cunoaşterii. Toate acestea reies şi din diferitele evaluări la nivel european. În cadrul evaluărilor PISA şi TIMSS din 2003, România se afla pe locul 34 între cele 42 de ţări examinate, fiind în urmă faţă de media internaţională în privinţa tuturor competenţelor evaluate. La evaluarea din 2010, România se afla pe ultimul loc printre tările UE, cu toate că la Olimpiada Internaţională din 2009 echipa României a fost pe locul 3 printre ţările UE şi pe locul 13 în clasamentul neoficial general. Aceste rezultate arată o discrepanţă foarte mare între nivelul mediu al elevilor şi rezultatele obţinute de elita domeniului.

Toate acestea arată că situaţia deficitară a predării matematicii şi ştiinţelor naturii pe plan mondial este şi mai gravă în ţara noastră. În aceste condiţii, fiecare profesor de matematică ar trebui să se gândească şi să găsească modalităţi cu ajutorul cărora aceste probleme ar putea fi diminuate. Există foarte mulţi factori care depind mai ales de deciziile societăţii şi, în special, de cele ale politicienilor. Această situaţie poate fi influenţată şi ea, într-o oarecare măsură, cu o intervenţie unitară şi bine susţinută, dar pentru aceasta ar trebui să ştim exact şi în mod unitar, *ce vrem să obţinem*. Ceea ce putem face şi trebuie să facem este schimbarea practicii de predare astfel încât să devenim parteneri adevăraţi ai elevilor noştri în procesul de învăţare şi să găsim o soluţie durabilă la problemele lor, cauzate de schimbarea condiţiilor de viaţă. În timpul predării ne confruntăm cu probleme cum sunt:

- dificultăţi tot mai mari la înţelegerea textelor;

- lipsa din ce în ce mai accentuată a capacităţii de abstractizare;

- limbajul tot mai sărac şi, prin aceasta, sărăcirea vieţii afective şi intelectuale;

- pragul de excitabilitate tot mai ridicat din cauza expunerii la o stimulare continuă provenită dintr-o multitudine de surse.

Elevii au nevoie de impulsuri mai puternice pentru a li se capta atenţia şi pentru a deveni participanţi activi ai procesului de învăţare. Pentru realizarea acestui scop, trebuie să folosim metode variate, în primul rând cele care asigură participarea activă a elevilor la orele de predare. Trebuie să fim capabili să antrenăm elevii să reacţioneze în mod activ la impulsurile primite. De altfel, semnificaţia cuvântului „competenţă”, foarte des folosit în ultimul timp, este chiar aceasta: îndemnul interior al individului de a răspunde activ la provocările unei situaţii – deci nu este sinonim cu cunoaşterea şi nici cu capabilitatea, le cuprinde pe amândouă, dar nu este identic cu ele (Blomhøj şi Jensen, 2003).

Predarea bazată pe curiozitatea elevilor, pusă în evidenţă şi în raportul Rocard, este o metodă care ar merita folosită cu regularitate în procesul de predare. Astfel competenţele ar putea fi dezvoltate în mai mare măsură faţă de cunoştinţele simple. Rădăcinile acestei metode sunt aceleaşi cu cele ale predării centrate pe rezolvarea de probleme. Dacă analizăm concepţia lui Erich Wittmann referitoare la dezvoltarea capacităţilor de rezolvare a problemelor, observăm că aceasta este aproape identică cu cea expusă în raportul Rocard. Erich Ch. Wittmann susţine că următoarele zece condiţii sunt esenţiale pentru dezvoltarea aptitudinii de rezolvare a problemelor:

1. achiziţia cunoaşterii prin predare şi învăţare bazate pe descoperire;
2. stimularea gândirii divergente la elevi (formulări diferite, abordarea problemei din direcţii multiple, conexiuni între diferite domenii ale matematicii, sinteza metodelor etc.);
3. reducerea aplicării exclusive a raţionamentelor automatizate;
4. examinarea problemelor deschise (fără întrebări directe, cu mai multe posibilităţi de a formula problema, mici posibilităţi de cercetare etc.);
5. elevii trebuie încurajaţi să formuleze singuri probleme;
6. elaborarea unui *limbaj* care să permită elevilor exprimarea ideilor proprii;
7. stimularea argumentelor intuitive, a conjecturilor (un pas mic, dar făcut în mod autonom valorează mai mult decât *fotografierea* unui raţionament prezentat.);
8. învăţarea strategiilor euristice;
9. dezvoltarea unei atitudini constructive faţă de greşeli;

10. încurajarea discuţiilor, reflecţiilor, argumentaţiilor.

De altminteri, merită să examinăm natura însăşi a problemei. După György Pólya: „Avem o problemă, deci înseamnă că, în mod conştient, căutăm o activitate corespunzătoare pentru a atinge un scop clar formulat, dar inaccesibil în mod direct. A rezolva o problemă înseamnă a găsi activitatea corespunzătoare. Rezolvarea problemelor, gândirea determinată şi căutarea mijloacelor pentru atingerea scopului dorit sunt cele mai frecvente activităţi umane.”

Alan H. Schoenfeld, definind noţiunea de problemă, nu caută *starea de problemă* în complexitatea sarcinii sau a întrebării: „În definirea noţiunii de problemă, dificultatea constă în faptul că procesul de rezolvare a problemei depinde foarte mult de persoana care efectuează rezolvarea. Există exerciţii a căror soluţionare necesită un efort serios de la unii elevi, iar pentru alţii înseamnă exerciţii simple, de rutină, iar pentru un matematician sunt nişte trivialităţi, date fiind cunoştinţele de care dispune. În consecinţă, faptul că un exerciţiu reprezintă sau nu o problemă nu constituie un atribut esenţial al exerciţiului, ci mai degrabă caracterizează relaţia între individ şi exerciţiu.”

Definiţia lui Pólya evidenţiază clar originea comună a capacităţii de rezolvare a problemelor şi existenţa competenţelor, iar definiţia lui Schoenfeld demonstrează faptul că situaţia de problemă este diferită de la un individ la altul. Cu toţii simţim că ne aflăm într-o oarecare situaţie problemă când trebuie să îndeplinim sarcini care necesită mai multe instrumente decât cele disponibile, deci trebuie să găsim instrumente noi. Introducerea pe această cale a unei noţiuni noi sau a unui instrument nou (atunci când acest lucru este posibil) ar fi în mod sigur mai interesant pentru elevi decât o simplă comunicare.

În predarea matematicii centrate pe probleme apare imediat chestiunea adaptării şi a modelării. În ultimii 50 de ani, în multe ţări, întrebarea a fost mereu: ce să predăm – matematică pură sau matematică aplicată? respectiv: în ce măsură să combinăm cele două aspecte? Acul balanţei s-a înclinat ori spre una, ori spre alta, în funcţie de predominanţa momentană a unei tendinţe sau a alteia. În ultimele decenii s-au făcut studii în această direcţie, în mai multe ţări europene (Danemarca, Olanda, Germania, Suedia), prezenţa activităţilor de modelare în predarea matematicii fiind considerată din ce în ce mai necesară. Acest lucru este evidenţiat de necesitatea integrării matematicii în activităţile celorlalte domenii ale vieţii. Cum se realizează această integrare prin aplicare şi modelare? Atât aplicarea cât şi modelarea creează o legătură între matematică şi realitate. *Modelarea* reprezintă o legătură în direcţia lume exterioară → matematică. Atunci când modelăm, ne aflăm în lumea exterioară şi încercăm să găsim în lumea matematicii un răspuns la întrebarea: „Unde aş putea găsi un instrument matematic care să mă ajute în rezolvarea acestei probleme?" *Aplicarea* reprezintă o legătură având direcţia matematică → lumea exterioară. În acest caz, ne aflăm în lumea matematicii şi căutăm răspuns la întrebarea: „Unde aş putea folosi acest instrument în afara matematicii?"

Marea majoritate a didacticienilor matematicii sunt de acord că modelarea are un rol foarte important în predarea matematicii. Există două concepţii: prima consideră că modelarea este importantă pentru predarea însăşi; în această concepţie, modelarea apare ca un instrument ce poate facilita şi susţine predarea matematicii ca obiect de studiu; cealaltă concepţie consideră că matematica trebuie predată astfel încât să dezvoltăm competenţe care ajută în aplicarea matematicii şi în crearea modelelor. În şcoala generală această dualitate este un lucru firesc, fiindcă amândouă aspectele sunt foarte importante şi trebuie folosite în predare fără a pronunţa cuvântul „model". Trebuie să creăm legătura între lumea matematicii şi lumea copilului, trebuie să-l învăţăm să folosească matematica în diferite contexte şi situaţii, trebuie să-i arătăm că oriunde se poate întâlni cu matematica.

Conceptul de *aplicaţie şi modelare pentru învăţarea matematicii* are ca punct de pornire următoarele aspecte:

a) trebuie să dovedim elevilor că oamenii folosesc într-adevăr matematica din mai multe motive şi în mai multe scopuri – astfel, elevii vor avea o imagine mai bogată despre natura şi rolul matematicii;

b) e necesar să arătăm că învăţarea matematicii înseamnă formarea unor atitudini şi a unor idei mult mai generale decât conţinutul matematic studiat.

Conform celui de-al doilea concept:

a) unul dintre scopurile predării şi învăţării matematicii este înzestrarea elevilor cu capacitatea de a folosi matematica dincolo de cadrul formal şi abstract al matematicii;

b) aplicarea matematicii în afara cadrului abstract se face întotdeauna prin modele matematice şi prin modelare.

În diversele sisteme şcolare, apare din când în când (la noi încă mai persistă) concepţia potrivit căreia dacă cineva a învăţat *matematică pură* într-un mod corect şi eficient, atunci va fi capabil să aplice matematica în alte domenii şi contexte, fără a mai fi pregătit în acest sens. Cercetările recente au arătat, însă, că nu există transfer automat între cunoştinţele matematice pure şi capacitatea individuală de a folosi aceste cunoştinţe în situaţii care încă nu au fost *matematizate*. Astfel, dacă dorim ca elevii noştri să dispună de competenţe de aplicare şi modelare, ca o consecinţă a culturii matematice însuşite, atunci aplicaţia şi modelarea trebuie să fie prezente în mod explicit în programa de predare a matematicii. Însă, pentru a realiza acest lucru, profesorul trebuie să fie capabil să creeze cadre de învăţare diversificate, să găsească situaţii şi activităţi ce ajută la formarea competenţelor de aplicare şi modelare în diverse situaţii de educaţie, în paralel cu alte competenţe matematice. Aici, însă, profesorul se va confrunta cu probleme legate de organizarea timpului (materialul predat într-un anumit interval de timp), planificarea conţinuturilor (ce să includă, ce fel de modele?), selectarea activităţilor şi a materialelor de folosit, crearea echilibrului corespunzător între aplicaţie şi celelalte activităţi matematice importante, teoretice sau de alt tip. Aşa cum elevul nu este capabil să aplice matematica în situaţii mai dificile, adică să creeze şi să analizeze modele matematice, ca o consecinţă implicită a cunoştinţelor sale de matematică teoretică, nici profesorul nu este capabil – pe baza pregătirii sale de matematician teoretic sau de profesor de matematică în sensul tradiţional – să creeze cadre, situaţii sau activităţi adecvate pentru aplicare şi modelare. Dezvoltarea acestor aptitudini didactice trebuie să fie introdusă în formarea profesorilor şi să devină parte esenţială a formării continue. În acelaşi timp, este important să studiem şi să preluăm experienţele relevante existente în alte ţări.

E de la sine înţeles că învăţământul bazat pe curiozitate şi investigaţie are limitele sale în ceea ce priveşte aplicarea, limite care ies la iveală după o utilizare mai îndelungată şi după efectuarea unor analize (de exemplu, una din problemele măsurării competenţelor este că aceste competenţe nu se dezvoltă în acelaşi timp la diferite persoane, deci faptul că respectiva competenţă nu este încă formată la data evaluării nu înseamnă neapărat că mai târziu nu poate deveni operaţională). O altă problemă este măsura în care metodele euristice şi capacităţile euristice de rezolvare a problemelor pot fi transmise elevilor. Referitor la posibilitatea de predare a euristicii, József Kosztolányi – în lucrarea sa de doctorat, scrisă pe această temă în anul 2000 – ajunge la concluzia că euristica poate fi învăţată doar într-o măsură foarte limitată, dar este foarte important să ne ocupăm de ea, fiindcă predarea unor strategii corespunzătoare, dirijate prin întrebări bine formulate, poate stimula dezvoltarea ulterioară. De altfel, faptul că euristica poate fi predată doar într-o anumită măsură nu înseamnă, bineînţeles, că nici nu trebuie să încercăm s-o predăm.

Ceea ce este sigur şi a fost confirmat de studiile efectuate este că importanţa maximă o are personalitatea celor care aplică metoda şi modul în care o folosesc. Altfel spus, profesorul entuziast, bine pregătit profesional şi din punct de vedere didactic, care are capacităţi bune şi simţul empatiei, nu poate fi înlocuit cu nimic şi, indiferent de metoda pe care o foloseşte, atitudinea lui personală va influenţa în cea mai mare măsură întregul proces de predare.

În acelaşi timp, până şi profesorul cel mai creativ, cu o bună pregătire, are nevoie de ajutor şi de colaborare, de cunoaşterea tendinţelor noi (sau vechi) şi de fertilizarea eforturilor necesare aplicării. De aceea sunt din ce în ce mai importante perfecţionările bine gândite şi realizate prin concentrarea mai mult pe practica pedagogică şi nu pe conţinuturile ştiinţifice, participările şi cooperările în cadrul proiectelor naţionale şi internaţionale.

O altă problemă foarte importantă este situaţia manualelor şi materialelor didactice. Manualele folosite în România seamănă încă prea mult cu nişte cursuri universitare completate cu exerciţii, metoda lor de prezentare foloseşte o structură bazată pe „teoremă - demonstraţie - exemplu”, iar dacă se întâmplă ca unele cărţi să se abată de la acest stil (dacă acest lucru este posibil, având în vedere că manualul trebuie să corespundă criteriilor de evaluare), profesorii obişnuiţi cu stilul tradiţional nu le vor putea folosi – deoarece manualul profesorilor nu există – şi vor opta pentru manualele pe care le cunosc. Este nevoie de un sistem de manuale redactate pe baza unei concepţii diferite, care sprijină predarea matematicii bazată pe investigaţie. Bineînţeles, realizarea acestui obiectiv necesită multă muncă suplimentară din partea autorilor, o mai mare stabilitate în sistemul de învăţământ, cel puţin pentru ca planul de învăţământ să nu se schimbe de la an la an, sau o dată la doi ani, aşa cum ne-am obişnuit în ultima vreme.

Pe marginea unei experienţe. În perioada 2007-2010 Universitatea Babeş-Bolyai şi Liceul Teoretic „Báthory István” din Cluj-Napoca au participat la proiectul european multicultural DQME2 (Developing Quality in Mathematics Education). Proiectul s-a ocupat mai ales cu modelarea matematică şi, în perioada celor trei ani, s-au format colaborări în vederea desfăşurării unor microproiecte tematice specifice. Noi am lucrat împreună cu Suedia şi Danemarca la proiectul Asthma, care s-a dovedit a fi proiectul ce a necesitat aparatul matematic şi de modelare cel mai complex în aceşti trei ani. În afară de Danemarca şi Suedia, două ţări cu experienţe serioase în modelare, numai România şi Ungaria şi-au asumat participarea la proiect, după care participanţii din Ungaria au renunţat la un moment dat.

Problema destinată modelării a fost următoarea:

Marea majoritate a bolnavilor care suferă de astm bronşic sunt trataţi cu teofilină, numită şi dimetilxantină, care este un drog alcaloid din grupul metilxantinelor (ca şi cofeina sau teobromina), prezent de exemplu şi în ceaiul verde. Teofilina intră în componenţa mai multor medicamente (combinat uneori cu cofeina), de cele mai multe ori fiind recomandată pentru tratamentul tulburărilor respiratorii. Modul de administrare cel mai frecvent este administrarea unei doze de D mg la interval (fix) de T ore. Un pacient a primit 60 de mg teofilină intravenos, după care, din două în două ore, s-a măsurat concentraţia teofilinei în sânge. Din rezultatele primite a fost alcătuit următorul tabel:

Timp (ore)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
Concentraţie (mg/l)	10,0	7,0	5,0	3,5	2,5	1,9	1,3	0,9	0,6	0,5

Sarcina noastră a fost să elaborăm un model matematic pentru procesul de absorbţie a teofilinei şi să răspundem la următoarele întrebări pe baza modelului şi a rezultatelor obţinute în urma măsurătorilor:

1. Cum se schimbă concentraţia teofilinei în timp?
2. Cum trebuie fixate valorile D şi T, dacă dorim ca, după câteva injecţii, concentraţia teofilinei să fie între 5 şi 15 mg/l?

3. Cum trebuie fixate valorile D şi T astfel încât să avem încă de la început o concentraţie între 5 mg/l şi 15 mg/l, dacă am început cu o doză S, şi în continuare am administrat o doză D la T ore?

4. Care sunt ceilalţi factori ce trebuie luaţi în considerare?

Să alcătuim modele pentru următoarele cazuri:

I. organismul uman consumă un procent fix p_1 din teofilina aflată în sânge, pe unitate de timp;

II. într-o unitate de timp, un procentaj p_3 ajunge din sânge în ficat; din sânge, respectiv din ficat se absoarbe un procentaj p_1, respectiv p_2 din teofilina prezentă, iar p_4 la sută din teofilina aflată în ficat ajunge înapoi în circulaţia sanguină;

III. într-o unitate de timp, un procentaj fix p_1 al teofilinei din sânge se consumă de organism şi, în urma dozării, o cantitate fixă p de teofilină ajunge în sânge pe unitate de timp (de exemplu, în cazul administrării sub formă de perfuzie sau cu plasturi adezivi);

IV. într-o unitate de timp un procent fix p_3 al sângelui ajunge în ficat, iar din sânge, respectiv din ficat, p_1 la sută, respectiv p_2 la sută din teofilina prezentă se absoarbe, în timp ce p_4 la sută din teofilina din ficat revine în circulaţia sanguină – în timp ce, datorită dozării, o cantitate fixă p de teofilină ajunge în sânge pe o unitate de timp (administrat sub formă de perfuzie sau cu plasturi adezivi).

Pentru a răspunde la aceste întrebări, le-am cerut elevilor să ajusteze modelele la datele existente, folosind analiza de regresie şi să dezvolte (cu ajutorul experimentelor numerice şi/sau al calculelor formale) schemele de dozare cerute. Dat fiind că ne-am confruntat cu o problemă deosebit de complexă, pe lângă elevii de liceu am invitat în echipa noastră şi studenţi din anul I. Înainte de a începe activităţile legate direct de rezolvarea problemei de modelare propriu-zise, a trebuit să organizăm câteva activităţi prin care am asigurat o bază corespunzătoare:

- cu elevii de liceu am avut activităţi pregătitoare pentru noţiunile de bază ale analizei matematice (derivate, ecuaţii diferenţiale), analiza de regresie (estimarea parametrilor, ajustarea curbelor) şi utilizarea unor programe speciale (Excel, Matlab);
- cu studenţii am avut activităţi speciale pentru analiza de regresie şi de utilizare a software-urilor.

Acestea au însumat 10 activităţi pentru elevii de liceu şi 4 activităţi destinate studenţilor. Toate activităţile s-au desfăşurat în mediul şcolar obişnuit. Pentru derularea activităţii de modelare propriu-zise am format 4 grupuri; fiecare grup a primit sarcina de a lucra cu unul din modelele date. Într-un grup au lucrat împreună 3-4 studenţi şi 2-3 liceeni. Fiecare grup a avut un calculator propriu, pe care au putut să execute calculele în Excel. Participanţii au avut la dispoziţie un videoproiector pentru prezentarea rezultatelor. Pe parcursul activităţilor pregătitoare, toţi participanţii au avut ocazia să cunoască modelele (ecuaţiile diferenţiale ce descriu modelele şi soluţiile acestora), dar nu şi întrebările la care trebuia să răspundă la sfârşitul activităţii. Iniţial, durata planificată a activităţii a fost de 3 ore, însă pregătirea şi desfăşurarea prezentărilor au necesitat cinci ore şi jumătate. În acest interval de timp am răspuns la toate întrebările tehnice formulate corect şi precis, fără să influenţăm grupurile de participanţi în proiectarea şi realizarea calculelor (am încercat să respectăm regulile descrise de Tong). La sfârşitul activităţii, fiecare grup a ţinut o prezentare pe baza propriului tabel Excel.

Pentru noi a fost foarte instructiv să urmărim atitudinea echipelor şi modul în care au tratat problema.

Echipa care a lucrat cu primul model a răspuns corect la prima întrebare (au folosit programul de ajustare a curbelor din Excel). O parte a schemelor lor de dozare a fost corectă, dar au dat şi scheme eronate. Tabelul lor nu a conţinut dozele minime şi maxime în cazul unui T fixat, însă în cazul valorilor T corecte doza de medicament calculată de ei s-a încadrat între dozele minime şi maxime corespunzătoare. La un moment dat, au renunţat la determinarea analitică a calculării dozelor şi au recurs la experimentări numerice. Astfel au reuşit să calculeze concentraţia pentru valori T şi D date în momentul kT şi au obţinut mai multe valori pentru care dozările au fost corecte, dar nu au observat valoarea superioară admisă a lui T, aşa că au realizat şi câteva scheme greşite. După o jumătate de oră de acumulare a ideilor, membrii grupului s-au şi apucat de calcule. Pe parcursul celor trei ore de lucru nu au avut nicio întrebare. Prezentarea lor a fost absolut clară, dar din păcate nu a conţinut unele elemente cheie ale fenomenului (periodicitatea asimptotică a fenomenului, necesitatea dozei iniţiale şi efectul acesteia). Cea mai mare problemă pe parcursul întregii activităţi a fost faptul că participanţii nu au reuşit combinarea tehnicilor numerice cu calculele formale şi că au încercat să obţină rezultatele numai prin metode numerice.

Sarcina grupei a doua a fost dificilă, fiindcă ei ar fi trebuit să-şi dea seama că datele existente nu sunt suficiente pentru a da un răspuns corect şi verificabil la întrebările puse. Nu şi-au dat seama că modelul nu poate funcţiona pe baza specificaţiilor şi datelor. Singurul punct de sprijin cu ajutorul căruia ar fi putut controla dozarea dată a necesitat înţelegerea mai profundă a bazei teoretice. Echipa nu a observat această problemă, li s-a părut prea bizar şi neaşteptat că trebuie să schimbe specificaţiile (modelul) pentru a da răspunsuri corecte şi verificabile, deşi înţelegerea mai profundă a modelului matematic ar fi făcut posibilă identificarea problemei. Din toate acestea rezultă că nu au ajuns la un nivel metacognitiv al activităţii lor.

A treia grupă a avut cel mai mare succes. Ei au îmbinat metodele numerice cu metodele simbolice. Au găsit şi valoarea T maximă posibilă şi, prin experimente numerice, au aflat dozele minime şi maxime. Acest grup a pus mai multe întrebări pe parcursul activităţii. De câte ori au întâlnit ambiguităţi sau dacă între membrii grupului nu era consens cu privire la anumite aspecte, au formulat întrebări referitoare la ideile, probleme lor şi au cerut sfaturi. Cred că succesul lor se datorează acestui stil de muncă şi colaborării extrem de eficiente.

Se pare că a patra grupă a avut cele mai slabe rezultate, atât ca timp de lucru cât şi în privinţa răspunsurilor, cu toate că au avut probabil cea mai bună concepţie de rezolvare, pe care însă nu au reuşit s-o implementeze şi nu au cerut ajutor; au observat şi o parte din greşelile comise, dar nu au putut să le corecteze.

Seria activităţilor a luat sfârşit cu numeroase concluzii interesante:

1. Deoarece elevii nu au experienţă în astfel de procedee (problemă reală+modelare+date statistice+simulare pe calculator), au încercat deseori să creeze formule şi în cazuri în care acest lucru nu era posibil. De aici putem trage concluzia că anumite noţiuni matematice (cum ar fi funcţia, funcţia inversă, ecuaţia, soluţia unei probleme) trebuie reexaminate şi din perspectiva aplicaţiilor practice. Utilizarea calculatorului este necesară şi inevitabilă la anumite ore de matematică. Curriculumul din România ar trebui să includă modelarea şi simularea pe computer.

2. Munca în echipă i-a ajutat în mare măsură pe participanţi să evite traseele inaccesibile în timp ce descoperă rezolvarea. Opinia elevilor a fost că nu toţi ar fi fost capabili să ajungă singuri la acelaşi rezultat. Acest lucru confirmă constatarea lui McCartney dintr-un

articol (din 1990) despre necesitatea creşterii timpului destinat modelării, conform căreia aceste activităţi nu sunt eficiente în evaluarea elevilor.

3. Pe parcursul pregătirii activităţii de modelare ne-am dat seama cât de greu este să găseşti profesori dispuşi să colaboreze la astfel de activităţi. Această experienţă ne-a convins că procesul de formare a profesorilor necesită cursuri de modelare şi de predare a matematicii cu ajutorul calculatorului, aceste subiecte trebuie să aibă un rol important şi în formarea continuă a profesorilor.

4. Cea mai importantă concluzie a fost constatarea îngrijorătoare că, pe parcursul unei activităţi de modelare mai complexe, de multe ori se ivesc situaţii în care elevul sau profesorul nu dispune de criterii cu ajutorul cărora şi-ar putea valida modelul sau calculele, ceea ce poate avea consecinţe foarte grave (să ne imaginăm doar o schemă greşită de dozare a medicamentelor în viaţa reală). Tocmai din acest motiv putem să ne ocupăm cu astfel de modele doar dacă avem timp destul pentru a le discuta şi a le corecta în amănunt (aşa s-a întâmplat, de exemplu, în cazul problemei grupului al doilea); în caz contrar, putem ajunge la interpretări greşite cu consecinţe serioase. Deoarece în şcoli timpul avut la dispoziţie este foarte scurt (Nagy, 2007), trebuie să alegem foarte atent problemele de modelare cu care dorim să ne ocupăm, dar în orice caz trebuie să procedăm astfel încât elevul să observe limitele posibilităţilor de aplicare.

Rezolvarea mai detaliată a problemei o găsim în cartea [**1**] sau în articolele [**4**], [**5**]. În capitolele următoare ne vom strădui să prezentăm materiale didactice şi activităţi care (într-o oarecare măsură) pot fi realizate în şcoală, fără pregătire specială. În acelaşi timp, încercăm să scoatem în evidenţă faptul că, în cadrul planului de învăţământ actual, toate capitolele pot fi restructurate în întregime pe baza principiilor predării matematicii bazată pe investigaţie.

CAPITOLUL I

PREA PUŢINE BICICLETE

1. Problema de bază

PROBLEMA 1. Distanţa dintre două localităţi este de 40 de kilometri. Doi copii trebuie să o parcurgă în cel mai scurt timp posibil, în următoarele condiţii:

- au la dispoziţie o singură bicicletă, pe care nu o pot folosi simultan;
- când merg pe jos au viteza $v_1 = 5$ km/h, iar când merg pe bicicletă au viteza $v_2 = 20$ km/h;
- cei doi copii pornesc simultan din acelaşi loc.

Determinaţi lungimea intervalului de timp minim de care au nevoie pentru a ajunge amândoi în cealaltă localitate?

Problema poate fi prezentată şi în cadrul unui context ce poate furniza mai multe oportunităţi pentru înţelegerea fenomenului. Doi biciclişti pleacă într-o excursie, în timpul căreia călătoresc cu trenul până în localitatea A, de acolo se deplasează pe bicicletă până în localitatea B, iar din B se întorc acasă cu trenul. Pe porţiunea dintre A şi B, în punctul C, una dintre biciclete nu se mai poate folosi (şi nu se poate repara), de exemplu pentru că a căzut într-o prăpastie. Distanţa dintre C şi B este de 40 kilometri, distanţa între A şi C este 60 km, iar trenul care i-ar duce acasă din B pleacă peste 5 ore şi jumătate. Pot să ajungă amândoi la timp în B pentru a prinde trenul, dacă nu pot folosi simultan bicicleta?

În cele ce urmează vom analiza această situaţie. Distanţa dată este parcursă pe jos în 8 ore – deci, dacă unul dintre ei merge pe jos, pierde trenul. Pentru ca amândoi să parcurgă distanţa în mai puţin de 8 ore, fiecare trebuie să parcurgă o parte din drum pe bicicletă. Prin urmare trebuie să plece amândoi simultan din C, unul pe jos, celălalt pe bicicletă, iar cel care a plecat cu bicicleta trebuie să o lase undeva pe drum, pentru ca şi celălalt să o poată folosi. Eventual pot împărţi drumul în mai multe părţi şi să facă schimb de mai multe ori. În acest caz, merită studiate distanţele parcurse cu bicicleta şi cele parcurse pe jos. Dacă unul ar abandona bicicleta atunci când este în spatele celuilalt, timpul atingerii obiectivului ar putea fi redus dacă ar mai merge puţin cu bicicleta (şi nu o abandonează). Din această cauză, este evident că, dacă bicicleta nu ajunge în B, timpul de deplasare nu poate fi cel minim. Astfel, dacă notăm prin x distanţa parcursă pe jos de unul dintre biciclişti, el parcurge distanţa $40 - x$ pe bicicletă, în timp ce celălalt parcurge distanţa x pe bicicletă şi distanţa $40 - x$ pe jos. Prin urmare, întreaga distanţă este parcursă în

$$t_1 = \frac{x}{5} + \frac{40-x}{20}, \text{ respectiv } t_2 = \frac{x}{20} + \frac{40-x}{5} \text{ ore.}$$

De exemplu, dacă $x = 10$ km, atunci $t_1 = 3,5$ ore şi $t_2 = 6,5$ ore, deci amândoi ajung la destinaţie după $6,5$ ore. În acest caz unul dintre ei pierde trenul. Dacă $x = 15$ km, atunci $t_1 = 4\frac{1}{4}$ ore şi $t_2 = 5\frac{3}{4}$ ore, deci nici în cazul acesta nu prind amândoi trenul. Dacă $x = 20$ km, atunci $t_1 = t_2 = 5$ ore şi astfel pot ajunge amândoi înainte de plecarea trenului. Continuând experimentul, constatăm că, dacă $x > 20$ km, unul dintre ei parcurge distanţa în mai mult de 5 ore; în plus, observăm că pentru x şi pentru $40 - x$ obţinem un timp identic (dacă $x = 25$ km atunci $t_2 = 4\frac{1}{4}$ ore şi $t_1 = 5\frac{3}{4}$ ore, în timp ce pentru $x = 30$ km, $t_2 = 3,5$ ore şi $t_1 = 6,5$ ore). Cu aceasta am rezolvat problema practică, dar soluţia problemei matematice nu este completă. Pentru aceasta trebuie să demonstrăm că avem nevoie de cel puţin 5 ore (într-un interval de timp mai scurt nu se poate ajunge din C în B). Ar fi bine dacă am rezolva problema în general, adică am găsi timpul minim necesar în funcţie de distanţă şi de cele două viteze. Dacă $x < 20$, atunci

$$\frac{x}{20} < 1 \quad \text{şi} \quad \frac{40-x}{5} > 4,$$

adică în acest fel nu putem decide dacă suma este mai mică sau mai mare decât 5. Pe de altă parte,

$$t_2 = \frac{x}{20} + \frac{40-x}{5} = 8 - x\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{20}\right) = 8 - \frac{3x}{20} > 5,$$

pentru $x < 20$ şi

$$t_1 = \frac{x}{5} + \frac{40-x}{20} = 2 + x\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{20}\right) = 2 + \frac{3x}{20} > 5,$$

pentru $x > 20$. Acest lucru ne arată că cineva care parcurge pe jos mai mult de jumătate din drum va ajunge în B după mai mult de 5 ore, adică cei doi ar avea nevoie de cel puţin 5 ore pentru parcurgerea distanţei de 40 km în condiţiile date. Este evident că una dintre soluţiile posibile este ca unul dintre copii să parcurgă 20 kilometri pe bicicletă şi restul pe jos. Tovarăşul său de drum porneşte pe jos şi după 20 de kilometri continuă drumul pe bicicletă. Aceasta este doar o soluţie posibilă; acelaşi lucru poate fi realizat şi dacă cei doi merg alternativ pe bicicletă şi pe jos mai multe porţiuni mici. Dacă primul copil parcurge 10 km cu bicicleta, o abandonează şi merge 10 km pe jos, atunci va ajunge la jumătatea drumului în $2,5$ ore. În acest timp, celălalt copil parcurge 10 km pe jos, apoi 10 km pe bicicletă, deci şi el va ajunge la jumătatea drumului în $2,5$ ore. Dacă repetă toate acestea şi pe a doua jumătate a drumului, atunci vor ajunge la destinaţie tot în 5 ore. Putem vedea că schimburile pot fi efectuate într-un număr infinit de variante, astfel încât ambii să ajungă la destinaţie în 5 ore.

În vederea clarificării noţiunilor să scriem cu ajutorul simbolurilor matematice timpul minim necesar. Dacă timpul în care copiii parcurg distanţa dată este t_1 respectiv t_2, atunci pentru ca amândoi să ajungă în B, au nevoie de un timp $t = \max\{t_1, t_2\}$. Deci amândoi vor ajunge în B într-un timp

$$t = \max\{t_1, t_2\} = \max\left\{\frac{x}{5} + \frac{40-x}{20}, \frac{x}{20} + \frac{40-x}{5}\right\}.$$

Pentru a determina timpul minim necesar în care este parcursă distanţa dată, trebuie să calculăm expresia

$$\min_{0\le x\le 40} \max\left\{\frac{x}{5} + \frac{40-x}{20}, \frac{x}{20} + \frac{40-x}{5}\right\}.$$

Cu ajutorul raţionamentului de mai sus am demonstrat că

$$\min_{0\le x\le 40} \max\left\{\frac{x}{5} + \frac{40-x}{20}, \frac{x}{20} + \frac{40-x}{5}\right\} = 5.$$

Să repetăm raţionamentul anterior în cazul general, în care vitezele sunt v_1 şi v_2 (de valori neprecizate, ce îndeplinesc condiţia $v_1 < v_2$), iar distanţa este d. Dacă notăm cu x distanţa parcursă pe jos de primul copil, atunci acesta va parcurge pe bicicletă distanţa $d-x$, iar tovarăşul său de drum va parcurge distanţa x pe bicicletă şi $d-x$ pe jos. Astfel, timpul în care parcurg distanţa dată este $t_1 = \frac{x}{v_1} + \frac{d-x}{v_2}$, respectiv $t_2 = \frac{x}{v_2} + \frac{d-x}{v_1}$. Timpul necesar pentru ca amândoi să parcurgă distanţa d este

$$t = \max\{t_1, t_2\} = \max\left\{\frac{x}{v_1} + \frac{d-x}{v_2}, \frac{x}{v_2} + \frac{d-x}{v_1}\right\}$$

şi trebuie să calculăm valoarea expresiei

$$\min_{0\le x\le d} \max\left\{\frac{x}{v_1} + \frac{d-x}{v_2}, \frac{x}{v_2} + \frac{d-x}{v_1}\right\}.$$

Dacă $x \le \frac{d}{2}$, atunci

$$t_2 = \frac{d}{v_1} - x\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right) \ge \frac{d}{v_1} - \frac{d}{2}\frac{v_2 - v_1}{v_1 \cdot v_2} = d\frac{v_1 + v_2}{2v_1v_2}$$

iar dacă $x \ge \frac{d}{2}$, atunci

$$t_1 = \frac{d}{v_2} + x\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right) \ge \frac{d}{v_2} + \frac{d}{2}\frac{v_2 - v_1}{v_1 \cdot v_2} = d\frac{v_1 + v_2}{2v_1v_2}.$$

Prin urmare, valoarea minimă a maximelor t_1 şi t_2 poate fi obţinută cu exactitate în cazul în care $x = \frac{d}{2}$, iar în acest caz

$$t = d\frac{v_1 + v_2}{2v_1v_2},$$

adică viteza medie a celor doi copii calculată pe distanţa d este tocmai

$$v_{\text{medie}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2},$$

adică media armonică a valorilor vitezelor v_1 şi v_2.

Observaţie. Soluţia problemei de mai sus arată că media armonică poate într-adevăr să exprime o valoare medie. Merită amintit şi un alt context, în care valoarea medie se calculează cu ajutorul mediei armonice. De exemplu, dacă o cursă de autobuz parcurge distanţa d de două ori pe zi şi viteza medie în cele două cazuri este v_1, respectiv

v_2, atunci parcurge în total distanţa $2d$ în intervalul de timp $\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}$, adică viteza medie este

$$\frac{2d}{\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}.$$

Este important să subliniem care sunt condiţiile în care media armonică apare ca valoare medie. Eventual putem da exemple unde media unor mărimi se calculează cu ajutorul altor medii (aritmetică, geometrică, pătratică).

2. O generalizare a problemei de bază şi soluţia ei

După rezolvarea problemei de bază, merită să propunem elevilor următoarea problemă:

PROBLEMA 2. Generalizaţi problema 1. Formulaţi cât mai multe probleme cu caracter similar, încercaţi să le ierarhizaţi după dificultate. Elaboraţi o strategie pentru analiza cazurilor complexe.

De obicei, elevii formulează repede generalizări pentru care intuiesc rezultatele corecte, dar în unele cazuri schiţează rapid soluţii greşite sau incomplete. În vederea înţelegerii aprofundate şi eliminării greşelilor, se recomandă analiza problemelor formulate. În cele ce urmează enumerăm câteva generalizări ale problemei de bază şi soluţiile lor. Generalizarea cea mai firească este aceea în care se consideră mai mulţi copii şi mai multe biciclete şi se cere determinarea timpului minim necesar pentru ca ei să parcurgă cu bicicletele existente, o distanţă dată d, în aceleaşi condiţii (adică bicicletele nu pot fi utilizate simultan de mai mult de o persoană). Pentru a intui soluţia situaţiei generale, trebuie mai întâi să studiem cazurile particulare (cel puţin pentru a evita formularea unui caz general pornind de la un singur caz particular). Pentru început, să studiem următoarele cazuri:

PROBLEMA 3. $n = 3$ copii trebuie să parcurgă o distanţă d în timpul cel mai scurt posibil. Ei se deplasează pe jos cu viteza v_1, pe bicicletă cu viteza v_2, au o singură bicicletă, pe care nu o pot folosi doi sau mai mulţi copii în acelaşi timp. Care este timpul cel mai scurt în care pot parcurge toţi trei distanţa d? Care este viteza lor medie în cazul în care parcurg distanţa în intervalul de timp minim?

Problema 4. $n = 4$ copii trebuie să parcurgă distanţa d în timpul cel mai scurt. Ei se deplasează pe jos cu viteza v_1 şi pe bicicletă cu viteza v_2, au la dispoziţie o singură bicicletă, pe care nu o pot folosi doi sau mai mulţi copii în acelaşi timp. Care este timpul minim în care cei patru parcurg distanţa d? Care este viteza medie a copiilor în acest caz?

Problema 5. n copii ($n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$) trebuie să parcurgă distanţa d în timpul cel mai scurt. Ei se deplasează pe jos cu viteza v_1 şi pe bicicletă cu viteza v_2, au o singură bicicletă, pe care nu pot urca simultan doi sau mai mulţi copii. Care este timpul minim în care toţi copiii pot parcurge distanţa d? Care este viteza medie a copiilor în acest caz?

Problema 6. $n = 3$ copii trebuie să parcurgă distanţa d în timpul cel mai scurt. Ei merg pe jos cu viteza v_1 şi pe bicicletă cu viteza v_2, au la dispoziţie două biciclete, pe fiecare se poate urca cel mult un singur copil la un moment dat. Care este timpul minim în care toţi trei pot parcurge distanţa d? Care este viteza medie a copiilor în acest caz?

Problema 7. $n = 4$ copii trebuie să parcurgă distanţa d în timpul cel mai scurt. Ei merg pe jos cu viteza v_1 şi pe bicicletă cu viteza v_2, au două biciclete, pe fiecare se poate urca cel mult un singur copil la un moment dat. Care este timpul minim în care toţi patru pot parcurge distanţa d? Care este viteza medie a copiilor în acest caz? Analizaţi situaţia în care sunt 2 biciclete şi n copii, unde $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$.

Problema 8. Rezolvaţi problema anterioară pentru $n = 5$ copii şi $k = 3$ biciclete.

Problema 9. Rezolvaţi problema anterioară pentru $n \in \mathbb{N}^*$ şi $k \in \mathbb{N}^*$ arbitrare, unde n este numărul copiilor, k este numărul bicicletelor, iar $n > k$.

Observaţie. Este de la sine înţeles că ar fi de ajuns să rezolvăm doar ultima problemă. De fapt, pe celelalte le-am formulat separat pentru a exersa modul de construire a soluţiei, a formulării teoriei plecând de la cazuri particulare. Obiectivul nostru este rezolvarea ultimei probleme, dar dacă abordăm din start ultima problemă, atunci este posibil ca elevii să nu îşi dea seama care sunt paşii cheie ai soluţiei. De aceea este important să conştientizăm faptul că „puţină observaţie şi multe speculaţii duc la greşeli, multă observaţie şi puţine speculaţii duc la adevăr” (Alexis Carrel).

Înainte de a studia situaţiile mai complexe, transcriem soluţia problemei de bază, astfel încât să fie adecvată pentru generalizări. În acest scop, introducem notaţii simetrice. Fie x_1 şi x_2 distanţele parcurse pe jos de cei doi copii şi y_1, y_2 distanţele parcurse pe bicicletă. Atunci $x_1 + y_1 = d$ şi $x_2 + y_2 = d$, dat fiind că amândoi copiii parcurg distanţa totală. În acelaşi timp, bicicleta parcurge şi ea distanţa totală – am văzut că nu merită să fie părăsită în drum şi că nu este bine ca bicicleta să circule în sens opus (pentru că s-ar pierde timp) – deci $y_1 + y_2 = d$ şi $x_1 + x_2 = d$. Dacă t_1 şi t_2 reprezintă durata deplasării celor doi copii, atunci

$$t_1 = \frac{x_1}{v_1} + \frac{y_1}{v_2} \text{ şi } t_2 = \frac{x_2}{v_1} + \frac{y_2}{v_2}.$$

Astfel, dacă $t = \max\{t_1, t_2\}$, atunci

$$t \geq \frac{x_1}{v_1} + \frac{y_1}{v_2} \text{ şi } t \geq \frac{x_2}{v_1} + \frac{y_2}{v_2}.$$

Pe baza celor de mai sus

$$2t \geq \frac{x_1 + x_2}{v_1} + \frac{y_1 + y_2}{v_2},$$

adică

$$t \geq \frac{d}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right).$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = \frac{d}{2}$. Această situaţie poate fi obţinută dacă unul dintre copii merge pe bicicletă până la jumătatea drumului, o lasă acolo şi îşi continuă drumul pe jos. În acest timp, celălalt copil parcurge pe jos prima jumătate a distanţei, la jumătatea drumului ia bicicleta şi merge mai departe pe bicicletă. Astfel, timpul minim necesar pentru parcurgerea distanţei d este $\frac{d}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)$.

Această descriere a soluţiei este mai avantajoasă pentru că obţinem condiţiile rezolvării optime şi rezultatul final din calcule.

Soluţia problemei 3. Fie x_1, x_2 şi x_3 distanţele parcurse pe jos de cei trei copii, iar y_1, y_2, şi y_3 distanţele parcurse pe bicicletă. Astfel au loc relaţiile $x_i + y_i = d$, pentru $1 \leq i \leq 3$. Am văzut că, pentru a obţine timpul minim de deplasare pe distanţa dată, bicicleta nu trebuie abandonată pe drum şi trebuie să fie folosită numai pentru apropierea de destinaţie – de aceea $y_1 + y_2 + y_3 = d$ şi $x_1 + x_2 + x_3 = 2d$. Dacă t_1, t_2 şi t_3 sunt timpii de deplasare ai celor trei copii, atunci

$$t_i = \frac{x_i}{v_1} + \frac{y_i}{v_2}, 1 \leq i \leq 3,$$

deci, dacă $t = \max\{t_1, t_2, t_3\}$, atunci

$$\begin{aligned} t \geq & \frac{x_1}{v_1} + \frac{y_1}{v_2} \\ t \geq & \frac{x_2}{v_1} + \frac{y_2}{v_2} \\ t \geq & \frac{x_3}{v_1} + \frac{y_3}{v_2} \end{aligned}$$

Pe baza celor de mai sus

$$3t \geq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{v_1} + \frac{y_1 + y_2 + y_3}{v_2},$$

adică

$$t \geq \frac{d}{3}\left(\frac{2}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right).$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{2d}{3}$ şi $y_1 = y_2 = y_3 = \frac{d}{3}$. Aceste valori se pot realiza dacă unul dintre copii merge pe bicicletă o treime din drum, al doilea parcurge pe bicicletă a doua treime, iar cel de-al treilea, ultima treime. Restul distanţei se parcurge pe jos de cei trei copii. Astfel, viteza medie este

$$v_{\text{medie}} = \frac{3}{\frac{2}{v_1} + \frac{1}{v_2}},$$

adică o medie armonică ponderată a valorilor vitezelor v_1 şi v_2. □

Soluţia problemei 4. Notăm cu x_1, x_2, x_3 şi x_4 distanţele parcurse pe jos de cei patru copii şi cu y_1, y_2, y_3, şi y_4 distanţele parcurse pe bicicletă. Astfel au loc relaţiile $x_i + y_i = d$, unde $1 \leq i \leq 4$. Pentru a parcurge distanţa dată în timp minim, bicicleta nu trebuie abandonată pe drum şi trebuie folosită doar pentru apropierea de destinaţie, nu în sens opus, de aceea $y_1+y_2+y_3+y_4 = d$, deci $x_1+x_2+x_3+x_4 = 3d$. Dacă t_1, t_2, t_3 şi t_4 sunt timpii de deplasare ai celor patru copii, atunci

$$t_i = \frac{x_i}{v_1} + \frac{y_i}{v_2}, \text{ pentru } 1 \leq i \leq 4,$$

deci, dacă $t = \max\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$, atunci

$$\begin{aligned} t &\geq \frac{x_1}{v_1} + \frac{y_1}{v_2} \\ t &\geq \frac{x_2}{v_1} + \frac{y_2}{v_2} \\ t &\geq \frac{x_3}{v_1} + \frac{y_3}{v_2} \\ t &\geq \frac{x_4}{v_1} + \frac{y_4}{v_2} \end{aligned}$$

Pe baza celor de mai sus

$$4t \geq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{v_1} + \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{v_2},$$

adică

$$t \geq \frac{d}{4}\left(\frac{3}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right).$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{3d}{4} \text{ şi } y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = \frac{d}{4}.$$

Observăm că trebuie să studiem dacă este posibil ca în practică aceste distanţe să fie parcurse astfel încât relaţiile de mai sus să fie îndeplinite. Copiii sunt reprezentaţi prin b_1, b_2, b_3 şi b_4. Predarea bicicletei trebuie organizată cu precizie. Ca şi în cazul problemelor precedente, se poate realiza parcurgerea de către b_i a sfertului i de drum pe bicicletă, iar restul pe jos, pentru oricare $1 \leq i \leq 4$. Viteza medie este

$$v_{\text{medie}} = \frac{4}{\frac{3}{v_1} + \frac{1}{v_2}},$$

adică o medie armonică ponderată a valorilor vitezelor v_1 şi v_2. □

Soluţia problemei 5. Notăm cu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ distanţele parcurse pe jos de către cei n copii, şi cu $y_1, y_2, \ldots, y_n$ distanţele parcurse pe bicicletă. Este evident că $x_i + y_i = d$, pentru $1 \leq i \leq n$ şi $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = d$, deci $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = (n-1)d$. Dacă notăm copiii cu $b_1, b_2, \ldots, b_n$ şi timpul de deplasare al copilului b_i cu t_i pentru $1 \leq i \leq n$, atunci

$$t_i = \frac{x_i}{v_1} + \frac{y_i}{v_2},$$

iar numărul $t = \max\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ satisface inegalităţile

$$t \geq \frac{x_i}{v_1} + \frac{y_i}{v_2}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Pe baza celor de mai sus

$$nt \geq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{v_1} + \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{v_2},$$

adică

$$t \geq \frac{d}{n}\left(\frac{n-1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right).$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{(n-1)d}{n}$ respectiv $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = \frac{d}{n}$. Ca şi în cazul problemelor precedente, drumul este împărţit în n părţi egale, de lungime $\frac{d}{n}$, iar pentru fiecare $1 \leq i \leq n$ copilul b_i parcurge fracţiunea i cu bicicleta şi restul drumului pe jos. Viteza medie în acest caz este

$$v_{\text{medie}} = \frac{n}{\frac{n-1}{v_1} + \frac{1}{v_2}},$$

care este o medie armonică ponderată a valorilor vitezelor, cele două ponderi fiind numărul copiilor fără bicicletă $(n-1)$ şi numărul bicicletelor (1). □

Soluţia problemei 6. Fie x_1, x_2, x_3 distanţele parcurse de copii pe jos şi y_1, y_2, y_3 distanţele parcurse pe bicicletă. Este evident că $x_i + y_i = d$, pentru $1 \leq i \leq 3$ şi $y_1 + y_2 + y_3 = 2d$, deci $x_1 + x_2 + x_3 = d$. Dacă notăm copiii cu b_1, b_2, şi b_3 şi pentru $1 \leq i \leq 3$ timpul de deplasare al lui b_i cu t_i, atunci

$$t_i = \frac{x_i}{v_1} + \frac{y_i}{v_2},$$

şi pentru numărul $t = \max\{t_1, t_2, t_3\}$ sunt valabile inegalităţile

$$t \geq \frac{x_i}{v_1} + \frac{y_i}{v_2}, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Dacă adunăm părţile corespunzătoare ale inegalităţilor de mai sus, avem

$$3t \geq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{v_1} + \frac{y_1 + y_2 + y_3}{v_2},$$

adică

$$t \geq \frac{d}{3}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{2}{v_2}\right).$$

Egalitatea are loc pentru $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{d}{3}$ şi $y_1 = y_2 = y_3 = \frac{2d}{3}$. În acest caz, schimbul bicicletelor trebuie organizat cu multă atenţie. Pentru a putea urmări mai bine schimbul bicicletelor, drumul se împarte în trei şi în tabelul următor reprezentăm modul cum sunt folosite bicicletele. Se poate verifica faptul că planul din tabel este

	$0 - \frac{d}{3}$	$\frac{d}{3} - \frac{2d}{3}$	$\frac{2d}{3} - d$
b_1	B	B	P
b_2	B	P	B
b_3	P	B	B

TABELUL 1. Trei copii şi două biciclete

realizabil, adică estimarea inferioară dată pentru t este într-adevăr timpul minim necesar parcurgerii distanţei date. Viteza medie este

$$v_{\text{medie}} = \frac{3}{\frac{1}{v_1} + \frac{2}{v_2}},$$

adică media armonică ponderată a vitezelor, cele două ponderi fiind numărul copiilor fără bicicletă (1) şi numărul bicicletelor (2). □

SOLUŢIA PROBLEMEI 7. În cazul $n = 4$ folosim un raţionament similar cu cel precedent şi obţinem estimarea

$$t \geq \frac{d}{4}\left(\frac{2}{v_1} + \frac{2}{v_2}\right).$$

Tabelul 2 conţine un mod posibil de utilizare al bicicletelor astfel încât în inegalitatea de mai sus să aibă loc egalitatea. Astfel, estimarea inferioară obţinută este chiar timpul minim căutat.

	$0 - \frac{d}{4}$	$\frac{d}{4} - \frac{2d}{4}$	$\frac{2d}{4} - \frac{3d}{4}$	$\frac{3d}{4} - d$
b_1	B	B	P	P
b_2	B	P	B	P
b_3	P	B	P	B
b_4	P	P	B	B

Tabelul 2. Patru copii şi două biciclete

Pentru a rezolva cazul general este necesar să descriem modul în care folosesc copiii bicicletele pe care le au la dispoziţie. În acest scop utilizăm în locul tabelului 2 tabelul 3 sau 4 drept model.

	$0 - \frac{d}{4}$	$\frac{d}{4} - \frac{2d}{4}$	$\frac{2d}{4} - \frac{3d}{4}$	$\frac{3d}{4} - d$
b_1	B	B	P	P
b_2	B	P	P	B
b_3	P	P	B	B
b_4	P	B	B	P

Tabelul 3. Patru copii şi două biciclete - II

Observăm că, începând cu linia a doua, liniile din ultimele două tabele se obţin plecând de la linia precedentă, în care primul element trece pe ultima poziţie şi restul elementelor se deplasează cu o poziţie spre stânga sau ultimul element este adus pe prima poziţie şi restul se mişcă cu o poziţie spre dreapta. Astfel de schimburi pot fi folosite

	$0 - \frac{d}{4}$	$\frac{d}{4} - \frac{2d}{4}$	$\frac{2d}{4} - \frac{3d}{4}$	$\frac{3d}{4} - d$
b_1	B	B	P	P
b_2	P	B	B	P
b_3	P	P	B	B
b_4	B	P	P	B

Tabelul 4. Patru copii şi două biciclete - III.

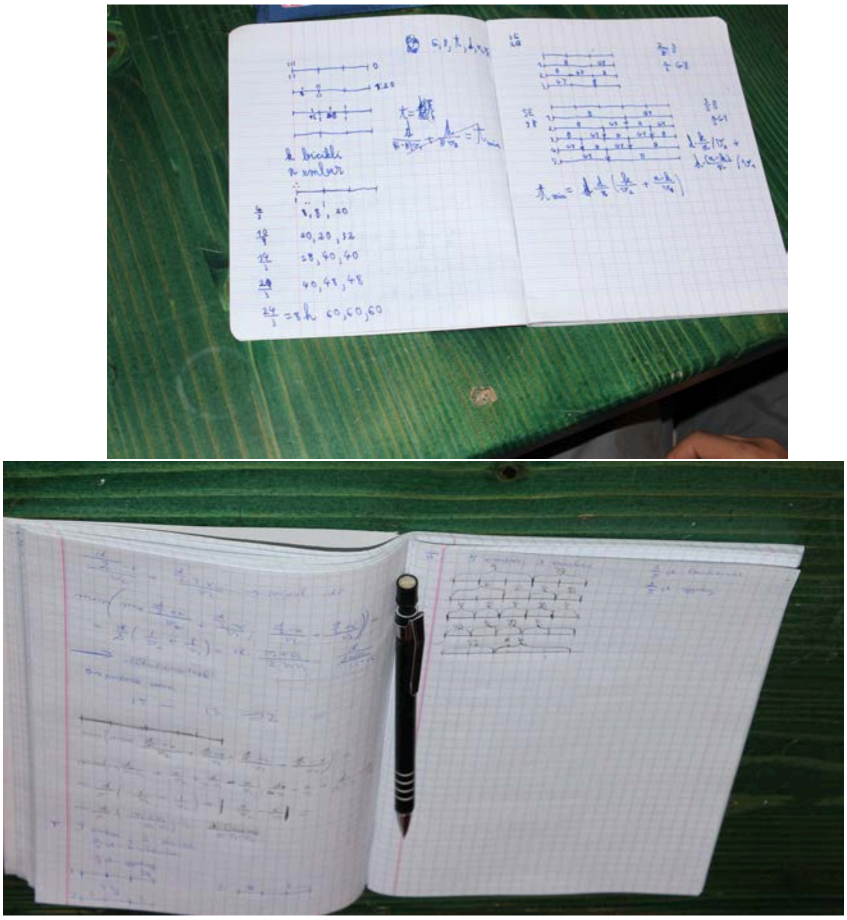


FIGURA 1.1. Studiul cazurilor particulare

şi în cazul general – de aceea putem afirma că, pentru orice $n \geq 3$, n copii care au două biciclete pot parcurge distanţa d în timpul minim

$$t = \frac{d}{n}\left(\frac{n-2}{v_1} + \frac{2}{v_2}\right).$$

Lucrul acesta poate fi realizat practic printr-o serie de schimburi de biciclete ca cea descrisă în tabelul 5. Viteza medie este

$$v_{\text{medie}} = \frac{n}{\frac{n-2}{v_1} + \frac{2}{v_2}}.$$

În acest tabel, B se situează pe diagonala principală, pe diagonala

	$0-\frac{d}{n}$	$\frac{d}{n}-\frac{2d}{n}$	$\frac{2d}{n}-\frac{3d}{n}$	$\dots$	$\frac{(n-1)d}{n}-d$
b_1	B	B	P	$\dots$	P
b_2	P	B	B	$\dots$	P
b_3	P	P	B	$\dots$	P
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
b_n	B	P	P	$\dots$	B

TABELUL 5. n copii şi două biciclete

vecină aflată deasupra ei şi în colţul din stânga jos, celelalte elemente fiind P. În acest caz B-urile de pe diagonala principală reprezintă utilizarea primei biciclete, iar restul B-urilor se referă la a doua bicicletă. Pentru a demonstra că acest tabel reprezintă într-adevăr o soluţie posibilă, trebuie verificat faptul că, în momentul în care un copil trebuie să folosească o bicicletă la un moment dat, atunci bicicleta este deja în punctul respectiv (deci nimeni nu trebuie să aştepte). $\square$

SOLUŢIA PROBLEMEI 8. În cazul a $n = 5$ copii şi $k = 3$ biciclete notăm cu x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 distanţele parcurse de copii pe jos şi cu y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 distanţele parcurse cu bicicleta. Astfel $x_i + y_i = d$, pentru $1 \le i \le 5$. Am văzut mai sus că toate bicicletele trebuie să ajungă la destinaţie şi să fie folosite numai pentru deplasarea în direcţia destinaţiei finale, pentru ca timpul în care este parcursă distanţa dată să fie minim. De aceea, $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 3d$ şi $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2d$. Dacă notăm copiii cu b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 şi pentru fiecare i $(1 \le i \le 5)$ cu t_i timpul în care copilul b_i parcurge distanţa d, atunci

$$t_i = \frac{x_i}{v_1} + \frac{y_i}{v_2},$$

şi pentru numărul $t = \max\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$, are loc

$$t \ge \frac{x_i}{v_1} + \frac{y_i}{v_2}, \quad 1 \le i \le 5.$$

Pe baza celor de mai sus,

$$5t \ge \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{v_1} + \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{v_2},$$

adică

$$t \geq \frac{d}{5}\left(\frac{2}{v_1} + \frac{3}{v_2}\right).$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = \frac{2d}{5}$ şi $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = \frac{3d}{5}$. Viteza medie este

$$v_{\text{medie}} = \frac{5}{\frac{2}{v_1} + \frac{3}{v_2}}.$$

Aceasta este o medie armonică ponderată, cele două ponderi fiind numărul copiilor fără bicicletă (2) şi numărul bicicletelor (3). Trebuie să demonstrăm că există un mod de utilizare a bicicletelor astfel încât estimarea inferioară obţinută mai înainte să fie atinsă. O metodă de

	$0 - \frac{d}{5}$	$\frac{d}{5} - \frac{2d}{5}$	$\frac{2d}{5} - \frac{3d}{5}$	$\frac{3d}{5} - \frac{4d}{5}$	$\frac{4d}{5} - d$
b_1	B	B	B	P	P
b_2	P	B	B	B	P
b_3	P	P	B	B	B
b_4	B	P	P	B	B
b_5	B	B	P	P	B

TABELUL 6. Cinci copii şi trei biciclete

folosire a bicicletelor pe care copiii le au la dispoziţie este ilustrată în tabelul 6. Conform tabelului, pentru orice $1 \leq s \leq 3$ dacă

$$j \equiv i + s - 1 \mod 5,$$

atunci bicicleta cu numărul s va fi utilizată de copilul b_i pe porţiunea de lungime $\frac{d}{5}$ cu numărul j a distanţei d. □

SOLUŢIA PROBLEMEI 9. Notăm cu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ distanţele parcurse pe jos de cei n copii şi cu $y_1, y_2, \ldots, y_n$ distanţele parcurse pe bicicletă. Este evident că $x_i + y_i = d$, pentru $1 \leq i \leq n$. Aşa cum am observat deja, bicicletele trebuie să ajungă la destinaţie şi să fie folosite numai pentru deplasarea în direcţia destinaţiei finale, pentru ca distanţa dată să fie parcursă în timp minim. Din acest motiv, $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = kd$, şi astfel $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = (n-k)d$. Dacă notăm copiii cu $b_1, b_2, \ldots, b_n$ şi pentru oricare $1 \leq i \leq n$ timpul de deplasare al lui b_i este t_i, atunci

$$t_i = \frac{x_i}{v_1} + \frac{y_i}{v_2},$$

deci pentru numărul $t = \max\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$,

$$t \geq \frac{x_i}{v_1} + \frac{y_i}{v_2}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Pe baza celor de mai sus

$$nt \geq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{v_1} + \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{v_2},$$

adică

$$t \geq \frac{d}{n}\left(\frac{n-k}{v_1} + \frac{k}{v_2}\right).$$

Egalitatea are loc pentru

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{(n-k)d}{n} \text{ şi } y_1 = y_2 = \ldots = y_n = \frac{kd}{n},$$

iar viteza medie este

$$v_{\text{medie}} = \frac{n}{\frac{n-k}{v_1} + \frac{k}{v_2}},$$

adică media armonică ponderată a vitezelor, unde ponderile sunt numărul bicicletelor existente şi cel al bicicletelor lipsă. Trebuie să demonstrăm că schimbul bicicletelor poate fi organizat astfel încât să aibă loc egalităţile $x_1 = \ldots = x_n = \frac{(n-k)d}{n}$ şi $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = \frac{kd}{n}$. O distribuire posibilă a bicicletelor este dată în tabelul 7. În acest

	I_1	I_2	...	I_{k-1}	I_k	I_{k+1}	...	I_{n-2}	I_{n-1}	I_n
b_1	B	B	...	B	B	P	...	P	P	P
b_2	P	B	...	B	B	B	...	P	P	P
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
b_{k-1}	P	P	...	B	B	B	...	P	P	P
b_k	P	P	...	P	B	B	...	P	P	P
b_{k+1}	P	P	...	P	P	B	...	P	P	P
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
b_{n-1}	B	B	...	P	P	P	...	P	B	B
b_n	B	B	...	B	P	P	...	P	P	B

TABELUL 7. n copii şi k biciclete

tabel, pe diagonala principală şi pe cele $(k-1)$ diagonale superioare vecine cu aceasta sunt B-uri, iar în colţul stânga jos $(k-1)$ diagonale conţin B-uri, restul elementelor sunt P-uri. Conform tabelului, pentru oricare $1 \leq s \leq k$, dacă

$$j \equiv i + s - 1 \mod n,$$

atunci bicicleta cu numărul s va fi utilizată de copilul b_i pe porţiunea de lungime $\frac{d}{n}$ cu numărul j a distanţei date. Astfel nici un copil nu trebuie să aştepte la schimburile de biciclete. □

3. Alte probleme

O altă generalizare naturală a problemei de bază este determinarea lungimii minime a intervalului de timp în care este parcursă o distanţă dată folosind mai multe mijloace de transport. De exemplu, determinaţi intervalul minim în care 3 copii parcurg o distanţă dată, dacă au la dispoziţie o bicicletă şi un scuter, ştiind că fiecare vehicul poate transporta o singură persoană la un moment dat. Bazându-ne pe experienţa acumulată rezolvând problemele anterioare, am putea gândi că timpul minim se atinge când fiecare copil parcurge o treime din drum cu un mijloc de deplasare (pe jos, cu bicicleta sau cu scuterul). Viteza medie ar fi media armonică a valorilor celor trei viteze. Diferenţa faţă de cazurile studiate până acum apare la schimbul vehiculelor. Dacă am împărţi drumul în părţi egale, atunci pe prima coloană a tabelului 8 ar trebui să apară un S, un B şi un P. După S nu poate urma B (pentru că, după parcurgerea primei treimi de drum pe scuter, copilul nu poate lua bicicleta întrucât cel care o foloseşte n-a parcurs încă prima treime din drum), astfel prima linie trebuie să fie S-P-B. Liniile 2 şi 3 se completează în mod unic, deoarece bicicleta şi scuterul trebuie să parcurgă a doua treime de drum. Această repartizare a vehiculelor este dată în tabelul 8. Dar b_1 parcurge mai repede primele două treimi ale drumului decât b_3 (pentru că se deplasează pe scuter şi pe jos, în timp ce b_3 merge pe bicicletă şi pe jos), deci pentru a folosi bicicleta pe ultima treime de drum trebuie să aştepte ca bicicleta să parcurgă primele două treimi. De aceea, în acest caz nu mai putem folosi întocmai metoda aplicată la deplasarea pe jos şi

	$0 - \frac{d}{3}$	$\frac{d}{3} - \frac{2d}{3}$	$\frac{2d}{3} - d$
b_1	S	P	B
b_2	B	S	P
b_3	P	B	S

TABELUL 8. Trei copii, o bicicletă şi un scuter

cu bicicleta. Prima parte a raţionamentului precedent ar funcţiona în mod similar dacă x_i, y_i şi z_i ar fi lungimile parcurse de b_i pe jos, cu bicicleta şi cu scuterul, iar vitezele ar fi $v_1 < v_2 < v_3$ – atunci timpii de deplasare ar fi

$$t_i = \frac{x_i}{v_1} + \frac{y_i}{v_2} + \frac{z_i}{v_2}.$$

Dacă bicicleta şi scuterul parcurg distanţa totală, atunci $y_1 + y_2 + y_3 = d$ şi $z_1 + z_2 + z_3 = d$, deci $x_1 + x_2 + x_3 = d$ şi astfel timpul în care este parcursă întreaga distanţă îndeplineşte inegalitatea

$$t \geq \frac{d}{3}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}\right).$$

Timpul minim nu mai corespunde egalităţii din relaţia de mai sus pentru că nu avem o metodă practică de schimb a vehiculelor ce să permită atingerea valorii minime – de aceea soluţionarea problemei necesită analize noi, de care nu ne vom mai ocupa în cele ce urmează. În mod similar putem generaliza problema, dacă pornirea se face din mai multe puncte şi, eventual, punctul final nu este acelaşi. O altă problemă generală este cazul când avem la dispoziţie mai multe tipuri de vehicule, care pot duce mai multe persoane (de ex. automobile cu 5 locuri). Bineînţeles, în acest fel situaţia se complică foarte mult (poate fi eficientă parcurgerea distanţei de mai multe ori cu maşina etc.), dar putem studia câteva cazuri particulare. Dacă problema apare complet generalizată (mai multe vehicule cu capacităţi diferite, mai multe puncte de plecare, puncte de sosire diferite, eventuale restricţii privind gruparea călătorilor în anumite circumstanţe, condiţionări referitoare la viteza vehiculelor etc.), atunci până şi un algoritm în timp real ce duce la un rezultat aproximativ reprezintă o soluţie foarte bună.

Toate acestea demonstrează că prin seria generalizărilor ajungem repede la probleme pe care nu le putem rezolva. Aceasta este una dintre caracteristicile esenţiale ale predării matematicii pe baza investigaţiei. Dacă suntem într-adevăr interesaţi de situaţia problemă, putem ajunge uşor la probleme nerezolvabile. Însă nu putem să ştim dinainte care generalizare poate fi tratată şi care nu. Prin urmare, trebuie să-i sprijinim pe elevi în formularea problemelor, trebuie să-i ajutăm să-şi recunoască limitele. Trebuie să ştim, şi să-i conştientizăm şi pe elevi, că situaţia de bază naturală este cea în care ne confruntăm cu multe probleme de nerezolvat. Formularea cea mai adecvată îi aparţine probabil lui Earl C. Kelley: „Nu am reuşit să răspundem la toate întrebările. Într-adevăr, câteodată simţim că nu am obţinut niciun răspuns. Răspunsurile găsite sunt bune numai pentru a scoate la suprafaţă o serie de noi întrebări. Poate că suntem mai nedumeriţi ca niciodată, dar considerăm că suntem mai nedumeriţi la un nivel superior şi în privinţa unor probleme mai profunde."

4. Observaţii

1. Am testat aceste activităţi cu elevi de gimnaziu, cu liceeni şi cu studenţi. Participanţii au găsit soluţia problemei de bază (eventual după câteva încercări) aproape întotdeauna (în majoritatea cazurilor lucrând în grupuri mici) şi au intuit rezultatele în multe cazuri mai complexe. În general, pentru a redacta soluţiile, demonstraţiile au avut nevoie de puţină îndrumare şi, în unele cazuri, de ajutor.

2. Activităţile în grupuri mici au însemnat un mare avantaj în cursul conceperii încercărilor şi organizării schimburilor. În aceste etape, eventualele greşeli comise au putut fi eliminate încă la nivelul grupului. Munca în comun a asigurat înţelegerea de către elevi, aproape fără excepţii, a modului de realizare a schimburilor – de multe ori au luat naştere mai multe planuri pentru organizarea schimburilor în cazul general. Totodată, putem să economisim timp dacă grupurile studiază cazuri particulare diferite, iar pentru partajarea informaţiilor găsim o soluţie cooperativă (astfel reuşim să aplicăm principiile de bază ale învăţării cooperative).

3. Activităţile s-au desfăşurat în general în $2-3$ ore. Este bine să discutăm soluţia problemei de bază în cadrul unei activităţi separate, iar generalizările cu ocazia unei alte activităţi.

4. Este important de subliniat diferenţa dintre problema practică (prinderea trenului) şi rezolvarea problemei matematice, însemnătatea fiecărui pas al demonstraţiei – de exemplu cel al organizării schimburilor. Uneori, importanţa devine evidentă doar dacă prin ea putem elimina o neînţelegere. În cadrul activităţilor, elevii au formulat aproape întotdeauna ipoteza greşită în cazul celor două tipuri de vehicule şi au observat că este greşită doar în cursul analizei mai aprofundate a schimburilor.

FIGURA 1.2. Lucru în grup

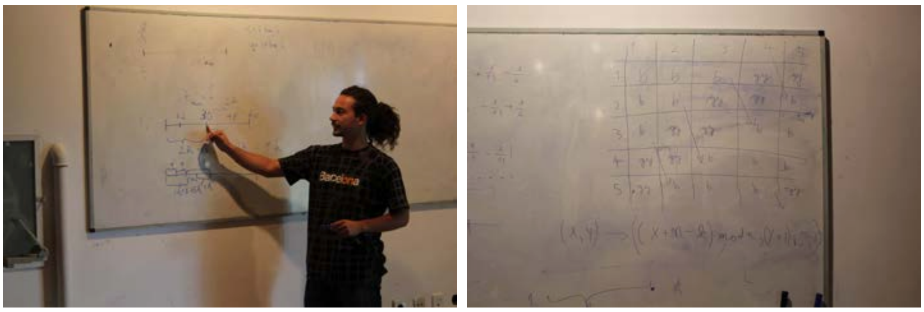


FIGURA 1.3. Rezolvarea problemei de bază şi planificarea schimburilor de biciclete în cazul general

CAPITOLUL II

DE LA PROBLEME DE TURNARE LA ECUAŢII DIOFANTICE LINIARE

1. Introducere

Soluţia problemei de mai jos a fost găsită de matematicianul francez Siméon Denis Poisson în secolul al XVIII-lea ([**33**]):

Problema 1. Un om a avut 12 pinte[1] de vin, din care a dorit să-i dea 6 pinte vecinului său. Pentru a măsura vinul pe care voia să-l dea vecinului, a avut la dispoziţie numai două vase de 5 pinte, respectiv 8 pinte. Ar fi putut să măsoare cele 6 pinte în vasul de 8 pinte?

Probleme asemănătoare întâlnim des în culegerile de matematică, propuse uneori elevilor din clasa a 5-a. O problemă de acest tip este următoarea:

Problema 2. Aveţi la dispoziţie trei vase, unul de 4 litri, unul de 7 litri şi unul de 11 litri. Măsuraţi 1 litru de apă în condiţiile în care vasul cel mai mare este plin cu apă, iar celelalte două sunt goale.

În acest capitol vom analiza metodele de rezolvare a problemelor de acest tip. Analiza va fi pe de o parte matematică: vom studia strategii de rezolvare, vom observa că gradul de umplere a vaselor date poate fi modelat folosind mişcarea unei bile de biliard pe o masă specială şi că, urmărind mişcarea bilei, obţinem un algoritm ce ne conduce la soluţia problemei, dacă aceasta există. Pe de altă parte, analiza noastră va avea un caracter didactic. Ea a stat la baza unui studiu efectuat în anii 2009 şi 2010, desfăşurat în cadrul programului Comenius numit Developing Quality in Mathematics Education II, în mai multe şcoli din Transilvania (Liceul Teoretic „Báthory István" din Cluj-Napoca, Liceul Teoretic „Bolyai Farkas" din Târgu Mureş, Liceul Teoretic „Márton Áron" din Miercurea Ciuc). Mulţumim colegilor noştri Hajnalka Csapó, Jutka

[1]O pintă este egală cu aproximativ 568,26125 ml.

Szilágyi, Emőke Szilágyi şi István Mátéfi pentru sprijinul dat în timpul desfăşurării studiului. Capitolul acesta reprezintă o versiune revizuită a articolului nostru publicat în revista The Electronic Journal of Mathematics and Technology (vezi [**3**]). Motto-ul articolului a fost următorul citat din Nietzsche: „I cook every chance in my pot. And only when it hath been quite cooked do I welcome it as my food." – adică: „Pun toate întâmplările la fiert în oala mea şi numai după ce sunt bine fierte, le socotesc drept excelente, ca feluri din bucătăria mea." (Nietzsche: Aşa grăit-a Zarathustra, traducere de Ştefan Augustin Doinaş). Citatul sintetizează obiectivul acestui capitol, care poate fi obiectivul general în predarea matematicii, şi anume: majoritatea elevilor nu ştiu să obţină soluţia generală a problemelor de măsurare a unei cantităţi de lichid, când nu au un vas gradat adecvat, dar au alte vase de capacitate cunoscută – de aceea rezolvarea pare întâmplătoare chiar şi pentru cei ce rezolvă uşor probleme de acest tip. Scopul nostru este să aflăm cauzele acestor „întâmplări".

2. Soluţii şi probleme noi

Pentru a rezolva prima problemă, Poisson a folosit un graf, în care a redat umplerea vaselor şi provenienţa vinului din ele. În vârfurile grafului a reprezentat gradul de umplere a vaselor sau starea lor, iar pe muchiile lui, de unde provine vinul din vas. Umplerea vaselor a exprimat-o cu ajutorul unui triplet, componentele lui reprezentând cantitatea de vin din vasul cel mai mare, din vasul de 8 pinte, respectiv din vasul cel mai mic. Pentru a simplifica graful, noi vom reprezenta numai muchiile lui, care au o structură arborescentă. La început, vasul de 12 pinte era plin, de aceea rădăcina arborelui este $(12, 0, 0)$. Din aceasta se pot obţine două stări noi: prin umplerea vasului mic sau a celui de 8 pinte. Astfel, din starea iniţială ajungem la stările $(4, 8, 0)$ sau $(7, 0, 5)$ printr-o singură turnare. Din aceste stări, printr-o singură turnare, putem obţine stări diferite: $(0, 8, 4), (4, 3, 5), (0, 7, 5)$, respectiv $(7, 5, 0)$. Aceste stări sunt ilustrate în figura 2.1. Dacă la fiecare pas reprezentăm la nivelul următor numai stările, care nu se găsesc printre stările deja ilustrate, atunci obţinem un graf ce conţine toate stările posibile. Din acest graf se poate observa dacă problema

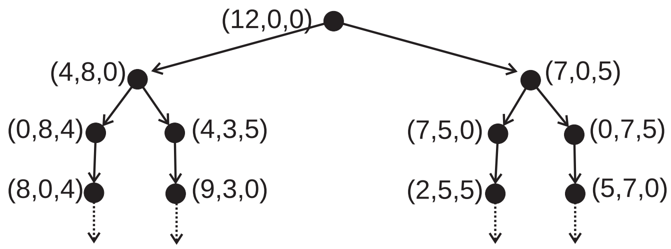


FIGURA 2.1. Reprezentarea lui Poisson

are soluţie, adică dacă putem umple un vas cu cantitatea cerută de problemă, precum şi numărul minim de operaţii (turnări) necesare. Continuând graful de mai sus, putem găsi o soluţie posibilă:

$$(12,0,0) \to (4,8,0) \to (0,8,4) \to (8,0,4) \to (8,4,0) \to (3,4,5) \to$$
$$\to (3,8,1) \to (11,0,1) \to (11,1,0) \to (6,1,5) \to (6,6,0).$$

Prin urmare, cele 6 pinte de vin pot fi măsurate în vasul de 8 pinte. Soluţia problemei poate fi găsită şi fără graf. Cu ajutorul lui, găsim soluţia cea mai simplă folosind numărul minim de operaţii.

Soluţia problemei 2 se obţine imediat din:

$$(11,0,0) \to (7,0,4) \to (7,4,0) \to (3,4,4) \to (3,7,1).$$

Rezolvarea acestor probleme generează întrebări noi:

- Care sunt cantităţile de vin care pot fi măsurate în cazul problemelor 1 şi 2?
- În ce măsură depinde solvabilitatea problemei de capacitatea vaselor şi de cantitatea de lichid ce trebuie măsurată?
- Ce cantităţi de lichid pot fi măsurate cu trei vase de capacitate dată?
- Cum se modifică răspunsul dat la cele trei întrebări de mai sus, dacă numărul vaselor creşte?

Din studiul cazurilor particulare ne dăm seama că reprezentarea lui Poisson nu poate fi folosită pentru analiza problemelor generale. Ca urmare, cazurile generale vor fi abordate altfel. Pentru început formulăm problemele pe care le vom rezolva în continuare.

PROBLEMA 3. Considerăm trei vase negradate, de capacitate a, b, respectiv c litri, unde $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ şi $c \geq a + b$. Iniţial, cel mai mare vas este plin cu apă, iar celelalte sunt goale. Caracterizaţi cantităţile ce pot fi măsurate în fiecare vas.

PROBLEMA 4. Considerăm $n + 1$ vase negradate, de capacitate $a_1, \ldots, a_n$ şi a_{n+1} litri, unde $a_i \in \mathbb{N}^*, 1 \leq i \leq n + 1$ şi $a_{n+1} \geq \sum_{i=1}^{n} a_i$. Iniţial, cel mai mare vas este plin cu apă, iar celelalte sunt goale. Caracterizaţi cantităţile ce pot fi măsurate în fiecare vas.

Despre problema 3, autorul cărţii [**16**] afirmă: „Este limpede că o problemă de acest tip (unde $c = a + b$) admite soluţie pentru orice valori ale lui a şi b, dacă a şi b sunt numere relativ prime”, soluţia nu apare în carte şi nu pare a fi evidentă. Vom rezolva problema 3 şi vom da soluţia ei, astfel încât aceasta să poată fi folosită pentru rezolvarea problemei 4. După ce vom clarifica bazele matematice ale rezolvării problemei, vom prezenta rezultatele studiului nostru. Studiul a arătat că, pentru rezolvarea acestor probleme, elevii folosesc mecanisme de tipul „încercarea moarte n-are” (adică toarnă apa dintr-un vas în altul la întâmplare şi eventual au grijă să nu revină la stări anterioare). Am testat această metodă prin simulări pe calculator şi am ajuns la concluzia că turnarea la întâmplare duce – mai devreme sau mai târziu – la atingerea tuturor stărilor posibile. Dacă în cursul paşilor aleatorii avem grijă să nu repetăm stări deja întâlnite, atunci numărul de paşi necesar pentru a rezolva problema scade (acest lucru poate fi demonstrat cu ajutorul unor instrumente, care depăşesc cunoştinţele unui elev de liceu, de aceea nu vom aborda această problemă aici). Observăm că problemele de acest tip nu sunt potrivite pentru a verifica aptitudinile combinatorice ale elevilor, deoarece rezolvarea problemei le cere mai degrabă răbdare, asiduitate şi atenţie, decât deprinderi combinatorice.

3. Modelul, o abordare algoritmică şi proprietăţi matematice

Considerăm un paralelogram de laturi a, b pe o latice infinită, generată de un romb cu latura egală cu unitatea şi unghi ascuţit de

60°. Presupunem că aceasta este o masă de biliard, pe care studiem mişcarea unei bile. Considerăm că bila se mişcă fără frecare pe masă, plecând din punctul $O(0,0)$ de-a lungul laturii OA unde $A(a,0)$.

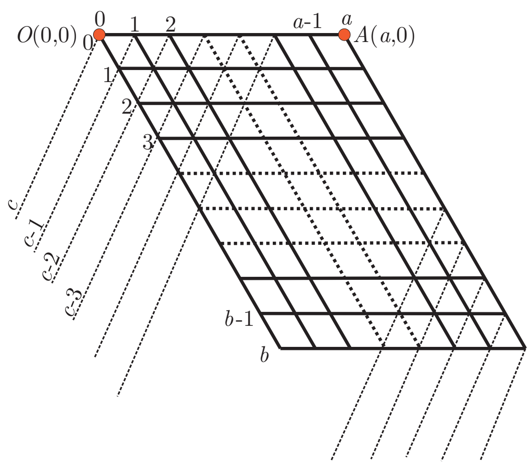
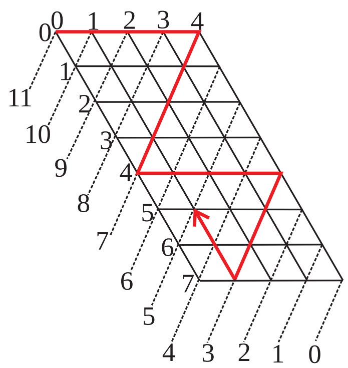


FIGURA 2.2. Masa de biliard

Mişcarea bilei corespunde turnărilor posibile. Notăm diagonalele conform figurii 2.2. şi atribuim fiecărui punct P al mesei coordonatele sale şi numărul diagonalei, care trece prin punctul dat. Aceste trei numere corespund cantităţilor de apă aflate în cele trei vase. Originea O este reprezentată prin $(0,0,c)$, ea corespunde stării iniţiale. Punctul A este reprezentat prin $(a,0,c-a)$, adică vasul de volum a este plin, iar restul apei se află în vasul cel mai mare. Astfel bila se va deplasa doar de-a lungul diagonalelor trasate şi pe segmente paralele cu laturile paralelogramului. Fiecare punct laticial de pe laturile paralelogramului ce se află pe traiectoria bilei reprezintă o stare posibilă a vaselor. Pentru o mai bună înţelegere, pentru $a=4$, $b=7$ şi $c=11$ am indicat în figura 2.3 traseul bilei şi am marcat umplerea vaselor în punctele de intersecţie cu laturile paralelogramului. În acest caz, traseul bilei trece prin toate punctele laticiale aflate pe laturile paralelogramului, deci în fiecare vas pot fi măsurate toate cantităţile întregi, care nu depăşesc capacitatea vasului respectiv. În paragraful următor vom demonstra că acest lucru este posibil dacă a şi b sunt numere relativ prime. Are loc următoarea teoremă:

TEOREMĂ 2.1. *Dacă* $c = a + b$ *şi* $d = (a, b)$, *atunci traiectoria bilei de biliard conţine punctul laticial* (x, y) *aflat pe laturile paralelogramului de laturi* a, b *dacă şi numai dacă* $d|x$ *şi* $d|y$, *unde cu* (a, b) *am notat cel mai mare divizor comun al lui* a *şi* b.

OBSERVAŢIE. Dacă $d = 1$, atunci traiectoria bilei atinge toate punctele laticiale aflate pe marginea mesei, prin urmare în vasele corespunzătoare pot fi măsurate toate cantităţile întregi care nu depăşesc capacitatea maximă a vasului respectiv.



(0,0,11)	(2,0,9)
(4,0,7)	(0,2,9)
(0,4,7)	(4,2,5)
(4,4,3)	(0,6,5)
(1,7,3)	(4,6,1)
(1,0,10)	(3,7,1)
(0,1,10)	(3,0,8)
(4,1,6)	(0,3,8)
(0,5,6)	(4,3,4)
(4,5,2)	(0,7,4)
(2,7,2)	(4,7,0)

FIGURA 2.3. Traseul bilei de biliard şi starea vaselor

OBSERVAŢIE. Dacă $d = (a, b)$, atunci pot fi măsurate (dacă la umplerea vaselor nu se pierde apă) cantităţile divizibile cu d, deci soluţia problemei 3 se reduce la teorema de mai înainte.

Algoritmul de mai jos generează o serie de umpleri ale vaselor, ce corespund intersecţiilor traiectoriei bilei de biliard cu laturile paralelogramului. Astfel:

- dacă este posibil, toarnă din a în b [2];
- dacă b este plin, toarnă din b în c;
- dacă niciunul din paşii de mai sus nu este posibil, atunci toarnă din c în a.

[2]Aici am notat cu a, b, c atât vasele cât şi capacitatea lor a, b, respectiv c.

Aceasta face posibilă generarea cu ajutorul unui program simplu a seriei care conţine toate umplerile posibile.

Observaţie. Să presupunem că $a < b$ şi $d = (a, b)$. Dacă în al doilea vas măsurăm d litri de apă, în timp ce din vasul mai mic am turnat în cel mijlociu de x ori, iar vasul b l-am golit de y ori, atunci $ax - by = d$, deci din algoritmul de mai sus obţinem o soluţie a ecuaţiei diofantice liniare $ax - by = d$. Cu ajutorul lui, putem genera toate soluţiile ecuaţiei. Reciproca acestei proprietăţi nu este adevărată, pentru că dacă cunoaştem soluţiile ecuaţiei $ax - by = d$ nu avem soluţia problemei turnărilor. De aceea, rezolvarea problemei măsurării unei cantităţi de lichid, când nu avem la dispoziţie un vas de capacitate adecvată, nu este echivalentă cu rezolvarea ecuaţiei diofantice liniare cu două necunoscute.

În cazul mai multor vase, problema se complică. În primul rând, ne-am putea imagina că am avea nevoie de o reprezentare în mai multe dimensiuni. Dar, când turnăm apa dintr-un vas în altul, se modifică cantitatea de apă din două vase. Dacă reprezentăm datele folosind o structură multidimensională (de exemplu o prismă), atunci umplerea unui vas este reprezentată pe una dintre feţele ei. Aceste feţe pot fi desfăşurate în plan, prin urmare putem folosi o reprezentare bidimensională. Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ reprezintă volumul vaselor şi cel mai mare divizor comun al lui $a_1, a_2, \dots, a_j$ pentru oricare $j \geq 2$ este d_j, atunci

$$\begin{aligned} d_3 &= (a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3) = (d_2, a_3) \\ d_4 &= (a_1, a_2, a_3, a_4) = ((a_1, a_2, a_3), a_4) = (d_3, a_4) \end{aligned}$$

şi în general

$$d_{j+1} = (d_j, a_{j+1}), \quad j \geq 2.$$

Considerăm paralelogramele de laturi $a_1 \times a_2$, $a_2 \times a_3, \dots, a_{n-1} \times a_n$ şi $a_n \times a_1$, de unghi ascuţit $60°$, pe care le aşezăm unul lângă altul ca în figura 2.4. Acestea sunt noile mese de biliard. Pentru $1 \leq j \leq n - 1$ mişcarea bilei pe masa cu numărul j corespunde modificării cantităţii de apă din vasele a_j, a_{j+1} şi a_{n+1}, vasele $a_1, a_2, \dots, a_{j-1}$ sunt pline, iar vasele $a_{j+2}, \dots, a_n$ sunt goale. Pe ultima masă, mişcarea corespunde turnărilor cu vasele având volumele a_n, a_1 şi a_{n+1} în timp ce celelalte vase sunt pline. Pe prima masă, de laturi a_1 şi a_2, marcăm toate punctele de intersecţie dintre traiectoria bilei şi laturii comune cu masa a doua. Din aceste puncte pleacă câte o bilă de biliard, ce se mişcă pe masa a doua. Marcăm toate punctele de ciocnire, care apar pe latura comună a meselor a doua şi a treia. Continuăm acest procedeu, astfel, pentru fiecare $2 \le j \le n-1$ din toate punctele de ciocnire de pe latura comună a meselor $(j-1)$ şi j, lăsăm să pornească o bilă de biliard pe masa cu numărul j şi marcăm printr-un semn toate punctele de ciocnire care apar pe latura comună a meselor j şi $(j+1)$. Dacă pentru fiecare $1 \le j \le n-1$ notăm cu S_j latura comună a meselor j şi $(j+1)$, atunci lungimea lui S_j este a_{j+1} şi trebuie să studiem punctele notate pe segmentele $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_{n-1}$. În acest scop, reformulăm teorema 2.1 astfel:

TEOREMĂ 2.2. *Considerăm un divizor d' a lui b şi traiectoria bilei de biliard care porneşte din punctul de coordonate $(0, kd')$ de pe masa de laturi a şi b, unde $k \in \mathbb{N}$ este arbitrar şi $kd' \le b$. Punctul laticial (x, y) aflat pe marginea mesei aparţine traiectoriei bilei dacă şi numai dacă $d|x$ şi $d|y$, unde $d = (d', a)$.*

Conform acestei teoreme, pe segmentul S_j marcăm punctele laticiale ale căror coordonate sunt multiplii lui d_{j+1}. Pe segmentul S_{n-1} (a cărui lungime este a_n) marcăm punctele laticii de coordonate divizibile cu $d = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Datorită simetriei, aplicăm acest procedeu pentru fiecare segment, schimbând ordinea meselor în mod corespunzător. Rezultă că în orice vas putem măsura cantităţi întregi, multiplii ai lui d, mai mici decât volumul vasului dat.

Folosind un raţionament similar cu cel de mai sus, putem demonstra următoarele teoreme:

TEOREMĂ 2.3. *Considerăm trei vase negradate, de volum a, b respectiv c, unde $c \ge a + b$ şi $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. La început, vasul cel mai mare este plin cu apă, celelalte două sunt goale.*

- *Dacă $c = a + b$ şi $(a, b) = d$, atunci în vasul de volum a putem măsura $0, 1 \cdot d, 2 \cdot d, \ldots, a - d, a$ litri de apă, în cel de volum b putem măsura $0, 1 \cdot d, 2 \cdot d, \ldots, b - d, b$ litri de apă, iar în*

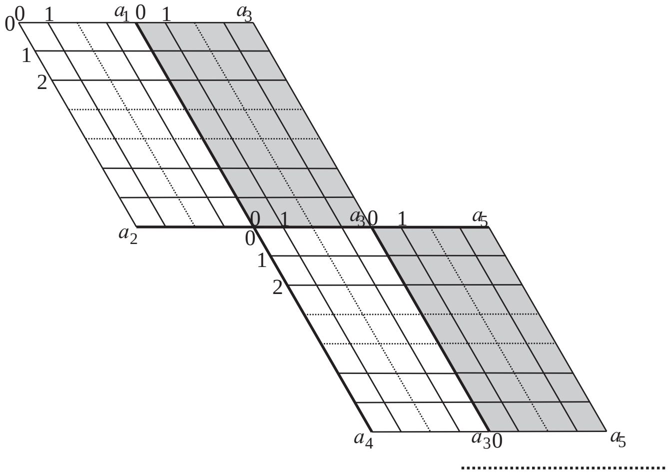


FIGURA 2.4. Feţele desfăşurate

vasul de volum c putem măsura $0, 1 \cdot d, 2 \cdot d, \ldots, c - d, c$ *litri de apă.*

- *Dacă* $c > a + b$ *şi* $(a, b) = d$, *atunci în vasul de volum a putem măsura* $0, 1 \cdot d, 2 \cdot d, \ldots, a - d, a$ *litri de apă, în cel de volum b putem măsura* $0, 1 \cdot d, 2 \cdot d, \ldots, b - d, b$ *litri de apă, iar în vasul de volum c putem măsura* $c - a - b, c - a - b + 1 \cdot d, c - a - b + 2 \cdot d, \ldots, c - d, c$ *litri de apă.*

TEOREMĂ 2.4. *Considerăm* $n + 1$ *vase negradate, de volum* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *şi* a_{n+1}, *unde* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $a_{n+1} \in \mathbb{N}^*$ *iar d este cel mai mare divizor comun al numerelor* $a_1, a_2, \ldots, a_n$. *La început, vasul cel mai mare este plin cu apă. Dacă* $a_{n+1} \geq \sum_{j=1}^{n} a_j$, *atunci pentru oricare* $j \in \{1, 2, \ldots n\}$ *în vasul cu volumul* a_j *se pot măsura* $0, 1 \cdot d, 2 \cdot d, \ldots, a_j - d, a_j$ *litri de apă, iar în vasul de volum* a_{n+1} $c, c + d, c + 2d, \ldots, a_{n+1} - d, a_{n+1}$ *litri de apă, unde* $c = a_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} a_j$.

OBSERVAŢIE. Am creat o interfaţă grafică în Matlab, care reprezintă pentru $n \leq 5$ mişcarea bilei de biliard şi înregistrează ciocnirile ei cu marginea mesei. Codul sursă a programului poate fi descărcat de la adresa

http://www.math.ubbcluj.ro/∼andrasz/filling/animation/animation.html

4. Demonstraţii

În acest paragraf demonstrăm teoremele formulate mai sus şi completăm golurile din raţionamentele anterioare.

Demonstraţia teoremei 2.1. Demonstraţia constă în găsirea legăturii dintre coordonata punctului de plecare de pe o latură a mesei şi cea a punctului de intersecţie a traiectoriei bilei cu latura opusă. Dacă bila pleacă din punctul de coordonate $(a-x, 0)$ şi atinge latura opusă în punctul $(a-y, b)$, atunci y este restul împărţirii lui $x+b$ la a (vezi figura 4). Prin urmare, pe latura opusă coordonatele punctelor de ciocnire sunt resturile împărţirii numerelor $b, 2b, 3b, \ldots, (a_1-1)b, a_1b$ la a, unde $a = a_1d$ şi $d = (a, b)$. Aceste resturi au una dintre valorile $0, d, 2d, \ldots, (a_1-1)d$, deoarece acestea sunt divizibile cu d şi sunt două câte două distincte (iar numărul lor este exact a_1). Astfel demonstraţia este completă. $\square$

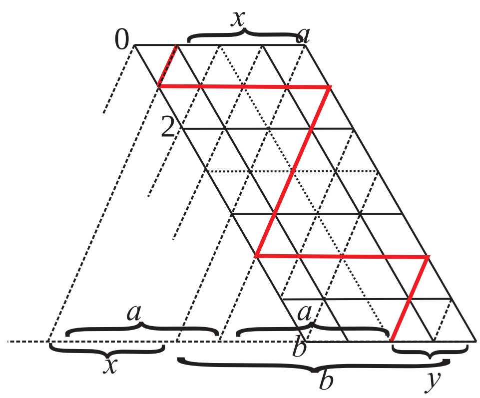


Figura 2.5. Relaţia dintre punctul de plecare a bilei şi cel de intersecţie a traiectoriei ei cu latura opusă

Demonstraţia teoremei 2.2. Folosind acelaşi raţionament, putem scrie că pe latura opusă coordonatele punctelor de ciocnire sunt resturile împărţirii numerelor $(a-kd')+lb$ la a, unde $k, l \in \mathbb{N}^*$. Acestea sunt multiplii lui (d', a) – prin urmare, teorema este adevărată. $\square$

Demonstraţia teoremei 2.3. Afirmaţiile teoremei 2.3 rezultă din teorema 2.1 şi din reprezentarea stărilor pe masa de biliard.

Condiţia $c \geq a + b$ asigură că putem folosi întreaga masă, dar diagonalele trebuie numerotate invers, începând cu c. $\square$

Observaţie. Dacă $c < a + b$, atunci nu în toate cazurile pot fi măsurate toate cantităţile întregi care nu depăşesc capacitatea vasului. Cu ajutorul reprezentării lui Poisson putem demonstra că pentru $a = 7$, $b = 11$ şi $c = 13$ nu se poate măsura 1 litru de apă. Analiza acestui caz nu va fi prezentată aici.

Demonstraţia teoremei 2.4. Pe baza teoremei 2.2 şi a construcţiei descrise (vezi fig.2.4) putem afirma că în vasul a_1 se pot măsura toate cantităţile întregi divizibile cu d, care nu depăşesc a_1. În mod similar, prin schimbarea corespunzătoare a vaselor, putem obţine pentru orice $1 \leq j \leq n$ posibilitatea măsurării în vasul cu volumul a_j a tuturor cantităţilor întregi divizibile cu d, care nu depăşesc a_j. Pentru ca şi în a_{n+1} să putem obţine toate cantităţile posibile, în timp ce studiem mişcarea bilei pe masa cu lungimea laturii a_j şi a_{j+1} (precum şi stările corespunzătoare), atunci pentru oricare $1 \leq k \leq j - 1$ lăsăm vasul cu volumul a_k plin cu apă, vasele $a_{j+2}, \ldots, a_n$ goale, restul de apă rămânând în a_{n+1}. $\square$

Observaţie. Vom utiliza raţionamentul folosit mai sus pentru rezolvarea unor cazuri concrete.

5. Evaluarea şi rezultatele ei

Am dat o lucrare de control scrisă, la 120 de elevi, cu următoarele două probleme:

1. Se dau trei vase negradate, de capacitate 7 litri, 17 litri respectiv 24 litri. La început, vasul cel mai mare este plin cu apă.
   a) Măsuraţi 1 litru de apă în unul dintre vase.
   b) Măsuraţi 1 litru de apă în vasul cel mai mare.
   c) Pentru toate cele trei vase precizaţi toate cantităţile ce pot fi măsurate în vasul respectiv.
2. Se dau trei vase negradate, de capacitate 21 litri, 34 litri respectiv 55 litri. La început, vasul cel mai mare este plin cu apă. Măsuraţi 1 litru de apă în unul dintre vase.

Jumătate dintre elevi erau din clasele a 5-a şi a 6-a, restul fiind elevi din clasa a 8-a. În funcţie de vârstă, ei pot fi împărţiţi în două categorii: 60 elevi în categoria 10–12 ani şi 60 elevi în categoria 13–14 ani. Participanţilor la lucrare le-am cerut să-şi noteze ideile proprii despre soluţia problemei, despre încercările nereuşite, precum şi opinia lor despre aceste probleme. Aceşti elevi nu au mai rezolvat probleme de acest gen, lucrarea de control i-a pus în faţa unor probleme complet noi.

Natura problemelor şi numărul minim de paşi necesari pentru rezolvarea lor ne-a asigurat că elevii nu vor intui soluţia încă de la început. Ne-am aşteptat că vor executa paşi aleatorii şi vor descoperi repede că e bine să evite stările deja întâlnite. Totodată, ne-am aşteptat să execute destul de mulţi paşi înainte de a abandona şi că între cele două grupe vor exista diferenţe semnificative în privinţa paşilor executaţi pentru a obţine soluţia.

La prima grupă (10–12 ani), am găsit foarte puţine soluţii bune pentru punctele a) şi b) ale primei probleme şi niciuna pentru punctul c) şi problema a doua. La cealaltă grupă, am găsit mult mai multe soluţii pentru punctele a) şi b) ale primei probleme, câteva soluţii aproape corecte pentru punctul c) şi niciuna pentru cea de-a doua problemă. Presupunerile noastre privind algoritmii de rezolvare s-au adeverit.

Spre surprinderea noastră, 60% din prima grupă şi 45% din grupa a doua nu au înţeles problema (au vrut să deseneze gradaţii pe vase, cantităţi înjumătăţite, au propus să procurăm un vas de 1 litru sau au vrut să măsoare 1 litru aproximând din ochi etc.). Următoarea surpriză a fost faptul că majoritatea elevilor din prima grupă, care au înţeles problema (şi au efectuat cel puţin 7-8 paşi), după un timp au abandonat pur şi simplu turnarea sau au comis o greşeală. Cei mai mulţi au abandonat lucrul după 6-9 paşi. A treia surpriză a fost faptul că elevii care au rezolvat primele două puncte ale primei probleme, în cazul problemei a doua au abandonat după mult mai puţini paşi faţă de cei efectuaţi în cazul primei probleme (deşi, în mod logic, în cazul vaselor mai mari sunt mai multe stări, deci ar putea fi nevoie de mai multe operaţii). Ei au executat practic cu 20% mai puţini paşi decât la prima problemă. Aceasta demonstrează că memoria de lucru a fost epuizată din cauza operaţiilor cu numere mai mari, adică adunarea şi scăderea cu numere mai mici de 100 nu este întru totul operaţională în cazul elevilor de 14 ani. Acest lucru este susţinut şi de observaţiile elevilor: „mi s-a umplut creierul", „trebuie să măsori până oboseşti".

Niciunul din elevi nu a observat că deciziile lor (privind vasele folosite la turnare) sunt aleatorii şi niciunul nu a încercat să calculeze până la sfârşit mai multe posibilităţi în acelaşi timp. Mulţi şi-au dat seama că este bine să evite stările anterioare, cu toate acestea s-au oprit după mai puţin de 10 paşi. Din cealaltă grupă, 23% au rezolvat punctele a) şi b) ale primei probleme, cauza reuşitei fiind, în mod evident, numărul mare de paşi executaţi (au fost doar doi elevi care nu au reuşit rezolvarea după ce au executat mai mult de 10 paşi).

Comparând histogramele realizate pe baza numărului de paşi corecţi, observăm o diferenţă semnificativă între cele două grupe, elevii din grupa a doua efectuând în medie mult mai mulţi paşi.

6. Observaţii, concluzii

• Problema de bază şi teoremele legate de aceasta au fost rezolvate şi analizate împreună cu elevii participanţi la tabere speciale de matematică, cu studenţi şi cu profesorii care au participat la cursuri de perfecţionare. Când problema a fost bine pusă şi activitatea a fost îndrumată corespunzător, participanţii au reuşit să descopere detaliile demonstraţiei.

• În literatura de specialitate găsim multe studii referitoare la importanţa folosirii diagramelor şi figurilor în rezolvarea problemelor (vezi [**32**] şi referinţele din această lucrare). Reprezentarea lui Poisson este un exemplu tipic pentru structurile ierarhice (vezi [**31**]), pe când reprezentarea cu bile de biliard poate fi considerată un fel de diagramă dinamică. În cazul nostru, elementul cheie al demonstraţiei rezultă din structura dinamică şi nu este prezent în structura ierarhică. Suntem convinşi că utilizarea diagramelor dinamice poate creşte eficienţa şi la multe alte demonstraţii.

• Problema studiată ne arată în mod clar cât de mult se poate rata înţelegerea aprofundată a problemei în cursul activităţilor didactice. Problemele concrete cu turnări pot fi rezolvate în mod direct, prin enumerarea stărilor posibile. Aceasta poate părea în clasă ca şi cum s-ar petrece vreo minune, făcând paşi şi ajungând dintr-o dată la rezultat. Din păcate, experienţa ne arată că majoritatea elevilor s-au obişnuit cu acest mod de lucru: pentru ei este absolut normal să obţină rezultatul fără înţelegere sau motivare. Acest fapt poate deveni un obstacol foarte serios în calea înţelegerii matematicii şi face practic imposibilă formarea unei mentalităţi de învăţare conştiente, active.

• Simulările pe calculator ne arată că ambele probleme de bază puteau fi soluţionate şi prin executarea paşilor aleatorii, deci rezultatul slab general nu poate fi explicat prin lipsa talentului matematic sau prin deficienţa aptitudinilor combinatorice. Pur şi simplu, elevii nu au avut răbdarea necesară pentru a efectua un număr corespunzător de paşi relativ simpli. Poate că înţelegerea problemei şi a eşecului ajută la perceperea sensului cuvintelor lui Jim Watkins: „A river cuts through rock, not because of its power, but because of its persistence.”[3]

[3] Un râu străpunge roca nu din cauza forţei, ci din cauza perseverenţei sale.

CAPITOLUL III

BEŢE DE CHIBRITURI ŞI PĂTRATE

1. Introducere

La baza acestui capitol stă proiectul lui Spencer Kagan, denumit „Să creăm pătrate” ([**12**], 15:4-15:9). În timpul acestei activităţi, elevii se împart în grupe de câte 4 şi fiecare elev primeşte 3 fâşii de hârtie identice (20 cm lungime, $1,52$ cm lăţime). Fiecare grupă trebuie să creeze (aranjeze) şi să deseneze configuraţii în care apar $1, 2, 3, \ldots$ pătrate respectând următoarele reguli:

- în configuraţia desenată fiecare fâşie de hârtie este importantă, adică dacă se înlătură una din ele, se schimbă numărul pătratelor din figură;
- fiecare grupă trebuie să folosească toate fâşiile de hârtie pe care le are la dispoziţie;
- nu există extremităţi libere, adică la fiecare capăt al unei fâşii se ataşează capătul altei fâşii;
- nu există acoperiri parţiale sau totale, adică fâşiile paralele nu au părţi care se suprapun – lucru care nu exclude intersecţia fâşiilor de hârtie neparalele.

În primele $15 - 20$ minute ale activităţii, elevii trebuie să aranjeze fâşiile de hârtie în diferite configuraţii, apoi timp $10 - 15$ minute să deseneze configuraţiile posibile. Apoi fiecare grupă trebuie să deseneze configuraţiile obţinute pe un poster comun. În locul fâşiilor de hârtie pot fi folosite beţişoare sau chibrituri mari.

În etapa următoare a activităţii, elevilor li s-a cerut să formuleze întrebări legate de activitatea lor (inclusiv despre configuraţiile obţinute), apoi să ordoneze problemele după gradul de dificultate (fără a cunoaşte soluţia lor, pe baza ipotezelor) şi din aceste probleme să aleagă câteva pe care cred că le pot rezolva şi să le rezolve. În continuare vom prezenta problemele formulate de elevi şi câteva soluţii.

2. Probleme care apar

Prima întrebare ce apare în mod firesc este dată de formularea imprecisă (deschisă) a problemei iniţiale:

PROBLEMA 1. Aflaţi numerele $n \in \mathbb{N}$ pentru care cele 12 fâşii de hârtie date se pot aranja fără a fi suprapuse parţial sau total, fără a exista capete libere, astfel încât să obţinem exact n pătrate?

Analizând cazuri particulare ale problemei, constatăm că aceasta nu este trivială, nici măcar atunci când avem la dispoziţie 12 fâşii de hârtie. O generalizare firească a problemei este cea în care numărul fâşiilor este $4m$, unde $m \in \mathbb{N}^*$. Aceasta conduce la următoarea problemă (formulată de aproape toate grupele de elevi):

PROBLEMA 2. Aflaţi numărul maxim de pătrate obţinute folosind 12 fâşii de hârtie identice, fără a le suprapune parţial sau total şi fără a crea extremităţi libere.

Această problemă se poate formula şi pentru un număr mai mare de fâşii de hârtie. În general, elevii găsesc soluţia acestei probleme destul de repede (fără demonstraţie).

PROBLEMA 3. Aflaţi numărul maxim de pătrate obţinute folosind $4m$ ($m \in \mathbb{N}^*$) fâşii de hârtie identice, fără a le suprapune parţial sau total şi fără a crea extremităţi libere.

Ultimele două probleme sunt accesibile, soluţia lor poate fi intuită uşor, de aceea marea majoritate a elevilor, după ce s-au gândit puţin, la sfârşitul activităţii iniţiale au desenat figura formată din numărul maxim de pătrate. De regulă, această figură este un pătrat. Fiecare latură a pătratului este împărţită în $2m-1$ părţi egale. Pentru $m = 3$ figura are forma unei reţele de 5×5 drepte, ca în figura 3.1 şi conţine în total 55 de pătrate.

Pentru a arăta că figura cu cele mai multe pătrate este cea intuită, vom demonstra câteva proprietăţi simple. Pentru aceasta observăm că figura ce are cele mai multe pătrate este întotdeauna un pătrat, pe care îl împărţim cu segmente într-o reţea de linii orizontale şi verticale. După această împărţire a lui, comparăm reţelele de drepte obţinute.

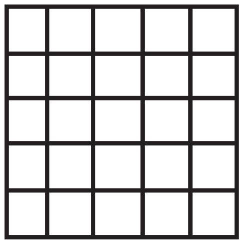


FIGURA 3.1. Configuraţia cu cele mai multe pătrate, obţinută din 12 fâşii identice

Acest raţionament ne conduce la reformularea problemei iniţiale sub forma de mai jos. Ea poate fi considerată ca parte a problemelor 2 şi 3, dar soluţia ei nu mai pare evidentă.

PROBLEMA 4. Considerăm un pătrat ce are două laturi orizontale şi două verticale. În interiorul acestui pătrat desenăm k segmente orizontale şi l segmente verticale, de lungime egală cu latura pătratului (ca în figura 3.2). Care este numărul maxim de pătrate ce se obţin astfel, dacă $k + l = p$ şi p este un număr natural constant dat?

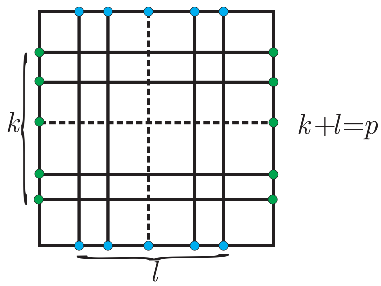


FIGURA 3.2. l segmente verticale şi k segmente orizontale, $k + l = p$ constant

PROBLEMA 5. Considerăm un pătrat ce are două laturi orizontale şi două verticale. În interiorul acestui pătrat desenăm k segmente orizontale şi l segmente verticale, de lungime egală cu latura pătratului (ca în figura 3.3). Care este numărul maxim de pătrate ce se obţin astfel, dacă k şi l sunt numere naturale date?

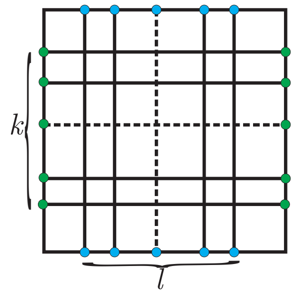


FIGURA 3.3. l segmente verticale şi k segmente orizontale, k şi l sunt constante

Pot să apară probleme diferite de cele de mai sus. Uneori, grupele de elevi care au participat au desenat acelaşi număr de pătrate pe configuraţii diferite; mai mult, s-a întâmplat ca o grupă să construiască mai multe figuri diferite cu acelaşi număr de pătrate. De aceea apare următoarea întrebare:

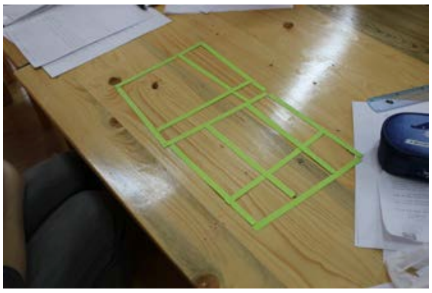
PROBLEMA 6. Dacă m şi n sunt date, câte figuri distincte putem construi folosind $4m$ segmente, pe care apar exact n pătrate?

Această problemă ne dă ocazia să lămurim ce înţelegem prin „figuri diferite". Problema este foarte dificilă, chiar şi pentru valori m şi n fixate (de exemplu $m = 3$ şi $n = 7$) – de aceea nu ne vom ocupa cu rezolvarea ei. În mod similar, se pune întrebarea: dacă pentru o valoare dată m, numărul maxim de pătrate este M_m, este adevărat că, pentru fiecare n între 1 şi M_m, putem construi o configuraţie în care apar exact n pătrate? Se pot formula generalizări de altă natură, spre exemplu: ce se întâmplă în cazul unei probleme tridimensionale (secţionăm un cub cu plane şi căutăm numărul maxim de cuburi nou create)? sau ce se întâmplă dacă desenăm pe figură dreptunghiuri asemenea cu un dreptunghi dat? etc. În cele ce urmează vom rezolva problemele 2, 3, 4 şi 5, precum şi problema 1, dar nu ne vom ocupa de problema 6 sau de alte probleme posibile.

3. Soluţii

Vom presupune, fără a restrânge generalitatea, că lungimea segmentelor este egală cu o unitate. La primul pas vom demonstra că,





dacă o figură conţine numărul maxim de pătrate, atunci figura respectivă este un pătrat, pe care îl vom împărţi în părţi mai mici cu ajutorul segmentelor rămase. Observăm că:

- Dacă latura celui mai mare pătrat dintr-o configuraţie nu are lungimea egală cu unitatea, atunci putem construi o figură în care există mai multe pătrate decât în configuraţia iniţială. Pentru a obţine această figură, este suficient să micşorăm latura celui mai mare pătrat, spre a deveni egală cu o unitate, apoi să prelungim segmentele mai scurte, create în interiorul pătratului, până la lungimea de o unitate. Astfel, se pot crea segmente libere, cu care pot fi construite pătrate noi, iar în pătratul micşorat vor fi cel puţin atâtea pătrate ca în pătratul iniţial. Această construcţie este reprezentată în figura 3.4. Folosind această metodă, figurile cu laturi mai mari de o unitate pot fi transformate în pătrate de latură egală cu unitatea şi diviziuni ale acestora.

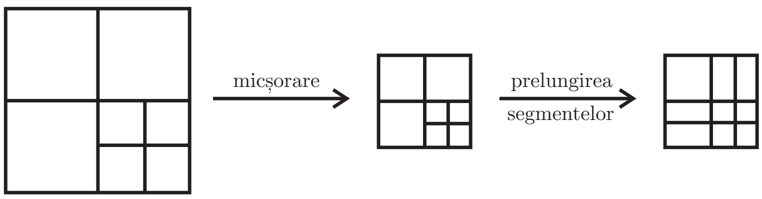


FIGURA 3.4. Micşorarea lungimii laturii şi prelungirea segmentelor

- Dacă lungimea laturii celui mai mare pătrat (N) este egală cu o unitate şi în afara acestui pătrat există un alt pătrat, atunci în interiorul lui N se poate construi copia micşorată a pătratului exterior şi în figura astfel formată numărul pătratelor va fi iarăşi mai mare decât în figura iniţială. Cea mai bună metodă pentru a realiza această configuraţie constă în micşorarea pătratului exterior până la mărimea pătratului celui mai mic ce apărea iniţial în N. Această construcţie este ilustrată în figura 3.5.
- Dacă lungimea laturii celui mai mare pătrat (N) este o unitate şi N intersectează alte pătrate, atunci prin translaţia segmentelor, ce intersectează laturile lui N, vom obţine figuri în care sunt mai multe pătrate decât în pătratul iniţial. Practic, realizăm copia micşorată a unui pătrat în interiorul

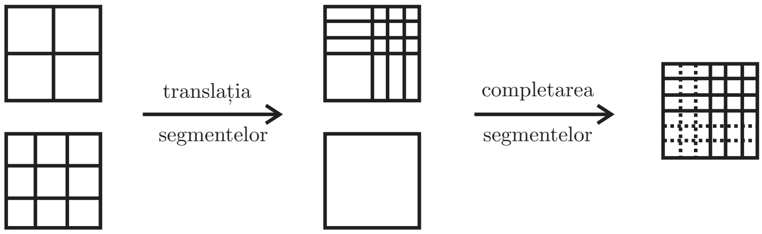


FIGURA 3.5. Înlăturarea pătratelor exterioare

celuilalt pătrat şi prelungim segmentele micşorate. Această construcţie este ilustrată în figura 3.6. Ea poate fi folosită şi pentru a înlătura mai multe pătrate care intersectează laturile lui N (mutându-le în interiorul lui N).

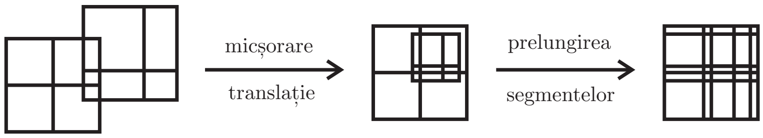


FIGURA 3.6. Îndepărtarea pătratelor unitate care intersectează pătratul iniţial

- Numărul pătratelor dintr-o figură poate fi mărit şi în cazul mai multor pătrate ce se intersectează ciclic între ele, dacă o copie micşorată a figurii determinate de celelalte se mută în interiorul unui pătrat.

Ţinând seama de cele de mai sus, este clar că, dacă într-o configuraţie numărul de pătrate create este maxim, atunci configuraţia respectivă este un pătrat cu laturi egale cu unitatea, care este împărţit în pătrate mai mici cu ajutorul unor segmente. Astfel, este suficient să numărăm pătratele formate pe una dintre grile (în general de formă neregulată) şi apoi să identificăm cazul în care acest număr ia cea mai mare valoare. Dificultatea acestui demers constă în faptul că pe o reţea de drepte oarecare trebuie să punem în evidenţă mărimile ce ne permit să numărăm pătratele care apar. Dacă avem nevoie de o caracterizare univocă a locului unei linii pe grilă (de exemplu pentru a le desena sau pentru a concepe un algoritm ce ar putea fi implementat), atunci observăm că e bine să indicăm coordonatele $x_1, x_2, \ldots, x_{l+2}$ şi $y_1, y_2, \ldots, y_{k+2}$ ale punctelor de diviziune de pe laturi[4]. Folosind aceste

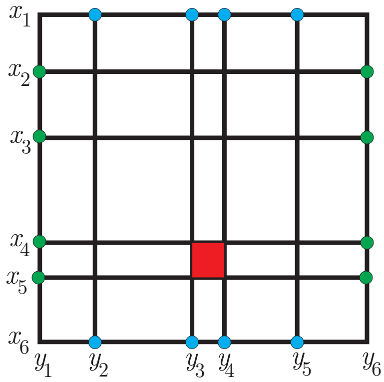


FIGURA 3.7. Coordonatele punctelor de diviziune

coordonate, vom stabili dacă un dreptunghi oarecare al reţelei este sau nu este pătrat. Dacă dreptele suport ale laturilor dreptunghiului trec prin punctele de diviziune de coordonate $x_p < x_q$ şi $y_s < y_t$, atunci condiţia necesară şi suficientă pentru ca dreptunghiul considerat să fie un pătrat este:

$$x_q - x_p = y_t - y_s.$$

Astfel, numărul pătratelor se reduce la calculul tuturor diferenţelor de forma $x_q - x_p$, respectiv $y_t - y_s$, pentru toate elementele mulţimilor

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{l+2}\} \text{ şi } Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_{k+2}\}$$

şi la numărarea concordanţelor între diferenţele calculate. De exemplu, în cazul $X = \{0, 1/2, 1\}$ şi $Y = \{0, 1/2, 1\}$ diferenţele dintre elementele mulţimii X sunt $1/2, 1/2, 1$, iar cele dintre elementele lui Y sunt $1/2, 1/2, 1$. Numărul concordanţelor posibile este 5 (1 se potriveşte numai cu 1, însă fiecare $1/2$ obţinut din elementele lui X corespunde cu oricare $1/2$ obţinut din elementele lui Y). Rezultă că, împărţind pătratul cu segmente care unesc mijloacele laturilor sale (paralele cu laturile pătratului), se formează 5 pătrate. Soluţia aceasta pare destul de complicată, dar ea are la bază un algoritm ce poate

[4]Dacă luăm în calcul şi laturile, avem $k+2$ respectiv $l+2$ segmente. Vârfurile au fost considerate şi ele puncte de diviziune.

fi uşor transformat într-un program de calculator. Algoritmul este prea greoi pentru a-l folosi în construcţia unui raţionament pentru rezolvarea problemelor date, de aceea în continuare îl vom simplifica. Condiţia $x_q - x_p = y_t - y_s$ este echivalentă cu

$$x_q + y_s = x_p + y_t,$$

deci este suficient să găsim valori egale ale sumelor de forma $x_q + y_s$. Numărul maxim de pătrate corespunde cazului în care apar cele mai multe egalităţi între aceste sume. Rezultă că, dacă din mulţimile

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_l\}, \qquad Y = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$$

construim mulţimea

$$X + Y = \{x_q + y_s | 1 \le q \le l, 1 \le s \le k\},$$

atunci numărul maxim de pătrate se obţine când în mulţimea $X + Y$ numărul elementelor este minim. Aceasta este ideea de bază a demonstraţiilor ce urmează. Pentru o înţelegere cât mai bună a raţionamentelor vom considera fiecare problemă separat.

Soluţia problemei 2. Este suficient să rezolvăm problema 4 pentru $p = 8$ şi pentru aceasta este de ajuns să rezolvăm problema 5 pentru perechile $(0, 8), (1, 7)$, $(2, 6), (3, 5)$ şi $(4, 4)$.

În cazul $(4, 4)$ $0 = x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 = 1$ şi $0 = y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < y_5 < y_6 = 1$, deci

$$0 = x_1 + y_1 < x_2 + y_1 < x_3 + y_1 < x_4 + y_1 < x_5 + y_1 < x_6 + y_1 <$$

$$< x_6 + y_2 < x_6 + y_3 < x_6 + y_4 < x_6 + y_5 < x_6 + y_6 = 2.$$

De aici rezultă că $|X + Y| \ge 11$. În acelaşi timp, între sumele de forma $x_q + y_s$ suma $s_1 = x_1 + y_1$ poate să apară o singură dată, suma $s_2 = x_2 + y_1$ de cel mult două ori, suma $s_3 = x_3 + y_1$ de cel mult trei ori şi în general suma $s_u = x_u + y_1$, $1 \le u \le 6$ poate apărea de maxim u ori. În mod similar, suma $s_{6+v-1} = x_6 + y_v$ poate apărea cel mult de $(7 - v)$ ori, deci numărul maxim al pătratelor ce apar pe figură este:

$$C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 + C_6^2 + C_5^2 + C_4^2 + C_3^2 + C_2^2 = 55.$$

Pentru a determina toate figurile în care numărul pătratelor este cel maxim, trebuie să examinăm, prin raţionamentul de mai înainte, posibilitatea ca fiecare sumă să apară de cele mai multe ori posibil. Sumele $s_1, s_2, \ldots, s_6$ se află în intervalul $[0, 1]$, iar sumele $s_6, s_7, \ldots, s_{11}$ în intervalul $[1, 2]$; deci, pentru ca sumele de forma $x_1 + y_i$ să nu creeze elemente noi în mulţimea $X + Y$, în afara celor 11 elemente deja enumerate, este necesară condiţia

$$\{y_2, y_3, y_4, y_5\} \subseteq \{x_2, x_3, x_4, x_5\}.$$

De asemenea, este necesar ca:

$$\{x_2, x_3, x_4, x_5\} \subseteq \{y_2, y_3, y_4, y_5\},$$

deci $x_i = y_i$, $1 \leq i \leq 6$. În acelaşi timp, $x_2 + x_5 < x_2 + x_6$ şi astfel suma $x_2 + x_5$ poate fi între cele 11 sume enumerate, numai dacă $x_2 + x_5 \leq 1$. În acest caz, însă, sumele $x_2 + x_1$, $x_2 + x_2$, $x_2 + x_3$, $x_2 + x_4$ şi $x_2 + x_5$ se situează între x_2 şi 1. Din acest motiv, aceste sume se vor afla între cele 11 elemente enumerate doar dacă $x_5 = 1 - x_2$, $x_4 = x_5 - x_2 = 1 - 2x_2$, $x_3 = x_4 - x_2 = 1 - 3x_2$ şi $x_2 = 1 - 4x_2$, deci $x_i = y_i = \frac{i-1}{5}$, dacă $1 \leq i \leq 6$. În cazul acestor numere, numărul pătratelor care apar pe figura respectivă este într-adevăr 55, adică numărul maxim de pătrate pentru $k = l = 4$.

Dacă $k = 3$ şi $l = 5$, atunci $0 = x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 = 1$ şi $0 = y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < y_5 < y_6 < y_7 = 1$, deci

$$0 = x_1 + y_1 < x_1 + y_2 < x_1 + y_3 < x_1 + y_4 < x_1 + y_5 <$$
$$< x_1 + y_6 < x_1 + y_7 (= 1) < x_5 + y_2 < x_5 + y_3 <$$
$$< x_5 + y_4 < x_5 + y_5 < x_5 + y_6 < x_5 + y_7 = 2.$$

Astfel $|X + Y| \geq 13$. Totodată, între sumele de forma $x_q + y_s$ suma $x_1 + y_u$ poate apărea de cel mult u ori, pentru $u \leq 4$, de 4 ori în cazul în care $u \in \{5, 6\}$ şi de 5 ori dacă $u = 7$. Analog, suma $x_5 + y_v$ poate apărea cel mult o singură dată în cazul în care $v \geq 5$ şi de $6 - v$ ori, dacă $2 \leq v \leq 4$. Rezultă că numărul pătratelor poate fi cel mult:

$$C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + C_4^2 + C_4^2 + C_5^2 + C_4^2 + C_3^2 + C_2^2 = 42.$$

Acest lucru poate fi realizat dacă $x_i = y_i = \frac{i-1}{6}$, $1 \leq i \leq 4$ şi $y_i = \frac{i-1}{6}$, $5 \leq i \leq 7$. Figura 3.8 reprezintă o configuraţie corespunzătoare acestor valori.

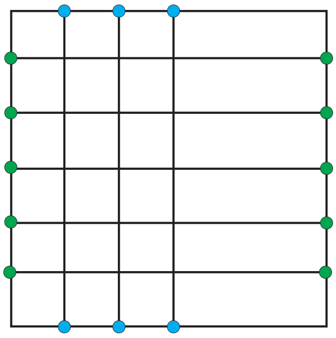


FIGURA 3.8. Numărul maxim al pătratelor pentru $k = 3$ şi $l = 5$

Pe baza unui raţionament asemănător, pentru $k = 2, l = 6$ se formează maxim 24 de pătrate, pentru $k = 1, l = 7$ maxim 11 pătrate şi pentru $k = 0, l = 8$ avem un singur pătrat. Astfel, numărul maxim de pătrate ce se pot construi cu 12 segmente este 55. Acest număr poate fi obţinut pentru $k = l = 4$ şi grila echidistantă (vezi figura 3.1). □

SOLUŢIA PROBLEMEI 3. Analog cu demonstraţia de mai sus, pentru $0 \leq k \leq 4m - 4$ şi $l = 4m - 4 - k$ este suficient să determinăm numărul maxim de pătrate şi apoi să comparăm aceste numere maximale. Repetând raţionamentul anterior, pentru fiecare k, l fixat obţinem cele mai multe pătrate în cazul împărţirii uniforme, iar când k şi l sunt variabile, atunci cele mai multe pătrate se vor obţine pentru $k = l = 2m - 2$. În acest caz, numărul pătratelor este $\frac{m(2m-1)(4m-1)}{3}$. Detaliile demonstraţiei le lăsăm în seama cititorului. □

SOLUŢIA PROBLEMEI 4. Dacă $p = 2w$, $w \in \mathbb{N}$, cele mai multe pătrate apar pentru $k = l = w$ şi în cazul împărţirii uniforme. În acest caz, numărul pătratelor este: $\frac{(w+1)(w+2)(2w+3)}{6}$. Dacă $p = 2w + 1$, $w \in \mathbb{N}$, cele mai multe pătrate apar pentru $k = w$, $l = w + 1$ în cazul dreptelor trasate în punctele de diviziune $x_i = y_i = \frac{i-1}{w+2}$, $1 \leq i \leq w+1$, respectiv $y_i = \frac{i-1}{w+2}$, $i > w + 1$ şi $x_{w+1} = 1$. În acest caz, numărul pătratelor va fi $\frac{(w+1)(2w^2+10w+6)}{6}$. □

SOLUŢIA PROBLEMEI 5. Dacă $k \leq l$, atunci cele mai multe pătrate apar pentru $x_i = y_i = \frac{i-1}{l+1}$, $1 \leq i \leq k+2$ şi $y_i = \frac{i-1}{l+1}$, $i \geq k+2$. În acest caz, numărul pătratelor este $\frac{(k+1)(k+2)}{2} + \sum_{j=0}^{k-1} (k-j)(l+1-j)$. $\square$

SOLUŢIA PROBLEMEI 1. În soluţia problemei 2, am constatat că în figură apar cel mult 55 pătrate. Pe de altă parte, nu pentru oricare $n \leq 55$ există o configuraţie în care apar exact n pătrate. Folosind un raţionament similar cu cel utilizat pentru a rezolva problema 2, putem demonstra că nu există nicio configuraţie în care apar exact n pătrate, dacă $47 < n < 55$ sau $44 < n < 47$. Pentru celelalte valori ale lui n figurile din anexă dau o soluţie pentru fiecare. $\square$

4. Comentarii, concluzii

• Activitatea prezentată în introducere a fost efectuată cu mai multe grupe de elevi. La activitate au participat elevi de liceu, studenţi şi grupe mixte alcătuite din elevi şi studenţi. Am încercat activitatea într-o clasă obişnuită, precum şi în tabere speciale de matematică (de exemplu tabăra SimpleX de la Rimetea din iunie 2010). În majoritatea cazurilor, elevii au rezolvat parţial problema 1 şi au formulat problemele 2, 3 şi 6, eventual şi alte probleme. În cele mai multe cazuri, elevii şi-au dat seama de importanţa reprezentărilor corespunzătoare, dar nu au observat că merită să lucreze cu mulţimea $X + Y$. Cu puţin ajutor, însă, elevii au reuşit să găsească marginea inferioară a cardinalului mulţimii $X + Y$ şi prin acesta au găsit şi configuraţiile corespunzătoare.

• Problemele astfel formulate oglindesc una din dificultăţile fundamentale ale predării matematicii bazate pe investigări: într-un mediu propice, elevii formulează probleme foarte complexe, interesante, uneori complicate sau chiar nerezolvabile. Aceasta este o formă de manifestare naturală a curiozităţii. În general, elevii formulează mult mai multe probleme în raport cu numărul celor pentru care pot obţine soluţii sau, eventual, pentru care profesorul poate să propună soluţii (să nu uităm că timpul este limitat, deci multe exerciţii nu pot fi rezolvate din cauza lipsei de timp). Din acest motiv, pe parcursul unei activităţi de acest gen, rolul profesorului este cu totul diferit faţă de activităţile frontale, tradiţionale. Profesorul trebuie să-i ajute pe elevi în alegerea problemei ce trebuie studiată mai temeinic; de aceea este foarte important ca profesorii să aibă experienţă în activităţi de acest gen. Experienţa profesorului are un rol important şi pentru a evita cazurile extreme (exerciţii prea uşoare sau prea complicate). În clasă apar deseori probleme cu totul diferite decât cele planificate iniţial de către profesor. Tocmai din această cauză, alegerea problemei şi a mediului de învăţare este o sarcină grea pentru profesori. Într-un context de probleme planificat corespunzător, aproape întotdeauna apar şi acele probleme care merită să fie studiate (de exemplu cazul configuraţiei care conţine cele mai multe pătrate).

• În urma analizei rezolvării problemelor, observăm că am realizat câţiva paşi esenţiali, şi anume:

- am formulat problema geometrică, câteva cazuri specifice şi probleme parţiale;
- am creat un model algebric (am introdus variabilele adecvate şi mulţimea $X + Y$);
- în modelul algebric am rezolvat problema (am determinat situaţia în care mulţimea $X+Y$ are cele mai puţine elemente);
- pe baza soluţiei obţinute din modelul algebric, am rezolvat şi problema geometrică iniţială.

Acest proces seamănă foarte mult cu modelul Blum al modelării (vezi [**13**]), unde la început creăm un model de situaţie, apoi un model matematic, rezolvăm modelul matematic şi în final, pe baza soluţiei obţinute din model, dăm un răspuns la întrebarea apărută în modelul de situaţie (sau eventual la problema iniţială). Această similitudine indică faptul că pe parcursul rezolvării problemelor putem activa aceleaşi mecanisme ca pe parcursul activităţilor de modelare. Totul depinde, bineînţeles, de natura problemelor de rezolvat.

• Activitatea desfăşurată în echipe mixte (elevi+studenţi) este foarte utilă din punctul de vedere al studenţilor, deoarece ei experimentează situaţia şi ca viitori profesori. Ei sunt ajutaţi de această activitate în înţelegerea fenomenelor care au loc şi a diferitelor roluri, în clarificarea problemelor şi în perceperea modului de gândire al elevilor.

Datorită faptului că aparţin aceleiaşi echipe, elevii devin mult mai comunicativi cu studenţii (sau chiar cu profesorul), care sunt acum colegii lor, faţă de alte situaţii. Acest lucru este avantajos pentru ambele părţi, fiindcă oferă posibilitatea unei colaborări diferite faţă de cea de la orele obişnuite. Suntem convinşi că uneori merită să lucrăm şi în echipe mixte (studenţi+elevi sau profesori+elevi), eventual cu participarea mai multor profesori de specialitate.

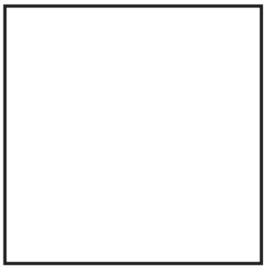
• Cazuri particulare ale problemelor 1, 2 şi 6 au fost formulate de aproape toate grupele ce au participat la activităţi, dar numărul grupelor care au reuşit să găsească răspunsuri complete sau să formuleze ipoteze referitoare la rezolvare a fost mult mai mic. În cadrul orelor de matematică obişnuite, acest fapt ar crea numeroase probleme, având în vedere că foarte puţine dintre problemele formulate au fost rezolvate în întregime; deci, în cazul unei evaluări centrate strict pe rezultat, eficienţa poate fi considerată slabă (elevii formulează 10 probleme şi rezolvă una singură). Pe de altă parte, numărarea pătratelor care apar în configuraţii oferă un prilej bun pentru exersarea şi perfecţionarea tehnicilor de calcul (fiecare echipă a examinat figurile construite de celelalte echipe şi a decis dacă acestea sunt corecte sau nu). Pe parcursul activităţii, elevii rezolvă în mod absolut firesc probleme care apar şi în materia şcolară (numărarea pătratelor pe o grilă dreptunghiulară regulată); în plus, mediul diferit duce uneori la găsirea unor soluţii de cu totul altă natură. Să ne gândim că pătratele vizibile pe reţeaua de 5×5 drepte sunt numărate în general după mărimea lor şi astfel obţinem numărul maxim de pătrate

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55.$$

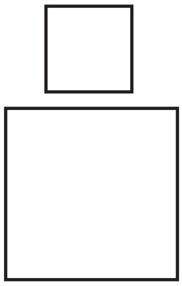
Pe parcursul activităţilor au apărut practic două tehnici de numărare total diferite. În acelaşi timp, faptul că elevii reuşesc să rezolve problema parţial şi că intuiesc soluţia corectă produce în majoritatea elevilor o disonanţă cognitivă ([**14**]), care îi stimulează în discutarea ulterioară a rezolvării problemei.

• Programa predării matematicii în România cunoaşte în ultimii ani o schimbare completă de mentalitate. Programa iniţială, axată în mod aproape exclusiv pe conţinut, se orientează mai recent spre dezvoltarea competenţelor, încearcă să se centreze pe elev şi pune un accent deosebit pe învăţarea bazată pe curiozitatea elevilor (vezi de exemplu planul de învăţământ pentru clasa a 12-a, aprobat în anul 2006, sau programa completă destinată claselor 5-8). Acest lucru nu poate fi realizat fără regândirea conţinuturilor şi a activităţilor concrete. Reorganizarea conţinuturilor fără o experienţă suficientă este inutilă, în unele cazuri poate fi chiar dăunătoare. Pe baza activităţilor de până acum (vezi [**2**], [**4**]), putem afirma că planul de învăţământ poate fi restructurat în întregime, astfel încât să se impună viziunea bazată pe curiozitatea elevilor. Unul din cele mai mari riscuri ale reorganizării este faptul că esenţa se poate pierde tot atât de uşor în cazul noului plan de învăţământ ca şi în cazul vechii programe şi a vechii mentalităţi. Mai mult, în cadrul unei organizări a învăţământului care nu urmează îndeaproape tradiţiile, personalitatea, flexibilitatea, creativitatea şi eventualele lipsuri profesionale ale profesorului se evidenţiază mai mult decât în cadrul predării tradiţionale, bazată în mare parte pe predare frontală. Din acest motiv există pericolul ca învăţământul fondat pe o concepţie nouă să dea dovadă la început de o eficienţă mult mai redusă, decât cel tradiţional. Acest fenomen poate fi contracarat doar prin recrutarea, selectarea, instruirea practică a viitorilor dascăli şi prin sprijinirea corpului profesoral existent în realizarea unei transformări de esenţă. Concepţia conform căreia aproape oricine poate deveni profesor şi că profesorii pot fi schimbaţi prin cursuri de formare (care nu se desfăşoară în şcoli) este un miraj periculos.

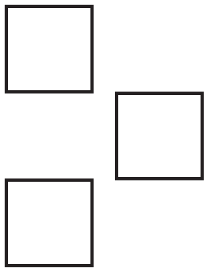
Anexă



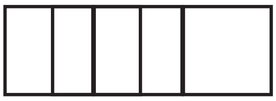
n=1



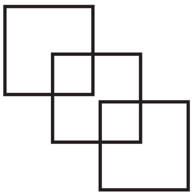
n=2



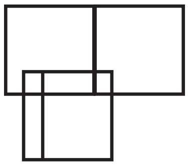
n=3



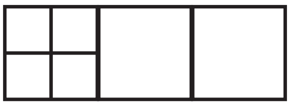
n=4



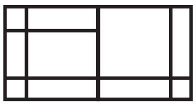
n=5



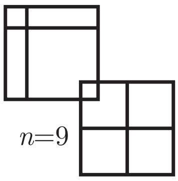
n=6



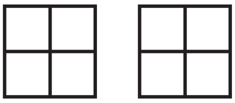
n=7



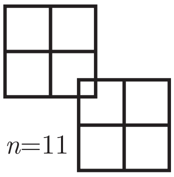
n=8



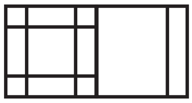
n=9



n=10



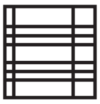
n=11



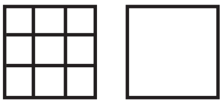
n=12

OBSERVAŢIE. Pe unele figuri nu sunt trecute dimensiunile, deci verificare acestora necesită o analiză suplimentară. Astfel acestea pot fi folosite şi pentru activităţi independente.

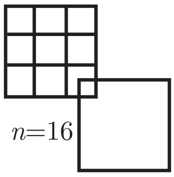
$n=13$



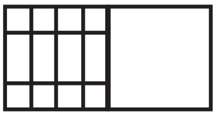
$n=14$



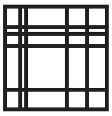
$n=15$



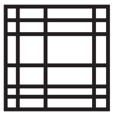
$n=16$



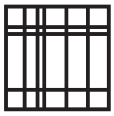
$n=17$



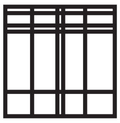
$n=18$



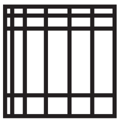
$n=19$



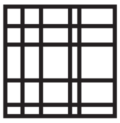
$n=20$



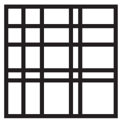
$n=21$



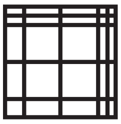
$n=22$



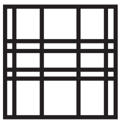
$n=23$



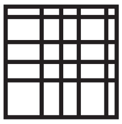
$n=24$



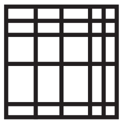
$n=25$



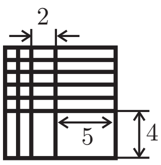
$n=26$



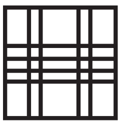
$n=27$



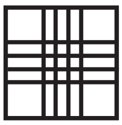
$n=28$



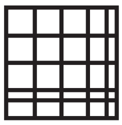
$n=29$



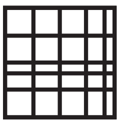
$n=30$



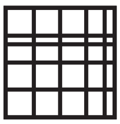
$n=31$



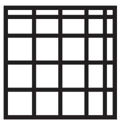
$n=32$



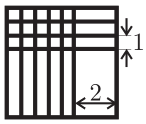
$n=33$



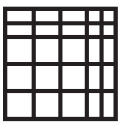
$n=34$



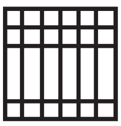
$n=35$



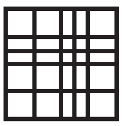
$n=36$



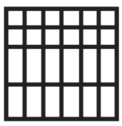
$n=37$



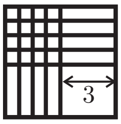
$n=38$



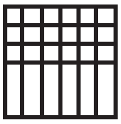
$n=39$



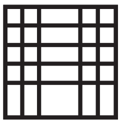
$n=40$



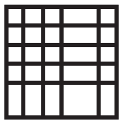
n=41



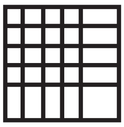
n=42



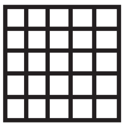
n=43



n=44



n=47



n=55

CAPITOLUL IV
OPERAŢII DE BAZĂ

1. Înţelegem sau ştim?

Unul dintre obiectivele fundamentale ale predării matematicii în şcoala elementară şi în clasele V-VIII este asimilarea de către elevi a proprietăţilor operaţiilor cu numere (naturale, întregi, raţionale), exersarea paşilor ce duc la obţinerea rezultatului acestor operaţii şi dezvoltarea aptitudinilor de calcul la nivel integrat din punct de vedere funcţional. În vederea atingerii acestui scop, deseori elevilor li se predau algoritmi gata fabricaţi. Adunarea, scăderea, înmulţirea, împărţirea, extragerea rădăcinii pătrate apar ca algoritmi (sau reguli), care trebuie învăţaţi pe de rost. Acest lucru are anumite avantaje, deoarece, dacă elevii înţeleg repede, pricep şi asimilează cu puţin exerciţiu tehnicile necesare, se pot ocupa apoi de lucruri mai complicate. Din păcate, în majoritatea cazurilor, acest avantaj rămâne neexploatat. În acelaşi timp, există şi câteva aspecte negative: majoritatea elevilor riscă să-şi formeze o imagine falsă despre matematică, pentru că nu pot înţelege că matematica nu înseamnă doar rezultatul final (algoritmul finit, regula, teoremele, noţiunile), ci include şi activitatea matematică, ce are ca rezultat final produsele finite. Un alt aspect negativ foarte important este că, prin această metodă, ne concentrăm doar asupra laturii tehnice a lucrurilor şi izolăm aproape total conţinutul ideatic, cu toate că asimilarea aspectelor formale (executarea operaţiilor, formulele de calcul prescurtat etc.) nu garantează dezvoltarea mecanismelor de gândire. Trebuie să ne concentrăm şi asupra dezvoltării mecanismelor de gândire, a schemelor cognitive generale. Modul cel mai simplu este să arătăm nu numai cum funcţionează algoritmii şi la ce pot folosi, dar şi cauza şi limitele funcţionării lor. Dacă nu facem acest lucru, elevii – în cazul cel mai fericit – vor şti să folosească, dar nu vor înţelege ceea ce le predăm. În acest capitol încercăm să „redescoperim” algoritmii operaţiilor fundamentale, folosind câteva activităţi bazate pe diferite tipuri de reprezentare şi pe manipularea obiectelor concrete.

2. Probleme

În timpul acestei activităţi avem nevoie de câteva (3-4) obiecte de tipuri diferite şi din fiecare tip trebuie să avem destul de multe obiecte identice. Putem folosi boabe de fasole de culori diferite, bomboane, nasturi, benzi de hârtie etc. Prin convenţie, alegem obiectele (simbolurile) care desemnează unităţile, zecile, sutele, miile, respectiv zecile de mii, pentru că în timpul acestei activităţi vom reprezenta cifrele prin obiecte. Pentru simplificare, în descrierea noastră utilizăm simboluri, dar din fotografii se va vedea că în cadrul activităţilor practice realizate cu studenţii, am folosit benzi de hârtie colorate sau nasturi coloraţi din plastic pentru copii mici. Tabelul 9 cuprinde simbolurile pe care le-am folosit şi valorile numerice corespunzătoare.

Valoare numerică	1	10	100	1000	10000
Simbol	$\bigcirc$	$\square$	$\triangle$	∇	$\Diamond$

TABELUL 9. Simbolurile folosite şi valorile lor numerice

O problemă de bază este reprezentarea zecimală a numerelor cu ajutorul simbolurilor. Pentru aceasta, le cerem copiilor să reprezinte diverse numere cu ajutorul obiectelor existente. De exemplu:

PROBLEMA 1. Reprezentaţi numerele 12, 23, 38, 49, 52, 98, 124, 342, 891, 1871 şi 12321 cu ajutorul obiectelor (simbolurilor), folosind semnificaţia acestora.

Scopul principal al acestei probleme este să-i facă pe elevi să intuiască posibilităţile de reprezentare, să observe că reprezentarea care utilizează cele mai puţine simboluri este reprezentarea zecimală. Dacă nu-şi dau seama singuri de acest lucru este bine să le propunem probleme auxiliare asemănătoare cu următoarea:

PROBLEMA 2. Câte moduri diferite există pentru a reprezenta cu ajutorul simbolurilor date numărul 24? Dar 132?

În tabelul 10 sunt date câteva soluţii distincte ale primei probleme. Observăm că, în general, acelaşi număr poate fi reprezentat în mai multe moduri, iar dintr-o anumită reprezentare putem obţine alta dacă transformăm simbolurile: folosind mai multe simboluri cu valoare mai mică în locul unuia cu valoare mai mare, sau unul care are o valoare mai mare în locul mai multor obiecte cu valoare mai mică.

Număr	Reprezentare prin simboluri
12	○○○○○○○○○○○○
	□○○
23	○○○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○○
	□○○○○○○○○○○○○○
	□□○○○
38	□□□○○○○○○○○
124	△□□○○○○
342	△△△□□□□○○
1871	▽△△△△△△△△□□□□□□□○
12321	◊▽▽△△△□□○

Tabelul 10. Reprezentarea numerelor prin obiecte sau simboluri

Utilizând reprezentarea prin simboluri putem defini adunarea, scăderea, înmulţirea şi împărţirea. Scopul nostru este să ajungem de la nivelul operaţiilor cu obiecte la algoritmi eficienţi. În prima fază executăm, cu ajutorul reprezentărilor, operaţii de bază (adunare, scădere, înmulţire, împărţire) fără a cunoaşte algoritmii. În faza următoare urmărim pas cu pas operaţiile efectuate cu simboluri, folosindu-ne şi de cifre; apoi încercăm să formulăm un algoritm utilizabil în general, doar cu ajutorul reprezentării prin cifre.

Observaţie. Este util să organizăm căutarea soluţiilor problemelor ca activitate de grup, să cerem grupelor – ca problemă de bază – să descopere cum se efectuează operaţii diferite şi apoi să le cerem să-şi împărtăşească experienţele prin metoda mozaicului.

Problema 3. Folosind reprezentarea numerelor cu ajutorul simbolurilor, aflaţi rezultatele operaţiilor de mai jos

$a)$ $14+39$; $b)$ $36+87$; $c)$ $168+277+59$;
$d)$ $246-98$; $e)$ $526-349$; $f)$ $1001-213$.

SOLUŢIE. a) În prima fază reprezentăm termenii sumei cu ajutorul simbolurilor

$$14 \quad \sim \quad \square \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc$$

$$39 \quad \sim \quad \square\square\square \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\,.$$

Dacă adunăm 14 cu 39 reprezentarea sumei este

$$\square\square\square\square \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc$$

În această reprezentare avem mai mult de 10 unităţi, prin urmare putem înlocui 10 unităţi cu un zece, iar rezultatul devine

$$\square\square\square\square\square \bigcirc\bigcirc\bigcirc,$$

adică 53. Deci $14 + 39 = 53$.

OBSERVAŢIE. Este important ca la început să efectuăm operaţiile cu obiecte (simboluri) şi să citim rezultatul din reprezentarea concretă.

b) Reprezentarea termenilor sumei este

$$36 \quad \sim \quad \square\square\square \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc \text{ şi}$$

$$87 \quad \sim \quad \square\square\square\square\square\square\square\square \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc,$$

deci

$$36+87 \quad \sim \quad \square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\,.$$

Observăm că am putea efectua schimbările şi de la celălalt capăt – să schimbăm 10 zeci cu o sută, apoi zece unităţi cu un zece. Reprezentarea rezultatului va fi

$$\triangle\square\square \bigcirc\bigcirc\bigcirc,$$

adică $36 + 87 = 123$. Bineînţeles, vom avea acelaşi rezultat şi în cazul în care schimbăm prima dată unităţile în zeci, apoi zecile în sute.

c) Reprezentarea termenilor sumei este

$$168 \quad \sim \quad \triangle\square\square\square\square\square\square \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc,$$

$$277 \quad \sim \quad \triangle\triangle\square\square\square\square\square\square\square \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc \text{ şi}$$

$$59 \quad \sim \quad \square\square\square\square\square \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc,$$

deci

$$\begin{aligned}168+277+59 \quad \sim \quad & \triangle\triangle\triangle\\ & \Box\Box\Box\Box\Box\Box\Box\Box\Box\Box\Box\Box\Box\Box\Box\Box\Box\Box\\ & \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\\ & \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\\ & \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc.\end{aligned}$$

Dacă schimbăm 10 zeci cu o sută şi 20 de unităţi cu două zeci, reprezentarea rezultatului va fi

$$\begin{aligned}168+277+59 \quad \sim \quad & \triangle\triangle\triangle\triangle\\ & \Box\Box\Box\Box\Box\Box\Box\Box\Box\Box\\ & \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc.\end{aligned}$$

Aceasta nu este cea mai simplă reprezentare, deci trebuie să înlocuim în continuare 10 zeci cu o sută. Astfel, rezultatul va fi

$$168+277+59 \quad \sim \quad \triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\,\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc,$$

adică $168+277+59=504$. Observăm că transformările pot fi efectuate în ordine aleatorie, rezultatul fiind acelaşi. Dacă vrem să schimbăm fiecare tip cel mult o dată, este indicat să începem cu transformarea unităţilor şi să continuăm cu zecile şi aşa mai departe. Din acestea rezultă, practic, algoritmul adunării, dacă descriem procedeul cu cifre.

d) Una dintre reprezentările posibile ale lui 246 este $\triangle\triangle\Box\Box\Box\Box\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc$, din care ar trebui să scădem 98, adică $\Box\Box\Box\Box\Box\Box\Box\Box\Box\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc$. Pentru că reprezentarea lui 246 nu conţine atâtea unităţi ca reprezentarea lui 98, e util să transformăm o unitate mai mare. Deci un $\Box$ va fi înlocuit cu 10 $\bigcirc$. Astfel, din numărul

$$\triangle\triangle\Box\Box\Box\,\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc$$

trebuie să scădem $\Box\Box\Box\Box\Box\Box\Box\Box\Box\,\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc$. Unităţile pot fi scăzute, deci în continuare din numărul

$$\triangle\triangle\Box\Box\Box\,\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc$$

trebuie să scădem $\Box\Box\Box\Box\Box\Box\Box\Box\Box$. Deoarece reprezentarea din care scădem nu conţine destule zeci, vom transforma 100 în zeci. Din numărul

$$\triangle\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc$$

putem scădea $\square\square\square\square\square\square\square\square\square$, iar rezultatul va fi

$$\triangle\square\square\square\square\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc,$$

adică 148. Observăm că scăderea poate fi efectuată şi de data aceasta în mai multe feluri; am fi putut transforma prima dată o sută şi numai la sfârşit zecile, sau puteam să schimbăm o sută în unităţi şi pe urmă să transformăm restul. Dacă dorim să obţinem rezultatul cu un număr minim de paşi şi să determinăm o cifră a rezultatului într-un singur pas, atunci trebuie să începem cu unităţile şi să lucrăm la fiecare pas cu elemente (obiecte, simboluri sau cifre) ce reprezintă următoarea mărime superioară. Astfel, obţinem algoritmul cunoscut al scăderii.

e) Vom descrie acum scăderea $526 - 349$ prin cifre, dar ne gândim pe parcurs şi la operaţiile efectuate prin reprezentări. 526 conţine doar 6 unităţi, din care nu putem scădea 9, deci vom schimba un zece şi din cele 16 unităţi vom scădea 9. Astfel, ne rămân 7 unităţi, care indică numărul unităţilor din rezultat. Din cele 5 sute şi 1 zece rămaşi trebuie să scădem 4 zeci şi 3 sute. Pentru aceasta schimbăm o sută în zeci, iar din cele 11 zeci scădem 4 zeci. Restul de 7 zeci indică numărul zecilor din rezultat. Din restul de 4 sute rămase scădem 3 sute şi obţinem 1 sută, adică rezultatul va fi 177.

f) În cazul scăderii $1001 - 213$ trebuie să descompunem mia din reprezentarea lui 1001 astfel încât să avem cel puţin 10 unităţi. Putem obţine acest lucru prin descompunerea

$$1000 = 10 \cdot 100 = 9 \cdot 100 + 10 \cdot 10 = 9 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 10 = 990 + 10$$

(prima dată o descompunem în 10 sute, apoi 1 sută în 10 zeci şi în sfârşit schimbăm 1 zece în unităţi). În acest fel, trebuie să efectuăm scăderea $99(11) - 213$, unde parantezele exprimă că numărul unităţilor este 11. Această operaţie este echivalentă cu scăderea $998 - 210$, care are ca rezultat 788. □

Observaţie. Efectuarea operaţiilor de mai sus ne-a fost utilă pentru a înţelege paşii executării adunării şi scăderii. Se cuvine să le efectuăm în cadrul activităţii şi să-i lăsăm pe elevi să analizeze posibilităţile de care dispun, eventual să le dăm un număr suficient de probleme pentru a-i convinge că algoritmul cunoscut (pe care mulţi elevi îl vor descoperi ei înşişi în cursul activităţii) este într-adevăr cel mai eficient posibil. Prin aceasta demonstrăm şi funcţionarea unui principiu matematic general - exigenţa matematicii cu privire la puritatea şi ordinea internă, potrivit căreia la orice problemă trebuie să propunem soluţia cea mai simplă şi totodată generală. Aceasta poate însemna pentru elevi o importantă învăţătură strategică pentru viitor, care nu ar putea fi identificată doar prin învăţarea algoritmilor gata făcuţi. Atragem atenţia asupra acestui lucru pentru că, în calitate de profesori, trebuie să fim conştienţi de informaţia secundară transmisă de metodele alese de noi, dincolo de conţinutul obiectivului principal. Pe termen lung, aceste informaţii secundare vor contribui în mare măsură la dezvoltarea mecanismelor gândirii, la formarea opiniei. Unul dintre trucurile fundamentale ale predării prin investigare este reprezentarea în cadrul unei activităţi concrete a unor fenomene care la început pot fi calificate secundare şi care constituie sursa unor noi întrebări şi motivaţii. Asemenea unei excursii, nu este important doar ţelul de atins – frumuseţile ni se dezvăluie de multe ori în timpul mersului.

Următoarele două probleme au ca obiectiv descoperirea algoritmului împărţirii şi al înmulţirii.

Problema 4. Folosind reprezentările numerelor, efectuaţi împărţirile de mai jos şi apoi formulaţi un algoritm general pentru executarea împărţirii

a) 96:3; b) 385:7; c) 4164:12; d) 24123:43.

Soluţie. a) Reprezentarea lui 96 este

□□□□□□□□□ ○○○○○○,

care trebuie să fie împărţită în 3 grupuri identice. Putem obţine acest lucru dacă reorganizăm simbolurile:

$$\begin{array}{c} \square\square\square \ \bigcirc\ \bigcirc \\ \square\square\square \ \bigcirc\ \bigcirc \\ \square\square\square \ \bigcirc\ \bigcirc, \end{array}$$

rezultatul împărţirii fiind 32.

b) Împărţirea ar putea fi efectuată şi prin schimbarea tuturor elementelor în unităţi, pe care le distribuim pe urmă în 7 grupuri. Acest lucru însă ar necesita un timp destul de lung. Dacă ne străduim să facem cât mai puţini paşi, merită să începem cu distribuirea unor bucăţi cât mai mari, adică să executăm împărţirea de la simbolurile cu cea mai mare valoare. Una din reprezentările numărului 385 este $\triangle\triangle\triangle\square\square\square\square\square\square\square\square\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\bigcirc$ unde cele 3 triunghiuri nu pot fi distribuite în 7 grupuri identice, prin urmare le preschimbăm în pătrate. Astfel vom avea 38 de pătrate şi 5 cercuri. Din acestea putem forma 7 grupuri identice prin distribuirea, la început, a unui număr maxim de pătrate, după care pătratele rămase vor fi schimbate, iar din unităţi vom alcătui din nou 7 grupuri identice. În prima etapă obţinem configuraţia

$$\begin{array}{lcl} \square\square\square\square\square & & \\ \square\square\square\square\square & & \\ \square\square\square\square\square & & \\ \square\square\square\square\square & \qquad & \square\square\square\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\bigcirc \\ \square\square\square\square\square & & \\ \square\square\square\square\square & & \\ \square\square\square\square\square & & \end{array}$$

iar după schimbare vom putea forma cele 7 grupuri identice şi putem citi rezultatul. Pe baza celor de mai sus, $385 : 7 = 55$. Bineînţeles, grupurile pot fi formate şi începând cu unităţile, însă trebuie să distribuim de mai multe ori zeci în unităţi, iar dacă împărţirea nu poate fi efectuată fără rest, ea poate dura mai mult timp.

□□□□□	◯◯◯◯◯
□□□□□	◯◯◯◯◯
□□□□□	◯◯◯◯◯
□□□□□	◯◯◯◯◯
□□□□□	◯◯◯◯◯
□□□□□	◯◯◯◯◯
□□□□□	◯◯◯◯◯

c) Reprezentarea lui 12 este □ ◯ ◯; înmulţit cu 10 va fi △□□, înmulţit cu 100 va fi ∇△△, adică, pornind de la reprezentarea lui 4164 sub forma ∇∇∇∇△□□□□□□ ◯ ◯ ◯ ◯, ar fi suficient să alcătuim grupuri de forma □ ◯ ◯, △□□, respectiv ∇△△. Ne dăm seama că putem separa trei grupuri ∇△△ după care ne rămâne

△△△△△□□□□□□ ◯ ◯ ◯ ◯.

Din acest grup putem forma 4 grupuri △□□ şi ne rămâne încă

□□□□□□□□ ◯ ◯ ◯ ◯.

Prin schimbarea unui pătrat vom putea forma 7 grupuri □◯◯, adică 4164 ne apare în forma

$$300 \cdot 12 + 40 \cdot 12 + 7 \cdot 12.$$

Din această cauză, rezultatul împărţirii este $300 + 40 + 7 = 347$. Ordinea formării grupurilor este următoarea

	∇∇∇	∇∇∇ △△△
∇∇∇∇△	△△△	△△△ □□□
□□□□□□	△△△	△△△ □□□
◯◯◯◯	△△△△△□□□□□□	△△
	◯◯◯◯	◯◯◯◯

∇∇∇ △△△
△△△ □□□
△△△ □□□
△
□□□□□□□□□□
○○○○

∇∇∇ △△△△
△△△ □□□□
△△△ □□□□
□□□□□□□□
○○○○

∇∇∇ △△△△ □□
△△△ □□□□ ○○
△△△ □□□□ ○○
□□□□□□

∇∇∇ △△△△ □□
△△△ □□□□ ○○
△△△ □□□□ ○○
□□□□□
○○○○○○○○○○

∇∇∇ △△△△ □□□□□□□
△△△ □□□□ ○○○○○○○
△△△ □□□□ ○○○○○○○

Rezultatul final poate fi citit de pe ultima schemă.

d) Executăm această împărţire pe baza planului de mai sus, însă nu o scriem cu simboluri, ci cu cifre. 43000 este mai mare decât deîmpărţitul, de aceea în prima etapă vom alcătui doar multiplii lui 4300. 6 asemenea grupuri ar da un număr mai mare decât deîmpărţitul, de aceea vom forma 5 grupuri de acest fel. Apoi continuăm cu împărţirea numărului 2623. Din acest număr alcătuim multiplii lui 430 În acest caz, putem alcătui 6 grupuri, deoarece $6 \cdot 430 = 2580 < 2623$, adică ne mai rămân $2623 - 2580 = 43$. Astfel, am reuşit să obţinem numărul 24123 sub forma $5 \cdot 4300 + 6 \cdot 430 + 1 \cdot 43 = 500 \cdot 43 + 60 \cdot 43 + 1 \cdot 43$, adică rezultatul final al împărţirii este $500 + 60 + 1 = 561$. Aceşti paşi sunt deja etapele algoritmului cunoscut al împărţirii, dacă îi descriem în mod corespunzător. □

Observaţii. **1.** Efectuarea împărţirii la nivelul obiectelor ne conduce în mod clar şi la teorema împărţirii cu rest.

2. În cursul executării, practic nu mai avem nevoie de înmulţire, trebuie să cunoaştem doar valoarea divizorului înmulţit cu $10, 100, 1000, \ldots$ grupurile pot fi formate şi cu ajutorul scăderii repetate. Înmulţirea poate fi utilizată pentru a reduce numărul de paşi.

PROBLEMA 5. Folosind reprezentările numerelor, efectuaţi înmulţirile de mai jos şi pe baza lor formulaţi un algoritm general pentru înmulţire

$a)$ $5 \cdot 6$; $b)$ $14 \cdot 4$; $c)$ $34 \cdot 23$; $d)$ $256 \cdot 23$; $e)$ $214 \cdot 321$.

SOLUŢIE. Reprezentarea lui 6 este ◯ ◯ ◯ ◯ ◯◯, deci reprezentarea lui $5 \cdot 6$ este

◯◯◯◯◯◯
◯◯◯◯◯◯
◯◯◯◯◯◯
◯◯◯◯◯◯
◯◯◯◯◯◯.

Acest rezultat poate fi citit fie prin numărarea cerculeţelor, fie prin scrierea lui într-o reprezentare mai simplă (înlocuind ceea ce poate fi înlocuit). Astfel, obţinem reprezentarea □□□, adică rezultatul este 30.

b) $14 \cdot 4$ este egal cu $4 \cdot 14$, deoarece, dacă dispunem de 14 ori câte 4 cerculeţe (în formă de 14 rânduri şi 4 coloane), este acelaşi lucru ca şi cum am fi aranjat de 4 ori câte 14 (4 coloane şi 14 rânduri). Reprezentarea lui 14 este □ ◯ ◯ ◯ ◯, deci reprezentarea lui $4 \cdot 14$ este

□◯◯◯◯
□◯◯◯◯
□◯◯◯◯
□◯◯◯◯.

Dacă schimbăm unităţile, obţinem încă un □ şi şase ◯, astfel reprezentarea rezultatului este

□□□□□ ◯◯◯◯◯◯,

deci rezultatul este 56. Observăm că, pentru a obţine rezultatul, am calculat numărul cerculeţelor, adică $4 \cdot 4 = 16$, iar 6 a indicat numărul unităţilor în rezultat, în timp ce 1 a fost adăugat la numărul zecilor $(4 \cdot 1)$.

c) Pentru a calcula $34 \cdot 23$, ar trebui să scriem 23 de 34 de ori şi să citim rezultatul printr-o serie de schimbări. Acest procedeu ar trebui efectuat în modul cel mai simplu posibil. Reprezentarea lui 23 este □□ ○ ○ ○ . Dacă schimbăm toate simbolurile cu altele de ordin superior, obţinem numărul înzecit, adică reprezentarea lui $10 \cdot 23 = 230$ este △△□□□. 34 poate fi scris sub forma de $3 \cdot 10 + 4$; altfel spus, rezultatul este compus din trei grupuri △△□□□ şi 4 grupuri □□ ○ ○○. În acest fel, reprezentarea rezultatului este

△△□□□
△△□□□
△△□□□
□□ ○ ○○
□□ ○ ○○
□□ ○ ○○
□□ ○ ○ ○ .

Această reprezentare o simplificăm în măsura posibilului. Mai întâi schimbăm zece cercuri cu un pătrat şi scriem cele 2 cercuri rămase. Schimbăm 10 pătrate în triunghiuri, scriem cele 8 rămase, apoi scriem şi cele 7 triunghiuri. Astfel, reprezentarea este

△△△△△△△□□□□□□□□ ○ ○,

rezultatul este deci 782.

d) În loc de $256 \cdot 23$ calculăm $23 \cdot 256$. Reprezentarea lui 256 este △△□□□□□ ○ ○ ○ ○ ○ ○, deci înmulţit cu zece va da ∇∇△△△△△□□□□□□, astfel una din reprezentările rezultatului e

$$\nabla\nabla\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\square\square\square\square\square\square$$
$$\nabla\nabla\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\square\square\square\square\square\square$$
$$\triangle\triangle\square\square\square\square\square\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc$$
$$\triangle\triangle\square\square\square\square\square\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc$$
$$\triangle\triangle\square\square\square\square\square\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc.$$

Operând transformările, reprezentarea rezultatului va fi

$$\nabla\nabla\nabla\nabla\nabla\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\square\square\square\square\square\square\square\square\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc,$$

rezultatul este deci 5888. Putem observa că am efectuat practic înmulţirile $3 \cdot 256$ şi $2 \cdot 256 \cdot 10$. Dacă mai întâi le calculăm pe acestea (începem schimbările în interiorul grupurilor), una din reprezentările rezultatului va avea forma

$$\nabla\nabla\nabla\nabla\nabla\triangle\square\square$$
$$\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\square\square\square\square\square\square\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc$$

din care obţinem acelaşi rezultat final 5888. Scriind cu cifre, vedem că am efectuat operaţiile $3 \cdot 256 + 2 \cdot 2560 = 768 + 5120 = 5888$, ceea ce ne duce în mod vizibil la algoritmul cunoscut al înmulţirii.

e) Executăm înmulţirile $214 \cdot 3 = 642$, $214 \cdot 2 = 428$ şi $214 \cdot 1 = 214$, pe urmă calculăm suma numerelor 64200, 4280 şi 214. Rezultatul este 68694. □

OBSERVAŢIE. În timpul activităţilor elevii descoperă deseori înmulţirea începută din stânga.

3. Reprezentarea vizuală a formulelor de calcul prescurtat

În acest paragraf vom da câteva reprezentări care îi ajută pe elevi să memoreze formulele de calcul prescurtat şi să-şi clarifice nelămuririle legate de acestea. Elevii sunt capabili să descopere singuri reprezentări de acest tip; de aceea, înainte de a începe predarea formulelor de calcul prescurtat, e bine să organizăm activităţi care au ca obiectiv descoperirea acestor reprezentări.

Problema 6. Găsiţi o reprezentare vizuală a mărimilor a^2, b^2 şi $(a+b)^2$ ştiind că $a, b > 0$.

Problema 7. Găsiţi o reprezentare vizuală a mărimilor a^2, b^2, c^2 şi $(a+b+c)^2$ ştiind că $a, b, c > 0$.

Problema 8. Găsiţi o reprezentare vizuală a mărimilor a^2, b^2, c^2, d^2 şi $(a+b+c+d)^2$ ştiind că $a, b, c, d > 0$.

Problema 9. Găsiţi o reprezentare vizuală a mărimilor a^3, b^3 şi $(a+b)^3$ ştiind că $a, b > 0$.

Problema 10. Găsiţi o reprezentare vizuală a mărimilor a^3, b^3, c^3 şi $(a+b+c)^3$ ştiind că $a, b, c > 0$.

Problema 11. Descompuneţi în factori mărimea $a^2 - b^2$ cu ajutorul reprezentării geometrice, ştiind că $a \geq b > 0$.

Problema 12. Reprezentaţi inegalitatea $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ în cazul $a, b, c > 0$.

Problema 13. Reprezentaţi inegalitatea $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ în cazul $a, b, c > 0$.

Soluţia problemei 6. Împărţim pătratul cu lungimea de latură $a+b$, astfel încât să realizăm un pătrat cu latura a şi unul cu latura b. Una din metodele posibile este reprezentată pe figura 4.1. Aria celor

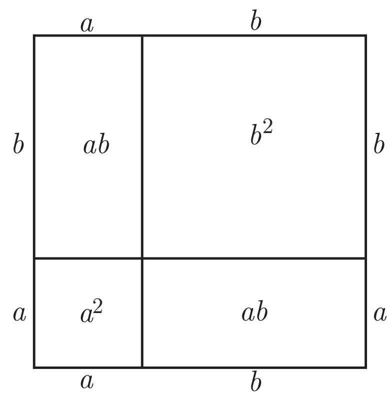


Figura 4.1. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

patru părţi este pe rând a^2, b^2, ab, ba, iar aria pătratului original este egală cu suma ariilor părţilor, adică

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Soluţia problemei 7. Laturile pătratului cu lungimea laturilor $a+b+c$ sunt împărţite în segmente de lungimile a, b respectiv c, conform figurii 4.2, apoi unim punctele de diviziune corespunzătoare. Suma ariilor celor 9 dreptunghiuri mici rezultate este egală cu aria

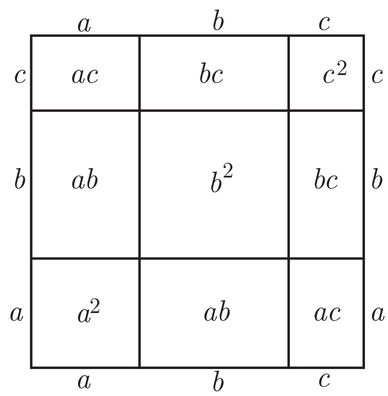


Figura 4.2. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

pătratului original, adică obţinem relaţia

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

Soluţia problemei 8. Ca şi în cazul celor două probleme anterioare, împărţim laturile pătratului cu lungimea laturilor egală cu $a+b+c+d$ în segmente având lungimile a, b, c şi d conform figurii 4.3, apoi unim punctele de diviziune corespunzătoare. Dacă scriem aria pătratului original în două feluri, obţinem egalitatea

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2bc + 2bd + 2cd + 2da.$$

	a	b	c	d	
d	ad	bd	cd	d^2	d
c	ac	bc	c^2	cd	c
b	ab	b^2	bc	bd	b
a	a^2	ab	ac	ad	a
	a	b	c	d	

FIGURA 4.3. Reprezentarea pătratului unui cvadrinom

OBSERVAŢIE. Cu ajutorul reprezentării vizuale putem obţine pătratul polinoamelor cu oricâţi termeni şi se vede clar că în formule apar toate produsele posibile cu doi factori. Este important să subliniem acest lucru pentru că, altfel, o parte a elevilor ar putea crede, pe baza formulei binomului şi a trinomului, că în formula pătratului cvadrinomului apar numai produsele ab, bc, cd şi da.

SOLUŢIA PROBLEMEI 9. Să descompunem un cub cu lungimea laturilor de $a+b$, astfel încât să obţinem un cub cu lungimea laturii a şi unul cu lungimea laturii b. Descompunerea este ilustrată în figura 4.4. Pe de o parte, volumul cubului original este $(a+b)^3$. Pe de altă parte,

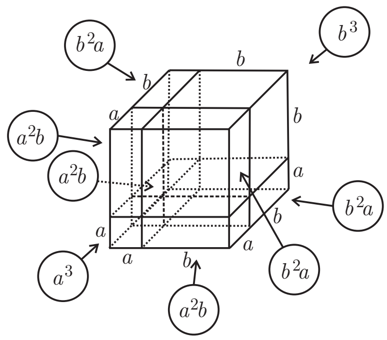


FIGURA 4.4. $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

acelaşi volum este egal cu suma volumelor corpurilor în care cubul a fost descompus. Astfel obţinem relaţia

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2.$$

$\square$

Soluţia problemei 10. Să împărţim laturile unui cub cu lungimea laturii $a+b+c$ în segmente având lungimile a, b, respectiv c şi să descompunem cubul în paralelipipede dreptunghice cu ajutorul planelor paralele cu feţele laterale, care trec prin punctele de diviziune corespunzătoare. Astfel, obţinem 27 paralelipipede dreptunghice. Figura 4.5 ilustrează corpurile obţinute. Suma volumelor celor 27

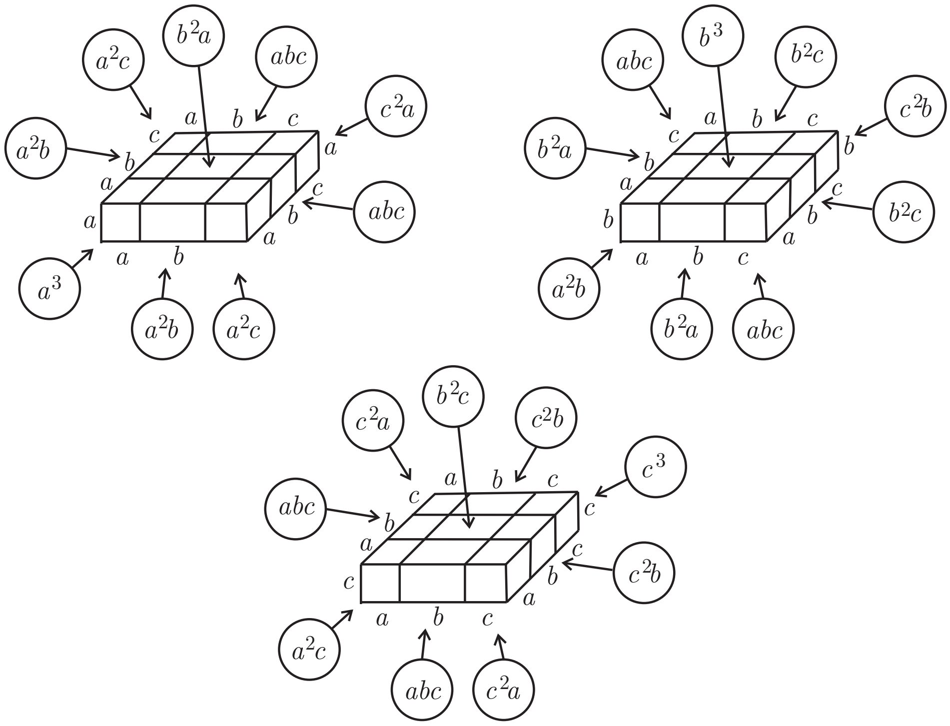


Figura 4.5. Reprezentarea unui trinom la puterea a treia

paralelipipede dreptunghice este egală cu volumul cubului iniţial, deci obţinem identitatea

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3\left(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2\right)+6abc.$$

$\square$

Soluţia problemei 11. Din pătratul cu lungimea laturii a decupăm un pătrat cu lungimea laturii b. Dacă transformăm figura plană rezultată în formă de dreptunghi, putem obţine o descompunere a lui $a^2 - b^2$. În urma transformării reprezentate în figura 4.6, obţinem

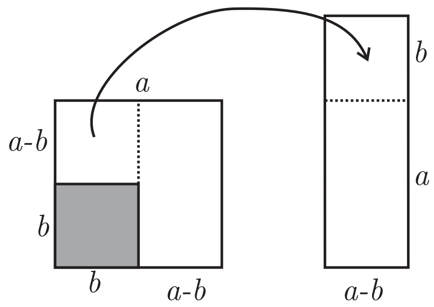


Figura 4.6. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

descompunerea

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

□

Soluţia problemei 12. Să presupunem că $a \geq b \geq c$. Această presupunere nu restrânge generalitatea, pentru că cei doi membri ai inegalităţii sunt simetrici. Să desenăm trei pătrate unul lângă altul, care au lungimea laturii a, b, respectiv c (vezi figura 4.7). Aria

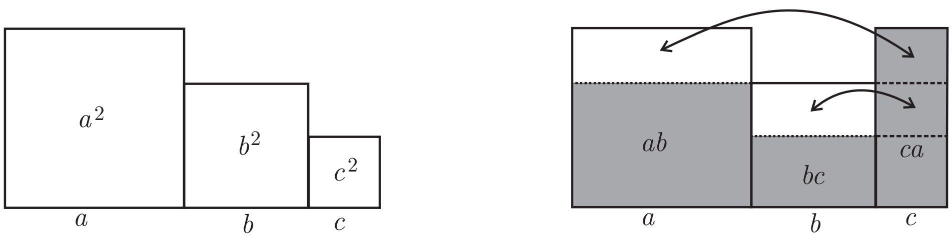


Figura 4.7. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

totală a celor trei pătrate este $a^2 + b^2 + c^2$. Pe această figură poate fi reprezentată şi expresia $ab + bc + ca$, care este suma ariilor dreptunghiurilor haşurate de pe desenul din dreapta al figurii 4.7. Aceasta nu este mai mare decât suma ariilor pătratelor iniţiale, deoarece, dincolo de părţile comune, aria niciunui dreptunghi haşurat dintre cele indicate cu săgeată nu poate depăşi aria perechii sale (cu care are o latură comună, iar celelalte două laturi pot fi comparate pe baza dispunerii presupuse). Prin urmare $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. □

SOLUŢIA PROBLEMEI 13. Pe baza exerciţiului precedent, putem spune că aria primului dreptunghi din figura 4.8 este cel puţin egală cu aria dreptunghiului al doilea. Aria primului dreptunghi este

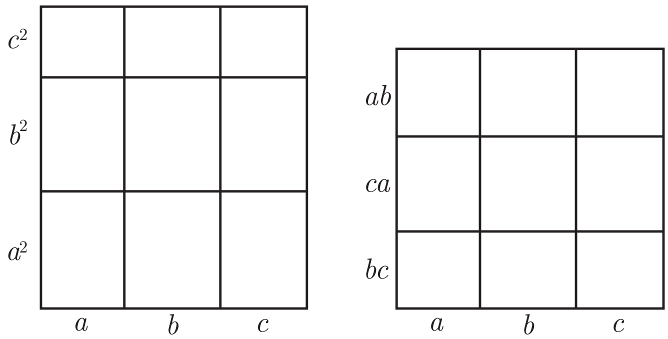


FIGURA 4.8. $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$

$$a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b,$$

iar aria celui de-al doilea este

$$3abc + a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b.$$

După excluderea părţilor comune, obţinem inegalitatea

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$$

□

OBSERVAŢIE. Pentru studiul importanţei gândirii vizuale şi pentru a analiza alte demonstraţii vizuale, recomandăm cărţile [**22**], [**15**], [**29**] şi [**30**].

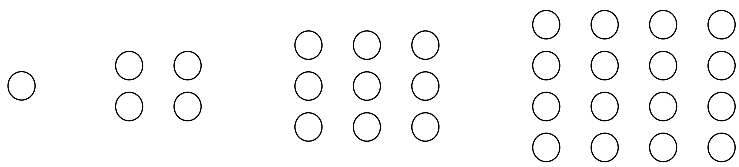
4. Extragerea rădăcinii pătrate

PROBLEMA 14. Reprezentaţi prin obiecte (vezi paragraful al doilea) sau prin simboluri sub forma unui pătrat numerele pătrate perfecte mai mici de 500 şi simplificaţi cât mai mult posibil reprezentările.

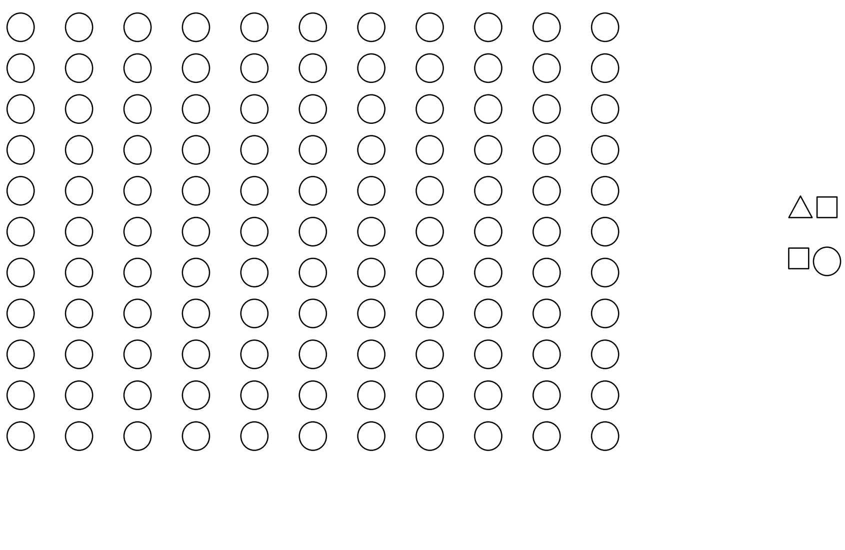
PROBLEMA 15. Reprezentaţi prin simboluri numerele 234^2, respectiv 2314^2 şi simplificaţi cât mai mult posibil reprezentările.

PROBLEMA 16. Pe baza reprezentărilor similare cu cea dinainte, decideţi dacă numerele următoare sunt pătrate perfecte sau nu, şi dacă da, calculaţi rădăcina pătrată a numerelor: $189, 128, 1156, 45369,$ 1234321.

SOLUŢIA PROBLEMEI 14. În cazul numerelor $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 9^2$ reprezentăm configuraţii în formă de pătrate cu lungimea laturii egală cu numărul care trebuie ridicat la puterea a doua. Acestea nu pot fi simplificate, dacă dorim ca formele pătrate să rămână nemodificate.



În schimb, dacă reprezentăm $10^2 = 100$, cele 100 de cercuri pot fi înlocuite cu un triunghi. Să transformăm reprezentarea numerelor $11^2, 12^2, 13^2$ conform figurii de mai jos. Cele 10×10 cerculeţe din colţul din stânga sus se transformă într-un triunghi, primele 10 elemente din ultima coloană şi primele 10 elemente din ultimul rând se transformă în câte un pătrat, iar cercul din colţul din dreapta jos rămâne neschimbat.



Reprezentarea obţinută este practic reprezentarea egalităţii $11^2 = (10+1)^2$ în mod similar reprezentării din soluţia problemei 6; aici însă nu reprezentăm arii, ci numărul de unităţi. În mod analog, în cazul numerelor 12^2, 13^2, respectiv 23^2 obţinem reprezentările de mai jos:

$$\begin{array}{ccc} \triangle & \square & \square \\ \square & \bigcirc & \bigcirc \\ \square & \bigcirc & \bigcirc \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \triangle & \square & \square & \square \\ \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \triangle & \triangle & \square & \square & \square \\ \triangle & \triangle & \square & \square & \square \\ \square & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \square & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \square & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{array}$$

Pe baza reprezentărilor putem citi $11^2 = 121$, $12^2 = 144$, $13^2 = 169$, respectiv $23^2 = 529$. $\square$

Observaţie. La început este bine să-i încurajăm pe elevi să efectueze transformările folosind figurile compuse din cercuri. Astfel, paşii ce trebuie făcuţi sunt identificaţi uşor şi este clar că, în cazul pătratelor poziţionate pe diagonală (formaţiunile în formă de pătrat care corespund pătratelor numerelor), fiecare element trebuie să fie el însuşi un pătrat perfect $(1, 100, 10000)$. Acest lucru devine important pentru extragerea rădăcinii pătrate, pentru că atunci trebuie să împărţim numărul în grupe de două cifre, începând din dreapta.

Soluţia problemei 15. Pentru a reprezenta 234^2 folosim expresia $234 = 200 + 30 + 4$ şi pătratul expresiei cu trei termeni.

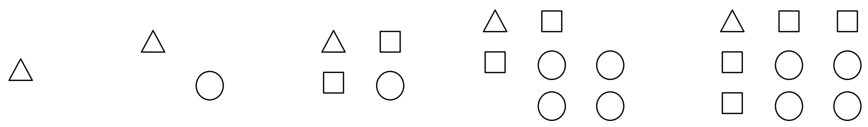
$$\begin{array}{ccccccccc} \Diamond & \Diamond & \nabla & \nabla & \nabla & \triangle & \triangle & \triangle & \triangle \\ \Diamond & \Diamond & \nabla & \nabla & \nabla & \triangle & \triangle & \triangle & \triangle \\ \cline{1-2} \nabla & \nabla & \triangle & \triangle & \triangle & \square & \square & \square & \square \\ \nabla & \nabla & \triangle & \triangle & \triangle & \square & \square & \square & \square \\ \nabla & \nabla & \triangle & \triangle & \triangle & \square & \square & \square & \square \\ \cline{3-5} \triangle & \triangle & \square & \square & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \triangle & \triangle & \square & \square & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \triangle & \triangle & \square & \square & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \triangle & \triangle & \square & \square & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \cline{6-9} \end{array}$$

Pe baza reprezentării putem citi rezultatul: $234^2 = 54756$. Pentru reprezentarea lui 2314^2, folosim reprezentarea pătratului expresiei cu patru termeni – de aceea avem nevoie de două simboluri noi pentru a ilustra 10^5 şi 10^6. Fie aceste două simboluri $\bigstar$ şi $\heartsuit$.

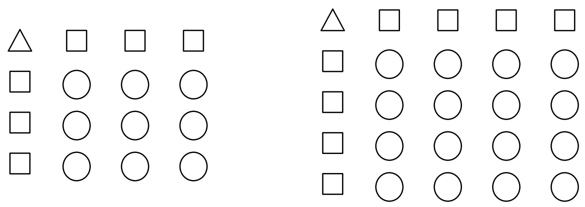
$$\begin{array}{cccccccccc}
\heartsuit & \heartsuit & \bigstar & \bigstar & \bigstar & \Diamond & \nabla & \nabla & \nabla & \nabla \\
\heartsuit & \heartsuit & \bigstar & \bigstar & \bigstar & \Diamond & \nabla & \nabla & \nabla & \nabla \\
\bigstar & \bigstar & \Diamond & \Diamond & \Diamond & \nabla & \triangle & \triangle & \triangle & \triangle \\
\bigstar & \bigstar & \Diamond & \Diamond & \Diamond & \nabla & \triangle & \triangle & \triangle & \triangle \\
\bigstar & \bigstar & \Diamond & \Diamond & \Diamond & \nabla & \triangle & \triangle & \triangle & \triangle \\
\Diamond & \Diamond & \nabla & \nabla & \nabla & \triangle & \square & \square & \square & \square \\
\nabla & \nabla & \triangle & \triangle & \triangle & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\
\nabla & \nabla & \triangle & \triangle & \triangle & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\
\nabla & \nabla & \triangle & \triangle & \triangle & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\
\nabla & \nabla & \triangle & \triangle & \triangle & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc
\end{array}$$

Pe baza reprezentării, putem citi: $2314^2 = 5354596$. Folosirea pătratului expresiilor cu mai mulţi termeni nu este obligatorie, deoarece reprezentările pot fi realizate şi pas cu pas, folosind la fiecare pas doar pătratului binomului. În cursul reprezentării numărului 2314^2, primul pas ar putea fi reprezentarea formei corespunzătoare prezentării $(2 \cdot 1000 + 314)^2$, adică pătratul de 2×2, din stânga sus, celelalte elemente ale primelor două rânduri şi coloane (produsele duble). În continuare, în locul lui 314^2, adică în pătratul de 8×8 numărat din colţul din dreapta jos, continuăm descompunerea lui 314. $\square$

Soluţia problemei 16. Reprezentările de mai sus pot fi construite şi pe baza unui raţionament invers, obţinând astfel un algoritm natural al extragerii rădăcinii pătrate. Descrierea formală a acestuia este algoritmul binecunoscut al extragerii rădăcinii pătrate. 196 poate fi reprezentat în forma $\triangle\square\square\square\square\square\square\square\square\square\ \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc$. De aici începem să alcătuim configuraţia în formă de pătrat, la început prin formarea celui mai mare pătrat al sutelor, care este 1×1, apoi continuăm cu dispunerea unităţilor (câte una) şi, după fiecare unitate, completăm fiecare figură prin aşezarea zecilor lipsă, obţinând forme pătrate.



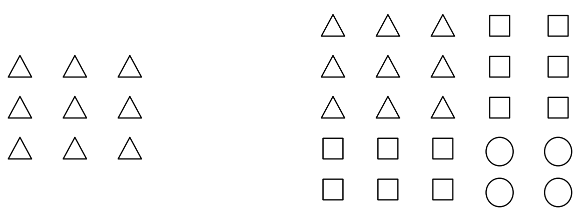
Următoarea „încadrare" poate fi efectuată doar dacă schimbăm un zece în unităţi. Astfel, pe lângă simbolurile deja aşezate în configuraţie, avem la dispoziţie încă 4 pătrate şi 12 cercuri.



Din acestea putem compune încă exact două rânduri şi două coloane, deci din 196 am putut compune un pătrat, prin urmare 196 este un număr pătrat perfect. Din configuraţie putem citi de asemenea că radicalul de ordinul doi al numărului 196 este 14.

Procedeul de mai sus este, de asemenea, util pentru a decide dacă numărul este sau nu un pătrat perfect. Pornind de la 128 putem forma $11^2 = 121$, cele 7 cercuri rămase nu sunt suficiente pentru a forma şi un pătrat mai mare. În consecinţă, 128 nu poate fi pătrat perfect (între pătratele a două numere naturale consecutive nu poate exista alt pătrat perfect).

În cazul lui 1156, în reprezentarea ∇△□□□□□ ○○○○○○ schimbăm mia în sute, pentru că 1000 nu este un pătrat perfect. Astfel, avem 11 sute, adică putem construi din ele un pătrat de 3×3.



Schimbăm cele două sute rămase în zeci şi începem să construim şi următorul pătrat compus din unităţi. Din cele 25 de zeci şi 6 unităţi putem construi fără schimbare următoarele două rânduri şi două coloane. Din cele 13 zeci rămase schimbăm unul şi vom avea 12 zeci şi 12 unităţi. Din acestea putem construi exact următoarele două rânduri şi două coloane:

$$\begin{array}{ccccccc}
\triangle & \triangle & \triangle & \square & \square & \square & \square \\
\triangle & \triangle & \triangle & \square & \square & \square & \square \\
\triangle & \triangle & \triangle & \square & \square & \square & \square \\
\square & \square & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\
\square & \square & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\
\square & \square & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\
\square & \square & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc
\end{array}$$

De pe figura obţinută putem citi că 1156 este un pătrat perfect, iar rădăcina sa pătrată este 34.

În cazul lui 45369, în prima etapă reprezentăm pătratul de 2×2 din $\Diamond$-uri, apoi începem pătratul al doilea cu sutele, completând între timp forma în pătrat (cu miile).

$$\begin{array}{cc}
\Diamond & \Diamond \\
\Diamond & \Diamond
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
\Diamond & \Diamond & \nabla \\
\Diamond & \Diamond & \nabla \\
\nabla & \nabla & \triangle
\end{array}$$

După ce am realizat un rând şi o coloană, ne rămân numai 1 mie, 2 sute, 3 zeci şi 9 unităţi. Cu acestea nu putem completa sutele astfel încât să obţinem o formă de 2×2, iar dacă am schimba mia în sute, din cele 11 sute putem construi o formă de 3×3, dar nici aceasta nu va putea fi completată cu mii, aşadar putem continua cu unităţile.

$$\begin{array}{cccc}
\Diamond & \Diamond & \nabla & \triangle \\
\Diamond & \Diamond & \nabla & \triangle \\
\nabla & \nabla & \triangle & \square \\
\triangle & \triangle & \square & \bigcirc
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
\Diamond & \Diamond & \nabla & \triangle & \triangle \\
\Diamond & \Diamond & \nabla & \triangle & \triangle \\
\nabla & \nabla & \triangle & \square & \square \\
\triangle & \triangle & \square & \bigcirc & \bigcirc \\
\triangle & \triangle & \square & \bigcirc & \bigcirc
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
\Diamond & \Diamond & \nabla & \triangle & \triangle & \triangle \\
\Diamond & \Diamond & \nabla & \triangle & \triangle & \triangle \\
\nabla & \nabla & \triangle & \square & \square & \square \\
\triangle & \triangle & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\
\triangle & \triangle & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\
\triangle & \triangle & \square & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc
\end{array}$$

Dat fiind faptul că am reuşit să obţinem forma de pătrat, numărul analizat este un pătrat perfect, iar pe baza figurii observăm că rădăcina pătrată a lui 45369 este 213. □

OBSERVAŢII. **1.** Procedeul prezentat este potrivit şi pentru calculul zecimalelor rădăcinii pătrate a numerelor care nu sunt pătrate perfecte.

2. Cu aceeaşi metodă, pe baza reprezentării în spaţiu a cubului unui binom, putem efectua şi extragerea rădăcinii cubice.

3. În acest capitol ne-am ocupat doar de efectuarea cu ajutorul simbolurilor a operaţiilor de bază cu numere naturale. În mod similar, putem concepe un procedeu în care caracteristicile operaţiilor cu numere negative, respectiv cu fracţii raţionale, apar în mod natural.

4. Observăm că, în timpul efectuării operaţiilor cu ajutorul simbolurilor, folosim anumite proprietăţi ale operaţiilor şi, pe deasupra, aceste proprietăţi apar înaintea algoritmilor de executare a operaţiilor. De exemplu, la efectuarea înmulţirii am folosit comutativitatea şi distributivitatea înmulţirii faţă de adunare. În mod evident, extragerea rădăcinii pătrate este operaţia inversă a ridicării la pătrat. Este binevenit să formulăm aceste proprietăţi abstracte în cursul activităţilor (la momentul potrivit) şi să punem în evidenţă, pe de o parte, importanţa lor şi, pe de altă parte, apariţia lor pe cale naturală.

CAPITOLUL V
CIFRE ŞI CONFIGURAŢII

În acest capitol vom analiza câteva tipuri de probleme care, deşi sunt studiate în învăţământul elementar şi mediu, sunt rezolvate fără a se pune în valoare experimentarea şi descoperirea, aplicând formal metode de demonstrare (de exemplu inducţia matematică) sau de calcul (de exemplu suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice). Subliniem că, dacă activităţile ar fi organizate într-un mod mai flexibil şi problemele ar fi formulate deschis, problemele de acest tip ar facilita o experienţă a matematicii mult mai intensă faţă de abordarea tradiţională.

1. Probleme şi strategii de rezolvare

Problema 1. Efectuaţi operaţiile de mai jos:

a) 35^2, 335^2, 3335^2;
b) 33^2, 333^2, 3333^2;
c) $11^2, 101^2, 1001^2$;
d) $11^2, 111^2, 1111^2$;
e) $11^3, 101^3, 1001^3$.

Pe baza operaţiilor efectuate (şi eventual pe baza altor experimente şi calcule), rezolvaţi următoarele probleme:

1. Identificaţi configuraţiile generale (dacă există) în rezultatele de mai sus şi justificaţi-le.
2. Cu ajutorul calculatorului (sau al calculatorului de buzunar), găsiţi configuraţii similare cu cele de mai sus.
3. Căutaţi probleme asemănătoare în culegeri de probleme, publicaţii de specialitate sau pe internet.
4. Justificaţi toate regularităţile descoperite.

După câteva calcule (la care este bine să folosim calculatorul de buzunar), observăm că numărul $\underbrace{33...3}_{n-1}5^2$ are forma $\underbrace{11...1}_{n-1}\underbrace{22...2}_{n}5$. În această abordare, găsirea configuraţiei exacte şi formularea exactă constituie unul din momentele importante ale activităţii. Pe baza punctului a), formulăm următoarea proprietate:

Pentru orice număr natural $n \geq 1$,

$$\underbrace{33...3}_{n-1}5^2 = \underbrace{11...1}_{n-1}\underbrace{22...2}_{n}5.$$

Dacă am reuşit să formulăm proprietatea generală, avem mai multe posibilităţi de demonstraţie. Una dintre acestea este efectuarea înmulţirii, cealaltă este folosirea reprezentării numerelor în sistemul zecimal şi folosirea formulei pentru suma termenilor unei progresii geometrice şi a formulelor de calcul prescurtat. Noi vom descrie prima posibilitate (a doua fiind de fapt identică cu rezolvarea problemei următoare).

Demonstraţie. Efectuăm înmulţirea pe partea stângă:

$$\overline{333\ \ 335} \times \overline{\underbrace{333\ \ 33}_{n\text{-}1}5}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & 6 & 6 & \ldots & 6 & 6 & 7 & 5 \\
 & & & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 5 & \\
 & & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 5 & & \\
 & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & \\
1 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & 5 & & & & & & \\
\hline
\multicolumn{4}{c}{\underbrace{1\ \ldots\ 1\ \ 1}_{n\text{-}1}} & \multicolumn{7}{c}{\underbrace{2\ \ 2\ \ldots\ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 2}_{n}} & 5
\end{array}$$

Pe baza algoritmului înmulţirii şi al adunării, demonstraţia este completă. □

Bineînţeles, problema poate fi formulată şi invers.

Problema 2. Demonstraţi că numerele de mai jos sunt pătrate perfecte:

a) $\underbrace{11...1}_{n-1}\underbrace{22...2}_{n}5,\ \forall n \geq 1$; b) $\underbrace{11...1}_{2n} - \underbrace{22...2}_{n},\ \forall n \geq 1$.

Şi în acest caz, una din strategiile de rezolvare este să încercăm să aflăm numărul al cărui pătrat poate fi numărul studiat pornind de la cazurile particulare $n \in \{1, 2, 3, 4\}$. Dacă am reuşit să intuim proprietatea, atunci demonstraţia poate fi efectuată prin metoda cea mai eficientă. Această soluţie permite (mai ales în liceu) justificarea proprietăţii cu ajutorul unui calcul formal, în numele eficacităţii.

SOLUŢIE. a) Pe baza reprezentării în sistemul zecimal, putem scrie că:

$$\underbrace{11...1}_{n-1}\underbrace{22...2}_{n}5 = 5 + 2\left(10 + ... + 10^n\right) + \left(10^{n+1} + ... + 10^{2n-1}\right) =$$

$$= 5 + 10 \cdot \frac{10^{2n-1} - 1}{9} + 10 \cdot \frac{10^n - 1}{9} = \frac{45 + 10^{2n} + 10^{n+1} - 20}{9} =$$

$$= \frac{25 \cdot \left(4 \cdot 10^{2n-2} + 4 \cdot 10^{n-1} + 1\right)}{9} = \frac{25 \cdot \left(2 \cdot 10^{n-1} + 1\right)^2}{9} =$$

$$= \left[\frac{5 \cdot \left(2 \cdot 10^{n-1} + 1\right)}{3}\right]^2, \quad \forall n \geq 1.$$

Prin urmare, este suficient să demonstrăm că $(2 \cdot 10^{n-1} + 1) \vdots 3$. Numărul $2 \cdot 10^{n-1} + 1$ este exact 3, pentru $n = 1$ – în timp ce pentru $n \geq 2$ începe cu 2, se termină cu 1, iar celelalte cifre ale numărului sunt 0, adică suma cifrelor este 3. De aici rezultă că $(2 \cdot 10^{n-1} + 1) \vdots 3$, deci $\frac{5 \cdot \left(2 \cdot 10^{n-1}+1\right)}{3} \in \mathbb{N}$ şi astfel numărul dat este un pătrat perfect.

b) Cu ajutorul progresiilor putem scrie că:

$$\underbrace{11...1}_{2n} - \underbrace{22...2}_{n} = \left(1 + 10 + 10^2 + ... + 10^{2n-1}\right) -$$

$$- 2\left(1 + 10 + ... + 10^{n-1}\right) =$$

$$= \frac{10^{2n} - 1}{9} - 2 \cdot \frac{10^n - 1}{9}$$

$$= \frac{10^{2n} - 1 - 2 \cdot 10^n + 2}{9}$$

$$= \left(\frac{10^n - 1}{3}\right)^2, \ \forall n \geq 1.$$

În acelaşi timp, $10^n - 1 = \underbrace{99...9}_{n}$, deci $(10^n - 1) \vdots 3$ şi astfel numărul dat este un pătrat perfect. Mai precis putem observa şi faptul că

$\frac{10^n-1}{3} = \underbrace{33...3}_{n}$, deci

$$(1) \qquad \underbrace{11...1}_{2n} - \underbrace{22...2}_{n} = \underbrace{33...3}_{n}^2.$$

□

Bineînţeles, este important ca elevii să poată efectua şi asemenea demonstraţii în liceu; dacă, însă, asemenea proprietăţi nu sunt asociate cu încercări, cu experimente concrete, majoritatea elevilor le vor include în categoria calculelor formale, goale.

Problema 3. Calculaţi primele 200 zecimale ale numărului

$$\frac{1}{1,\underbrace{00...0}_{99}1}.$$

Determinarea cifrelor înseamnă practic necesitatea de a avea estimări inferioare şi superioare suficient de strânse, sau că trebuie pur şi simplu, să efectuăm împărţirea. Pentru a avea o imagine mai precisă despre procesul împărţirii, este bine să începem cu efectuarea completă a împărţirilor $\frac{1}{1,1}$, $\frac{1}{1,01}$, $\frac{1}{1,001}$ $\frac{1}{1,0001}$.

Prima soluţie. Împărţirile cerute se efectuează astfel încât să obţinem zecimale în număr dublu faţă de zecimalele din numitor. În acest fel, obţinem pe rând următoarele egalităţi:

$$\frac{1}{1,1} = 0,90...$$
$$\frac{1}{1,01} = 0,9900...$$
$$\frac{1}{1,001} = 0,999000...$$
$$\frac{1}{1,0001} = 0,99990000...$$

Mai mult, dacă observăm cu atenţie împărţirile, vom descoperi faptul că, pentru egalităţile de mai sus, în membrul drept obţinem fracţii periodice şi că cifrele obţinute sunt chiar cifrele perioadei. Astfel putem formula ipoteza potrivit căreia

$$\frac{1}{1,\underbrace{00...0}_{n}1} = 0,(\underbrace{99...9}_{n+1}\underbrace{00...0}_{n+1}).$$

Aceasta poate fi demonstrată fie pe baza scrierii în sistem zecimal (însumând progresiile geometrice corespunzătoare), fie prin efectuarea împărţirii. $\square$

A DOUA SOLUŢIE. Dacă $a = 0,\underbrace{00...0}_{99}1$, atunci

$$\frac{1}{1,\underbrace{00...0}_{99}1} = \frac{1}{1+a} = \frac{1+a-a}{1+a} = 1 - \frac{a}{1+a} = 1 - \frac{a+a^2-a^2}{1+a} =$$

$$= 1 - a + \frac{a^2}{1+a} = 1 - a + a^2 - \frac{a^3}{1+a} = 0,\underbrace{99...9}_{100}\underbrace{00...0}_{99}1 - \frac{a^3}{1+a}.$$

Pe de altă parte $0 < \frac{a^3}{1+a} < a^3 = \frac{1}{10^{300}}$, deci $\frac{1}{1+a} = 0,\underbrace{99...9}_{100}\underbrace{00...0}_{100}...$. $\square$

OBSERVAŢIE. Căutaţi regularităţi similare (pornind fie de la formule, fie de la operaţii).

2. Alte proprietăţi

În acest paragraf vom enumera câteva identităţi formulate (sau găsite) de elevii noştri în cursul activităţilor - bineînţeles, fără pretenţia exhaustivităţii.

a) $\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{22...2}_{n+1}5 = \underbrace{33...3}_{n}5^2, \quad n \in \mathbb{N};$

b) $\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{55...5}_{n-1}6 = \underbrace{33...3}_{n-1}4^2, \quad n \in \mathbb{N}^*;$

c) $\underbrace{44...4}_{n}6\underbrace{22...2}_{n}4 = \underbrace{66...6}_{n+1}8^2, \quad n \in \mathbb{N};$

d) $\underbrace{44...4}_{n}\underbrace{88...8}_{n-1}9 = \underbrace{66...6}_{n-1}7^2, \quad n \in \mathbb{N}^*;$

e) $\underbrace{99...9}_{n}\underbrace{00...0}_{n}25 = \underbrace{99...9}_{n}5^2, \quad n \in \mathbb{N};$

f) $\underbrace{99...9}_{n}8\underbrace{00...0}_{n}1 = \underbrace{99...9}_{n+1}{}^2, \quad n \in \mathbb{N};$

g) $5\underbrace{44...4}_{n}7\underbrace{55...5}_{n}6 = 2\underbrace{33...3}_{n}4^2, \quad n \in \mathbb{N};$

h) $2\underbrace{77...7}_{n-1}\underbrace{88...8}_{n}9 = 1\underbrace{66...6}_{n-1}7^2, \quad n \in \mathbb{N}^*;$

i) $63\underbrace{99...9}_{n-1}84\underbrace{00...0}_{n}1 = 7\underbrace{99...9}_{n+1}^2, \quad n \in \mathbb{N}^*;$

j) $\underbrace{44...4}_{2n} - 11 \cdot \underbrace{44...4}_{n} + 9 = \underbrace{66...6}_{n-1}3^2, \quad n \in \mathbb{N}^*;$

k) $1\underbrace{00...0}_{n}2\underbrace{00...0}_{n}1 = 1\underbrace{00...0}_{n}1^2, \quad n \in \mathbb{N};$

l) $1\underbrace{00...0}_{n}3\underbrace{00...0}_{n}3\underbrace{00...0}_{n}1 = 1\underbrace{00...0}_{n}1^3, \quad n \in \mathbb{N};$

m) $1\underbrace{00...0}_{n}4\underbrace{00...0}_{n}6\underbrace{00...0}_{n}4\underbrace{00...0}_{n}1 = 1\underbrace{00...0}_{n}1^4, \quad n \in \mathbb{N};$

n) $1\underbrace{00...0}_{n}2\underbrace{00...0}_{n}2\underbrace{00...0}_{n}2\underbrace{00...0}_{n}1 = 1\underbrace{00...0}_{n}1\underbrace{00...0}_{n}1^2, \quad n \in \mathbb{N}.$

OBSERVAŢII. **1.** Exerciţiile de acest gen sunt adecvate pentru descoperirea/exersarea formulelor de calcul prescurtat (vezi ultimele patru proprietăţi).

2. Pentru studierea configuraţiilor se pretează şi alte tipuri de probleme. Propunem alte trei probleme:

- Determinaţi lungimea perioadei în cazul reprezentării zecimale a fracţiei $\frac{1}{127}$.
- Determinaţi cel mai mic multiplu comun al numărului $\underbrace{99...9}_{n}$ care nu conţine cifra 9, dacă $n \in \mathbb{N}^*$ este un număr fixat.
- Demonstraţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există un număr infinit de numere (în sistemul zecimal) care pot fi scrise numai cu cifrele 1 şi 2, care sunt divizibile cu 2^n.

CAPITOLUL VI
TRAVERSAREA DEŞERTULUI

1. Problema de bază

PROBLEMA 1. Cu ajutorul unui vehicul de teren, care are un rezervor 100 de litri capacitate, trebuie traversat un deşert în care nu există staţii de alimentare cu combustibil. Ştiind că vehiculul consumă 10 litri de combustibil pentru a parcurge o sută de kilometri, propuneţi (elaboraţi) un plan care să permită traversarea deşertului, dacă

- lăţimea deşertului este 1100 km;
- lăţimea deşertului este 1600 km.

Determinaţi cantitatea minimă de combustibil necesară traversării în fiecare dintre cazurile de mai sus.

PROBLEMA 2. În condiţiile date mai sus, determinaţi lăţimea deşertului, notată cu D, pentru care traversarea este posibilă şi stabiliţi dependenţa de D a cantităţii minime de combustibil necesară traversării deşertului.

OBSERVAŢIE. Este recomandabil ca, pentru a rezolva această problemă, elevii să lucreze în grupuri, iar la sfârşitul activităţii să prezinte şi să discute soluţiile propuse de diferitele grupuri.

SOLUŢIA PROBLEMEI 1. În ambele cazuri trebuie amenajat un depozit în deşert. Locul amplasării depozitului şi cantitatea de combustibil depozitată acolo trebuie stabilite. O soluţie posibilă pentru primul caz este să amplasăm depozitul la 300 km de punctul de plecare. Acolo am putea depozita 40 litri de combustibil, după care ne-am întoarce în punctul de plecare. Pentru a parcurge cei 800 km de la depozit până la destinaţia finală avem nevoie de 80 litri de combustibil, deci la următoarea pornire este suficient să alimentăm cu 70 litri de combustibil. Din această cantitate consumăm 30 de litri până la depozit, deci în rezervor rămân 40 de litri care, împreună cu cei 40 de litri depozitaţi, ne ajung pentru parcurgerea drumului rămas. Prin urmare, putem traversa deşertul cu 170 litri de combustibil. Întrebarea este dacă traversarea este optimă sau nu. Dacă amenajăm depozitul la 200 km de la punctul de plecare, atunci ne-ar ajunge 150 litri, iar la 100 km am consuma 130 litri. Dacă notăm cu $100 \cdot d$ distanţa dintre punctul de plecare şi depozit, atunci pentru a ajunge la destinaţia finală trebuie să fie îndeplinită inegalitatea $d \geq 1$. Pe de altă parte, amenajarea depozitului necesită parcurgerea unei distanţe de $200 \cdot d$ şi după aceasta trebuie să parcurgem încă o dată distanţa completă, deci cantitatea combustibilului consumat este $110+20d$. Astfel, soluţia optimă este să amenajăm depozitul la 100 km de punctul de plecare. Totodată, dacă amenajăm mai multe depozite sau dacă elaborăm un plan de traversare mai complex, atunci consumăm o cantitate de combustibil cel puţin egală, deci această soluţie este una optimă.

Observaţie. Din punctul de vedere al îndeplinirii sarcinii primite, nu este singura soluţie, deoarece, dacă la prima plecare punem în rezervor 80 de litri de combustibil, am putea lăsa la depozit 60 de litri. Dacă la a doua plecare alimentăm cu 50 de litri, putem traversa deşertul. Cantitatea de combustibilul consumat şi locul de amplasare a depozitului sunt identice cu prima soluţie, dar modul de îndeplinire a sarcinii este diferită. În consecinţă, dacă considerăm cantităţile alimentate ca variabile, atunci obţinem un număr infinit de posibilităţi pentru a realiza soluţia optimă.

Observăm că în al doilea caz nu ne ajunge un singur depozit, pentru că acesta, pe de o parte, nu poate fi amplasat la o distanţă mai mare de 500 kilometri de punctul de plecare şi, pe de altă parte, nu poate fi la o distanţă mai mare de 1000 km de la cealaltă margine a deşertului. Astfel, avem nevoie de cel puţin două depozite. Dacă amenajăm primul depozit la 300 km, iar pe al doilea la 300 km faţă de primul, atunci la primul depozit putem aduna 200 litri de combustibil parcurgând de 5 ori drumul de la punctul de plecare şi înapoi. În acelaşi timp, putem transfera din cantitatea aceasta 80 de litri la al doilea depozit (înainte de ultima reîntoarcere la punctul de plecare efectuăm de două ori drumul între cele două depozite). Astfel, dacă alimentăm 80 litri de combustibil la punctul de plecare, la cel de-al doilea depozit vom avea în rezervor 20 de litri, care, adunate cu cei

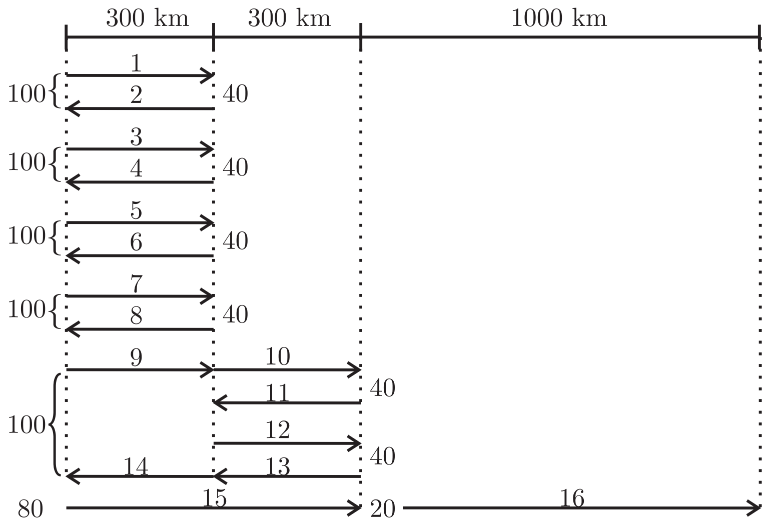


FIGURA 6.1. Planul unei traversări posibile în cel de-al doilea caz

80 de litri aflaţi acolo, ne dau o cantitate suficientă pentru traversare. Este posibil ca aceasta să nu fie soluţia optimă, pentru că în acest caz am consumat 580 litri de combustibil (vezi fig. 6.1). Este clar că, amenajând doar două depozite, cel de-al doilea trebuie poziţionat la 600 km faţă de punctul de plecare. Dacă primul depozit se află la o distanţă $100d_1$ faţă de punctul de plecare, atunci distanţa dintre cele două depozite trebuie parcursă de cel puţin 3 ori şi, în consecinţă, distanţa între punctul de plecare şi primul depozit trebuie parcursă de cel puţin 5 ori. Dacă parcurgem aceste distanţe de mai multe ori, creşte consumul, deci vom studia dacă există o traversare în cursul căreia parcurgem prima distanţă de 5 ori, iar a doua de 3 ori. În acest caz am consuma cel mult 300 litri de combustibil (pentru că am porni de trei ori de la punctul de plecare) şi astfel am parcurge întreaga distanţa o singură dată, primii 600 km de două ori, iar prima distanţă $100d_1$ de două ori. Atunci are loc inegalitatea $280 + 20d_1 \leq 300$. Pe de altă parte, la primul depozit va ajunge cel mult o cantitate de combustibil $2(100-20d_1)+100-10d_1$, ceea ce nu poate fi mai puţin de 100 şi mai mult de 200. De aici decurge inegalitatea $2 \leq d_1 \leq 4$. Aceasta este în contradicţie cu inegalitatea $d_1 \leq 1$, de aceea traversarea nu este

posibilă în aceste condiţii. Dacă prima distanţă este parcursă de 7 ori, a doua de 3 ori şi ultima o singură dată, atunci la primul depozit va ajunge o cantitate de combustibil de maxim $3(100-20d_1)+100-10d_1$ litri. Această cantitate va fi consumată cu ocazia a două plecări mai departe, deci

$$100 \leq 3(100 - 20d_1) + 100 - 10d_1 \leq 200.$$

Rezultă că $\frac{20}{7} \leq d_1 \leq \frac{30}{7}$. Pe de altă parte, la al doilea depozit poate ajunge o cantitate de combustibil de $400 - 70d_1 - 30d_2$ litri. Pentru a putea merge mai departe, această cantitate nu poate fi mai mică de 100 de litri şi nici nu avem nevoie de mai mult pentru a traversa. Astfel ajungem la sistemul

$$\begin{cases} 7d_1 + 3d_2 = 30 \\ d_1 + d_2 = 6 \end{cases}$$

a cărui soluţie este $d_1 = d_2 = 3$. Aceasta îndeplineşte condiţia $\frac{20}{7} \leq d_1 \leq \frac{30}{7}$, deci cu ajutorul ei am obţinut amplasamentele depozitelor şi o soluţie pentru problema dată.

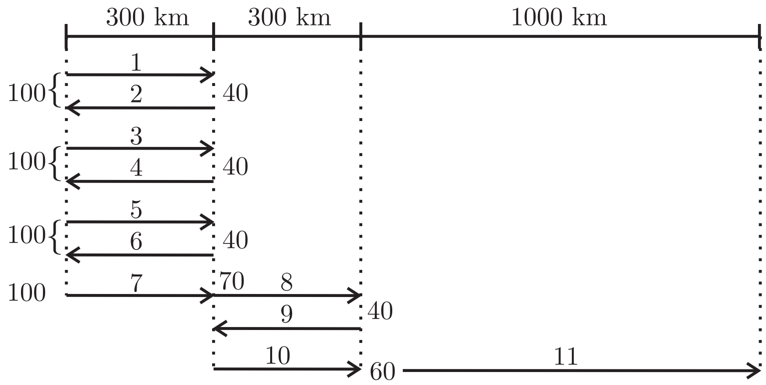


FIGURA 6.2. Planul unei traversări posibile în cel de-al doilea caz

Planul traversării este ilustrat în figura 6.2. Observăm că pentru a traversa sunt necesari 400 de litri de combustibil. Raţionamentul de mai sus arată că, dacă avem două depozite, nu putem traversa deşertul cu combustibil mai puţin. Să studiem şi cazul în care amenajăm 3 depozite. În acest caz, ultima etapă a drumului va fi efectuată doar o dată, penultima de cel puţin 3 ori (pentru că trebuie să amenajăm ultimul depozit), a doua etapă de cel puţin 5 ori (dacă am parcurge acest segment doar de trei ori, depozitul ar fi de prisos sau am putea reduce consumul total), iar prima de minim 7 ori (din motive similare cu cele de mai înainte). Dacă parcurgem prima etapă de mai mult de 7 ori, atunci consumul total depăşeşte 400 de litri, deci nu mai trebuie să examinăm alte cazuri. În cazul de faţă, pornim de patru ori de la punctul de plecare, astfel cantitatea alimentată acolo este $300 + v$, unde $0 < v \leq 100$. La primul depozit ajunge o cantitate de combustibil de $300+v-70d_1$ litri, la al doilea $300+v-70d_1-50d_2$ litri, iar la ultimul $300+v-70d_1-50d_2-30d_3$ litri. Astfel, consumul total $(300+v)$ poate fi scris sub forma $70d_1+50d_2+30d_3+100$, expresie al cărui minim trebuie determinat. În acelaşi timp, trebuie să aibă loc următoarele inegalităţi (care exprimă faptul plecăm de la depozite de câte ori am presupus):

$$\begin{array}{rcl} v \leq & 70d_1 & \leq 100+v \\ 100+v \leq & 70d_1+50d_2 & \leq 200+v \end{array}$$

Consumul total este minim dacă $d_1 = \frac{v}{70}$, $d_2 = \frac{100}{50} = 2$ şi $d_3 = \frac{10}{3}$. Pentru parcurgerea acestor distanţe sunt necesari $300 + \frac{140}{3}$ litri de combustibil, aceasta fiind cantitatea de combustibil minimă necesară pentru a parcurge distanţa dată. □

2. Cazul general

Soluţia prezentată mai sus a fost elaborată în cursul unei activităţi practice; ea este mai uşor de înţeles decât soluţia problemei generale pe care o vom prezenta în continuare. Mai mult, din soluţiile cazurilor abordate mai sus putem intui care sunt căile ce merită a fi urmate şi care trebuie evitate. În cursul descrierii soluţiei problemei generale vom urma un raţionament mai eficient.

Soluţia problemei 2. Pentru a parcurge distanţa D, în punctul aflat la distanţa $D - 1000$ trebuie să dispunem de 100 litri de combustibil. Totodată, în punctul $D - 1000 - \frac{1000}{3}$ trebuie să avem cel puţin 200 litri de combustibil (chiar dacă depozitul nu este amplasat în acest punct), pentru că va trebui să parcurgem ultima etapă de cel puţin trei ori, iar penultima de şi mai multe ori. În mod similar, în punctul $D - 1000 - \frac{1000}{3} - \frac{1000}{5}$ trebuie să avem cel puţin 300 de litri şi, în general, în punctul $D - 1000 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}$ trebuie să avem cel puţin $100(n+1)$ litri de combustibil. Deoarece şirul cu termenul general $x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}$ nu este mărginit, putem traversa un deşert de orice lăţime. În acelaşi timp, dacă lăţimea deşertului este exact

$$D_n = 1000 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1},$$

atunci distanţele între depozite (incluzând punctul de plecare şi punctul de sosire) sunt pe rând

$$\frac{1000}{2n+1}, \frac{1000}{2n-1}, \ldots, \frac{1000}{5}, \frac{1000}{3}, 1000.$$

Dacă $D_n < D < D_{n+1}$, atunci lungimea primului segment de drum este $D - D_n$ şi trebuie parcursă de $(2n+3)$ ori, deci cantitatea de combustibil minimă necesară este $100(n+1) + (2n+3) \cdot \frac{D-D_n}{10}$. $\square$

Observaţie. Soluţia problemei a fost publicată în 1947 de N.J. Fine, în revista American Mathematical Monthly (pag. 24-31.). Problema a trezit interesul a numeroşi profesori şi matematicieni, astfel încât poate fi găsită în numeroase culegeri de probleme interesante (de ex. în L.A. Graham: Ingenious Mathematical Problems and Methods, Dover Publications, 1959; Martin Gardner: The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions, University Of Chicago Press, 1987; Martin Gardner: My Best Mathematical and Logic Puzzles, Dover Publications, 1994) – şi a cunoscut până astăzi mai multe generalizări şi variante (cele mai multe articole se referă la problema originală sub denumirea „Jeep problem”). Problema a fost propusă şi elevilor cu ocazia concursului Mathematics B-Day din Olanda şi poate fi găsită şi pe site-ul proiectului Primas (www.primas-proiect.eu).

FIGURA 6.3. Planificare în echipe

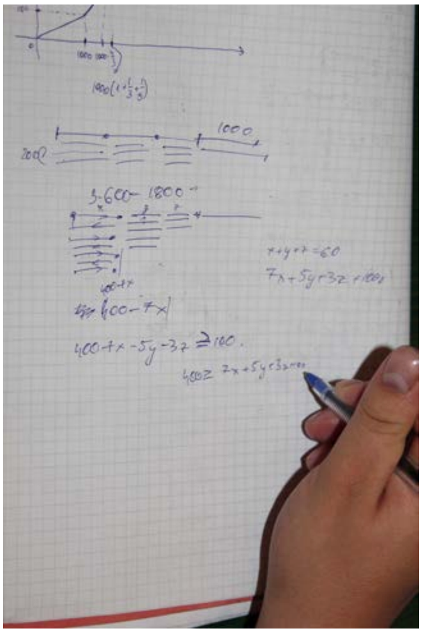


FIGURA 6.4. Modelare şi optimizare în cazul al doilea

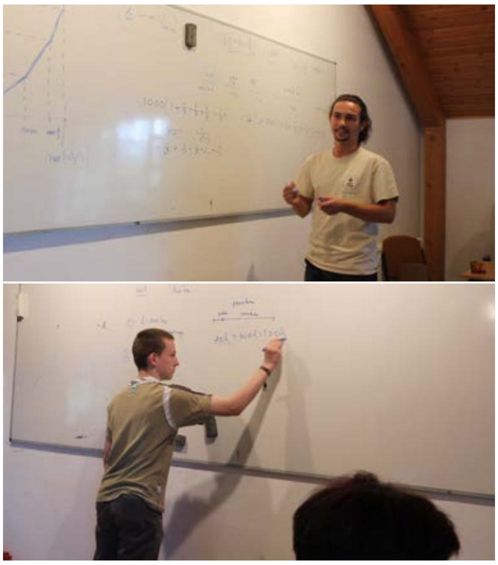


FIGURA 6.5. Prezentarea soluţiilor

CAPITOLUL VII
TRIUNGHIURI PODARE

În acest capitol plecăm de la o problemă de geometrie, pentru care încercăm să găsim cât mai multe generalizări. Pentru a demonstra problema de bază şi generalizările ei, folosim numere complexe şi vectori. La activităţile organizate am utilizat software-uri geometrice dinamice (Geonext, Geogebra, Cabri) pentru a descoperi generalizările proprietăţilor şi pentru a verifica ipotezele.

1. Problema de bază

PROBLEMA 1. M_1, M_2 şi M_3 sunt proiecţiile ortogonale ale unui punct oarecare M pe laturile A_1A_2, A_2A_3 şi A_3A_1 ale triunghiului echilateral $A_1A_2A_3$. Demonstraţi că centrul de greutate al triunghiului $M_1M_2M_3$ este mijlocul segmentului OM, unde O este centrul triunghiului $A_1A_2A_3$.

OBSERVAŢIE. În cele ce urmează vom numi triunghiul $M_1M_2M_3$ triunghi podar determinat de M.

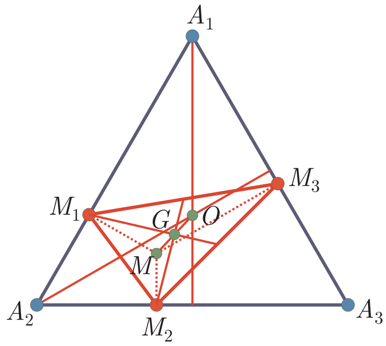


FIGURA 7.1. Centrul de greutate al triunghiului podar

Scopul nostru este ca, pornind de la soluţia problemei, să formulăm unele generalizări şi să demonstrăm câteva dintre ele. Pentru aceasta vom începe cu prezentarea unei soluţii a problemei date.

DEMONSTRAŢIE. Considerăm un reper care are originea în centrul triunghiului $A_1A_2A_3$, axa Ox coincide cu dreapta OA_3, iar raza cercului circumscris triunghiului este egală cu unitatea.

În raport cu acest reper, numerele complexe corespunzătoare vârfurilor (afixele vârfurilor) A_1, A_2 şi A_3 sunt

$$a_1 = \varepsilon, \quad a_2 = \varepsilon^2 \text{ şi } a_3 = \varepsilon^3,$$

unde $\varepsilon^3 = 1$ şi $\varepsilon \neq 1$. Am notat cu literă mică afixul vârfului considerat, convenţie pe care o păstrăm în continuare. Ca urmare a alegerii sistemului de coordonate, m_1 poate fi calculat uşor, dat fiind că partea sa reală este $-\frac{1}{2}$ (fiind situat pe dreapta A_1A_2) şi partea sa imaginară este identică cu partea imaginară a lui m (din cauza proiecţiei ortogonale). Astfel,

$$m_1 = -\frac{1}{2} + \frac{m - \overline{m}}{2}.$$

Pentru a calcula m_2, rotim figura în sens trigonometric cu $\alpha = \frac{4\pi}{3}$. În acest fel, punctul M_2 se transformă în proiecţia ortogonală a punctului $Q(\varepsilon^2 \cdot m)$ pe latura A_1A_2, deci

$$m_2 \cdot \varepsilon^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon^2 \cdot m - \left(\overline{\varepsilon^2 \cdot m}\right)}{2},$$

adică

$$m_2 = -\frac{1}{2} \cdot \varepsilon + \frac{m - \varepsilon^2 \cdot \overline{m}}{2}.$$

Analog

$$m_3 = -\frac{1}{2} \cdot \varepsilon^2 + \frac{m - \varepsilon \cdot \overline{m}}{2}.$$

Pornind de la relaţiile de mai înainte putem scrie că

$$\frac{m_1 + m_2 + m_3}{3} = \frac{m}{2},$$

adică centrul de greutate al triunghiului $M_1M_2M_3$ este mijlocul segmentului OM. $\square$

2. Ipoteze şi demonstraţii

Sunt posibile generalizări multiple. Ca prim pas, putem încerca înlocuirea triunghiului echilateral cu o altă figură, cum ar fi un triunghi oarecare, un poligon regulat, un tetraedru regulat sau un simplex regulat. În acelaşi timp, putem modifica modul de construcţie a proiecţiilor sau putem studia un alt punct remarcabil în locul centrului de greutate. Merită să examinăm toate aceste posibilităţi cu ajutorul unui soft de geometrie. După câteva încercări, ne dăm seama că o proprietate similară este valabilă şi în cazul unui poligon regulat. Acest lucru este formulat în teorema următoare.

TEOREMĂ 7.1. *Dacă notăm cu M_i, $1 \leq i \leq n$, proiecţia ortogonală a punctului M pe latura A_iA_{i+1} a poligonului regulat $A_1A_2A_3\ldots A_n$ $(A_{n+1} = A_1)$ şi cu O centrul poligonului regulat, atunci centrul de greutate al poligonului $M_1M_1M_2\ldots M_n$ este mijlocul segmentului OM.*

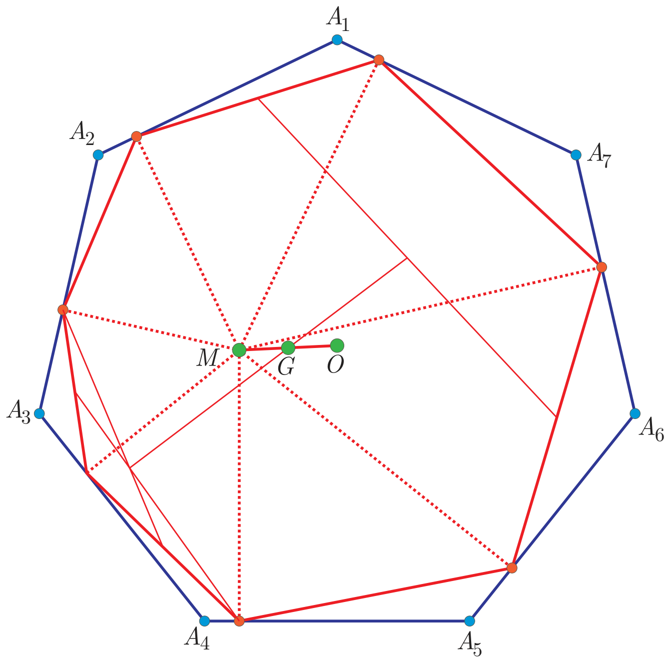


FIGURA 7.2. Centrul de greutate al poligonului podar

DEMONSTRAŢIE. Pentru început studiem cazul în care n este număr impar. Putem alege vârfurile poligonului ca puncte de afixe

$$a_j = \varepsilon^j = \cos\frac{2j\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{2j\pi}{n}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Deoarece $n = 2k+1$, $A_kA_{k+1} \parallel Oy$, urmează că

$$m_k = \cos\frac{2k\pi}{2k+1} + \frac{m-\overline{m}}{2}.$$

Folosind rotaţiile, putem scrie că

$$m_j \cdot \varepsilon^{k-j} = \cos\frac{2k\pi}{2k+1} + \frac{m \cdot \varepsilon^{k-j} - \overline{(m \cdot \varepsilon^{k-j})}}{2}$$

dacă $1 \leq j \leq 2k+1$. Dar $\overline{\varepsilon} = \varepsilon^{2k} = \varepsilon^{-1}$, deci

$$m_j = \varepsilon^{k+j+1}\cos\frac{2k\pi}{2k+1} + \frac{m - \varepsilon^{2j+1}\cdot\overline{m}}{2}, \quad \text{dacă} \;\; 1 \leq j \leq 2k+1.$$

Din cele de mai sus şi din egalitatea $\sum\limits_{v=0}^{n-1} \varepsilon^v = 0$, rezultă că

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n} m_j = \frac{m}{2}. \tag{2}$$

Dacă n este număr par ($n = 2k$), atunci vârfurile poligonului pot fi definite în punctele cu afixele

$$a_j = z_0\varepsilon^j = z_0\left(\cos\frac{2j\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{2j\pi}{n}\right), \quad 1 \leq j \leq n,$$

unde

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{2k} + i\cdot\sin\frac{\pi}{2k}.$$

În acest caz,

$$m_{k-1} = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2k} + \frac{m - \overline{m}}{2},$$

şi astfel, folosind rotaţiile,

$$m_j \cdot \varepsilon^{k-j-1} = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2k} + \frac{m\cdot\varepsilon^{k-j-1} - \overline{(m\cdot\varepsilon^{k-j-1})}}{2},$$

dacă $1 \leq j \leq 2k$. Din aceste egalităţi rezultă că

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n} m_j = \frac{m}{2}. \tag{3}$$

Pe baza egalităţilor (2) şi (3) demonstraţia proprietăţii este completă. $\square$

Observaţie. Dacă $n = 2k$, atunci punctul corespunzător numărului complex $\frac{m_j + m_{j+k}}{2}$ este proiecţia punctului M pe axa de simetrie paralelă cu latura A_jA_{j+1}. Astfel, identitatea

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n} m_j = \frac{1}{k}\cdot\sum_{j=1}^{k}\frac{m_j+m_{j+k}}{2} = \frac{m}{2}$$

exprimă şi faptul că centrul de greutate al poligonului definit prin proiecţiile lui M pe axele de simetrie paralele cu laturile este mijlocul segmentului OM. Această proprietate poate fi considerată ca proprietatea 7.1 aplicată unui poligon regulat degenerat cu k laturi (poligonul fiind de fapt originea).

Observaţia de mai sus sugerează că nu doar proiecţiile definite pe laturi pot fi (şi merită) studiate, ci şi proiecţiile pe axele de simetrie. Cu ajutorul unui program de geometrie dinamic, putem efectua câteva experimente. În acest fel, putem formula proprietatea următoare:

TEOREMĂ 7.2. *Centrul de greutate al unui poligon definit prin proiecţiile unui punct oarecare M pe axele de simetrie ale unui poligon regulat cu n laturi este mijlocul segmentului determinat de M şi centrul poligonului original.*

DEMONSTRAŢIE. Demonstraţia este similară cu cea a teoremei 7.1. Dacă alegem sistemul de coordonate în aşa fel încât una din axele de simetrie să fie tocmai axa Oy, atunci partea reală a afixului proiecţiei pe această axă este 0, iar partea imaginară corespunde părţii imaginare a lui M. Astfel, trebuie să efectuăm de fapt aceleaşi calcule ca în cazul demonstraţiei teoremei 7.1, cu deosebirea că, în timp ce calculăm partea reală, trebuie să folosim 0 în loc de $\cos\frac{(2k-1)\pi}{2k}$, respectiv în loc de $\cos\frac{2k\pi}{2k+1}$. Astfel, proprietatea este adevărată. $\square$

OBSERVAŢIE. În cursul celor 4 activităţi pe care le-am organizat, toate grupele au reuşit să formuleze teorema 7.1, dar teorema 7.2 a fost formulată doar de o singură grupă.

Primul pas în generalizarea proprietăţii de mai sus la mai multe dimensiuni constă în formularea unei proprietăţi similare pentru un tetraedru regulat. Pentru a experimenta această proprietate, avem nevoie de un program de vizualizare tridimensională (de exemplu Euler 3D) sau de un model fizic (se poate folosi setul UBIM).

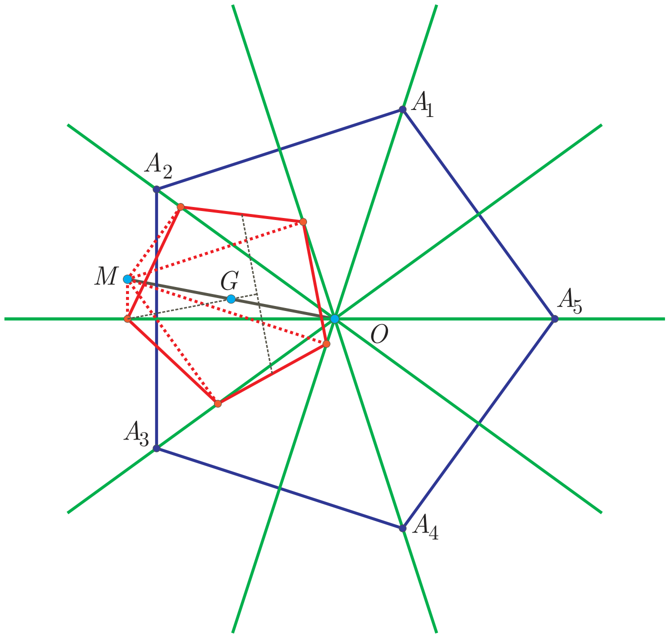


FIGURA 7.3. Proiecţii pe axele de simetrie ale unui poligon regulat

TEOREMĂ 7.3. *Fie O centrul tetraedrului regulat $A_1A_2A_3A_4$, M_i ($1 \leq i \leq 4$) proiecţiile unui punct oarecare M pe feţele tetraedrului şi Q_i, $1 \leq i \leq 6$ proiecţiile lui M pe muchii. Sunt adevărate următoarele enunţuri:*

a) *Centrul de greutate G_2 al tetraedrului $M_1M_2M_3M_4$ se află pe segmentul OM şi are loc egalitatea $\frac{OG_2}{OM} = \frac{2}{3}$.*
b) *Centrul de greutate G_1 al sistemului de puncte $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ se află pe segmentul OM şi are loc egalitatea $\frac{OG_1}{OM} = \frac{1}{3}$.*

DEMONSTRAŢIE. Pentru început, demonstrăm că cele două proprietăţi sunt echivalente între ele. Pe baza problemei 1 (vezi fig. 7.4):

$$\frac{\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{OM_1}}{2} = \frac{\overrightarrow{OQ_4} + \overrightarrow{OQ_5} + \overrightarrow{OQ_6}}{3},$$

$$\frac{\overrightarrow{OO_2} + \overrightarrow{OM_2}}{2} = \frac{\overrightarrow{OQ_4} + \overrightarrow{OQ_1} + \overrightarrow{OQ_2}}{3},$$

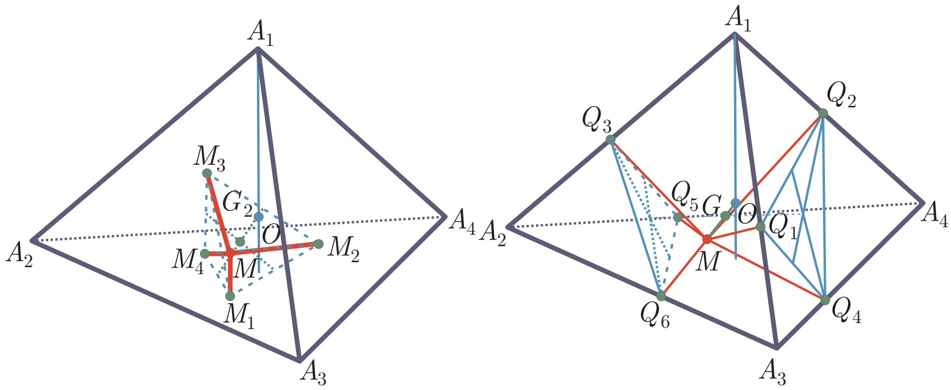


FIGURA 7.4. Proiecţii referitoare la tetraedre

$$\frac{\overrightarrow{OO_3}+\overrightarrow{OM_3}}{2}=\frac{\overrightarrow{OQ_3}+\overrightarrow{OQ_5}+\overrightarrow{OQ_2}}{3}$$

şi

$$\frac{\overrightarrow{OO_4}+\overrightarrow{OM_4}}{2}=\frac{\overrightarrow{OQ_1}+\overrightarrow{OQ_3}+\overrightarrow{OQ_6}}{3},$$

(unde $Q_1 \in A_1A_3, Q_2 \in A_1A_4, Q_3 \in A_1A_2, Q_4 \in A_4A_3, Q_5 \in A_2A_4$, $Q_6 \in A_2A_3$, $\overrightarrow{AB}$ este vectorul direcţionat din A spre B, iar O_i centrele feţelor). Din aceste egalităţi rezultă că

$$\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OM_i}=\frac{2}{3}\cdot\sum_{i=1}^{6}\overrightarrow{OQ_i},$$

deoarece $\frac{1}{2}\cdot\sum\limits_{i=1}^{4}\overrightarrow{OO_i}=0$. Astfel

$$\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{OG_2}=\overrightarrow{OG_1},$$

deci cele două proprietăţi sunt echivalente.

Pentru a justifica prima proprietate alegem vârfurile tetraedrului în punctele $A_1\left(0,0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $A_2\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6},0\right)$, $A_3\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6},0\right)$, $A_4\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$ (acest lucru este echivalent, de fapt, cu alegerea originii, a axelor şi a unităţii) şi calculăm coordonatele punctelor M_i. Ecuaţiile feţelor sunt

$$\begin{aligned} A_1A_2A_3: &\quad -2\sqrt{3}y+\sqrt{3}z-\sqrt{2}=0,\\ A_1A_2A_4: &\quad 3\sqrt{2}x-\sqrt{6}y-\sqrt{3}z+\sqrt{2}=0,\\ A_1A_3A_4: &\quad 3\sqrt{2}x+\sqrt{6}y+\sqrt{3}z-\sqrt{2}=0 \quad \text{şi}\\ A_3A_2A_4: &\quad z=0. \end{aligned}$$

Pe de altă parte, coordonata x a proiecţiei punctului cu coordonatele (x_0, y_0, z_0) pe planul definit prin ecuaţia $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$ este

$$x = x_0 - A\cdot\frac{A\cdot x_0+B\cdot y_0+C\cdot z_0+D}{A^2+B^2+C^2},$$

deci

$$\begin{aligned} x_1 &= x_4 = x_0,\\ x_2 &= x_0-3\sqrt{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}\cdot x_0+\sqrt{6}\cdot y_0+\sqrt{3}\cdot z_0-\sqrt{2}}{27} \quad \text{şi}\\ x_3 &= x_0-3\sqrt{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}\cdot x_0-\sqrt{6}\cdot y_0-\sqrt{3}\cdot z_0+\sqrt{2}}{27}. \end{aligned}$$

Din aceste egalităţi rezultă că

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}=\frac{2x_0}{3}.$$

O relaţie similară este valabilă şi în cazul coordonatelor y şi z, deci G_2 se află pe segmentul OM şi are loc egalitatea $\frac{OG_2}{OM}=\frac{2}{3}$. $\square$

Pe baza proprietăţilor de mai sus putem formula următoarea teoremă pentru un simplex de n dimensiuni:

CONJECTURĂ 7.4. Dacă în cazul simplexului regulat cu n dimensiuni $A_1A_2A_3...A_nA_{n+1}$ notăm prin G_k centrul de greutate al sistemului de puncte definit prin proiecţiile unui punct M oarecare pe feţele cu k dimensiuni, atunci $G_k \in OM$ şi îndeplineşte egalitatea $\frac{OG_k}{OM}=\frac{k}{n}$, $1\le k\le n-1$, unde O este centrul simplexului.

OBSERVAŢIE. În cursul activităţilor, toate grupele au formulat teorema 7.3, dar o singură grupă a enunţat teorema 7.4. Cu ocazia analizei demonstraţiei teoremei 7.3, grupele au susţinut unanim că este necesară o abordare diferită pentru studiul cazului general.

Pentru conjectura de mai sus se poate da o demonstraţie analoagă cu cea a teoremei 7.3, dar calculele sunt mai complicate. Pentru a simplifica demonstraţia în cazul general, trebuie să găsim înainte de toate o generalizare pentru varianta bidimensională, care poate fi demonstrată uşor şi prin alte mijloace, şi a cărei generalizare multidimensională să cuprindă şi conjectura formulată. În acest scop, trebuie să formulăm problema iniţială astfel încât să nu conţină proiecţii ortogonale, ci doar noţiuni, ce pot fi generalizate mai uşor (centre de greutate, proporţii, paralelism). Într-un poligon regulat, segmentul care uneşte centrul cu mijlocul laturilor este perpendicular pe latură, deci proiecţia ortogonală ar putea fi înlocuită cu intersecţia dreptei ce trece prin punctul M, este paralelă cu segmentul ce uneşte centrul O cu mijlocul laturii, notat O_i, cu latura pe care se află O_i. Construcţia aceasta poate fi făcută şi într-un triunghi oarecare. Dat fiind că centrul unui triunghi echilateral este totodată centrul de greutate, conjectura de mai jos este generalizarea problemei iniţiale.

Conjectură 7.5. În triunghiul oarecare $A_1A_2A_3$ punctele $O_1 \in A_2A_3$, $O_2 \in A_3A_1$ şi $O_3 \in A_1A_2$ sunt mijloacele laturilor şi $A_1O_1 \cap A_2O_2 \cap A_3O_3 = \{O\}$. Dacă M este un punct oarecare în plan şi $M_1 \in A_2A_3$, $M_2 \in A_3A_1$, respectiv $M_3 \in A_1A_2$, astfel încât $MM_1||OO_1$, $MM_2||OO_2$, respectiv $MM_3||OO_3$, atunci centrul de greutate al triunghiului $M_1M_2M_3$ este mijlocul segmentului OM.

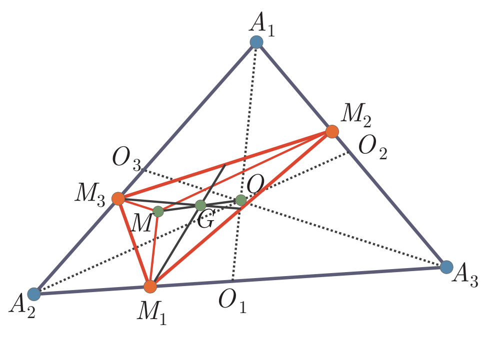


Figura 7.5. Triunghi podar generalizat într-un triunghi oarecare

Generalizarea proprietăţii referitoare la poligoane este următoarea:

CONJECTURĂ 7.6. În poligonul $A_1A_2\dots A_n$, să notăm prin $O_1, O_2, \dots, O_n$ mijloacele laturilor A_1A_2, $A_2A_3, \dots$, A_nA_1 (în această ordine) şi prin O centrul de greutate al poligonului. Dacă, în cazul unui punct M oarecare, considerăm punctele $M_i \in A_iA_{i+1}$, $1 \le i \le n$ astfel încât $MM_i||OO_i$, $1 \le i \le n$, atunci centrul de greutate al poligonului $M_1M_2\dots M_n$ este mijlocul segmentului OM.

Cu ajutorul programelor de construcţie geometrică, putem verifica dacă ipotezele de mai sus sunt valabile pentru anumite cazuri particulare. Astfel, conjectura 7.5 pare adevărată, dar pentru conjectura 7.6 putem găsi contraexemple când $n \ge 4$.

OBSERVAŢIE. Nu ne-am ocupat de studiul condiţiilor suplimentare pe care ar trebui să le îndeplinească poligonul pentru ca afirmaţia 7.6 să fie adevărată. În cursul unei activităţi, una dintre grupe a observat valabilitatea conjecturii 7.6 în cazul trapezelor.

DEMONSTRAŢIA IPOTEZEI 7.5. În continuare vom nota cu literă mică vectorul de poziţie al punctului corespunzător. Astfel, pe baza ipotezei putem scrie că $o = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)$, $o_1 = \frac{1}{2}(a_2 + a_3)$, $o_2 = \frac{1}{2}(a_3 + a_1)$ şi $o_3 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$. Deoarece M este un punct oarecare din plan, există $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$m = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$$

şi $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. În acelaşi timp, $M_1 \in A_2A_3$, deci există $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ astfel încât $m_1 = \lambda_1 a_2 + (1 - \lambda_1)a_3$. Condiţia $MM_1||OO_1$ înseamnă că

$$m - m_1 = c(o - o_1)$$

pentru un $c \in \mathbb{R}$ oarecare. Pe baza acestor relaţii,

$$\alpha_1 a_1 + (\alpha_2 - \lambda_1)\, a_2 + (\alpha_3 - 1 + \lambda_1)\, a_3 = c\left(\frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{6}a_2 - \frac{1}{6}a_3\right).$$

Dacă luăm originea vectorilor de poziţie în afara planului $A_1A_2A_3$, atunci vectorii a_1, a_2 şi a_3 sunt liniar independenţi şi obţinem următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases} \alpha_1 & = & \frac{1}{3}c \\ \alpha_2 - \lambda_1 & = & -\frac{c}{6} \\ \alpha_3 - 1 + \lambda_1 & = & -\frac{c}{6} \end{cases}.$$

Pe baza acestuia,

$$m_1 = m - 3\alpha_1(o - o_1) = \left(\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_1\right) a_2 + \left(\alpha_3 + \frac{1}{2}\alpha_1\right) a_3.$$

Pe baza unui raţionament similar putem scrie că

$$m_2 = \left(\alpha_3 + \frac{1}{2}\alpha_2\right) a_3 + \left(\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2\right) a_1 \text{ şi}$$

$$m_3 = \left(\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_3\right) a_1 + \left(\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3\right) a_2,$$

deci

$$g = \frac{1}{3}(m_1 + m_2 + m_3) = \frac{1}{2}(m + o),$$

ceea ce trebuia demonstrat. □

Examinând demonstraţia teoremei 7.3 şi a ipotezei 7.5, formulăm următoarea proprietate:

TEOREMĂ 7.7. *(Zsolt Szilágyi, Szilárd András) În simplexul n-dimensional $A_0 \dots A_n$, M este un punct oarecare şi O centrul simplexului. Fie $O_{i_0 \dots i_k}$ centrul de greutate al feţei $A_{i_0} \dots A_{i_k}$ şi $M_{i_0 \dots i_k}$ intersecţia dintre faţa $A_{i_0} \dots A_{i_k}$ şi varietatea paralelă prin M cu varietatea liniară $O_{i_0 \dots i_k} A_{i_{k+1} \dots A_{i_n}}$. Dacă în cazul unui k fixat ($k \in \{1, \dots, n-1\}$) G_k' reprezintă centrul de greutate al sistemului de puncte $M_{i_0 \dots i_k}$ unde $i_0 \dots i_k$ ia toate valorile posibile, atunci punctele M, O, G_k' aparţin aceleiaşi drepte şi*

$$\frac{OG_k'}{OM} = \frac{k}{n}.$$

DEMONSTRAŢIE. Vom nota în $\mathbb{R}^n$ vectorul de poziţie al unui punct cu litera mică corespunzătoare. M este un punct oarecare şi $A_0 \dots A_n$ un simplex n-dimensional, deci există $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$ şi $m = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i a_i$. Dacă $\overline{m} := \sum\limits_{j=0}^{k} c_j a_{i_j}$ (unde $\sum\limits_{j=0}^{k} c_j = 1$) este intersecţia feţei $A_{i_0} \dots A_{i_k}$ cu paralela la $O_{i_0 \dots i_k} A_{i_{k+1}} \dots A_{i_n}$ prin M şi $o_{i_0 \dots i_k} = \frac{1}{k+1} \sum\limits_{j=0}^{k} a_{i_j}$ este centrul feţei $A_{i_0} \dots A_{i_k}$, atunci condiţia

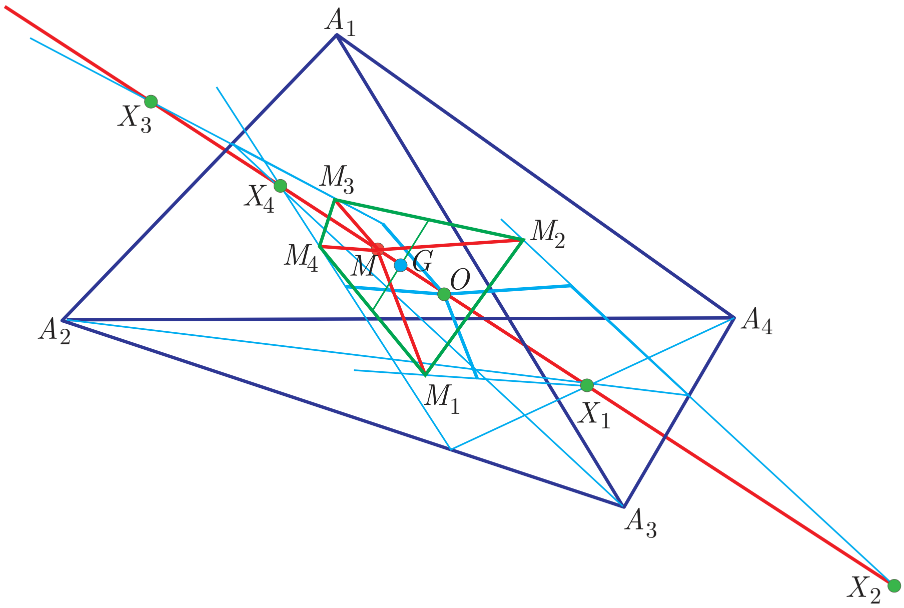


FIGURA 7.6. Tetraedru podar generalizat într-un tetraedru oarecare

de paralelism este:

$$m - \overline{m} = c\left(\sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j (a_{i_j} - o_{i_0\ldots i_k})\right),$$

unde $\lambda_j \in \mathbb{R}$, pentru orice $j \in \{k+1, \ldots, n\}$ şi $\sum\limits_{j=k+1}^{n} \lambda_j = 1$.
Acest lucru poate fi scris sub forma

$$\sum_{j=0}^{k} (\alpha_{i_j} - c_j) a_{i_j} + \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_{i_j} a_{i_j} = c\left(\sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j a_{i_j} - \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k} a_{i_j}\right),$$

deci $\lambda_j = \frac{\alpha_{i_j}}{c}$, dacă $k+1 \leq j \leq n$, şi $c_j = \alpha_{i_j} + \frac{c}{k+1}$, dacă $0 \leq j \leq k$.
Din aceste egalităţi rezultă că $c = \sum\limits_{j=k+1}^{n} \alpha_{i_j}$ şi astfel

$$\overline{m} = m_{i_0\ldots i_k} = \sum_{j=0}^{k}\left[\alpha_{i_j} + \frac{1}{k+1}(\alpha_{i_{k+1}} + \ldots + \alpha_{i_n})\right] a_{i_j}.$$

În simplexul n-dimensional numărul feţelor cu k dimensiuni este C_{n+1}^{k+1}, deci

$$\begin{aligned} g_k^{'} &= \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}} \sum_{i \in C_{n+1,k+1}} m_{i_0 \dots i_k} \\ &= \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}} \sum_{i \in C_{n+1,k+1}} \left(\sum_{j=0}^{k} \left[\alpha_{i_j} + \frac{1}{k+1} (\alpha_{i_{k+1}} + \ldots + \alpha_{i_n}) \right] a_{i_j} \right), \end{aligned}$$

unde $C_{n+1,k+1}$ este mulţimea tuturor combinărilor posibile de $\{0, 1, \ldots, n+1\}$ luate câte $(k+1)$. Numărul combinărilor i pentru care $l \in \{i_0, \ldots, i_k\}$, unde l este un element fix al mulţimii $\{0, 1, \ldots, n+1\}$, este exact C_n^k, în timp ce numărul combinărilor i pentru care $l \in \{i_0, \ldots, i_k\}$ şi $j \in \{i_{k+1}, \ldots, i_n\}$ este exact C_{n-1}^k (j este de asemenea fix). Din această cauză,

$$\begin{aligned} g_k^{'} &= \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}} \sum_{l=0}^{n} \left[C_n^k \alpha_l + \sum_{j \neq l} \frac{C_{n-1}^k}{k+1} \alpha_j \right] a_l \\ &= \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}} \sum_{l=0}^{n} \left[C_n^k \alpha_l + \frac{C_{n-1}^k}{k+1} (1 - \alpha_l) \right] a_l \\ &= \sum_{l=0}^{n} \left(\frac{k+1}{n+1} \alpha_l + \frac{n-k}{n(n+1)} (1 - \alpha_l) \right) a_l \\ &= \sum_{l=0}^{n} \left(\frac{k}{n} \alpha_l + \frac{n-k}{n(n+1)} \right) a_l. \end{aligned}$$

Centrul simplexului este $o = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} a_i$, deci

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG_k^{'}} &= \sum_{l=0}^{n} \left(-\frac{1}{n+1} + \frac{k}{n} \alpha_l + \frac{n-k}{n(n+1)} \right) a_l \\ &= \sum_{l=0}^{n} \left(-\frac{k}{n(n+1)} + \frac{k}{n} \alpha_l \right) a_l. \qquad (4) \end{aligned}$$

Pe de altă parte, $\overrightarrow{OM} = \sum\limits_{l=0}^{n} \left(\alpha_l - \frac{1}{n+1}\right) a_l$, deci $\overrightarrow{OG_k} = \frac{k}{n}\overrightarrow{OM}$, ceea ce trebuia demonstrat. $\square$

OBSERVAŢIE. Pe baza teoremei 7.7, conjectura 7.4 este adevărată, deoarece într-un simplex n-dimensional regulat varietatea $O_{i_0\ldots i_k}A_{i_{k+1}}\ldots A_{i_n}$ este perpendiculară pe faţa $A_{i_0}\ldots A_{i_k}$.

Dacă studiem demonstraţia teoremei 7.5, apare în mod natural întrebarea dacă centrul de greutate al feţei poate fi înlocuit cu alt punct de pe aceea faţă. În cazul bidimensional răspunsul la această întrebare este conţinut în teorema următoare.

TEOREMĂ 7.8. *Considerăm triunghiul $A_1A_2A_3$ şi numerele reale w_1, w_2, w_3, a căror sumă este* 1. *Fie O un punct în planul triunghiului având coordonatele baricentrice (w_1, w_2, w_3) şi fie M un punct oarecare în acest plan. Construim punctele $M_1 \in A_2A_3$, $M_2 \in A_3A_1$ şi $M_3 \in A_1A_2$ astfel încât $MM_1||OA_1$, $MM_2||OA_3$ şi $MM_3||OA_3$, atunci centrul de greutate al triunghiului $M_1M_2M_3$ coincide cu centrul de greutate al triunghiului MOP, unde coordonatele baricentrice ale lui P referitoare la $M_1M_2M_3$ sunt (w_1, w_2, w_3).*

OBSERVAŢIE. Dacă $w_1 = w_2 = w_3$, atunci P este centrul de greutate al triunghiului $M_1M_2M_3$, astfel teorema de mai sus se reduce la conjectura 7.5.

DEMONSTRAŢIE. Fie $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ coordonatele baricentrice ale punctului M. Astfel,

$$m = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \gamma_3 a_3$$

şi

$$o = w_1 a_1 + w_2 a_2 + w_3 a_3,$$

unde a_1, a_2, a_3 sunt pe rând vectorii de poziţie ai vârfurilor, iar m şi o sunt vectorii de poziţie ai lui M, respectiv O.

$M_1 \in A_2A_3$, deci există $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ astfel încât $m_1 = \lambda_1 a_2 + (1-\lambda_1)a_3$. Condiţia $MM_1||OA_1$ poate fi scrisă sub forma $m_1 - m = c(o - a_1)$, unde $c \in \mathbb{R}$. Pe baza acesteia,

$$(5)\quad \lambda_1 a_2 + (1-\lambda_1)a_3 - \gamma_1 a_1 - \gamma_2 a_2 - \gamma_3 a_3 = c(w_1 a_1 + w_2 a_2 + w_3 a_3 - a_1).$$

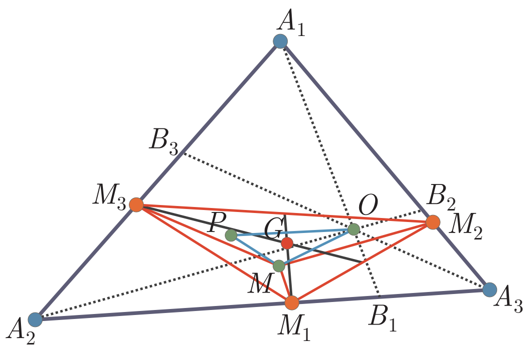


FIGURA 7.7. Triunghi podar generalizat într-un triunghi oarecare

Dacă luăm mijloacele vectorilor de poziţie în afara planului $A_1A_2A_3$, atunci a_1, a_2, a_3 sunt liniar independenţi, deci, pe baza egalităţii (5) $-\gamma_1 = c(w_1 - 1)$, $\lambda_1 - \gamma_2 = cw_2$ şi $1 - \lambda_1 - \gamma_3 = cw_3$. Pe baza acestora,

$$(6) \qquad m_1 = \left(\gamma_2 + \gamma_1 \frac{w_2}{w_2 + w_3}\right) a_2 + \left(\gamma_3 + \gamma_1 \frac{w_3}{w_2 + w_3}\right) a_3.$$

Urmând un raţionament similar

$$(7) \qquad m_2 = \left(\gamma_3 + \gamma_2 \frac{w_3}{w_1 + w_3}\right) a_3 + \left(\gamma_1 + \gamma_2 \frac{w_1}{w_1 + w_3}\right) a_1,$$

$$(8) \qquad m_3 = \left(\gamma_1 + \gamma_3 \frac{w_1}{w_2 + w_1}\right) a_1 + \left(\gamma_2 + \gamma_3 \frac{w_2}{w_2 + w_1}\right) a_2.$$

Pe baza relaţiilor (6), (7) şi (8)

$$m_1(1 - w_1) + m_2(1 - w_2) + m_3(1 - w_3) = m + o,$$

deci

$$\frac{1}{3}(m_1 + m_2 + m_3) = \frac{1}{3}(m + o + p),$$

ceea ce trebuia demonstrat. □

OBSERVAŢIE. Teorema 7.8 poate fi formulată şi pentru simplexe, însă calculele necesare demonstraţiei sunt mai complexe.

OBSERVAŢIE. Ar fi interesantă o proprietate afină generală care să cuprindă toate proprietăţile demonstrate (inclusiv teorema 7.1).

3. Comentarii, concluzii

• Activitatea a avut mai multe obiective paralele. Primul a fost sensibilizarea participanţilor cu privire la faptul că noi şi noi dificultăţi pot apărea chiar şi în legătură cu problemele cele mai cunoscute şi că, în consecinţă, merită să privim problema iniţială dintr-un unghi complet diferit. Al doilea obiectiv a fost ca profesorii să vadă limpede anumite caracteristici importante ale activităţilor bazate pe investigaţie – de exemplu faptul că pot apărea mult mai multe probleme decât am putea rezolva, că aceste probleme trebuie să fie formulate precis şi că trebuie să decidem ce vom studia şi ce nu. Profesorii trebuie să-şi dea seama de importanţa experimentelor, a ipotezelor şi examinării acestora, să observe că demonstraţia în sine atrage şi motivează un număr foarte mic de elevi (de obicei nici profesorii nu sunt interesaţi de cazul n-dimensional). Al treilea obiectiv a fost înţelegerea faptului că învăţarea bazată pe investigaţie nu depinde de măsura în care materia aleasă este sau nu apropiată de realitatea vieţii, ci mai degrabă de modul în care abordăm şi tratăm problema dată.

• Observaţiile ne arată că întrebările formulate – şi deseori răspunsurile – conduc la investigaţii noi. Acest lucru oferă o imagine mai aproape de realitate despre activitatea matematică (şi despre cea a matematicienilor) decât totalitatea demonstraţiilor cuprinse în manuale.

• Unii participanţi la activităţile noastre au spus că aceasta le-a fost utilă, în primul rând, pentru a înţelege importanţa pe care o are în rezolvarea problemei studiul alternativelor, alegerea mijloacelor, a modului de a vedea lucrurile, capacitatea de a alterna toate aceste elemente, cât de important este modul în care organizăm demonstraţia unei proprietăţi cunoscute pentru a învăţa cât mai mult din ea. În acelaşi timp, participanţii au scos în evidenţă cât de important este să lucrăm cu situaţii ce sunt suficient de bogate în probleme.

CAPITOLUL VIII
CUTII

În acest capitol prezentăm două activităţi desfăşurate în cadrul proiectului PRIMAS, în tabăra de sprijinire a talentelor organizată de Asociaţia SimpleX şi cu ocazia Zilei Talentelor organizată de Liceul Teoretic „Márton Áron”. Aceste două activităţi sunt recomandate elevilor de clasa a IX-a.

1. Dimensiunile cutiei de conserve

Problema 1. În condiţiile unui volum de umplere dat, ce dimensiuni trebuie să aibă o cutie de conserve, dacă dorim să folosim o cantitate minimă de material (tinichea) pentru confecţionarea ei?

Problema 2. Cum trebuie să arate o cutie de conserve, dacă un procent p al materialului folosit se pierde în timpul confecţionării fundului şi capacului cutiei (din cauza formei decupajului şi formei materialului iniţial), iar producătorul doreşte să folosească o cantitate minimă de material pentru volumul de umplere dat?

Soluţia problemei 1. Fie R raza cercului de bază şi h înălţimea cutiei. Volumul cutiei este

$$V = \pi R^2 h$$

cantitatea de tinichea folosită pentru confecţionarea suprafeţei este

$$F = 2\pi Rh + 2\pi R^2,$$

deci căutăm valoarea minimă a lui F în cazul unui V dat. Astfel $h = \frac{V}{\pi R^2}$, deci căutăm valoarea minimă a expresiei

$$F(R) = R^2 + \frac{V}{\pi R}$$

în cazul unui V dat. Pe baza inegalităţii între media aritmetică şi cea geometrică

$$F(R) = R^2 + \frac{V}{2\pi R} + \frac{V}{2\pi R} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}$$

iar egalitatea are loc dacă şi numai dacă $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. În acest caz, $h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, deci, pentru a realiza un consum de material minim, trebuie să fie îndeplinită egalitatea

$$\frac{h}{2R} = 1.$$

□

OBSERVAŢIE. În practică există multe cutii de conserve care au exact această formă. Pe parcursul activităţii, valoarea minimă a funcţiei F poate fi determinată şi prin alte metode, de exemplu calculăm valorile funcţiei într-un tabel Excel şi pe baza valorilor numerice putem determina valoarea minimă.

SOLUŢIA PROBLEMEI 2. Fie R raza cercului de bază şi h înălţimea cutiei. Volumul cutiei este

$$V = \pi R^2 h,$$

cantitatea de tinichea folosită pentru confecţionarea suprafeţei este

$$F = 2\pi Rh + 2(1+p)\pi R^2,$$

deci căutăm valoarea minimă a lui F pentru o valoare V dată. Astfel $h = \frac{V}{\pi R^2}$, deci căutăm valoarea minimă a expresiei

$$F(R) = (1+p)R^2 + \frac{V}{\pi R}$$

pentru o valoare V dată. Pe baza inegalităţii între media aritmetică şi media geometrică

$$F(R) = (1+p)R^2 + \frac{V}{2\pi R} + \frac{V}{2\pi R} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{(1+p)V^2}{4\pi^2}}$$

iar egalitatea are loc dacă şi numai dacă

$$R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi(1+p)}}.$$

Astfel, $h = 2(1+p)\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi(1+p)}}$, deci, pentru a obţine cutiile cu un consum minim de material, trebuie să aibă loc egalitatea: $\frac{h}{2R} = 1+p$. □

OBSERVAŢIE. O cutie cu diametrul de $7,5$ cm şi cu înălţimea de 11 cm se consideră, de asemenea, de dimensiuni standard. Aceste mărimi sunt optime în cazul în care capacul şi fundul cutiei (iniţial un disc cu diametru de 8 cm) se taie dintr-un pătrat cu laturi de aproximativ 8 cm, iar inelul de $0,25$ cm grosime obţinut pe margine, se foloseşte pentru îmbinare (acest inel este îndoit şi presat pe suprafaţa laterală). Putem căuta pe internet filmul intitulat „Cum se confecţionează cutia de conserve?" (poate fi descărcat de pe YouTube, a fost realizat de Discovery Channel). Pe baza acestui film, putem construi un model şi mai realist.

2. Cutia cu Finetti

Avem nevoie de două cutii nedesfăcute cu beţişoare Finetti, una de 140 grame şi una de 400 grame, precum şi de un liniar şi un cântar.

Problema 3. Câte beţişoare Finetti conţine cutia din figura de mai jos?

Figura 8.1. Cutia cu Finetti de 140 g

Problema 4. Ce diametru are cutia care conţine 400 grame de beţişoare de napolitane, umplută cu beţişoare de aceleaşi dimensiuni ca cele din cutia de mai sus?

Problema 5. Ce fel de probleme de matematică ridică problemele 3 şi 4?

Soluţia posibilă a problemei 3. Este util să măsurăm diametrul cutiei şi ar fi bine să cunoaştem diametrul beţişoarelor. Să presupunem că (în vederea folosirii optime a spaţiului) beţişoarele sunt aşezate perpendicular pe fundul cutiei, astfel este suficient dacă examinăm o secţiune transversală, paralelă cu baza cutiei. Diametrul beţişoarelor este necunoscut, deci avem nevoie de o estimare a acestuia. În imaginile de pe cutie diametrul beţişoarelor este $1,1$ cm, de aceea vom lua în calcul un diametru de aproximativ $1,1$ cm (deşi se ştie că în cazul majorităţii produselor, fotografiile de pe ambalaj nu coincid cu mărimea produsului). În linii mari, am obţine aceeaşi estimare şi în cazul în care, pe baza figurilor 8.2 şi 8.3, am lua în considerare numărul beţişoarelor şi diametrul cutiei. Diametrul exterior al cutiei este aproximativ 7 cm; din această mărime trebuie să scădem aproape 1 cm pentru a obţine diametrul deschizăturii de pe capacul cutiei. Problema matematică constă în determinarea numărului de discuri cu diametrul de $1,1$ cm, care pot fi aşezate – fără a se suprapune – în interiorul unui disc dat cu diametrul de 6 cm. Bineînţeles, în realitate

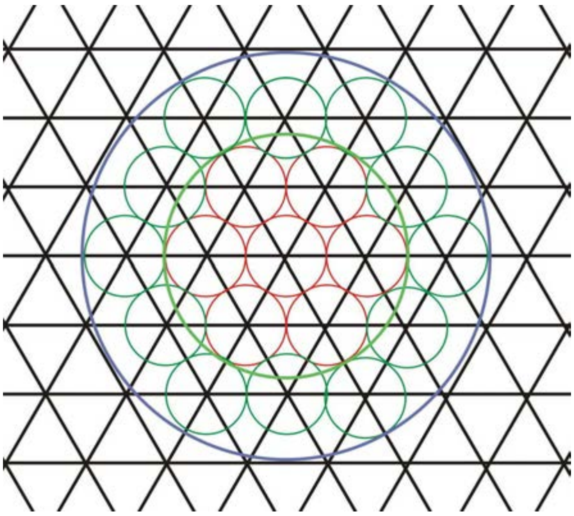


Figura 8.2. Aranjarea optimă

beţişoarele nu stau atât de strâns unul lângă altul, deci diametrul de $1,1$ cm cuprinde şi mărimea spaţiului dintre beţişoare. Astfel, pe un diametru de 6 cm se pot aşeza cel mult 5 beţişoare cu diametrul de $1,1$

cm. Dacă încercăm să aşezăm discurile mici pornind din centru, vom obţine configuraţia din figura 8.2. Aici pot fi puse unul lângă altul 19 discuri mici. Prin urmare, numărul beţişoarelor Finetti din cutie este aproximativ 19. □

Observaţie. După deschiderea cutiei se poate verifica faptul că o cutie conţine într-adevăr $19-20$ beţişoare, deci greutatea unui beţişor este de aproximativ $7,35$ grame. După cântărirea beţişoarelor, putem constata că greutatea medie a unui beţişor este 8 g, deci cutiile conţin în medie un beţişor în plus faţă de numărul necesar pentru ca greutatea conţinutului cutiei să fie 140 g.

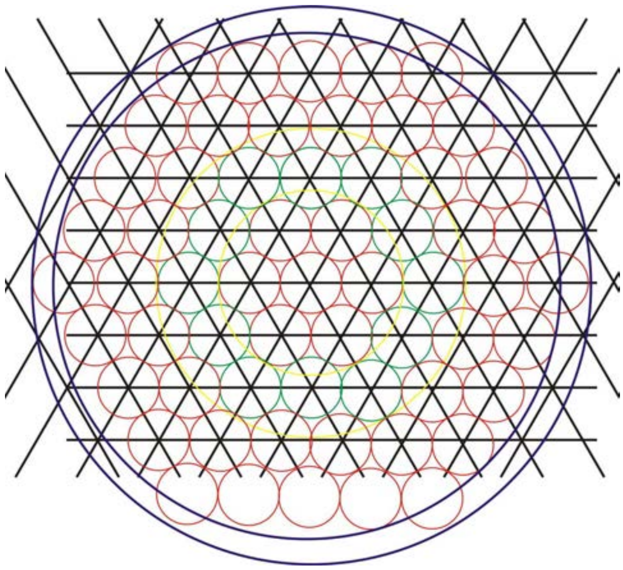


Figura 8.3. Aranjarea beţişoarelor în cutia mai mare

Soluţia posibilă a problemei 4. Pe baza problemei anterioare, greutatea medie a unui beţişor este de 8 grame, deci o cutie de 400 conţine aproximativ 50 de beţişoare Finetti. Să încercăm să aşezăm aceste beţişoare corespunzător configuraţiei de mai sus. Se poate observa că pe un disc cu diametru de $9 \cdot 1,1 = 9,9$ cm se pot aşeza 61 de discuri mai mici cu diametrul $1,1$ cm, prin urmare diametrul discului mare poate fi micşorat.

Dacă reducem un pic acest diametru, la aproximativ $9,3$ cm, încă mai pot fi aşezate $61 - 6 = 55$ discuri mai mici. Dacă micşorăm diametrul discului mare la $8 \cdot 1,1 = 8,8$ cm, atunci cele 50 de discuri mici nu vor încăpea pe suprafaţa lui. Astfel diametrul cutiei este aproximativ $10,3$ cm (având în vedere că diferenţa între diametrul interior al găurii şi diametrul exterior este 1 cm). □

OBSERVAŢIE. Dacă măsurăm cutia, vom vedea că are un diametru de $10,2$ cm şi conţine aproximativ 52 de beţişoare, deci estimarea noastră este bună.

SOLUŢIA PROBLEMEI 5. Enumerăm câteva dintre problemele matematice care pot apărea:

• Determinaţi numărul maxim de discuri mici cu raza r care pot fi aşezate fără a fi suprapuse în interiorul unui disc mai mare cu raza R.

Altă formulare: dacă în interiorul unui disc cu raza R aşezăm numărul maxim de discuri mai mici cu raza r, fără a le suprapune, cât la sută din suprafaţa discului dat rămâne neacoperită?

• Determinaţi câte discuri cu raza r pot fi aşezate în interiorul unui poligon dat (de ex. un dreptunghi) sau în interiorul unui domeniu oarecare din plan, fără să se suprapună.

Altă formulare: dacă în interiorul unui domeniu bidimensional se aşază numărul maxim de discuri cu raza r, cât la sută din suprafaţa lui rămâne neacoperită?

• Să determinăm câte sfere cu raza r pot fi aşezate în interiorul unui corp dat.

• Dacă într-un plan aşezăm numărul maxim de discuri cu raza r, câte procente rămân neacoperite?

• Ce se va schimba dacă în problemele de mai sus folosim nu numai discuri şi sfere cu raza r, ci mai multe feluri de discuri şi sfere cu raze $r_1, r_2, \ldots, r_k$?

• Cum putem construi algoritmi de rezolvare eficienţi pentru problemele de mai sus care, chiar dacă nu oferă soluţia optimă, pot aproxima suficient acoperirile cele mai bune? □

3. Observaţii didactice

Pe parcursul activităţilor matematice, găsirea soluţiei nu este întotdeauna lucrul cel mai important. Este bine să fim conştienţi de acest fapt mai ales atunci când există mai multe rezolvări posibile sau când căutăm numai o estimare a soluţiei exacte. A doua activitate, în contextul sistemului de învăţământ tradiţional, poate da impresia că problema nu a fost o problemă reală şi că rezolvarea nu a fost corectă. Tocmai de aceea am ales această activitate care, în tabăra Asociaţiei SimpleX, a fost votată în unanimitate de elevi ca activitatea preferată. Pentru a înlătura orice dubiu, se cuvine să clarificăm scopul activităţii. În esenţă, a doua activitate urmăreşte dezvoltarea sensibilităţii pentru diferite probleme şi poate justifica cercetări ulterioare, dat fiind că cele mai multe probleme formulate sunt foarte grele şi unele nu sunt rezolvate în totalitate. Pentru a ilustra configuraţiile legate de probleme de ambalare, vă propunem site-ul [**35**], respectiv articolul [**21**] şi cartea [**20**]. Trebuie să menţionăm că activitatea a fost experimentată şi cu elevi de şcoală generală, iar forma aranjării optime a fost intuită şi de copii de clasa VI-VII. Optimizarea acestei aranjări a constituit o problemă nerezolvată între anii 1969–1999 (rezolvarea se găseşte în articolul [**21**]). În acelaşi timp, problema practică nu poate fi rezolvată exact, deoarece maşina automată de ambalat nu ia în considerare numărul de bucăţi – astfel se poate întâmpla ca numărul beţişoarelor din cutii să fie diferit. Din toate acestea reiese că, în cazul problemelor practice, noţiunea de rezolvare trebuie redefinită. Este vorba de o problemă de echilibru foarte primejdioasă, deoarece elevii îşi formează conceptele despre rezolvare şi demonstraţie pe baza exerciţiilor rezolvate şi a teoremelor demonstrate. Prin urmare, dacă nu punem accent atât pe raţionamentele corecte din punct de vedere teoretic, cât şi pe argumentările practice, atunci una dintre aceste componente va avea de suferit. Din perspectiva predării, este clar că diferenţa dintre cele două componente trebuie scoasă în evidenţă de câte ori avem ocazia să o facem.

În final, vă prezentăm câteva idei privind demersul practic:

FIGURA 8.4. Măsurarea şi crearea modelelor

• Ambele activităţi merită să fie organizate în grupe mai mici, fiindcă în acest fel apar mai multe soluţii alternative şi mai multe probleme matematice.

• Cu ajutorul acestor două activităţi se poate ilustra importanţa paşilor în activitatea de modelare (vezi modelul Blum: construirea modelului de situaţie şi a celui matematic, validarea modelului etc.). În acelaşi timp, în cazul al doilea se conturează foarte bine o deosebire importantă între modul de abordare matematică tradiţională şi activităţile orientate spre practică: în cazul abordării practice, clarificarea fundalului teoretic nu are o importanţă primordială, mult mai important fiind rezultatul numeric, care are utilitate practică.

• În cazul primei activităţi este bine să începem cu prima problemă şi să-i lăsăm pe elevi să elaboreze modele cât mai apropiate de realitate. Astfel, ei vor fi cei ce introduc diferiţi parametri (p) şi examinează problemele care apar pe parcursul confecţionării (pierdere de material, restricţii datorate formei de decupare, cantitatea materialului necesară pentru presarea marginii etc.).

CAPITOLUL IX

SCHEME DE DOBÂNDĂ ŞI FUNCŢIA EXPONENŢIALĂ

Scopul capitolului este introducerea funcţiei exponenţiale şi demonstraţia proprietăţilor sale folosind noţiunea de limită. Noutatea constă în abordarea temei şi în demonstraţiile prezentate, care se bazează pe compararea diferitelor scheme de dobândă. Astfel proprietăţile funcţiei exponenţiale şi ideile de bază ale demonstraţiilor pot fi intuite. Practic, prezentăm activităţi şi exerciţii care permit analiza proprietăţilor funcţiei exponenţiale, fără ca funcţia exponenţială să apară formal în exerciţii. Astfel, pe de o parte, proprietăţile primesc semnificaţie şi explicaţie intuitivă foarte puternică; pe de altă parte, motivarea studiului lor devine o reacţie normală, deoarece întrebarea de bază este aceeaşi aproape întotdeauna: care este investiţia mai favorabilă?

1. Noţiuni financiare

Avem nevoie de câteva noţiuni financiare de bază.

Dobânda este o taxă plătită de un debitor către proprietarul unui capital pentru folosirea capitalului respectiv. Altfel formulat, este o compensare acordată proprietarului capitalului pentru amânarea folosirii unui capital.

Rata dobânzii: raportul dintre dobânda realizată într-o unitate de timp (de exemplu un an) şi capitalul pentru care se realizează această dobândă.

Dobândă simplă: dobânda este produsă doar de capitalul de bază, deci dobânda pe o unitate de timp este egală cu *rata dobânzii capitalului de bază* pe aceeaşi unitate de timp.

Dobândă compusă: în fiecare perioadă de timp, dobânda este produsă de capitalul actual, deci capitalul creşte cu *rata dobânzii actuale a capitalului.*

Observaţie. Dobânda simplă nu se adaugă la capitalul de bază pe parcursul folosirii capitalului, în timp ce, în cazul dobânzii compuse, la sfârşitul fiecărei perioade de timp la capitalul de bază se adaugă şi dobânda. În cele ce urmează vom numi capitalizare adăugarea dobânzii la capitalul de bază. Observăm că, în cazul dobânzii simple, nu există capitalizare în perioada pentru care se calculează dobânda, iar în cazul dobânzii compuse, capitalizarea are loc la sfârşitul fiecărei unităţi de timp.

Să dăm câteva exemple. Dacă rata dobânzii este de 10% şi suma investită este de 100 unităţi de bani, atunci, în cazul producerii dobânzii simple, după 1 an avem

$$100 + 100 \cdot 0,10 = 110,$$

după 2 ani avem

$$110 + 100 \cdot 0,10 = 120$$

unităţi de bani. Pentru a verifica în ce măsură elevii au înţeles noţiunea de dobândă, le vom da să rezolve problema 1 din testul introductiv. Ei vor observa linearitatea dobânzii simple, adică faptul că atât dobânda cât şi suma totală după o perioadă de timp se poate exprima în funcţie de timp printr-o funcţie de gradul I. Astfel, dacă rata dobânzii anuale este p, suma investită este S, atunci după n ani suma care poate fi retrasă este

$$S_n = S(1 + np).$$

În cazul dobânzii compuse, folosind o rată a dobânzii de 10%, după 1 an avem $100 + 100 \cdot 0,10 = 110$ unităţi de bani, apoi această sumă totală va produce dobândă; astfel după 2 ani vom avea

$$110 + 110 \cdot 0,10 = 121$$

unităţi de bani.

Pentru a verifica în ce măsură elevii au înţeles noţiunea, vor rezolva problema 2 din testul introductiv. Ei îşi vor da seama că suma creşte în fiecare an de $1,1$ ori şi vor deduce că, dacă rata dobânzii anuale este p şi suma investită este S, atunci, în cazul dobânzii compuse, suma rezultată ce poate fi scoasă după n ani este

$$S'_n = S(1+p)^n.$$

Rezolvând problemele 3 şi 4 din testul introductiv, elevii vor constata că, folosind aceeaşi rată a dobânzii, este mai profitabil să investească cu dobândă compusă decât cu dobândă simplă, iar dacă rata dobânzii este mai mare în cazul dobânzii simple faţă de dobânda compusă, atunci pe termen scurt merită să investească cu dobândă simplă, dar pe termen lung dobânda compusă este mai profitabilă.

În cazul exemplelor de mai sus, perioada de acumulare a dobânzii a fost un an. În viaţa de fiecare zi, întâlnim deseori cazuri în care perioada de acumulare a dobânzii este mai mică de un an, deci capitalizarea se poate efectua mai des. În aceste cazuri, trebuie folosită rata dobânzii cu termen de valabilitate echivalent cu perioada producerii dobânzii. Dacă, de exemplu, suma investită este de 100 unităţi de bani, rata dobânzii anuale este 10% şi capitalizarea se face lunar, atunci rata dobânzii lunare este $\frac{10}{12}\%$. Astfel, în cazul dobânzii compuse, după o lună vom avea $100 + 100 \cdot \frac{10}{12\cdot 100} = 100,8(3)$ unităţi de bani, după 2 luni $100,8(3) + 100,8(3) \cdot \frac{10}{12\cdot 100} = 101,6736(1)$ unităţi, după 1 an $100(1+\frac{10}{12\cdot 100})^{12} \approx 110,471$ unităţi, iar după 2 ani vom avea la dispoziţie $100(1+\frac{10}{12\cdot 100})^{24} \approx 122,039$ unităţi. În cazul dobânzii simple, valoarea crescută a capitalului investit va fi după 1 lună $100 + 100 \cdot \frac{10}{12\cdot 100} = 100,8(3)$ unităţi de bani. După 2 luni această valoare va fi $100 + 100 \cdot 2 \cdot \frac{10}{12\cdot 100} = 101,(6)$ unităţi de bani, iar după 1 an $100\left(1 + 12 \cdot \frac{10}{12\cdot 100}\right) = 110$ unităţi de bani.

Să analizăm ce se întâmplă cu suma de bani în cazul în care capitalizarea se face săptămânal. În acest caz, valoarea crescută a capitalului nostru va fi după 1 an $100(1+\frac{10}{52\cdot 100})^{52} \approx 110,506$.

Din aceste exemple reiese că dobânda efectivă depinde nu numai de rata dobânzii, ci şi de schema de dobândă, adică şi de numărul şi eşalonarea capitalizărilor. Această dependenţă poate fi înţeleasă mai bine dacă examinăm mai multe cazuri (vezi problemele 5 şi 6 din testul introductiv).

2. Studiul şirului $(e_n)_{n\geq 1}$, $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

2.1. Monotonia şirului. Începem studiul şirului $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cu rezolvarea testului nr. 1. Rezolvând problemele devine evident înţelesul practic al lui e_n şi monotonia şirului $(e_n)_{n\geq 1}$. Observăm că, dacă depunem la bancă o unitate de bani cu o dobândă anuală de 100% şi efectuăm n capitalizări într-un an (la intervale egale de timp, astfel încât ultima capitalizare să aibă loc la sfârşitul anului), atunci peste un an putem retrage din cont

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

unităţi de bani. Monotonia şirului $(e_n)_{n\geq 1}$ reiese din soluţia problemelor, deoarece în cazul capitalizărilor repetate vom avea în mod clar mai mulţi bani, deci

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}. \tag{9}$$

Acesta este un argument intuitiv, deoarece nu contează doar numărul capitalizărilor, ci şi eşalonarea lor. De exemplu, dacă efectuăm o singură capitalizare, la jumătatea anului, atunci la sfârşitul anului vom avea

$$S_1 = S\left(1+\frac{p}{2}\right)^2$$

bani, pe când dacă efectuăm o capitalizare şi la 10 şi la 11 luni, vom avea

$$S_2 = S\left(1+\frac{5p}{6}\right)\left(1+\frac{p}{12}\right)^2.$$

Cu un mic calcul ne putem da seama că pentru $p < 18$ primul caz este mai avantajos, deci numărul capitalizărilor în sine nu este decisiv, contează şi periodicitatea lor. Din acest motiv, este important să demonstrăm că presupunerea referitoare la monotonie este corectă. Pentru aceasta merită să urmărim creşterea sumei de bani cu ajutorul celor două scheme de dobândă (conform primei scheme, capitalizarea se efectuează de n ori, conform celei de-a doua, de $(n+1)$ ori, în intervale egale în ambele cazuri). Acest lucru se poate realiza cu ajutorul unui program de calculator (simulare) sau prin calcule simple. Dacă

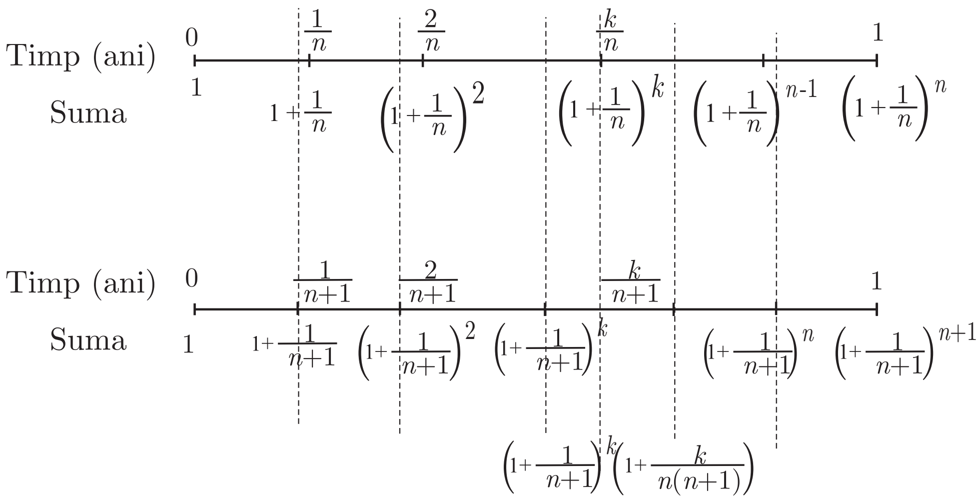


Figura 9.1. Capitalizare de n, respectiv de $(n+1)$ ori timp de un an.

urmărim continuu evoluţia sumei de bani, este evident că în momentele $\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \frac{3}{n+1}, \ldots \frac{n+1}{n+1}$ respectiv $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots \frac{n}{n}$ trebuie să calculăm suma corespunzătoare celor două scheme. Să examinăm câţi bani avem la sfârşitul părţii $\frac{k}{n}$ a anului, în caz de n capitalizări, respectiv în caz de $(n+1)$ capitalizări. În acest scop, elevii vor rezolva pentru început problema 3 din primul test. Dacă elevii îşi dau seama că trebuie să urmărească creşterea valorii conform celor două scheme de dobândă în momentele capitalizărilor, atunci au găsit ideea de bază a demonstraţiei; altfel, trebuie să dedicăm mai multe exerciţii clarificării acestei probleme, până când elevii reuşesc să formuleze generalizarea pe care o pot justifica prin inducţie matematică. În cazul capitalizării de n ori, după capitalizarea k (la sfârşitul primei părţi $\frac{k}{n}$ a anului) vom avea

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k$$

unităţi de bani. În cazul capitalizării de $n+1$ ori, după k capitalizări au trecut $\frac{k}{n+1}$ părţi din an (mai puţin decât $\frac{k}{n}$ din an), şi astfel, în cazul capitalizării de $(n+1)$ ori, după capitalizarea cu numărul k trebuie să calculăm dobânda pe o perioadă de $\frac{k}{n} - \frac{k}{n+1} = \frac{k}{n(n+1)}$ pentru a obţine

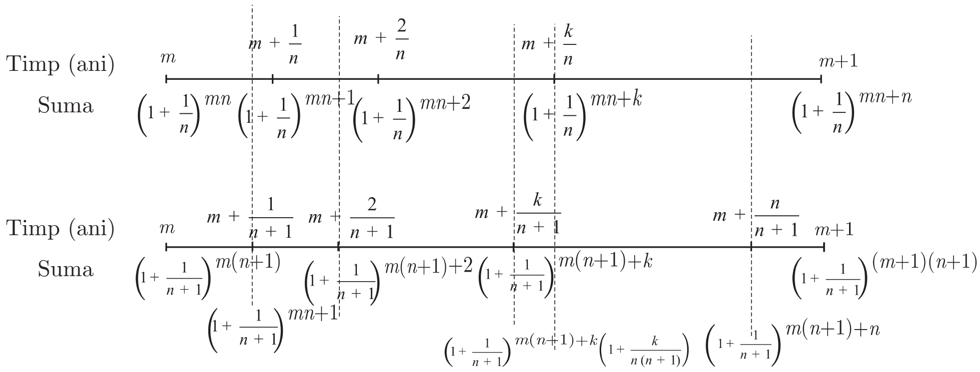


FIGURA 9.2. Cele două scheme în anul $(m+1)$

valoarea actuală a capitalului nostru şi după $\frac{k}{n}$ părţi din an. Astfel, vom avea

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^k\left(1+\frac{k}{n(n+1)}\right)$$

unităţi de bani. Presupunem că în cel de-al doilea caz, datorită capitalizărilor mai dese, vom avea o sumă de bani mai mare, adică pentru orice $k=\overline{1,n}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^k\left(1+\frac{k}{n(n+1)}\right). \tag{10}$$

Această inegalitate poate fi demonstrată prin inducţie după k şi astfel, pentru $k=n$ obţinem tocmai inegalitatea (9).

În mod similar, elevii îşi pot da seama că în „momentul” $\frac{k}{n}$ al anului $(m+1)$ vom avea mai puţini bani cu n capitalizări decât cu $n+1$ capitalizări pe an. Inegalitatea astfel obţinută poate fi justificată prin ridicarea la puterea m ($m\in\mathbb{N}^*$) a inegalităţii (9), astfel obţinem inegalitatea:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{mn}<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{m(n+1)}. \tag{11}$$

În continuare, obţinem din inegalităţile (10) şi (11) inegalitatea

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{mn+k}<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{m(n+1)+k}\left(1+\frac{k}{n(n+1)}\right) \tag{12}$$

Timp	$p=1$, Numărul capitalizărilor: n	$p=2$ Numărul capitalizărilor: 0
$\frac{1}{n}$	$1+\frac{1}{n}$	$1+\frac{2}{n}$
$\frac{2}{n}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$	$1+\frac{4}{n}$
$\frac{3}{n}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^3$	$1+\frac{6}{n}$
$\frac{4}{n}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^4$	$1+\frac{8}{n}$

Tabelul 11. Compararea schemelor de dobândă

pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ şi $k = \overline{1,n}$. Pe parcursul demonstraţiei inegalităţilor este bine să folosim figurile 9.1 şi 9.2 (sau orice altă reprezentare grafică asemănătoare).

2.2. Mărginirea şirului. Problema mărginirii apare în mod natural, deoarece este important să ştim care este suma maximă de bani pe care o putem obţine prin creşterea numărului n al capitalizărilor pe parcursul unui an. În vederea stabilirii unei margini superioare, comparăm schema de dobândă bazată pe n capitalizări pe an şi rata dobânzii p, cu o schemă de dobândă simplă, în care rata dobânzii este mai mare decât p. Compararea se poate efectua cu ajutorul experimentării computerizate sau pe baza unor calcule formale. Pentru început, să comparăm schema de dobândă pe bază de o unitate de bani, cu rata dobânzii anuale de 100% şi n capitalizări, cu schema de dobândă bazată pe dobândă simplă anuală de 200% (vezi problemele 1–4 din testul nr. 2). Tabelul 11 cuprinde sumele de bani rezultate din cele două scheme în primele câteva luni (suma iniţială fiind 1 în cazul ambelor scheme).

Putem vedea că

$$1+\frac{1}{n} < 1+\frac{2}{n},$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = 1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2} < 1+\frac{4}{n}.$$

Examinăm dacă inegalitatea se menţine şi în continuare. Aceasta înseamnă că dorim să demonstrăm inegalitatea

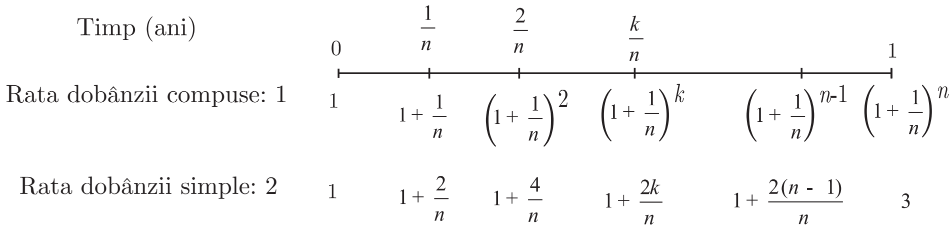


FIGURA 9.3. Capitalizare de n ori pentru $p = 1$ şi dobândă simplă pentru $p = 2$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k < 1+\frac{2k}{n}, \tag{13}$$

pentru $k \leq n$ (vezi problemele din testul al doilea). Încercăm să demonstrăm inegalitatea (13) prin metoda inducţiei matematice. În cazurile în care $k = 1$ şi $k = 2$, am văzut deja că inegalitatea este adevărată. Să presupunem că inegalitatea (13) este adevărată pentru o valoare k şi vrem să o demonstrăm pentru $k+1$. Astfel, ar trebui să aibă loc inegalitatea

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} < 1+\frac{2(k+1)}{n}, \quad \text{dacă} \quad k \leq n-1.$$

Pe de altă parte, dacă înmulţim ambele părţi ale inegalităţii (13) cu $1+\frac{1}{n}$, obţinem inegalitatea adevărată

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} < \left(1+\frac{2k}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Dacă are loc inegalitatea

$$\left(1+\frac{2k}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq 1+\frac{2(k+1)}{n}$$

pentru $k \leq n-1$, atunci am obţine inegalitatea dorită. După transformări echivalente, obţinem inegalitatea

$$\frac{2k}{n^2} \leq \frac{1}{n} \Longleftrightarrow k \leq \frac{n}{2},$$

care nu se realizează în cazul fiecărui $k \leq n$. Raţionamentul de mai sus arată însă că, pe baza principiului inducţiei matematice, inegalitatea (13) este adevărată pentru $k \leq \frac{n}{2}$. Dacă n este un număr natural impar, atunci $\frac{n}{2}$ nu este un număr natural, ceea ce însă nu este o problemă, dat fiind că inegalitatea (13) se realizează şi pentru $k = \frac{1}{2}$, astfel, pe baza principiului inducţiei matematice, se realizează şi pentru $k \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, \frac{n}{2}\right\}$. Aşadar, în cazul unui număr natural n oarecare, inegalitatea (13) este adevărată pentru orice $k \in \left\{\frac{i}{2} | 1 \leq i \leq n\right\}$. Astfel, ea este adevărată şi pentru $k = \frac{n}{2}$, adică $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} < 2$, din care obţinem prin ridicarea la pătrat inegalitatea $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 4$, adică şirul $(e_n)_{n \geq 1}$ este mărginit superior. În acelaşi timp $e_n \geq e_1 = 2$, pentru orice $n \geq 1$. Deoarece şirul este crescător şi mărginit superior, el este şi convergent. Notăm cu e limita şirului $(e_n)_{n\geq 1}$ şi obţinem pe baza raţionamentului de mai sus

$$\lim_{n \to \infty} e_n = e \in (2, 4].$$

Limita şirului $(e_n)_{n\geq 1}$ arată practic suma maximă ce poate fi obţinută într-un an prin capitalizare continuă, pornind de la o unitate de bani, dacă rata dobânzii anuale este 100%. După un mic experiment efectuat pe calculator, putem vedea că inegalitatea (13) este adevărată pentru orice $k \leq n$ şi că $e_n < 3$. Pentru a demonstra estimarea $e_n < 3$ să încercăm diminuarea ratei dobânzii în cazul celei de-a doua scheme de dobândă. Astfel, ar trebui să analizăm în ce condiţii se realizează inegalităţile de mai jos:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k < 1 + \frac{3k}{2n}, \tag{14}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k < 1 + \frac{4k}{3n}, \tag{15}$$

şi, în general,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k < 1 + \frac{(m+1)k}{mn}. \tag{16}$$

Inegalităţile de mai sus se realizează dacă $k \in \{0, 1\}$. Dacă vrem să le demonstrăm prin inducţie, obţinem pe rând condiţiile $k \leq \frac{n}{3}$,

$k \leq \frac{n}{4}$ şi $k \leq \frac{n}{m+1}$. Ceea ce nu înseamnă, desigur, că inegalitatea se realizează numai în cazul acestor valori ale lui k. Aceste condiţii înseamnă doar că inegalităţile pot fi demonstrate pe cale simplă, prin inducţie matematică, pentru aceste valori k. Astfel putem spune că

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/(m+1)} < 1+\frac{(m+1)\frac{n}{m+1}}{m\frac{n}{m+1}}. \tag{17}$$

adică

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}, \ \forall m,n \geq 1. \tag{18}$$

Aceasta demonstrează că trebuie să examinăm şirul

$$f_m = \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}, m \geq 1$$

deoarece fiecare membru al acestui şir este limita superioară a şirului $(e_n)_{n\geq 1}$. Totodată, din cauza reducerii dobânzii în schema de dobândă, putem preconiza pe bază intuitivă (putem să şi susţinem acest lucru prin reprezentare sau experimentare pe calculator) că şirul $(f_m)_{m\geq 1}$ este descrescător. Inegalitatea $f_m > f_{m-1}$ este echivalentă cu inegalitatea

$$\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{m+1} > \left(1-\frac{1}{m}\right)^{m}, \tag{19}$$

ceea ce poate fi perceput ca şi cum am lucra cu o rată negativă a dobânzii, adică banii noştri s-ar diminua. Dacă comparăm sumele de bani nu numai la sfârşit de an, ci şi în momentele $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots, \frac{m}{m}$ ale celor două scheme de descreştere (prin scăderea din capitalul actual de m ori, în cazul primei scheme, respectiv de $(m+1)$ ori, în cazul schemei a doua, a unei părţi a capitalului $\frac{1}{m}$ respectiv $\frac{1}{m+1}$), putem vedea că trebuie să aibă loc inegalitatea

$$\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{k}\left(1-\frac{k}{m(m+1)}\right) > \left(1-\frac{1}{m}\right)^{k}, \ \ k \leq m, \tag{20}$$

care poate fi demonstrată uşor prin inducţie matematică.

Pe de altă parte $f_m = e_m\left(1+\frac{1}{m}\right)$, deci

$$\lim_{m\to\infty} f_m = \lim_{m\to\infty} e_m = e,$$

prin urmare putem scrie că

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}, \ \forall\, m,n \in \mathbb{N}^*. \tag{21}$$

Făcând un mic calcul, putem vedea că $f_5 < 3$, deci $e \in (2,3)$. Putem obţine o estimare şi mai precisă în cazul în care calculăm termenii celor două şiruri cu ajutorul calculatorului. Aceasta ne permite să introducem o noţiune intuitivă precum viteza convergenţei, adică eficienţa aproximării lui e cu ajutorul şirurilor de mai sus. De exemplu, pentru $n = 10000$, $e_n = 2{,}718146$ şi $f_n = 2{,}718418$, deci prin calcularea primilor 10000 de termeni putem defini e cu o precizie de doar trei zecimale. Acest lucru arată că convergenţa este lentă, diferenţa $f_n - e_n$ scade aproximativ cu viteza şirului $\frac{2}{n}$.

Observaţie. Inegalitatea (13) este valabilă pentru orice $k \le n$. Pentru a demonstra afirmaţia aceasta folosim teorema binomială a lui Newton. Dacă $k \le n$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k = 1 + k\cdot\frac{1}{n} + \frac{k(k-1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{k(k-1)(k-2)}{6}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-(k-1))}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} =$$

$$= 1 + \frac{k}{n} + \frac{k}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2} + \frac{k}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{k}{n}-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{6}\cdots$$

$$\cdots\frac{k}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{k}{n}-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{k!} <$$

$$< 1 + \frac{k}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{k!}\right) <$$

$$< 1 + \frac{k}{n}\left(1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(k-1)k}\right) =$$

$$= 1 + \frac{k}{n}\left(1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) < 1+\frac{2k}{n}.$$

Timp	n capitalizări	Capitalizare la început
$\frac{1}{n}$	$1+\frac{1}{n}$	$1+\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$
$\frac{2}{n}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$	$1+\left(1+\frac{2}{n}\right)\frac{2}{n}=1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}$
$\frac{3}{n}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^3$	$1+\left(1+\frac{3}{n}\right)\frac{3}{n}=1+\frac{3}{n}+\frac{9}{n^2}$
$\frac{4}{n}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^4$	$1+\left(1+\frac{4}{n}\right)\frac{4}{n}=1+\frac{4}{n}+\frac{16}{n^2}$

Tabelul 12. Compararea schemelor de dobândă

Prin urmare inegalitatea (13) este valabilă pentru orice număr natural $k \le n$ şi astfel $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\frac{2}{1}$, deci proprietatea $e \in (2,3]$ poate fi obţinută şi pe această cale.

2.3. O altă demonstraţie a mărginirii. Să comparăm schema de dobândă pornind de la o unitate de bani, pe baza capitalizării de n ori pe an, cu schema în care, pentru fiecare $1 \le k \le n$, la sfârşitul primei perioade $\frac{k}{n}$ a anului suma finală se calculează ca şi cum pentru această perioadă ar fi valabilă dobânda simplă, însă dobânda se adaugă la începutul perioadei la capitalul de bază, iar dobânda va fi produsă de totalul acestor sume. Deoarece dobânda este adăugată sumei iniţiale încă de la începutul perioadei şi astfel produce dobândă, intuiţia ne sugerează că suma finală va fi mai mare faţă de cea rezultată din prima schemă. Valorile pentru primele câteva cazuri sunt cuprinse în tabelul nr. 12. Din aceste valori reiese că a doua schemă este mai avantajoasă pe perioadele examinate. În continuare vom demonstra acest lucru prin inducţie.

Mai precis ar trebui să demonstrăm următoarea inegalitate:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k \le 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}, \quad k \le n. \tag{22}$$

În cazul în care $k \in \{0,1\}$ inegalitatea este adevărată. Dacă presupunem că ea este îndeplinită în cazul unui k fix, putem scrie:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} \le \left(1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$\begin{aligned} &= 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{k^2}{n^2} + \frac{k}{n^2} + \frac{k^2}{n^3} \le \\ &\le 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{k^2}{n^2} + \frac{2k}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \\ &\le 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{(k+1)^2}{n^2}. \end{aligned}$$

Am mai văzut că pentru $k \le n$, $k - \frac{k}{k+1} \le n$, adică $\frac{k^2}{k+1} \le n$. Pe baza principiului inducţiei matematice, inegalitatea (22) are loc. Astfel, pentru $k = n$ avem

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3,$$

deci $e \in (2, 3)$.

3. Definiţia funcţiei exponenţiale

În acest paragraf, examinăm cum depinde de rata dobânzii suma obţinută într-un an prin capitalizare continuă, pornind de la o unitate de bani. Prin $p > 0$ notăm rata dobânzii anuale. Dacă în decursul unui an capitalizăm de n ori (la intervale egale), atunci la sfârşitul anului vom avea

$$\left(1 + \frac{p}{n}\right)^n$$

unităţi de bani şi, în mod similar cu cazul lui $p = 1$, putem presupune că şirul $(e_{p,n})_{n\ge1}$, $e_{p,n} = \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n$ este crescător. Presupunem deci că

$$\left(1 + \frac{p}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{p}{n+1}\right)^{n+1}, \quad \forall p > 0,\ n \in \mathbb{N}. \tag{23}$$

Pentru a clarifica demonstraţia în detaliu, să examinăm pentru oricare $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ soldul contului imediat după prima perioadă $\frac{k}{n}$ a anului (vezi problemele din testul nr. 3). După n capitalizări vom avea $\left(1 + \frac{p}{n}\right)^k$ unităţi de bani, iar în cazul a $(n+1)$ capitalizări,

$$\left(1 + \frac{p}{n+1}\right)^k \left(1 + \frac{kp}{n(n+1)}\right)$$

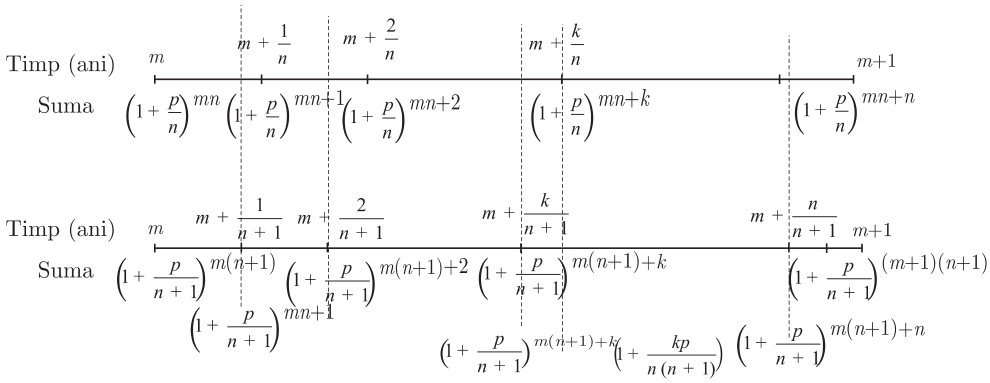


FIGURA 9.4. Capitalizare de n respectiv de $(n+1)$ ori în cursul anului $m+1$

unităţi de bani. Prin urmare presupunem că

(24)
$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^k < \left(1+\frac{p}{n+1}\right)^k \left(1+\frac{kp}{n(n+1)}\right), \forall n \in \mathbb{N},\ 1 \le k \le n.$$

Este evident că din această inegalitate rezultă inegalitatea (23) pentru $k = n$. Demonstraţia inegalităţii (24) poate fi efectuată cu uşurinţă prin inducţie matematică.

Pe baza unui raţionament similar, este evident că

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^{mn+k} < \left(1+\frac{p}{n+1}\right)^{m(n+1)+k} \left(1+\frac{kp}{n(n+1)}\right), \tag{25}$$

dacă $m \in \mathbb{N}^*$, $1 \le k \le n$.

Această inegalitate poate fi demonstrată şi pe baza inegalităţilor (23) şi (24).

OBSERVAŢIE. În mod similar putem demonstra pentru $p \ge 0$ că

$$\left(1-\frac{p}{m+1}\right)^k \left(1-\frac{kp}{m(m+1)}\right) > \left(1-\frac{p}{m}\right)^k, \quad k \le m \tag{26}$$

şi astfel şirul $f_{p,n} = \left(1+\frac{p}{n}\right)^{n+1}$ este descrescător. Pe baza inegalităţii $e_{p,n} < f_{p,n}$, rezultă că şirul $(e_{p,n})_{n\ge 1}$ este mărginit superior, iar şirul $(f_{p,n})_{n\ge 1}$ este mărginit inferior, adică ambele şiruri sunt convergente.

Rata dobânzii anuale: p, Numărul capitalizărilor: n	Rata dobânzii anuale: $2p$ Numărul capitalizărilor: 0
$1+\frac{p}{n}$	$1+\frac{2p}{n}$
$\left(1+\frac{p}{n}\right)^2$	$1+\frac{4p}{n}$
$\left(1+\frac{p}{n}\right)^3$	$1+\frac{6p}{n}$
$\left(1+\frac{p}{n}\right)^4$	$1+\frac{8p}{n}$

TABELUL 13. Compararea schemelor de dobândă

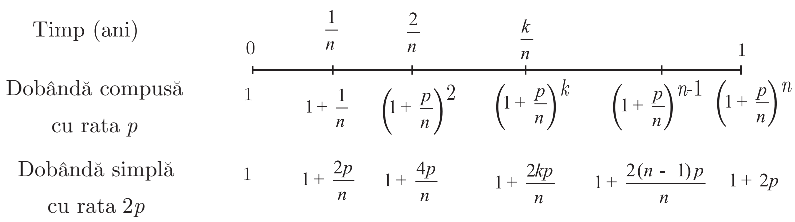


FIGURA 9.5. Capitalizare de n ori pentru p şi dobândă simplă pentru $2p$

Pe baza inegalităţii $f_{p,n} = e_{p,n}\left(1+\frac{p}{n}\right)$ cele două şiruri au aceeaşi limită. Dacă notăm această limită prin $l(p)$ putem scrie că pentru $p \geq 0$

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^n < l(p) < \left(1+\frac{p}{n}\right)^{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{27}$$

3.1. Analiza mărginirii. În vederea demonstrării mărginirii linebreak şirului $(e_{p,n})_{n\geq 1}$ comparăm schema bazată pe n capitalizări cu o altă schemă de dobândă, ce ar putea avea un beneficiu anual mai mare. Putem concepe o astfel de schemă de dobândă prin mărirea ratei dobânzii şi a perioadei de producere a dobânzii. Ca o primă problemă, să analizăm cazul în care producerea dobânzii are loc fără capitalizare, rata dobânzii fiind $2p$ (vezi problemele din testul nr. 4). În tabelul nr. 13 am inclus cantităţile corespunzătoare celor două scheme de dobândă pentru $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Examinând primele rânduri ale tabelului, am putea crede că valorile din coloana din dreapta sunt întotdeauna mai mari decât cele din coloana din stânga. Dacă încercăm să demonstrăm acest lucru prin inducţie matematică, avem nevoie (la pasul inducţiei) de inegalitatea $k \leq \frac{n}{2p}$. Este, deci, adevărată teorema următoare:

TEOREMĂ 9.1. *Dacă $n \in \mathbb{N}$, $p > 0$ şi $k \leq \frac{n}{2p}$, atunci*

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^k < 1 + \frac{2kp}{n}. \tag{28}$$

DEMONSTRAŢIE. Pentru $k = 1$ obţinem inegalitatea adevărată $1 + \frac{p}{n} < 1 + \frac{2p}{n}$. Să presupunem că inegalitatea (28) este adevărată în cazul unui k fixat şi să demonstrăm acest lucru pentru $(k+1)$. Ar trebui deci să demonstrăm inegalitatea

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^{k+1} < 1 + \frac{2(k+1)p}{n},$$

pentru $k \leq \frac{n}{2p} - 1$. Dacă înmulţim ambele părţi ale inegalităţii (28) cu $1 + \frac{p}{n}$, obţinem inegalitatea adevărată

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^{k+1} < \left(1+\frac{2kp}{n}\right)\left(1+\frac{p}{n}\right).$$

Întrebarea este dacă inegalitatea

$$\left(1+\frac{2kp}{n}\right)\left(1+\frac{p}{n}\right) < 1 + \frac{2(k+1)p}{n}$$

este adevărată pentru orice număr natural $k \leq \frac{n}{2p} - 1$. Aceasta este echivalentă cu inegalitatea

$$\frac{2kp^2}{n^2} < \frac{p}{n} \Leftrightarrow k < \frac{n}{2p}.$$

Prin urmare, inegalitatea (28) este adevărată pentru numerele naturale $k \leq \frac{n}{2p}$. □

OBSERVAŢIE. Similar putem face comparaţia cu alte scheme de dobândă. De exemplu, cu scheme în care rata dobânzii este $\frac{m+1}{m}p$, pentru un oarecare $m \in \mathbb{N}$.

n capitalizări	Capitalizare la început
$1+\frac{p}{n}$	$1+\left(1+\frac{p}{n}\right)\frac{p}{n}=1+\frac{p}{n}+\frac{p^2}{n^2}$
$\left(1+\frac{p}{n}\right)^2$	$1+\left(1+\frac{2p}{n}\right)\frac{2p}{n}=1+\frac{2p}{n}+\frac{4p^2}{n^2}$
$\left(1+\frac{p}{n}\right)^3$	$1+\left(1+\frac{3p}{n}\right)\frac{3p}{n}=1+\frac{3p}{n}+\frac{9p^2}{n^2}$
$\left(1+\frac{p}{n}\right)^4$	$1+\left(1+\frac{4p}{n}\right)\frac{4p}{n}=1+\frac{4p}{n}+\frac{16p^2}{n^2}$

TABELUL 14. Compararea schemelor de dobândă

Din inegalitatea (28) rezultă şi mărginirea şirului $(e_{p,n})_{n\geq 1}$, deoarece pentru $k=\left[\frac{n}{2p}\right]$ avem

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^{\left[\frac{n}{2p}\right]}<1+\frac{2\left[\frac{n}{2p}\right]p}{n}\leq 1+\frac{2\cdot\frac{n}{2p}\cdot p}{n}=2.$$

Astfel

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^{n}<\left(1+\frac{p}{n}\right)^{2p\left[\frac{n}{2p}\right]+2p}<2^{2p}\left(1+\frac{p}{n}\right)^{2p}<4^{2p}, \tag{29}$$

dacă $n>p$.

3.2. Altă demonstraţie a mărginirii. Să examinăm schema de dobândă în care rata dobânzii este de asemenea p, dar în cazul oricărui $1\leq k\leq n$, după prima perioadă $\frac{k}{n}$ a anului, suma de bani se calculează ca şi cum dobânda produsă în perioada $\frac{k}{n}$ ar fi adăugată la capitalul de bază la începutul anului, iar dobânda ar fi produsă de suma astfel obţinută, ca dobândă simplă. Tabelul numărul 14 cuprinde valorile corespunzătoare celor două scheme pentru $k\in\{1,2,3,4\}$.

Din tabel observăm că, pentru $p\leq 1$, valorile din coloana din dreapta sunt mai mari decât cele din stânga. Astfel, putem formula teorema:

TEOREMĂ 9.2. *Dacă $n,k\in\mathbb{N}^*$, $k\leq n$ şi $0\leq p\leq 1$, atunci*

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^{k}\leq 1+\frac{kp}{n}+\frac{k^2p^2}{n^2}. \tag{30}$$

DEMONSTRAŢIE. Pentru $k = 0$ şi $k = 1$ inegalitatea este trivială. Dacă presupunem că aceasta are loc pentru o valoare fixată a lui k, atunci

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{p}{n}\right)^{k+1} &\leq \left(1+\frac{kp}{n}+\frac{k^2p^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{p}{n}\right) = \\ &= 1+\frac{(k+1)p}{n}+\frac{k^2p^2}{n^2}+\frac{kp^2}{n^2}+\frac{k^2p^3}{n^3} \leq \\ &\leq 1+\frac{(k+1)p}{n}+\frac{k^2p^2}{n^2}+\frac{2kp^2}{n^2}+\frac{p^2}{n^2} = \\ &\leq 1+\frac{(k+1)p}{n}+\frac{(k+1)^2p^2}{n^2}.\end{aligned}$$

Pe parcursul demonstraţiei am folosit relaţia $\frac{k^2p}{k+1} = kp - \frac{kp}{k+1} < n$, deoarece $p \leq 1$. □

OBSERVAŢII. **1.** Pentru $k = n$ obţinem

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^n \leq 1+p+p^2.$$

Aceasta este o aproximaţie mult mai bună decât cea obţinută prin inegalitatea (29), dar ea se poate utiliza numai dacă $0 \leq p \leq 1$.

2. Dacă $p > 0$ este arbitrar şi n este destul de mare, atunci

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^p \leq 1+\frac{p}{n}+\frac{p^2}{n^2}.$$

Este suficient să demonstrăm inegalitatea pentru p număr raţional. Dacă $p = \frac{a}{b}$, atunci pe baza teoremei de mai sus, pentru $bn > a$,

$$\left(1+\frac{1}{bn}\right)^a \leq 1+\frac{a}{bn}+\frac{a^2}{b^2n^2}.$$

Pe de altă parte,

$$1+\frac{1}{n} \leq \left(1+\frac{1}{bn}\right)^b,$$

deci

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{a}{b}} \leq \left(1+\frac{1}{bn}\right)^a;$$

astfel, inegalitatea de mai sus este adevărată.

Pe baza celor de mai sus, pentru $p > 0$, şirul $(e_{p,n})_{n\geq 1}$ este mărginit superior şi crescător, adică convergent. Astfel, limita

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{p}{n}\right)^n = l(p) \in \mathbb{R}$ există. Similar se poate demonstra că, pentru $p < 0$, şirul este descrescător şi mărginit inferior, deci şi în acest caz există limita $l(p)$. În continuare examinăm funcţia definită prin corespondenţa $p \to l(p)$. Mai întâi obţinem o relaţie mai concretă cu ajutorul numărului e pentru $l(p)$, apoi studiem monotonia, convexitatea, continuitatea şi derivabilitatea acestei funcţii.

3.3. Expresia funcţiei $l(p)$. Ştiind că $l(1) = e$ căutăm expresia funcţiei $l(p)$ pentru p arbitrar. Pe baza inegalităţii

$$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^p = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{np} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^p\right)^n \geq \left(1+\frac{p}{n}\right)^n,$$

$e^p \geq l(p)$ dacă $p \geq 0$. Din experimentele efectuate pe calculator, observăm că valorile lui $l(p)$ şi e^p sunt foarte apropiate, deci putem presupune că $l(p) = e^p$. Pentru a confirma această egalitate trebuie să demonstrăm că $e^p \leq l(p)$, dacă $p \geq 0$. Pentru aceasta scriem:

$$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^p = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{np} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^p\right)^n \leq \left(1+\frac{p}{n}+\frac{p^2}{n^2}\right)^n,$$

prin urmare, dacă am putea demonstra că

$$\left(1+\frac{p}{n}+\frac{p^2}{n^2}\right)^n \leq \left(1+\frac{p}{n}\right)^n + \frac{M}{n},$$

unde $M > 0$ este un număr real, atunci, trecând la limită, ar rezulta că $e^p \leq l(p)$. Folosind notaţia $a = 1 + \frac{p}{n}$, conform teoremei binomului lui Newton putem scrie:

$$\left(a+\frac{p^2}{n^2}\right)^n = a^n + n\frac{p^2a^{n-1}}{n^2} + \sum_{k=2}^{n} C_n^k a^{n-k}\frac{p^{2k}}{n^{2k}}.$$

În acelaşi timp,

$$C_n^k a^{n-k}\frac{p^{2k}}{n^{2k}} < a^n\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!n^k}\frac{p^{2k}}{n^k} < a^n\frac{p^{2k}}{n^k}$$

şi

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{p^{2k}}{n^k} < \frac{p^4}{n^2}\frac{1}{1-\frac{p^2}{n}},$$

deci

$$\left(a+\frac{p^2}{n^2}\right)^n \le a^n+\frac{p^2}{n}a^n+a^n\frac{p^4}{n^2}\frac{1}{1-\frac{p^2}{n}}$$

şi astfel

$$\left(1+\frac{p}{n}+\frac{p^2}{n^2}\right)^n \le \left(1+\frac{p}{n}\right)^n\left[1+\frac{p^2}{n}+\frac{p^4}{n^2}\frac{1}{1-\frac{p^2}{n}}\right],$$

adică, trecând la limită, $e^p \le l(p)$. Rezultă că pentru $p \ge 0$ $l(p) = e^p$. Pe de altă parte, dacă $p < 0$, atunci

$$\begin{aligned} l(p) &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^n \\ &= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{-p}{n+p}\right)^n} \\ &= \frac{1}{e^{-p}} = e^p, \end{aligned}$$

adică $l(p) = e^p$, $\forall p \in \mathbb{R}$.

Observaţie. Pe baza inegalităţii (27) putem scrie că pentru $p \ge 0$

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^n < e^p < \left(1+\frac{p}{n}\right)^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

3.4. Altă demonstraţie pentru expresia funcţiei $l(p)$. La început demonstrăm că dacă $x_n \to \infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$. Dacă $[x_n]$ reprezintă partea întreagă a lui x_n, atunci

$$[x_n] \le x_n < [x_n]+1$$

şi astfel

$$\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} < \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} < \left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1}.$$

Dat fiind că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$ şi că, în cazul unui şir convergent, toate subşirurile acestuia sunt de asemenea convergente, pe baza teoremei cleştelui rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$.

Astfel, însă,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{p}}\right)^{\frac{n}{p}}\right)^p = e^p.$$

Aici am folosit practic proprietatea de mai sus în cazul şirului $x_n = \frac{n}{p}$ şi faptul că, dacă $u_n \to e$, atunci $u_n^p \to e^p$ (adică continuitatea funcţiei de putere x^p în e).

4. Proprietăţile funcţiei exponenţiale

4.1. Monotonia funcţiei exponenţiale. Se pune în mod natural întrebarea: cum influenţează creşterea ratei dobânzii suma de bani care poate fi obţinută după 1 an, cu capitalizare continuă? Mai mult, răspunsul este aproape evident, deoarece creşterea ratei dobânzii atrage după sine creşterea dobânzii, astfel şi suma finală trebuie să crească, deoarece condiţiile dobânzii sunt aceleaşi (vezi problema 1 din testul nr. 5). Să transcriem în limbaj matematic acest lucru. Dacă $x < y$, atunci

$$1+\frac{x}{n} < 1+\frac{y}{n}.$$

Dacă n este suficient de mare, putem presupune că cele două expresii anterioare sunt pozitive. Atunci prin ridicarea la puterea n obţinem inegalitatea

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \left(1+\frac{y}{n}\right)^n,$$

din care, pentru $n \to \infty$ rezultă că

$$e^x \le e^y.$$

Prin urmare, monotonia funcţiei este într-adevăr evidentă, monotonia strictă însă mai puţin, fiindcă pentru $x < y$ trebuie demonstrat că $e^x \neq e^y$. Dacă $x < y$, atunci există numerele raţionale $\frac{r_1}{q_1}, \frac{r_2}{q_2}$ cu $q_1, q_2 > 0$ astfel încât $x < \frac{r_1}{q_1} < \frac{r_2}{q_2} < y$, pentru care, pe baza raţionamentului de mai sus,

$$e^x \le e^{\frac{r_1}{q_1}} \le e^{\frac{r_2}{q_2}} \le e^y.$$

Rezultă că este suficient să demonstrăm că $e^{\frac{r_1}{q_1}} \neq e^{\frac{r_2}{q_2}}$. Vom face acest lucru prin metoda reducerii la absurd. Dacă

$$e^{\frac{r_1}{q_1}} = e^{\frac{r_2}{q_2}},$$

atunci

$$e^{r_1 q_2} = e^{r_2 q_1},$$

ceea ce într-adevăr este imposibil, deoarece $r_1 q_2, r_2 q_1 \in \mathbb{Z}$ şi $r_1 q_2 < r_2 q_1$. Prin urmare, funcţia exponenţială $x \to e^x$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

4.2. Altă demonstraţie a monotoniei. Pe baza proprietăţilor ridicării la putere ştim că

$$e^{p_1+p_2} = e^{p_1} \cdot e^{p_2}, \ \forall p_1, p_2 \in \mathbb{N}$$

şi putem presupune că aceasta este valabilă şi pentru $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ (vezi problema 2 din testul nr. 5). Pentru a demonstra egalitatea $e^{p_1+p_2} = e^{p_1} \cdot e^{p_2}$ considerăm şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ şi $(c_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_n = \left(1 + \frac{p_1}{n}\right)^n$, $b_n = \left(1 + \frac{p_2}{n}\right)^n$ şi $c_n = \left(1 + \frac{p_1+p_2}{n}\right)^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Ştim că

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{p_1}, \ \lim_{n\to\infty} b_n = e^{p_2} \text{ şi } \lim_{n\to\infty} c_n = e^{p_1+p_2}.$$

Ar trebui să demonstrăm că limita şirului $(a_n b_n)_{n\geq 1}$ este identică cu cea a şirului $(c_n)_{n\geq 1}$.

Pentru început să demonstrăm că $e^p > 1$, pentru orice $p > 0$. Şirul $\left(\left(1 + \frac{p}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$ este strict crescător şi convergent, iar limita lui este e^p, deci

$$1 < 1 + p < \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n < e^p, \text{ pentru orice } n > 1.$$

Aplicând formula binomului lui Newton:

$$a_n b_n = \left(1 + \frac{p_1 + p_2}{n} + \frac{p_1 p_2}{n^2}\right)^n =$$

$$= \left(1 + \frac{p_1 + p_2}{n}\right)^n + \sum_{k=1}^{n} C_n^k \left(1 + \frac{p_1 + p_2}{n}\right)^{n-k} \left(\frac{p_1 p_2}{n^2}\right)^k.$$

Dacă $p_0 = p_1 + p_2 > 0$, atunci

$$C_n^k \left(1 + \frac{p_1 + p_2}{n}\right)^{n-k} \left(\frac{p_1 p_2}{n^2}\right)^k < e^{p_0} \left(\frac{p_1 p_2}{n}\right)^k,$$

deci

$$a_n b_n \leq \left(1 + \frac{p_1 + p_2}{n}\right)^n + e^{p_0} \cdot \frac{p_1 p_2}{n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{p_1 p_2}{n}}.$$

Este evident că pentru $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, $c_n < a_n \cdot b_n$, adică din teorema cleştelui rezultă, pe baza celor două inegalităţi de mai sus, că

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = e^{p_1+p_2},$$

adică

$$e^{p_1+p_2} = e^{p_1} \cdot e^{p_2}, \text{ dacă } p_1, p_2 \in \mathbb{R}_+.$$

Deoarece $e^{-p} = \frac{1}{e^p}$, egalitatea de mai sus poate fi extinsă pentru numere reale arbitrare. Pe baza egalităţii de mai sus, analiza monotoniei devine simplă, deoarece dacă $p_1 < p_2$ sunt numere reale şi $p_3 = p_2 - p_1 > 0$, atunci $e^{p_2} = e^{p_1+p_3} = e^{p_1} \cdot e^{p_3} > e^{p_1}$, pentru că $e^{p_3} > 1$. În consecinţă, funcţia f este strict crescătoare.

4.3. Convexitatea funcţiei exponenţiale. Convexitatea funcţiei exponenţiale apare şi în practică. Să presupunem că putem alege între două investiţii:

- constituim un depozit din $1/2$ unitate de bani cu rata dobânzii p_1 şi un depozit din $1/2$ unitate de bani cu rata dobânzii p_2, în ambele cazuri cu capitalizare continuă;
- constituim un depozit dintr-o unitate de bani cu rata dobânzii $\frac{p_1 + p_2}{2}$, în condiţii de capitalizare continuă.

Întrebarea este care dintre aceste investiţii este mai avantajoasă. Asemenea întrebări apar deseori în cazul analizei investiţiilor (redactării portofoliilor). Mai mult, cele două componente ale primei investiţii nu trebuie pornite de la un capital de bază identic. Se poate imagina că în cazul unui $\lambda \in (0, 1)$ oarecare, producem dobândă din suma iniţială λ cu rata dobânzii p_1 şi din suma iniţială $1 - \lambda$ cu rata dobânzii p_2, iar această sumă va fi comparată cu investiţia prin care producem dobândă dintr-o unitate de bani cu rata dobânzii

$\lambda p_1+(1-\lambda)p_2$ (vezi problemele 3–6 din testul nr. 5). Producerea continuă a dobânzii am definit-o cu trecere la limită, de aceea la început examinăm aceleaşi scheme de investiţii cu capitalizare de n ori, unde $n \in \mathbb{N}^*$ este arbitrar. Pentru aceasta vom analiza şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ şi $(c_n)_{n\geq 1}$ definite prin egalităţile

$$a_n = \lambda\left(1+\frac{p_1}{n}\right)^n, \quad b_n = (1-\lambda)\left(1+\frac{p_2}{n}\right)^n \quad \text{şi}$$
$$c_n = \left(1+\frac{\lambda p_1+(1-\lambda)p_2}{n}\right)^n.$$

Mai precis, dorim să arătăm că are loc inegalitatea $a_n + b_n > c_n$ (la care am ajuns dând valori parametrilor modelului). Dacă comparăm schemele de investiţii nu numai pe baza sumei finale, dar şi prin analiza sumele potrivit celor două scheme în mod separat, în prima perioadă $\frac{k}{n}$ a anului, putem observa că, în cazul primei scheme de investiţii, vom avea mai mulţi bani nu numai la sfârşit, dar şi în cursul anului, adică are loc inegalitatea

$$(31)\quad \lambda\left(1+\frac{p_1}{n}\right)^k + (1-\lambda)\left(1+\frac{p_2}{n}\right)^k > \left(1+\frac{\lambda p_1+(1-\lambda)p_2}{n}\right)^k$$

pentru orice $0 \leq k \leq n$. Această inegalitate, pentru un k fixat, înseamnă convexitatea funcţiei $x \to (1+x)^k$. Pentru completitudine, să demonstrăm această inegalitate prin inducţie după k. Definim şirurile $(a_{n,k})_{n,k\geq 1}$, $(b_{n,k})_{n,k\geq 1}$ şi $(c_{n,k})_{n,k\geq 1}$ prin inegalităţile

$$a_{n,k} = \lambda\left(1+\frac{p_1}{n}\right)^k, \quad b_{n,k} = (1-\lambda)\left(1+\frac{p_2}{n}\right)^k \quad \text{şi}$$
$$c_{n,k} = \left(1+\frac{\lambda p_1+(1-\lambda)p_2}{n}\right)^k.$$

Dacă $k=1$, atunci

$$a_{n,1}+b_{n,1} = \lambda\left(1+\frac{p_1}{n}\right) + (1-\lambda)\left(1+\frac{p_2}{n}\right) =$$
$$= \lambda + \frac{\lambda p_1}{n} + 1 - \lambda + \frac{(1-\lambda)p_2}{n} = 1 + \frac{\lambda p_1+(1-\lambda)p_2}{n} = c_{n,1}.$$

Dacă $k = 2$, atunci

$$a_{n,2} + b_{n,2} = \lambda\left(1+\frac{p_1}{n}\right)^2 + (1-\lambda)\left(1+\frac{p_2}{n}\right)^2 =$$
$$= 1 + 2\cdot\frac{\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2}{n} + \frac{\lambda p_1^2 + (1-\lambda)p_2^2}{n^2} \text{ şi}$$
$$c_{n,2} = \left(1+\frac{\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2}{n}\right)^2 = 1 + 2\cdot\frac{\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2}{n} +$$
$$+\frac{\lambda^2 p_1^2 + (1-\lambda)^2 p_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)p_1p_2}{n^2}.$$

Trebuie deci să comparăm expresiile

$$E_1 = \lambda p_1^2 + (1-\lambda)p_2^2$$

şi

$$E_2 = \lambda^2 p_1^2 + (1-\lambda)^2 p_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)p_1p_2.$$

Pe de altă parte,

$$E_1 - E_2 = \lambda p_1^2 + (1-\lambda)p_2^2 - \lambda^2 p_1^2 - (1-\lambda)^2 p_2^2 - 2\lambda(1-\lambda)p_1p_2 =$$
$$= \lambda(1-\lambda)p_1^2 + \lambda(1-\lambda)p_2^2 - 2\lambda(1-\lambda)p_1p_2 =$$
$$= \lambda(1-\lambda)\left(p_1 - p_2\right)^2 > 0,$$

deci $a_{n,2} + b_{n,2} > c_{n,2}$.

Prin metoda inducţiei matematice demonstrăm că inegalitatea

$$\lambda\left(1+\frac{p_1}{n}\right)^k + (1-\lambda)\left(1+\frac{p_2}{n}\right)^k > \left(1+\frac{\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2}{n}\right)^k \tag{32}$$

este valabilă pentru orice $k > 1$ număr natural. Inegalitatea (32) este adevărată pentru $k = 2$, presupunem că este adevărată pentru k fixat şi o demonstrăm pentru $(k+1)$. Înmulţim ambii membri ai inegalităţii (32) cu $1 + \frac{\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2}{n}$. Prin aceasta obţinem inegalitatea adevărată:

$$\left(1+\frac{\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2}{n}\right)\left(\lambda\left(1+\frac{p_1}{n}\right)^k + (1-\lambda)\left(1+\frac{p_2}{n}\right)^k\right) >$$
$$> \left(1+\frac{\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2}{n}\right)^{k+1}.$$

Dacă este adevărată inegalitatea

$$\lambda\left(1+\frac{p_1}{n}\right)^{k+1}+(1-\lambda)\left(1+\frac{p_2}{n}\right)^{k+1}>$$

$$>\left(1+\frac{\lambda p_1+(1-\lambda)p_2}{n}\right)\left(\lambda\left(1+\frac{p_1}{n}\right)^{k}+(1-\lambda)\left(1+\frac{p_2}{n}\right)^{k}\right),$$

atunci rezultă inegalitatea dorită. Pe de altă parte, această inegalitate este echivalentă cu inegalitatea

$$\lambda\left(1+\frac{p_1}{n}\right)^{k}\left(1+\frac{p_1}{n}-1-\frac{\lambda p_1+(1-\lambda)p_2}{n}\right)+$$

$$+(1-\lambda)\left(1+\frac{p_2}{n}\right)^{k}\left(1+\frac{p_2}{n}-1-\frac{\lambda p_1+(1-\lambda)p_2}{n}\right)>0,$$

adică

$$\frac{\lambda(1-\lambda)\left(p_1-p_2\right)}{n}\left(\left(1+\frac{p_1}{n}\right)^{k}-\left(1+\frac{p_2}{n}\right)^{k}\right)>0.$$

Această inegalitate este adevărată pentru că ordonarea numerelor $\left(1+\frac{p_1}{n}\right)^k$ şi $\left(1+\frac{p_2}{n}\right)^k$ este identică cu ordonarea numerelor p_1 şi p_2.

Prin urmare, inegalitatea (32) este adevărată pentru orice număr natural $k>1$, astfel şi în cazul lui $k=n$, adică $a_n+b_n>c_n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Deoarece la demonstraţia inegalităţii (32) nu am folosit condiţia că numerele p_1 şi p_2 sunt pozitive, putem enunţa că pentru orice număr real p_1 şi p_2 şi pentru orice număr natural $n>1$

$$(33)\quad \lambda\left(1+\frac{p_1}{n}\right)^{n}+(1-\lambda)\left(1+\frac{p_2}{n}\right)^{n}>\left(1+\frac{\lambda p_1+(1-\lambda)p_2}{n}\right)^{n}.$$

Dacă în inegalitatea de mai sus trecem la limită, obţinem inegalitatea

$$\lambda e^{p_1}+(1-\lambda)e^{p_2}\geq e^{\lambda p_1+(1-\lambda)p_2}$$

deci funcţia exponenţială $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(p)=e^p$ este convexă. În mod similar cu monotonia strictă, putem înţelege de asemenea că funcţia exponenţială este strict convexă.

Astfel am demonstrat că şi în cazul capitalizării continue a dobânzii, este mai avantajos să depunem o parte din bani cu o dobândă, iar cealaltă parte cu altă dobândă, decât să depunem întreaga sumă cu o dobândă egală cu media ponderată a celor două dobânzi.

OBSERVAŢIE. Convexitatea funcţiei exponenţiale se moşteneşte de la funcţiile de putere $x \to (1+x)^k$, deci putem să evităm demonstraţia prin inducţie de mai sus dacă demonstrăm separat convexitatea funcţiei putere.

4.4. Continuitatea funcţiei exponenţiale. Problema continuităţii se ridică în mod natural, pentru că trebuie să examinăm dacă rezultatul final e^p poate fi modificat cu o cantitate mică oarecare, prin modificarea corespunzătoare a ratei dobânzii. Pentru o bancă poate fi importantă cantitatea cu care trebuie să modifice ratele dobânzii pentru a scădea plăţile cu o cantitate dată (vezi problemele 7 şi 8 din testul nr. 5).

Dacă $p \in \mathbb{R}$ şi elementele şirului $(p_m)_{m\geq 1}$ îndeplinesc condiţia $p-1 < p_m < p+1$, $n \geq 1$, respectiv $\lim\limits_{m\to\infty} p_m = p$ atunci pentru $p_m > p$ putem scrie că

$$\left(1+\frac{p_m}{n}\right)^n - \left(1+\frac{p}{n}\right)^n = \frac{p_m-p}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{p_m}{n}\right)^{n-1-k}\left(1+\frac{p}{n}\right)^k.$$

Totodată,

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^k < \left(1+\frac{p}{n}\right)^n < e^p < e^{p+1}\text{i}$$

$$\left(1+\frac{p_m}{n}\right)^{n-1-k} < \left(1+\frac{p+1}{n}\right)^n < e^{p+1},$$

deci

$$\left(1+\frac{p_m}{n}\right)^n - \left(1+\frac{p}{n}\right)^n \leq (p_m-p)e^{2p+2}.$$

O inegalitate similară obţinem şi în cazul $p_m < p$, deci pe baza criteriului de majorare şi condiţiei $\lim\limits_{m\to\infty} p_m = p$ obţinem $\lim\limits_{m\to\infty} e^{p_m} = e^p$. Aceasta asigură continuitatea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(p) = e^p$ în fiecare punct $p \in \mathbb{R}$.

4.5. Altă demonstraţie a continuităţii. Este suficient să examinăm continuitatea în 0, pentru că, dacă limita şirului $(p_n)_{n\geq 1}$ este

$p \in \mathbb{R}$, atunci limita şirului $(p_n - p)_{n\geq 1}$ este 0, şi $e^{p_n} = e^{p_n - p} \cdot e^p$. Să considerăm un şir $(p_n)_{n\geq 1}$, a cărui limită este 0. Întrebarea este dacă limita şirului $(e^{p_n})_{n\geq 1}$ este egală cu 1. Să definim şirul $(x_{n,k})_{n,k\geq 1}$,

$$x_{n,k} = \left(1 + \frac{p_n}{k}\right)^k$$

şi să examinăm comportamentul şirului $(x_{n,k} - 1)_{n,k\geq 1}$. Pe baza teoremei binomului lui Newton

(34)
$$x_{n,k} - 1 = p_n \left(1 + \frac{k-1}{2k} p_n + \frac{(k-1)(k-2)}{6k^2} p_n^2 + \ldots + \frac{1}{k^k} p_n^{k-1}\right),$$

deci

(35) $$|x_{n,k} - 1| < |p_n| \left(1 + |p_n| + \cdots + |p_n|^{k-1}\right) < |p_n| \cdot \frac{1}{1 - |p_n|}.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 0$, rezultă că există n_1, pentru care $|p_n| < 1$, pentru orice $n \geq n_1$. Deci, dacă $n \geq n_1$, atunci pe baza $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n,k} = e^{p_n}$ rezultă din inegalitatea (35) că

$$|e^{p_n} - 1| \leq \frac{|p_n|}{1 - |p_n|}$$

pentru orice $n \geq n_1$. Însă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|p_n|}{1-|p_n|} = 0$, deci pe baza criteriului de majorare $\lim\limits_{n\to\infty} e^{p_n} = 1$, adică funcţia f este continuă în 0, prin urmare este continuă pe $\mathbb{R}$.

4.6. Derivabilitatea funcţiei exponenţiale. În ştiinţele economice, flexibilitatea unei funcţii f în punctul x_0 arată cu câte procente se modifică valoarea funcţiei dacă valoarea lui x_0 creşte cu 1%. Studiul flexibilităţii funcţiei de plată poate fi important în cazul capitalizării dobânzii. Această problemă necesită calcularea derivatei funcţiei, adică limita

$$\lim_{p\to p_0} \frac{e^p - e^{p_0}}{p - p_0}.$$

Dacă $p_0 \in \mathbb{R}$ şi elementele şirului $(p_m)_{m\geq 1}$ îndeplinesc condiţia $p_0 - 1 < p_m < p_0 + 1$, $m \geq 1$, respectiv $\lim\limits_{m\to\infty} p_m = p_0$, atunci, în cazul în care $p_m > p_0$, putem scrie

$$\left(1+\frac{p_m}{n}\right)^n - \left(1+\frac{p_0}{n}\right)^n = \frac{p_m - p_0}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(1+\frac{p_m}{n}\right)^{n-1-k} \left(1+\frac{p_0}{n}\right)^k.$$

Totodată,

$$\left(1+\frac{p_0}{n}\right)^k < \left(1+\frac{p_m}{n}\right)^k \text{ şi } \left(1+\frac{p_m}{n}\right)^{n-1-k} > \left(1+\frac{p_0}{n}\right)^{n-k-1},$$

deci

$$\left(1+\frac{p_0}{n}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(1+\frac{p_m}{n}\right)^{n-1-k} \left(1+\frac{p_0}{n}\right)^k \leq \left(1+\frac{p_m}{n}\right)^{n-1},$$

astfel

$$e^{p_0} < \frac{e^{p_m} - e^{p_0}}{p_m - p_0} < e^{p_m},$$

prin urmare, pe baza continuităţii funcţiei exponenţiale, obţinem

$$\lim_{m\to\infty} \frac{e^{p_m} - e^{p_0}}{p_m - p_0} = e^{p_0},$$

adică funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(p) = e^p$ este derivabilă în oricare punct $p \in \mathbb{R}$ şi $f'(p) = e^p$, $\forall p \in \mathbb{R}$.

4.7. Altă demonstraţie a derivabilităţii. Pe baza definiţiei derivatei trebuie să studiem existenţa limitei

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{p_n} - e^p}{p_n - p}$$

dacă limita şirului $(p_n)_{n\geq 1}$ este p. Deoarece

$$\frac{e^{p_n} - e^p}{p_n - p} = e^p \cdot \frac{e^{p_n - p} - 1}{p_n - p},$$

este suficient să examinăm derivabilitatea numai în 0. Astfel, putem presupune că limita şirului $(p_n)_{n\geq 1}$ este 0 şi definim şirul $(x_{n,k})_{n,k\geq 1}$,

$$x_{n,k} = \left(1+\frac{p_n}{k}\right)^k.$$

Trebuie să examinăm şirul $\left(\frac{x_{n,k}-1}{p_n}\right)_{n,k\geq 1}$. Pe baza egalităţii (34)

$$\frac{x_{nk} - 1}{p_n} = 1 + \frac{k-1}{2k} p_n + \frac{(k-1)(k-2)}{6k^2} p_n^2 + \cdots + \frac{1}{k^k} p_n^{k-1}.$$

Deci

$$\left|\frac{x_{nk}-1}{p_n}-1\right| < |p_n|\left(1+|p_n|+\ldots+|p_n|^{k-2}\right) < |p_n|\cdot\frac{1}{1-|p_n|}. \tag{36}$$

Şi în acest caz există n_1 astfel încât $|p_n| < 1$, pentru orice $n \geq n_1$, adică, dacă $n \geq n_1$, atunci din inegalitatea (36) pentru $k \to \infty$ obţinem inegalitatea $\left|\frac{e^{p_n}-1}{p_n}-1\right| \leq \frac{|p_n|}{1-|p_n|}$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|p_n|}{1-|p_n|}=0$, pe baza criteriului de majorare $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{p_n}-1}{p_n}=1$, adică funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(p)=e^p$ este derivabilă în 0 şi $f'(0)=1$. Dacă limita şirului $(p_n)_{n\geq 1}$ este $p\in\mathbb{R}$, atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{p_n}-e^p}{p_n-p}=\lim_{n\to\infty}e^p\cdot\frac{e^{p_n-p}-1}{p_n-p}=e^p,$$

adică funcţia f este derivabilă în orice punct $p\in\mathbb{R}$ şi

$$f'(p)=e^p,\ \forall p\in\mathbb{R}.$$

5. Teste

Observaţie: utilizarea calculatorului sau a calculatorului de buzunar este permisă (în anumite cazuri este indispensabilă).

Testul introductiv

PROBLEMA 1. Depunem la bancă suma de 1000 lei sub formă de depozit cu dobândă simplă. Rata dobânzii anuale[5] este de 10%. Câţi bani putem retrage

a) după 1 an?
b) după 2 ani?
c) după 3 ani?
d) după 10 ani?
e) după 20 de ani?

Ce observaţi? Formulaţi o generalizare.

PROBLEMA 2. Depunem la bancă suma de 1000 lei cu capitalizarea dobânzii (la sfârşitul anului). Rata dobânzii anuale este de 10%. Câţi bani putem retrage

[5] În fiecare test rata dobânzii înseamnă întotdeauna rata dobânzii nominale.

a) după 1 an?
b) după 2 ani?
c) după 3 ani?
d) după 10 ani?
e) după 20 de ani?

Ce observaţi? Formulaţi o generalizare.

Problema 3. Comparaţi rezultatele celor două probleme de mai sus. Ce observaţi?

Problema 4. Examinaţi modul în care valoarea capitalului investit se modifică în următorii 10 ani, dacă rata dobânzii anuale este de 10% şi nu se capitalizează, respectiv dacă rata dobânzii anuale este de 7% şi se capitalizează la sfârşitul fiecărui an. Care ar trebui să fie valoarea ratei dobânzii în cel de-al doilea caz, pentru ca valoarea investiţiei să fie egală cu cea din primul caz?

Problema 5. Depunem la bancă suma de 1000 lei. Rata dobânzii anuale este de 12%. Câţi bani putem retrage, dacă

a) suma este capitalizată după primul trimestru?
b) capitalizăm după jumătate de an?
c) capitalizăm după 3 luni şi după jumătate de an?
d) capitalizăm după 3 luni, după jumătate de an şi după 8 luni?

Ce observaţi? Formulaţi o generalizare.

Problema 6. Depunem la bancă suma de 1000 lei. Rata dobânzii anuale este de 10% şi avem posibilitatea capitalizării de două ori pe an. Care este suma maximă de bani de care putem dispune la sfârşitul anului? Cum ar fi mai avantajos să planificăm capitalizările? Dar dacă am putea capitaliza de mai multe ori $(3, 4, \ldots, n)$?

Testul nr. 1

Problema 1. Depunem la bancă o unitate de bani. Rata dobânzii anuale este de 100%. Exprimaţi valoarea capitalului investit la sfârşitul anului în cazul în care capitalizăm de n ori, în intervale egale, astfel încât ultima capitalizare să aibă loc exact la sfârşitul anului. Calculaţi valoarea capitalului pentru $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ce observaţi?

PROBLEMA 2. Depunem la bancă o unitate de bani. Rata dobânzii anuale este de 100%. Exprimaţi valoarea capitalului investit la sfârşitul fiecărei luni în condiţiile capitalizării

a) de două ori
b) de trei ori
c) de patru ori
d) de cinci ori

pe an, în intervale egale, astfel încât ultima capitalizare să aibă loc exact la sfârşitul anului. Ce observaţi?

PROBLEMA 3. Ce puteţi constata pe baza problemelor de mai sus? Justificaţi rezultatul prin metoda inducţiei matematice.

Testul nr. 2

PROBLEMA 1. Depunem la bancă o unitate de bani. În care dintre situaţiile de mai jos vom avea mai mulţi bani peste 1 an:

a) dacă rata dobânzii anuale este de 200% şi în cursul anului nu se face capitalizare *sau*
b) dacă rata dobânzii anuale este de 100% şi capitalizăm la sfârşitul primului semestru?

PROBLEMA 2. Depunem la bancă o unitate de bani. În care dintre situaţiile de mai jos vom avea mai mulţi bani peste 1 an:

a) dacă rata dobânzii anuale este de 200% şi în cursul anului nu se face capitalizare *sau*
b) dacă rata dobânzii anuale este de 100% şi capitalizăm la fiecare sfârşit de trimestru?

PROBLEMA 3. Depunem la bancă o unitate de bani. În care dintre situaţiile de mai jos vom avea mai mulţi bani peste 1 an:

a) dacă rata dobânzii anuale este de 200% şi în cursul anului nu se face capitalizare *sau*
b) dacă rata dobânzii anuale este de 100% şi capitalizăm lunar?

PROBLEMA 4. Ce puteţi constata pe baza problemelor de mai sus? Încercaţi să formulaţi o proprietate generală.

PROBLEMA 5. Comparaţi variaţia valorii capitalului de bază de 1 unitate de bani potrivit următoarelor scheme de dobândă:

- rata dobânzii anuale este de 200% şi nu se capitalizează;
- rata dobânzii anuale este de 100% şi capitalizăm de n ori pe an, unde $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Capitalizările se efectuează în intervale regulate, ultima capitalizare având loc la sfârşitul anului. Încercaţi să formulaţi o proprietate generală.

Testul nr. 3

PROBLEMA 1. Depunem la bancă o unitate de bani. Rata dobânzii anuale este p. Exprimaţi valoarea capitalului investit la sfârşitul anului în condiţiile capitalizării de n ori, în intervale regulate, ultima capitalizare având loc exact la sfârşitul anului. Calculaţi valoarea numerică a capitalului pentru $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ce observaţi?

PROBLEMA 2. Depunem la bancă o unitate de bani. Rata dobânzii anuale este p. Exprimaţi valoarea capitalului investit la sfârşitul fiecărei luni, dacă în cursul anului se fac

a) două
b) trei
c) patru
d) cinci

capitalizări, în intervale egale, ultima capitalizare având loc la sfârşitul anului. Ce observaţi?

PROBLEMA 3. Ce puteţi constata pe baza problemelor de mai sus? Justificaţi rezultatul prin metoda inducţiei matematice.

Testul nr. 4

PROBLEMA 1. Depunem la bancă o unitate de bani. În care dintre situaţiile de mai jos vom avea mai mulţi bani peste 1 an:

a) dacă rata dobânzii anuale este $2p$ şi în cursul anului nu se face capitalizare *sau*
b) dacă rata dobânzii anuale este p şi capitalizăm la sfârşitul primului semestru?

PROBLEMA 2. Depunem la bancă o unitate de bani. În care dintre situaţiile de mai jos vom avea mai mulţi bani peste 1 an:

a) dacă rata dobânzii anuale este $2p$ şi în cursul anului nu se face capitalizare *sau*
b) dacă rata dobânzii anuale este p şi capitalizăm la sfârşit de trimestru?

PROBLEMA 3. Depunem la bancă o unitate de bani. În care dintre situaţiile de mai jos vom avea mai mulţi bani peste 1 an:

a) dacă rata dobânzii anuale este $2p$ şi în cursul anului nu se face capitalizare *sau*
b) dacă rata dobânzii anuale este p şi capitalizăm lunar?

PROBLEMA 4. Ce puteţi constata pe baza problemelor de mai sus? Încercaţi să formulaţi o proprietate generală.

PROBLEMA 5. Comparaţi variaţia valorii capitalului de bază de 1 unitate de bani potrivit următoarelor scheme de dobândă:

- rata dobânzii anuale este $2p$ şi nu se capitalizează;
- rata dobânzii anuale este p şi capitalizăm de n ori pe an, unde $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Capitalizările se efectuează în intervale egale, ultima capitalizare având loc la sfârşitul anului. Încercaţi să formulaţi o proprietate generală.

Testul nr. 5

PROBLEMA 1. Studiaţi variaţia cantităţii de bani care poate fi obţinută dintr-un capital de bază de o unitate de bani în decursul unui an, cu dobândă continuă, în funcţie de rata dobânzii.

PROBLEMA 2. Depunem la bancă o unitate de bani. Calculaţi suma ce poate fi ridicată peste un an în condiţii de capitalizare lunară, dacă rata dobânzii anuale este

a) 10%;
b) 20%;
c) 30%.

Înmulţiţi rezultatul din punctul a) cu rezultatul din punctul b). Ce observaţi? Examinaţi diferenţa dintre acest produs şi rezultatul din punctul c) dacă numărul capitalizărilor creşte.

PROBLEMA 3. Depunem la bancă 1000 lei. Calculaţi suma ce poate fi ridicată peste un an în condiţii de capitalizare lunară respectiv zilnică, dacă

a) depunem 500 lei cu dobândă anuală de 10% şi 500 lei cu dobândă anuală de 12%?
b) depunem întreaga sumă cu dobândă anuală de 11%?

PROBLEMA 4. Depunem la bancă 900 lei. Calculaţi suma ce poate fi ridicată peste un an în condiţii de capitalizare lunară respectiv zilnică, dacă

a) depunem 300 lei cu dobândă anuală de 9% şi 600 lei cu dobândă anuală de 12%?
b) depunem întreaga sumă cu dobândă anuală de $\frac{1}{3} \cdot 9\% + \frac{2}{3} \cdot 12\% = 11\%$?

PROBLEMA 5. Depunem la bancă o unitate de bani. Calculaţi suma ce poate fi ridicată lunar în condiţii de capitalizare lunară, dacă

a) depunem $\frac{2}{5}$ din sumă cu dobândă de 10% şi $\frac{3}{5}$ din sumă cu dobândă de 15%;
b) depunem suma cu dobândă de $\frac{2}{5} \cdot 10\% + \frac{3}{5} \cdot 15\% = 13\%$?

PROBLEMA 6. Formulaţi o proprietate generală pe baza ultimelor două probleme de mai sus. Examinaţi ce se schimbă în aceste două probleme în condiţii de dobândă continuă, apoi formulaţi o proprietate generală.

PROBLEMA 7. Depunem la bancă o unitate de bani. Câţi bani putem ridica peste un an în condiţii de capitalizare lunară respectiv zilnică, dacă rata dobânzii anuale este

a) 12%;
b) $12,1\%$;
c) $12,01\%$;
d) $12,001\%$?

PROBLEMA 8. Depunem la bancă o unitate de bani. Câţi bani putem ridica peste un an în condiţii de capitalizare lunară respectiv zilnică, dacă rata dobânzii anuale este

a) $0,1\%$; b) $0,01\%$;
c) $0,001\%$; d) $0,0001\%$?

6. Observaţii, comentarii, concluzii

6.1. Observaţii didactice. Experienţa de profesor arată că interesul pentru matematică şi, în special, pentru analiza matematică a scăzut foarte mult în rândul liceenilor în ultimul deceniu. Cauzele sunt multiple. Printre altele, elevii au tot mai puţină răbdare să rezolve probleme care necesită gândire creativă; dacă „rezultatul nu iese" după cinci minute, renunţă şi nu au suficientă curiozitate să vadă rezolvarea finală a unei probleme pur matematice. Desigur, există şi excepţii, însă, din păcate, numai în rândul elevilor ce participă la concursuri şi chiar şi printre ei unora le lipseşte motivaţia pentru a reflecta îndelung asupra unor probleme mai dificile. Acest lucru se poate explica prin accelerarea lumii în care trăim sau prin faptul că majoritatea copiilor folosesc instrumente bazate pe tehnologii avansate ce permit un grad ridicat de interactivitate. Nu trebuie să excludem posibilitatea ca noi, pedagogii, să fim vinovaţi, pentru că ne grăbim („să avansăm cu materia") şi propunem idei gata formulate, fără să lăsăm timp suficient la oră pentru ca elevii să-şi dea singuri seama, şi nu suntem pregătiţi să răspundem la întrebările tot mai frecvente de genul „La ce ne foloseşte asta în viaţă?"

László Gerőcs – în articolul său "*Quo vadis predarea matematicii*"[6] – explică foarte bine de ce nu putem (de ce nu trebuie) să justificăm întotdeauna utilitatea, în viaţa de zi cu zi, a noţiunilor matematice predate: "*Într-adevăr, un brutar sau un mecanic auto, un funcţionar de birou, un manager, un filolog sau un jurist nu vor avea niciodată nevoie de identităţile logaritmilor. Ar fi bine însă dacă şi factorii de decizie ar înţelege: nu predăm toate aceste lucruri pentru ca elevul să le folosească într-o zi, ci pentru că, în timp ce creierul elevului trece prin etapele gândirii, până când diferitele niveluri ale înţelegerii, explorării şi aplicării se integrează în structura gândirii sale în mod independent, capacitatea lui de a gândi se va fi dezvoltat şi cizelat (fără ca el să-şi fi*

[6]Quo vadis matematikaoktatás în Népszava, 9 iunie 2007

dat seama), astfel încât la sfârşitul procesului (în preajma examenului de bacalaureat) va (putea) deveni realmente un om care gândeşte cu cap limpede, logic şi disciplinat. Indiferent de locul pe care acest elev îl va ocupa în viaţă, el va avea, inevitabil, foarte mare nevoie de aceste capacităţi, pe care le va putea pune în aplicare oriunde cu mult profit, la locul de muncă din viitor. Aceasta înseamnă cu adevărat ştiinţă convertibilă, de aceea trebuie (ar trebui) să punem accentul maxim pe dezvoltarea acestor cunoştinţe."

Această explicaţie, însă, îi mulţumeşte doar pe foarte puţini dintre elevi. Ei au nevoie să vadă tot mai multe abordări practice.

În cursul ultimului deceniu, materia a fost „reorganizată", „redusă", „aerisită" de foarte multe ori; conţinutul său, însă, a rămas cel de acum 20 de ani, diferenţa constând în numărul redus de ore în care trebuie predat. Noţiunile nu trebuie explicate în toate cazurile, ele trebuie predate doar în mod formal, ceea ce, bineînţeles, vine în detrimentul dezvoltării gândirii creative, cu toate că aceasta face parte din capacităţile cele mai importante de dezvoltat. Modelarea, aplicarea în practică a noţiunilor apar şi ele în partea introductivă a programei de predare – doar că părţile de conţinut şi timpul alocat lor nu permit ca elevii să aprofundeze câte o aplicaţie sau problemă de modelare.

Din cauza exigenţelor examenului de bacalaureat, predarea matematicii este, din păcate, tot mai centrată pe informaţie, în pofida aşteptărilor elevilor şi ale societăţii (şi chiar împotriva exigenţei explicite a curriculei şcolare, care vizează dezvoltarea capacităţilor şi competenţelor).

Am testat introducerea funcţiei exponenţiale pe baza schemelor de dobândă pe un grup de studenţi de la matematică (viitori profesori) şi pe un grup mixt, compus din elevi de liceu (elevi din clasele IX-XII, participanţi la tabăra organizată de Asociaţia SimpleX) şi studenţi. În cazul acestora din urmă testul a fost un experiment interesant, dat fiind că elevii din clasele IX şi X nu aveau nicio bază privind analiza matematică. Cu toate acestea, au observat imediat, printre altele, monotonia şirului $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Mai mult, pentru a-şi satisface curiozitatea, ei au calculat cu ajutorul calculatorului termenii şirului pentru indici de ordinul milioanelor. Am avut unele reţineri privind utilitatea acestei abordări, gândindu-ne că nu va fi suficient la îndemâna elevilor mai mici; reacţiile au fost, însă, satisfăcătoare. Un răspuns primit de la un elev de clasa a IX-a:

Cred că toată lumea a putut fi mulţumită cu această prezentare; eu cel puţin nu am întâmpinat greutăţi, îmi amintesc că a fost unul dintre lucrurile pe care le-am înţeles cum trebuie, în cursul acestei tabere.

Cei din clasele XI şi XII au fost şi ei încântaţi de acest mod de abordare, în ciuda faptului că ei cunoşteau deja funcţia exponenţială şi proprietăţile ei. În cursul activităţilor s-au auzit asemenea exclamaţii: „*A, văd deja ce va ieşi din asta.*", „*Hei, n-am mai întâlnit funcţia exponenţială în forma aceasta.*" etc.

Iată opinia unui elev de clasa a XII-a despre activitate: „*După mine, abordarea unor segmente ale matematicii din alte puncte de vedere (care ţin de economie, fizică, chimie etc.) este absolut pozitivă, deoarece îmbinarea teoriei cu practica este, pe de o parte, utilă, iar pe de altă parte, aduce elevul mai aproape de esenţa problemei, provoacă mai mult interes şi mai mult entuziasm din partea lui. La urma urmei, este logic că, dacă cineva înţelege la ce îi poate servi în practică o noţiune sau o teoremă şi reuşeşte să o şi aplice în viaţa zilnică, o va privi cu mai mult entuziasm decât în cazul în care ar fi vorba doar de nişte cifre şi formule pe o bucată de hârtie. Desigur, acest lucru este mai puţin valabil pentru noi, cei cărora le place şi matematica abstractă; eu am fost tot atât de entuziasmat de această materie şi în clasă, când am învăţat-o cu metoda clasică. Pentru mine aceste* cifre şi formule pe o bucată de hârtie *înseamnă întotdeauna un pic mai mult. Abordarea a fost interesantă şi cred că această metodă de predare ar trebui aplicată şi în şcoli. Una dintre problemele majore ale sistemului educaţional este lipsa legăturilor între diferitele materii. Elevii ar învăţa mult mai mult dacă s-ar pune accentul pe îmbinarea matematicii cu fizica, cu chimia, cu ştiinţele economice, cu biologia, în loc de predarea de către fiecare profesor a materiei proprii obligatorii, independent de celelalte discipline. La urma urmei, creierul uman acumulează informaţia prin crearea unor conexiuni între diverse noţiuni.*"

Într-adevăr, cunoştinţele ar trebui să fie aplicabile în mod direct. Pare un paradox faptul că acest lucru nu se realizează tocmai în acele domenii (adică în cel al matematicii şi al ştiinţelor naturii) care sunt cele mai adecvate acestui scop în cadrul învăţământului teoretic.

6.2. Observaţii de ordin metodologic. Introducerea funcţiei exponenţiale poate fi realizată pe baza mai multor concepţii diferite. Abordarea aleasă de noi are avantajul că fiecare proprietate studiată îşi are sursa într-o problemă concretă, de multe ori practică. Majoritatea proprietăţilor examinate sunt sau pot fi intuite de elevi, mai ales dacă pot folosi şi calculatorul. Astfel, o parte importantă a demonstraţiilor poate fi efectuată pornind de la fapte empirice. Intuirea fenomenelor, executarea calculelor sau rezolvarea unor probleme secundare pot fi făcute şi prin activităţi în grupuri. Demonstraţiile alternative ale diferitelor proprietăţi încearcă să oglindească faptul că, în general, există mai multe demonstraţii posibile. Desigur, în cursul activităţilor pot apărea şi demonstraţii care diferă de cele prezentate aici. Este important să considerăm demonstraţiile prezentate ca alternative posibile, nu ca unica soluţie posibilă (şi nicidecum recomandată). Scopul principal al unei introduceri de acest gen este ca elevii să perceapă problemele şi să încerce găsirea unor soluţii. În această privinţă sarcina profesorului nu este prezentarea demonstraţiei, ci, mult mai mult, să îndrume elevii să calculeze ei înşişi, să experimenteze, să facă încercări, să formuleze presupuneri etc. Bineînţeles, nu trebuie să începem toate acestea la un asemenea nivel. Pentru a avea succes, trebuie să-i obişnuim pe elevi cu acest mod de lucru sau să prelungim în mod suficient timpul dedicat activităţilor, având în vedere că, potrivit experienţei didactice, astfel de activităţi pot avea succes şi dacă elevii nu sunt familiarizaţi cu stilul de muncă, dar au la dispoziţie timp destul.

Abordarea prezentată pune în evidenţă unele probleme esenţiale cu care ne confruntăm în predarea analizei matematice. Problema cea mai importantă este, probabil, faptul că modul tratării (ca şi majoritatea demonstraţiilor analizei matematice) se bazează pe manipularea inegalităţilor, o metodă care nu este pregătită, sprijinită de materia claselor IX şi X. A doua caracteristică foarte importantă a abordării este că, în cazul majorităţii demonstraţiilor, trebuie să intuim ceva ce poate fi justificat relativ uşor. Este bine să exersăm cu elevii şi această gândire inductivă – altfel se vor dezobişnui pur şi simplu să observe şi să denumească lucruri evidente. Din păcate, partea de conţinut a materiei se află în completă contradicţie cu tendinţele metodicii de a promova dezvoltarea competenţelor, astfel încât, prin concentrarea asupra conţinutului, experimentarea, traseul

$$\text{intuiţie} \to \text{probă} \to \text{eroare} \to \text{presupunere} \to \text{demonstraţie}$$

poate fi eliminat cu uşurinţă din practica cotidiană. Însă preţul acestei eliminări va fi plătit pe termen lung şi încă cu dobândă la dobândă, pentru că tot mai puţini elevi vor înţelege noţiunile fundamentale, încă şi mai puţini vor percepe relaţiile între noţiuni şi doar câteva rare excepţii vor avea acces la miracolele de necrezut ale funcţionării matematicii, cu toate că mecanismele vieţii de zi cu zi şi calitatea ei depind tot mai mult de existenţa acestor miracole.

CAPITOLUL X

ALGEBRA LINIARĂ ÎNTR-O ABORDARE CENTRATĂ PE PROBLEME ŞI INVESTIGAŢII

În acest capitol încercăm să dezvoltăm o parte din capitolul dedicat algebrei liniare din programa de învăţământ, pe baza principiilor predării centrate pe probleme, cu scopul de a sprijini învăţarea bazată pe investigaţie. De regulă, vom porni de la o aplicaţie şi vom introduce noţiuni noi elaborând un model adecvat. Vom încerca să construim raţionamentele în aşa fel, încât problemele să preceadă teoria, pentru ca elevii să-şi dea seama de unde şi cum apar noţiunile, proprietăţile, cum pot fi utilizate mijloacele matematice descoperite şi să-şi formeze o imagine despre construcţia modelelor (chiar şi în mod neexplicit).

1. Probleme introductive

PROBLEMA 1. Pe laturile AC şi BC ale triunghiului ABC considerăm punctele $N \in (AC)$ şi $M \in (BC)$ astfel ca $3CN = AC$ şi $3BM = BC$. Notăm cu P mijlocul laturii AB. Ştergem triunghiul iniţial şi păstrăm doar punctele M, N, P. Reconstruiţi triunghiul iniţial folosind punctele M, N şi P.

Olimpiada de Matematică a Liceelor Maghiare din Europa, 2009
Lajos Kovács, Odorheiu Secuiesc

SOLUŢIE. Dacă notăm vectorii de poziţie ai punctelor cu literele mici corespunzătoare lor, atunci $3m = 2b+c$, $3n = 2c+a$ şi $2p = a+b$. Astfel, pentru a exprima a, b, c în funcţie de m, n, p, trebuie să rezolvăm sistemul de ecuaţii

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2b+c & = & 3m \\ a+2c & = & 3n \\ a+b & = & 2p \end{array}\right. \tag{37}$$

Soluţia sistemului este $b = \frac{1}{5}(2p - 3n + 6m)$, deci dacă alegem M ca origine a vectorilor de poziţie, atunci $b = \frac{1}{5}(2p-3n)$. Rezultă că B este punctul care împarte PQ în proporţie de $3:2$, unde Q este simetricul lui N faţă de M. Dacă nu alegem M ca punct de origine, atunci se va construi Q ca şi simetricul lui N faţă de O, se ia punctul R pe segmentul PQ astfel ca $\frac{PR}{RQ} = \frac{3}{2}$, după care se adaugă la r vectorul $\frac{6}{5}m$. □

Problema 2. Pe o insulă trăiesc 13 cameleoni gri, 15 bruni şi 17 verzi. Dacă doi cameleoni de culori diferite se întâlnesc, amândoi îşi schimbă culoarea pielii în cea de-a treia culoare. Este posibil ca, după un timp, toţi cameleonii să aibă aceeaşi culoare? Dar dacă sunt 19 cameleoni gri, 13 bruni şi 20 verzi?

Soluţie. Problema este dificilă din două motive: în primul rând pentru că avem de-a face cu trei feluri de întâlniri; în al doilea rând pentru că nu cunoaştem ordinea întâlnirilor. Dacă ne imaginăm că trebuie să calculăm doar numărul cameleonilor gri, atunci practic nu facem altceva decât scădem câte unu sau adăugăm doi la numărul actual al cameleonilor, în funcţie de tipul întâlnirilor. Rezultatul final nu depinde de ordinea operaţiilor, ci doar de câte ori au fost efectuate, adică de numărul întâlnirilor de diferite tipuri. Dacă notăm numărul celor trei tipuri de întâlniri cu a (când se transformă în gri), b (când se transformă în brun) şi c (când se transformă în verde), atunci, independent de ordinea întâlnirilor, la sfârşit vom avea $13+2a-b-c$ cameleoni gri, $15-a+2b-c$ cameleoni bruni şi $17-a-b+2c$ cameleoni verzi. Dacă toţi cameleonii au aceeaşi culoare, primele două numere sunt 0, iar al treilea număr este 45. Astfel trebuie să studiem următoarele sisteme de ecuaţii:

$$\begin{cases} 13+2a-b-c=0 \\ 15-a+2b-c=0 \\ 17-a-b+2c=45 \end{cases} \qquad \begin{cases} 13+2a-b-c=0 \\ 15-a+2b-c=45 \\ 17-a-b+2c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13+2a-b-c=45 \\ 15-a+2b-c=0 \\ 17-a-b+2c=0 \end{cases}$$

Dacă înlocuim o necunoscută exprimată dintr-o ecuaţie în altă ecuaţie din acelaşi sistem, ajungem la o contradicţie, pentru că un număr divizibil cu 3 ar trebui să fie 2 sau 4. Prin urmare nu este posibil ca toţi cameleonii să aibă aceeaşi culoare.

Observaţie. Acest lucru arată, practic, că diferenţa dintre numărul cameleonilor care aparţin la două grupuri distincte (fixate) este invariantă faţă de restul împărţirii cu 3.

În cazul al doilea ajungem la sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} 19 + 2a - b - c = 0 \\ 13 - a + 2b - c = 0 \\ 20 - a - b + 2c = 52 \end{cases}$$

(şi alte două sisteme similare). Soluţiile naturale ale sistemului sunt de forma $a = b - 2$, $c = b + 15$, unde $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. Dacă $a = 0$, $b = 2$ şi $c = 17$, obţinem situaţia dorită. Aceste întâlniri sunt posibile, deci în cazul acesta se poate ajunge la situaţia în care toţi cameleonii de pe insulă au aceeaşi culoare. □

Observaţie. Această problemă este utilă deoarece pune în evidenţă faptul că în cursul problemelor de modelare pot apărea sisteme de ecuaţii; în acelaşi timp, este evident că proprietăţile soluţiilor pot fi importante din punctul de vedere al situaţiei modelate. Cele două probleme de mai sus reprezintă practic toate cazurile caracteristice: sisteme care admit soluţie unică, sisteme incompatibile şi sisteme nedeterminate. Vom vedea că sistemele incompatibile apar şi în cazul în care necunoscutele aparţin lui $\mathbb{R}$.

Problema 3. Trei staţii de epurare A_1, A_2 şi A_3 primesc apa din trei surse: de la o fântână F, de la un lac L, şi de la un râu R. Calculaţi cantitatea de apă primită de cele trei staţii, dacă x,y, respectiv z sunt cantităţile livrate de cele trei surse (F, L, R), iar cantităţile furnizate de cele trei surse se distribuie astfel:

- F: $\frac{1}{3}$ la A_1, $\frac{1}{3}$ la A_2, $\frac{1}{3}$ la A_3;
- L: $\frac{1}{2}$ la A_1, $\frac{1}{4}$ la A_2, $\frac{1}{4}$ la A_3;
- R: 0 la A_1, $\frac{1}{2}$ la A_2, $\frac{1}{2}$ la A_3.

Studiaţi, de asemenea, problema inversă: câtă apă se consumă din fântână, din lac, respectiv din râu, dacă se cunosc debitele h_1, h_2, h_3 ale staţiilor de epurare?

Soluţie. Debitul primei staţii este $h_1 = x\frac{1}{3} + y\frac{1}{2} + z \cdot 0$, debitul staţiei a doua e $h_2 = x\frac{1}{3} + y\frac{1}{4} + z\frac{1}{2}$, iar cel al staţiei a treia e $h_3 = x\frac{1}{3} + y\frac{1}{4} + z\frac{1}{2}$. Soluţia problemei inverse înseamnă să studiem sistemul de ecuaţii

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + 0 \cdot z & = & h_1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z & = & h_2 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z & = & h_3 \end{array}\right. \tag{38}$$

Este evident că pentru $h_2 \neq h_3$ nu există soluţie, în timp ce pentru $h_2 = h_3$ există un număr infinit de soluţii. Soluţiile sistemului pot fi reprezentate în forma $x = 3\left(h_1 - \frac{1}{2}y\right)$, $z = 2\left(h_2 - h_1 + \frac{1}{4}y\right)$, $y \in \mathbb{R}$, aceasta însă nu oferă o soluţie pentru problema originală pentru orice $y \in \mathbb{R}$, deoarece consumul de apă nu poate fi negativ. Astfel, trebuie să fie îndeplinite condiţiile $y \geq 0$, $y \leq 2h_1$ şi $y \geq 4(h_1 - h_2)$, deci soluţia problemei date există doar în cazul în care $y \geq \max\{0, 4(h_1 - h_2)\}$ şi $y \leq 2h_1$. Prin urmare, pentru $0 \leq h_1 \leq h_2$ obţinem $y \in [0, 2h_1]$, iar pentru $2h_2 \geq h_1 \geq h_2$ obţinem $y \in [4(h_1 - h_2), 2h_1]$. În acelaşi timp, pentru $2h_2 < h_1$ problema iniţială nu are soluţie. Se poate vedea că, în ultimul caz, sistemul are un număr infinit de soluţii; cu toate acestea, problema reală iniţială nu are nicio soluţie. □

Problema 4. (modelul forţei de muncă) Într-o societate, un individ apt de muncă se poate găsi la un moment dat t în una din situaţiile de mai jos:

- s_1 lucrează în propriul domeniu de activitate;
- s_2 lucrează în alt domeniu;
- s_3 nu lucrează.

Fie p_{ij} raportul dintre numărul indivizilor care în intervalul de timp $[t, t + \Delta t]$ se mută din situaţia s_i în situaţia s_j şi numărul indivizilor din situaţia s_i la momentul t. Notăm cu x_n, y_n, respectiv z_n numărul indivizilor aflaţi în cele trei situaţii în momentul considerat $t_n = n \cdot \Delta t$.

a) Determinaţi numerele x_n, y_n, z_n în funcţie de numerele x_0, y_0, z_0 şi $(p_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$.
b) Analizaţi în ce constă situaţia de echilibru. Studiaţi ce înseamnă că raportul efectivelor celor trei categorii nu se modifică.
c) Cum poate fi examinat comportamentul sistemului pe termen lung?

Soluţie. În momentul $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ cei care se află în situaţia s_i provin din situaţiile s_1, s_2 şi s_3, şi anume $p_{1i}x_n$ din s_1, $p_{2i}x_n$ din s_2 şi $p_{3i}x_n$ din s_3. Astfel putem scrie următoarele relaţii recursive:

$$\begin{cases} x_{n+1} &= p_{11}x_n + p_{21}y_n + p_{31}z_n \\ y_{n+1} &= p_{12}x_n + p_{22}y_n + p_{32}z_n \\ z_{n+1} &= p_{13}x_n + p_{23}y_n + p_{33}z_n \end{cases}$$

Observăm că la punctul a) se cere rezolvarea recurenţei, adică determinarea termenului general, la b) situaţia de echilibru se obţine prin rezolvarea unui sistem de ecuaţii, iar la c), pentru studiul comportamentului pe termen lung, se va studia mărginirea, monotonia, limita, periodicitatea şirurilor definite mai sus. □

2. Matrice

2.1. Noţiunea de matrice. În viaţa de zi cu zi unele situaţii nu pot fi caracterizate cu ajutorul unui număr. Uneori avem nevoie de un şir sau de un tabel cu numere pentru a le exprima. De exemplu, bugetul unei familii este mai uşor de urmărit dacă introducem valorile într-un tabel:

Luna	Cheltuieli comune	Hrană	Îmbrăcăminte	Diverse
Noiembrie	250	700	500	850
Decembrie	400	1000	800	1100

Analog, dacă vrem să studiem distanţele între oraşele A, B, C şi D, ţinând cont de faptul că între două oraşe putem călători pe şosea sau cu trenul, o soluţie comodă este folosirea tabelului de mai jos în care distanţele pe cale ferată se găsesc sub diagonala principală, iar cele pe şosea deasupra acesteia:

	A	B	C	D
A	0	120	200	155
B	100	0	80	110
C	190	90	0	160
D	150	100	150	0

Dacă ştim semnificaţia fiecărei cantităţi în parte, cele de mai sus pot fi scrise şi sub forma unui tabel simplificat:

$$\begin{pmatrix} 250 & 700 & 500 & 850 \\ 400 & 1000 & 800 & 1100 \end{pmatrix},$$

respectiv

$$\begin{pmatrix} 0 & 120 & 200 & 155 \\ 100 & 0 & 80 & 110 \\ 190 & 90 & 0 & 160 \\ 150 & 100 & 150 & 0 \end{pmatrix}.$$

Asemenea tabele putem întâlni foarte des. În matematică, ele se numesc matrice.

Definiţie 10.1. O matrice de tipul $m \times n$ este un tabel compus din m linii şi n coloane.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Numerele a_{ij} $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ se numesc elementele matricei.

Observaţii. **1.** Pentru reprezentarea matricelor, folosim modul de scriere compact

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}},$$

care înseamnă că pe linia i şi coloana j a matricei se află elementul a_{ij}.

2. Notăm cu $\mathcal{M}_{m,n}(X)$ mulţimea matricelor $m \times n$ ale căror elemente sunt din mulţimea X. De exemplu, mulţimea matricelor cu elemente reale, având m linii şi n coloane se notează cu $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

3. Dacă $m = n$, atunci matricea este o matrice pătratică şi folosim notaţia $\mathcal{M}_n(X)$. Mulţimea matricelor $n \times n$ cu elemente complexe se notează cu $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

4. Dacă $m = 1$, atunci matricea conţine o singură linie. Această matrice se numeşte matrice linie. De exemplu, mulţimea matricelor linie cu elemente întregi şi n coloane se notează prin $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{Z})$.

5. Dacă $n = 1$, atunci matricea are o singură coloană şi se numeşte matrice coloană. De exemplu, mulţimea matricelor coloană cu elemente raţionale şi m linii se notează prin $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{Q})$.

6. Matricele linie şi matricele coloană sunt de fapt vectori din X^n, respectiv X^m.

7. O matrice din $\mathcal{M}_{m,n}(X)$ poate fi concepută şi ca o funcţie $f : \{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\} \to X$.

Bineînţeles, noţiunea de matrice ne va fi cu adevărat de folos dacă, prin intermediul acestor tabele, vom putea descrie nu numai anumite cantităţi într-o formă uşor perceptibilă (ceea ce ne este deja de ajutor), dar putem crea şi anumite relaţii între aceste cantităţi, ce ne ajută în rezolvarea uşoară şi rapidă a unor probleme care altfel sunt dificil de tratat. În consecinţă, vom studia în cele ce urmează câteva probleme, care pot fi abordate cu ajutorul matricelor, în căutarea unor instrumente ce fac posibilă examinarea, respectiv rezolvarea cât mai uşoară şi transparentă a problemelor.

2.2. Înmulţirea unei matrice cu un număr. Gospodinele se confruntă uneori cu probleme de tipul următor. Pentru a prepara două torturi (sau prăjituri), au nevoie de următoarele materii prime: pentru primul tort trebuie zahăr, făină, ouă, căpşuni şi unt, iar pentru al doilea: zahăr, făină, ouă, ciocolată şi unt. Cantităţile fiecăruia dintre ingrediente sunt cuprinse în următorul tabel:

·	zahăr	făină	ouă	căpşuni	ciocolată	unt
S_1	150 g	120 g	8 buc.	300 g	0	100 g
S_2	120 g	80 g	6 buc.	0	200 g	150 g

Tabelul poate fi scris sub forma matricei de mai jos:

$$\begin{pmatrix} 150 & 120 & 8 & 300 & 0 & 100 \\ 120 & 80 & 6 & 0 & 200 & 150 \end{pmatrix}$$

Dacă dorim să pregătim doar o jumătate de porţie din fiecare prăjitură, atunci folosim o jumătate din cantitatea cerută de reţetă pentru fiecare ingredient, sau dacă pentru un eveniment mare în familie, vrem să preparăm trei torturi din fiecare fel, atunci trebuie să înmulţim fiecare ingredient cu trei. Dacă scriem cantităţile necesare în tabele noi, tabelul ingredientelor necesare pentru jumătatea cantităţii va arăta astfel:

·	zahăr	făină	ouă	căpşuni	ciocolată	unt
S_1	75 g	60 g	4 buc.	150 g	0	50 g
S_2	60 g	40 g	3 buc.	0	100g	75 g

iar pentru cantităţi triple:

·	zahăr	făină	ouă	căpşuni	ciocolată	unt
S_1	450 g	360 g	24 buc.	900 g	0	300 g
S_2	360 g	240 g	18 buc.	0	600 g	450 g

Matricele asociate tabelelor de mai sus sunt următoarele:

$$\begin{pmatrix} 75 & 60 & 4 & 150 & 0 & 50 \\ 60 & 40 & 3 & 0 & 100 & 75 \end{pmatrix},$$

respectiv

$$\begin{pmatrix} 450 & 360 & 24 & 900 & 0 & 300 \\ 360 & 240 & 18 & 0 & 600 & 450 \end{pmatrix}.$$

Ultimele două matrice se obţin din matricea iniţială a ingredientelor prin înmulţirea fiecărui element cu $0,5$, în primul caz, şi cu 3, în cel de-al doilea caz.

În continuare, dacă înmulţim cu acelaşi număr toate elementele unei matrice, spunem că înmulţim matricea cu numărul respectiv. Prin aceasta am definit de fapt o operaţie: înmulţirea unei matrice cu un număr real (complex etc.).

Definiţie 10.2. Dacă $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi $\alpha \in \mathbb{C}$, atunci denumim matricea $U = (\alpha \cdot a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ produsul dintre numărul α şi matricea A. Matricea obţinută o notăm prin $\alpha \cdot A$.

Exemple

(1) $4 \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 & 20 & 9 & 0 \\ 6 & 2 & -8 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 12 & 80 & 36 & 0 \\ 24 & 8 & -32 & 0 & -20 \end{pmatrix}$

(2) $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -0 & 3 & 4\sqrt{2} \\ -2i & -8 & 0,5 \\ 7 & 4+2i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0 & 1,5 & 2\sqrt{2} \\ -i & -4 & 0,25 \\ 3,5 & 2+i & 0,5 \end{pmatrix}$

3. Adunarea matricelor

Dacă urmează o săptămână aglomerată, în care vom avea mulţi musafiri şi dorim să facem prăjituri de două ori, prima dată o cantitate dublă, apoi o cantitate triplă, dar vrem să cumpărăm toate ingredientele odată, este evident că trebuie să ne procurăm o cantitate de cinci ori mai mare decât valorile cuprinse în tabelul pentru o singură prăjitură. Putem calcula aceste cantităţi în două moduri diferite: adunând elementele matricei $X = 2A$ cu elementele corespunzătoare ale matricei $Y = 3A$ sau prin înmulţirea cu cinci a elementelor matricei A.

$$\begin{aligned} X + Y &= 2A + 3A \\ &= \begin{pmatrix} 300 & 240 & 16 & 600 & 0 & 200 \\ 1240 & 160 & 12 & 0 & 400 & 300 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 450 & 360 & 24 & 900 & 0 & 300 \\ 360 & 240 & 18 & 0 & 600 & 450 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 750 & 600 & 40 & 1500 & 0 & 500 \\ 600 & 400 & 30 & 0 & 1000 & 750 \end{pmatrix} \\ &= 5A \end{aligned}$$

În cele ce urmează, dacă adunăm elementele corespunzătoare a două matrice de acelaşi tip (de aceleaşi dimensiuni), spunem că am adunat cele două matrice. Astfel, am definit o altă operaţie în mulţimea matricelor de acelaşi tip: adunarea matricelor.

Definiţie 10.3. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ şi $B = (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$, atunci $A + B = (c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$, unde

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ \forall i = \overline{1,m},\ \forall j = \overline{1,n}.$$

Exemple

(1) $$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ i & 2 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -5 \\ -3+i & 2 \\ 0 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} 7 & 8 & -9 \\ 3i & \sqrt{3} & 0,(3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -9 \\ 3i & \sqrt{3} & 0,(3) \end{pmatrix}$$

OBSERVAŢIE. În contextul dat, proprietăţile adunării matricelor se pot observa simplu.

4. Înmulţirea matricelor

Când cumpărăm ingredientele necesare torturilor, nu ne este indiferent de unde facem cumpărăturile, pentru că preţurile ingredientelor variază de la un magazin la altul. În două magazine preţurile sunt următoarele:

- în magazinul A - 1 kg de zahăr costă 3 lei, 1 kg de făină $2,5$ lei, un ou $0,3$ lei, 1 kg de căpşuni 7 lei, 1 kg de ciocolată 20 lei, o bucată de unt $4,5$ lei;
- în magazinul B - 1 kg de zahăr costă $2,8$ lei, 1 kg de făină 3 lei, un ou $0,4$ lei, 1 kg de căpşuni 6 lei, 1 kg de ciocolată 25 lei, o bucată de unt $4,2$ lei.

Datele de mai sus sunt scrise în tabelul următor:

	Zahăr	Făină	Ouă	Căpşuni	Ciocolată	Unt
Preţul în magazinul A (lei/kg, bucată)	3	$2,5$	$0,3$	7	20	$4,5$
Preţul în magazinul B (lei/kg, bucată)	$2,8$	3	$0,4$	6	25	$4,2$

Pentru a decide care este magazinul unde merită să facem cumpărăturile, calculăm preţul ingredientelor necesare pentru primul tort, respectiv pentru al doilea, în magazinele A, respectiv B.

- Preţul ingredientelor pentru primul tort în magazinul A:

$$p_{11} = 0,15 \cdot 3 + 0,12 \cdot 2,5 + 8 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 7 + 0,5 \cdot 4,5 = 7,5.$$

- Preţul ingredientelor pentru primul tort în magazinul B:

$$p_{12} = 0,15 \cdot 2,8 + 0,12 \cdot 3 + 8 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 6 + 0,5 \cdot 4,2 = 8,03.$$

- Preţul ingredientelor pentru al doilea tort în magazinul A:

$$p_{21} = 0,12 \cdot 3 + 0,08 \cdot 2,5 + 6 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 20 + 0,75 \cdot 4,5 = 9,75.$$

- Preţul ingredientelor pentru al doilea tort în magazinul B:

$$p_{22} = 0,12 \cdot 2,8 + 0,08 \cdot 3 + 6 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 25 + 0,75 \cdot 4,2 = 11,126.$$

Observăm că amândouă torturile ar costa mai puţin dacă am face cumpărăturile din magazinul A. Matricea A a ingredientelor şi matricea B a preţurilor:

$$A = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,12 & 8 & 0,3 & 0 & 0,5 \\ 0,12 & 0,08 & 6 & 0 & 0,2 & 0,75 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2,8 \\ 2,5 & 3 \\ 0,3 & 0,4 \\ 7 & 6 \\ 20 & 25 \\ 4,5 & 4,2 \end{pmatrix}.$$

Putem observa că p_{11} se obţine prin înmulţirea elementelor din prima linie a matricei A cu elementele corespunzătoare din prima coloană a matricei B (primul element al liniei cu primul element al coloanei etc.) şi prin adunarea acestor produse. p_{12} se obţine în mod similar, prin înmulţirea elementelor din prima linie cu elementele din coloana a doua, după care adunăm produsele. Evident, aceste operaţii pot fi efectuate în acest mod doar dacă numărul coloanelor lui A este identic cu numărul liniilor lui B. Valorile p obţinute pot fi descrise cu ajutorul unei matrice noi: $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$. Această matrice este produsul matricelor A şi B.

DEFINIŢIE 10.4. Produsul matricelor $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $B = (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,p}}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ este matricea $A \cdot B = (c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,p}}} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{C})$, în care

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p.$$

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 5 \cdot 4 & 2 \cdot (-2) + 5 \cdot (-9) \\ -1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 & -1 \cdot (-2) + 3 \cdot (-9) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 22 & -49 \\ 11 & -25 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-4) + (-2) \cdot 0 \\ 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + (-4) \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) + (-4) \cdot 0 \\ 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-4) + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ -17 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

În acest context, putem examina proprietăţile înmulţirii matricelor. Noi vom aborda doar distributivitatea înmulţirii matricelor în raport cu adunarea şi asociativitatea înmulţirii matricelor.

4.1. Studierea distributivităţii înmulţirii în raport cu adunarea matricelor. Dacă dorim să cumpărăm materia primă pentru un tort sau pentru trei torturi, în oricare din magazine, costul va fi acelaşi dacă le cumpărăm pe toate odată sau dacă le cumpărăm pe rând: prima dată cele pentru porţia unică, apoi pe cele pentru porţia triplă, din acelaşi magazin. Dacă notăm cu A, respectiv C matricea materiilor prime şi cu B pe cea a preţurilor, atunci:

$$(A+C)B = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,48 & 32 & 1,2 & 0 & 2 \\ 0,48 & 0,32 & 24 & 0 & 0,8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2,8 \\ 2,5 & 3 \\ 0,3 & 0,4 \\ 7 & 6 \\ 20 & 25 \\ 4,5 & 4,2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 30 & 32,12 \\ 38,94 & 44,504 \end{pmatrix},$$

$$AB+CB = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,12 & 8 & 0,3 & 0 & 0,5 \\ 0,12 & 0,08 & 6 & 0 & 0,2 & 0,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2,8 \\ 2,5 & 3 \\ 0,3 & 0,4 \\ 7 & 6 \\ 20 & 25 \\ 4,5 & 4,2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0,45 & 0,36 & 24 & 0,9 & 0 & 1,5 \\ 0,36 & 0,24 & 6 & 0 & 0,6 & 2,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2,8 \\ 2,5 & 3 \\ 0,3 & 0,4 \\ 7 & 6 \\ 20 & 25 \\ 4,5 & 4,2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7,5 & 8,03 \\ 9,735 & 11,126 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 22,5 & 24,09 \\ 29,205 & 33,378 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 32,12 \\ 38,94 & 44,504 \end{pmatrix}.$$

Proprietatea este valabilă pentru orice matrice A, $C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, adică $(A+C)B = AB+CB$. Acest lucru poate fi demonstrat şi în mod formal. Într-adevăr, dacă $(A+C)B = D = (d_{ik})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ k=\overline{1,p}}}$, atunci

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+c_{ij})b_{jk} = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}b_{jk}+c_{ij}b_{jk}).$$

În acelaşi timp, dacă $AB = E$ şi $CB = F$, atunci

$$e_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \quad \text{şi} \quad f_{ik} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}b_{jk},$$

deci

$$e_{ik}+f_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}b_{jk}=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}b_{jk}+c_{ij}b_{jk})=d_{ik}.$$

În mod asemănător putem demonstra că $A(C+B)=AC+AB$, dacă $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $B,C\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, deci înmulţirea matricelor este distributivă în raport cu adunarea matricelor.

4.2. Studierea asociativităţii. Dacă în cursul lunii anterioare am preparat câte un tort din materii prime cumpărate din primul magazin, respectiv din al doilea magazin, costurile acestora pot fi calculate în două feluri. Dacă notăm cu A matricea ingredientelor, cu B matricea preţurilor şi cu C matricea $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, matricea cheltuielilor totale în funcţie de tipul tortului poate fi calculată prin metodele de mai jos:

$$(AB)C=\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}\\p_{21}&p_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{11}+p_{12}\\p_{21}+p_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15,53\\20,861\end{pmatrix},$$

unde elementele din prima linie a matricei AB conţin preţurile materiilor prime ale primului, respectiv celui de-al doilea tort.

$$A(BC)=\begin{pmatrix}0,15&0,12&8&0,3&0&0,5\\0,12&0,08&6&0&0,2&0,75\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\left[\begin{pmatrix}3&2,8\\2,5&3\\0,3&0,4\\7&6\\20&25\\4,5&4,2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}0,15&0,12&8&0,3&0&0,5\\0,12&0,08&6&0&0,2&0,75\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5,8\\5,5\\0,7\\13\\45\\8,7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15,53\\20,861\end{pmatrix}$$

Aici, matricea BC conţine suma preţurilor ingredientelor corespunzătoare din cele două magazine, deci produsul $A(BC)$ ne dă, de asemenea, matricea costului total. Putem vedea că proprietatea este adevărată şi pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$:

$$(AB)C = A(BC).$$

Demonstraţie formală. Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, atunci elementele matricei $D = AB \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{C})$ sunt $d_{ik} = \sum\limits_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk}$. În acest caz, $(AB)C = DC = E \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{C})$, unde

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{p} d_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{ik}b_{lk}\right)c_{kj} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk}c_{kj}.$$

În acelaşi timp, $BC = F \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{C})$, unde $f_{lj} = \sum\limits_{k=1}^{p} b_{lk}c_{kj}$. Astfel, $A(BC) = AF = G \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{C})$, unde

$$g_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}f_{lj} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}\sum_{k=1}^{p} b_{lk}c_{kj} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{il}b_{lk}c_{kj}.$$

Pentru a demonstra egalitatea $(AB)C = A(BC)$, nu ne rămâne decât să observăm că

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}, \quad \forall x_{ij} \in \mathbb{C},$$

adică în interiorul unei sume $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}$ ordinea în care adunăm termenii ei nu modifică valoarea sumei, adunarea fiind comutativă.

Lemă 10.5. *Dacă $x_{ij} \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1,m}$ şi $j = \overline{1,n}$, atunci*

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}.$$

Demonstraţie. Fie $X = (x_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$. $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ este suma elementelor din linia i, astfel suma $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ este suma sumelor liniilor matricei X, ceea ce este exact suma tuturor elementelor matricei. În mod similar, $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$ este suma elementelor din coloana j , iar suma $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$ este suma sumelor coloanelor matricei X, care este, de asemenea, suma tuturor elementelor matricei. În consecinţă, cele două sume sunt egale. □

Pe baza acestei leme, înmulţirea matricelor este asociativă. □

Observaţie. Contextul este adecvat pentru a deduce pe cale intuitivă asociativitatea înmulţirii matricelor; aceasta nu e doar o proprietate abstractă, ci rezultatul unei regrupări conceptuale simple.

Să revenim la soluţia problemei 1. Folosind reprezentarea cu matrice, sistemul de ecuaţii poate fi scris în forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3m \\ 3n \\ 2p \end{pmatrix}.$$

Forma matriceală a soluţiilor:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3m \\ 3n \\ 2p \end{pmatrix}.$$

În cazul problemei 3, am văzut că descrierea fenomenului a condus la un sistem de ecuaţii, iar pentru a rezolva problema inversă am calculat soluţiile sistemului. Acelaşi lucru este reflectat şi de egalităţile de mai sus, scrise sub formă matriceală. Prin urmare, dacă înmulţirea cu o matrice descrie transformarea dintr-o stare în cealaltă, atunci cazul de mai înainte demonstrează că transformarea inversă poate fi, de asemenea, descrisă cu ajutorul unei matrice. Astfel, se formulează ipoteza că produsul celor două matrice de mai înainte este matricea transformării identice. Acest lucru merită verificat:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matricea care apare în membrul drept al egalităţilor de mai sus se numeşte matrice identică sau matrice unitate şi este notată prin I_3. Proprietatea acestei matrice este $A \cdot I_3 = I_3 \cdot A = A$, $\forall A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. În general, dacă considerăm mulţimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi căutăm în această mulţime o matrice I_n pentru care $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$, $\forall A \in \mathcal{M}_n\mathbb{C}$, atunci obţinem matricea

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),$$

unde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad i = j \\ 0, & \text{dacă} \quad i \neq j \end{cases}$

Definiţie 10.6. Matricea I_n de mai sus se numeşte matrice unitate.

Mai sus am văzut că există matrice al căror produs are ca rezultat matricea unitate, independent de ordinea factorilor înmulţirii. Dacă două matrice au această proprietate, atunci spunem că una este inversa celeilalte.

Definiţie 10.7. Matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se consideră inversabilă dacă există o matrice $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pentru care

$$AA' = A'A = I_n.$$

Matricea A' se numeşte inversa matricei A şi se notează prin A^{-1}.

Să examinăm dacă inversa matricei, în caz că există, este determinată în mod unic. Pentru aceasta considerăm o matrice A inversabilă. Întrebarea este dacă poate avea două inverse diferite A' şi A''?

Dacă A' şi A'' sunt inversele lui A: $AA' = A'A = I_n$ şi $AA'' = A''A = I_n$. Atunci

$$A'' = A''I_n = A''(AA') = (A''A)A' = I_nA' = A'.$$

Prin urmare, dacă A' şi A'' sunt inversele matricei A, atunci ele sunt egale. Prin urmare, dacă A este inversabilă, atunci inversa ei este unic determinată.

În cursul rezolvării problemei 4, am văzut că ,dacă $u_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$, atunci recurenţa poate fi scrisă sub forma

$$u_{n+1} = P^t \cdot u_n.$$

Din această cauză,

$$u_n = A \cdot u_{n-1} = A \cdot (A \cdot u_{n-2}) = \ldots = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots A}_{n} \cdot u_0,$$

unde $A = P^t$.

Definiţie 10.8. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, putem defini puterile matricei A în mod inductiv:

$$A^0 = I_n, \ A^1 = A \text{ şi } A^{n+1} = A^nA, \ \forall n \geq 1.$$

Observaţie. Deoarece operaţiile efectuate cu matrice, cu excepţia comutativităţii înmulţirii, posedă proprietăţi identice cu cele ale operaţiilor cu numere reale, dacă ordinea înmulţirii a două matrice poate fi inversată, atunci sunt adevărate formulele de calcul prescurtat valabile pentru numerele complexe.

Teoremă 10.9. *Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi $AB = BA$, atunci*

- $A^k - B^k = (A - B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + ... + AB^{k-2} + B^{k-1})$;
- $A^{2k+1} + B^{2k+1} = (A + B)(A^{2k} - A^{2k-1}B + ... - AB^{2k-1} + B^{2k})$;
- $(A+B)^k = A^k + C_k^1 A^{k-1}B + C_k^2 A^{k-2}B^2 + ... + C_k^{k-1} AB^{k-1} + B^k$,

pentru orice $k \in \mathbb{N}, \ k \geq 1$.

Un studiu mai detaliat al problemei 4. Presupunem că elementele matricei P sunt

$$P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$$

şi definim starea de echilibru, respectiv studiem comportamentul sistemului pe termen lung. Putem bănui că, dacă $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ reprezintă numărul indivizilor în starea de echilibru, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \overline{y}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \overline{z}$. În cele ce urmează vom demonstra acest lucru.

Dacă $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix}$ este starea de echilibru, atunci $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix}$, deci

$$\begin{cases} \overline{x} &= 0,7\overline{x} + 0,1\overline{y} + 0,1\overline{z} \\ \overline{y} &= 0,2\overline{x} + 0,6\overline{y} + 0,1\overline{z} \\ \overline{z} &= 0,1\overline{x} + 0,3\overline{y} + 0,8\overline{z} \end{cases}.$$

În acelaşi timp, $\overline{x} + \overline{y} + \overline{z} = N$, unde N reprezintă efectivul total al populaţiei. Soluţiile sistemului sunt $\overline{x} = 0,25N$, $\overline{y} = 0,25N$ şi $\overline{z} = 0,5N$. Acest lucru arată că, în condiţiile matricei de tranziţie date (P), starea de echilibru poate lua naştere exclusiv în cazul în care un sfert din populaţie lucrează în propriul domeniu, un sfert lucrează în alt domeniu şi jumătate sunt şomeri.

Pe baza condiţiilor din enunţ putem scrie:

$$\begin{cases} x_{n+1} &= p_{11}x_n + p_{21}y_n + p_{31}z_n \\ y_{n+1} &= p_{12}x_n + p_{22}y_n + p_{32}z_n \\ z_{n+1} &= p_{13}x_n + p_{23}y_n + p_{33}z_n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N},$$

adică

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \text{ unde } P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix},$$

iar P^t este transpusa matricei P, obţinută din matricea P prin comutarea liniilor şi coloanelor acesteia. Din această egalitate rezultă

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = \left(P^t\right)^2 \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \\ z_{n-2} \end{pmatrix} = ... = \left(P^t\right)^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},$$

pentru orice $n \geq 1$. Calculând puterile matricei P^t, prin ridicări succesive la pătrat, obţinem

$$(P^t)^{32} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Aceasta ne arată, pe baza condiţiilor scrise pentru starea de echilibru, că, începând cu acest indice, şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$, $(z_n)_{n\geq 1}$ sunt constante. □

Observaţie. Merită să experimentăm, cu ajutorul unei simulări pe calculator, modelul de comportament caracteristic al sistemului pe termen lung, în cazul unei alte matrice P. Pentru aceasta trebuie să generăm matricea $M = P^t$ cu elemente nenegative, în care suma elementelor pe fiecare coloană este 1 (aceste matrice se numesc matrice stocastice). Putem observa că, pentru orice u_0 în cazul acestor matrice şirul $u_n = M^n \cdot u_0$ converge către un vector, ce descrie tocmai starea de echilibru (adică este soluţia ecuaţiei $u = M \cdot u$).

Problema 5. (model biomatematic) Să considerăm două specii de animale, ai căror indivizi se vânează reciproc (de exemplu hienele şi leii în Africa). Dacă x_n şi y_n reprezintă numărul indivizilor celor două specii după n ani, să modelăm evoluţia în timp a numărului de indivizi din cele două specii, având în vedere următoarele fenomene:

a) Naşterea indivizilor noi şi dispariţia altor indivizi duce la o modificare a efectivului total al speciei de p procente (p poate fi şi negativ, dacă rata mortalităţii este mai mare decât rata natalităţii). Să studiem situaţia în care acest procentaj este 10% în cazul hienelor şi -10% în cazul leilor.

b) Amândouă speciile ucid indivizi din cealaltă specie în număr direct proporţional cu efectivul propriu. Fie această proporţie 15% în cazul hienelor ucise de lei şi 20% în cazul leilor ucişi de hiene.

Soluţie. Evoluţia numărului indivizilor într-o specie poate fi descrisă prin următoarea recurenţă:

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 1,1x_n - 0,15y_n \\ y_{n+1} &= 0,9y_n - 0,2x_n \end{cases}$$

Aceste egalităţi, în forma matriceală:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & -0,15 \\ -0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

De aici rezultă

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \end{pmatrix} = ... = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

deci evoluţia numărului indivizilor în cele două specii depinde de funcţia $f(n) = A^n$, unde $A = \begin{pmatrix} 1,1 & -0,15 \\ -0,2 & 0,9 \end{pmatrix}$.

Fie $x_0 = 100$ numărul iniţial al hienelor şi $y_0 = 200$ numărul leilor. Pentru a studia modificarea numărului indivizilor, trebuie să calculăm matricea A^n. Deoarece $\mathrm{Tr}\, A = 2$, $\det A = 0,96$, ecuaţia caracteristică este $r^2 - 2r + 0,96 = 0$, ale cărei rădăcini sunt $r_1 = 0,8$ şi $r_2 = 1,2$, deci $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, unde

$$\begin{aligned} a_n &= c_1(0,8)^n + c_2(1,2)^n \\ b_n &= c_3(0,8)^n + c_4(1,2)^n \\ c_n &= c_5(0,8)^n + c_6(1,2)^n \\ d_n &= c_7(0,8)^n + c_8(1,2)^n \end{aligned}$$

Dacă pe baza condiţiilor iniţiale calculăm constantele c_1, c_2, ... , c_8, atunci obţinem:

$$A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{(0,8)^n + 3(1,2)^n}{4} & \dfrac{3[(0,8)^n - (1,2)^n]}{8} \\ \dfrac{(0,8)^n - (1,2)^n}{2} & \dfrac{3[(0,8)^n + (1,2)^n]}{4} \end{pmatrix}.$$

Deci

$$
\begin{aligned}
x_n &= \frac{(0,8)^n + 3(1,2)^n}{4} x_0 + \frac{3[(0,8)^n - (1,2)^n]}{8} y_0 = \\
&= \frac{1}{8}(0,8)^n(2x_0 + 3y_0) + \frac{1}{8}(1,2)^n(2x_0 - y_0) = 100(0,8)^n, \\
y_n &= \frac{(0,8)^n - (1,2)^n}{2} x_0 + \frac{3(0,8)^n + (1,2)^n}{4} y_0 = \\
&= \frac{1}{4}(0,8)^n(2x_0 + 3y_0) - \frac{1}{4}(1,2)^n(2x_0 - y_0) = 200(0,8)^n.
\end{aligned}
$$

Este evident că ambele specii sunt pe cale de dispariţie, dat fiind că efectivul lor scade în progresie geometrică. $\square$

Dacă dorim să studiem care a fost numărul indivizilor din fiecare specie cu zece ani în urmă, ştiind că efectivul actual al hienelor este $x_0 = 100$ iar numărul leilor este $y_0 = 200$, atunci putem proceda după cum urmează: în primul rând examinăm numărul indivizilor cu un an în urmă. Reprezentând prin x_{-1}, y_{-1} numărul de atunci al hienelor şi leilor vii, obţinem sistemul de ecuaţii

$$
\begin{cases} 1,1x_{-1} - 0,15y_{-1} &= 100 \\ 0,9y_{-1} - 0,2x_{-1} &= 200 \end{cases}
$$

în care necunoscutele sunt x_{-1} şi y_{-1}. În forma unei ecuaţii matriceale:

$$
\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & -0,15 \\ -0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{-1} \\ y_{-1} \end{pmatrix}, \quad \text{adică}
$$

$$
\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{-1} \\ y_{-1} \end{pmatrix},
$$

unde A este matricea de tranziţie. Dacă A este o matrice pentru care există matricea inversă A^{-1}, atunci înmulţim din stânga egalitatea de mai sus cu A^{-1} şi obţinem: $A^{-1}\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{-1} \\ y_{-1} \end{pmatrix}$.

Dacă revenim în trecut cu încă un an, obţinem:

$$
\begin{pmatrix} x_{-1} \\ y_{-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{-2} \\ y_{-2} \end{pmatrix}, \text{ de unde rezultă}
$$

$$\begin{pmatrix} x_{-2} \\ y_{-2} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_{-1} \\ y_{-1} \end{pmatrix} = A^{-1}A^{-1} \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = A^{-2} \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}.$$

În mod similar,

$$\begin{pmatrix} x_{-10} \\ y_{-10} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_{-9} \\ y_{-9} \end{pmatrix} = \left(A^{-1}\right)^2 \begin{pmatrix} x_{-8} \\ y_{-8} \end{pmatrix} = ... = \left(A^{-1}\right)^{10} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

OBSERVAŢIE. Ne putem da seama uşor că

$$(A^{-1})^m = (A^m)^{-1},$$

dacă $m \in \mathbb{N}$ şi matricea A este inversabilă. Într-adevăr, potrivit definiţiei, $A^m(A^m)^{-1} = (A^m)^{-1}A^m = I_n$. În acelaşi timp,

$$(A^{-1})^m A^m = \underbrace{A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot \ldots \cdot A^{-1}}_{m} \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{m} = I_n,$$

pentru că, datorită asociativităţii înmulţirii, înmulţirile pot fi efectuate şi dacă pornim de la mijloc. În mod similar $A^m(A^{-1})^m = I_n$ şi pe baza unicităţii matricei inverse $(A^{-1})^m = (A^m)^{-1}$.

DEFINIŢIE 10.10. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este o matrice inversabilă, prin definiţie puterile negative ale matricei A sunt:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = (A^n)^{-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

5. Sisteme de ecuaţii

Să studiem dacă, în cazul problemei 4. şi a unei matrice A este posibil echilibrul structural stabil, adică o stare în care proporţia λ între efectivul leilor şi al hienelor este constantă, nu se modifică de la un an la altul. Condiţia stabilităţii structurale pentru un $\lambda \in \mathbb{R}$ dat este îndeplinită dacă are loc egalitatea $u_{n+1} = \lambda u_n$, unde $u_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ şi $u_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$. Dacă $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ este un vector ce determină o stare structural stabilă, atunci obţinem ecuaţia matriceală $\lambda u = Au$. Stabilitatea structurală este posibilă numai pentru valorile lui $\lambda \in \mathbb{R}$, pentru care există u astfel încât are loc egalitatea $\lambda u = Au$. Aceste valori λ se numesc valorile proprii ale matricei A, iar vectorii u se numesc vectorii proprii ai matricei A. Dacă scriem egalitatea matriceală $\lambda u = Au$ sub forma $(A - \lambda I_n)u = O_2$, obţinem sistemul de ecuaţii liniar şi omogen

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x & + & a_{12}y & = & 0 \\ a_{21}x & + & (a_{22}-\lambda)y & = & 0 \end{cases}$$

Vom ajunge la aceleaşi noţiuni şi în cazul în care punem întrebări similare în legătură cu modelul pieţei forţelor de muncă sau legat de transformările geometrice. Toate aceste întrebări duc la noţiunile de valori proprii şi vectori proprii, respectiv ridică necesitatea rezolvării unor sisteme de ecuaţii liniare omogene sau neomogene.

OBSERVAŢIE. Putem vedea că problema cea mai firească, cu care merită să începem algebra liniară, este studiul sistemelor liniare.

5.1. Studiul rezolvării sistemelor de ecuaţii liniare. După cum am văzut în cazul modelului forţei de muncă, respectiv al modelului biomatematic, condiţia stabilităţii pieţei forţelor de muncă a fost dată de soluţia sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} -0,3\overline{x}+0,1\overline{y}+0,1\overline{z} & = & 0 \\ -0,3\overline{x}+0,1\overline{y}+0,1\overline{z} & = & 0 \\ -0,3\overline{x}+0,1\overline{y}+0,1\overline{z} & = & 0 \end{cases},$$

iar numărul structural stabil al hienelor şi leilor, de soluţia sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} (1,1-\lambda)x-0,15y & = & 0 \\ -0,2x+(0,9-\lambda)y & = & 0 \end{cases}$$

după determinarea valorilor λ corespunzătoare. Numeroase alte probleme practice duc la sisteme de ecuaţii liniare, de aceea avem nevoie de o metodă adecvată pentru rezolvarea acestora, independent de numărul necunoscutelor şi al ecuaţiilor.

DEFINIŢIE 10.11. Sistemul de ecuaţii care cuprinde ecuaţii de forma $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=b$, unde $x_i,\ i=\overline{1,n}$ sunt necunoscutele şi $a_i\in\mathbb{C}$, respectiv $b\in\mathbb{C}$ sunt numere fixate, se numeşte sistem de ecuaţii liniar.

Să considerăm sistemul

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ ... & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{nn}x_n & = & b_m \end{cases},$$

să-i asociem matricea extinsă

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

şi să examinăm care sunt operaţiile în cursul rezolvării sistemului de ecuaţii, ce pot fi efectuate astfel încât să obţinem un sistem echivalent cu sistemul iniţial (două sisteme sunt echivalente dacă mulţimile soluţiilor celor două sisteme sunt identice).

(1) Oricare din ecuaţiile sistemului de ecuaţii poate fi înmulţit sau împărţit cu un număr nenul.
(2) Ordinea în care sunt scrise ecuaţiile sistemului poate fi modificată.
(3) O ecuaţie poate fi înmulţită cu un număr şi poate fi adunată cu o altă ecuaţie.

În cursul rezolvării sistemului de ecuaţii, întotdeauna transformăm acest sistem într-un sistem echivalent cu el însuşi, pentru ca, în final, soluţia sistemului să poată fi citită cu uşurinţă. Executăm fiecare pas şi pe matricea extinsă, iar matricele obţinute se numesc echivalente cu cea iniţială.

Definiţie 10.12. În cazul unei matrice date, prin transformare elementară a liniilor ei înţelegem transformările care transformă matricea iniţială într-o matrice asociată sistemului de ecuaţii echivalent cu sistemul de ecuaţii liniare ce poate fi asociat matricei iniţiale. Transformările elementare ale liniilor matricei sunt următoarele:

a) înmulţirea sau împărţirea unei linii din matrice cu un număr nenul;
b) schimbarea a două linii între ele;

c) adunarea unei linii înmulţite cu λ cu o altă linie.

În cele ce urmează numim două matrice echivalente dacă una din ele poate fi obţinută din cealaltă cu ajutorul transformărilor elementare ale liniilor ei. Acest lucru este notat prin simbolul $A \sim B$.

OBSERVAŢIE. Dacă B poate fi obţinută din A cu ajutorul transformărilor elementare ale liniilor, atunci şi A poate fi obţinută din B cu ajutorul transformărilor elementare ale liniilor, deoarece aceste transformări sunt inversabile.

1. Să examinăm ce reprezintă, în cazul sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ x + 2y - z = 1 \\ x - 6y + 3z = 0 \end{cases},$$

transformările elementare ale liniilor aplicate matricei extinse. În cele ce urmează vom efectua în paralel aceste modificări, pentru sistemul de ecuaţii şi pentru matricea extinsă asociată acestuia:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ x + 2y - z = 1 \\ x - 6y + 3z = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Împărţim prima linie cu 3.

$$\begin{cases} x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = \frac{2}{3} \\ x + 2y - z = 1 \\ x - 6y + 3z = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Scădem elementele primei linii din elementele corespunzătoare ale liniei a doua ($S_2 - S_1 \to S_2$) apoi din elementele corespunzătoare ale liniei a treia ($S_3 - S_1 \to S_3$).

$$\begin{cases} x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = \frac{2}{3} \\ \frac{8}{3}y - \frac{4}{3}z = \frac{1}{3} \\ -\frac{16}{3}y + \frac{8}{3}z = -\frac{2}{3} \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{16}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

Împărţim a doua linie cu $\frac{8}{3}$.

$$\begin{cases} x & - & \frac{2}{3}y & + & \frac{1}{3}z & = & \frac{2}{3} \\ & & y & - & \frac{1}{2}z & = & \frac{1}{8} \\ & - & \frac{16}{3}y & + & \frac{8}{3}z & = & -\frac{2}{3} \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{16}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

Împărţim a doua ecuaţie cu $\frac{2}{3}$, după care o înmulţim cu $\frac{16}{3}$ şi o adunăm cu prima, respectiv cu a treia ($\frac{2}{3}S_2 + S_1 \to S_1$, $\frac{16}{3}S_2 + S_3 \to S_3$).

$$\begin{cases} x & & & & = & \frac{3}{4} \\ & y & - & \frac{1}{2}z & = & \frac{1}{8} \\ & & & 0 & = & 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Deoarece ultima ecuaţie este adevărată pentru orice z, de aceea $z = \lambda$, $x = \frac{3}{4}$ şi $y = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\lambda$. Sistemul are, deci, un număr infinit de soluţii şi toate aceste soluţii pot fi scrise sub forma funcţiei unui parametru.

2. Să rezolvăm sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x & - & y & - & z & = & 2 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ 3x & + & 3y & - & 7z & = & 0 \end{cases}$ doar prin descrierea transformărilor liniilor matricei.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -7 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} S_2 - S_1 \to S_2 \\ \sim \\ S_3 - 3S_1 \to S_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & -4 & -6 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & -4 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{c} S_2 : 3 \\ \sim \\ S_3 - 2S_2 \to S_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right)$$

Este evident că nu mai sunt necesare alte transformări, deoarece ultimei linii îi corespunde ecuaţia

$$0x + 0y + 0z = -10.$$

Acest lucru nu este posibil, deci sistemul iniţial este incompatibil.

3. Să rezolvăm sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x - y - z = 2 \\ x + y - 2z = 4 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$$

prin transformarea matricei în matrice unitate.

DEMONSTRAŢIE. Lucrăm cu transformări ale liniilor:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} S_2 - S_1 \to S_2 \\ \sim \\ S_3 - 2S_1 \to S_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} S_2 : 2 \\ \sim \\ S_3 - S_2 \to S_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} S_3 : 4 \\ \sim \\ S_1 + S_2 \to S_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} \end{array}\right) \begin{array}{c} S_2 + \frac{1}{2}S_3 \to S_2 \\ \sim \\ S_1 + \frac{3}{2}S_3 \to S_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} \end{array}\right),$$

ceea ce, în formă de ecuaţii, înseamnă egalităţile $x = \frac{9}{8}$, $y = \frac{3}{8}$ şi $z = -\frac{5}{4}$. Aceasta este tocmai soluţia problemei. □

În exemplul de mai sus am putut vedea că sistemul de ecuaţii se consideră rezolvat dacă am reuşit să obţinem o matrice unitate în locul matricei iniţiale, bineînţeles dacă acest lucru este posibil. Ce înseamnă realizarea acestei stări la nivelul operaţiilor cu matrice, în cazul în care este posibilă? Pentru a vedea mai bine, să considerăm câţiva termeni liberi arbitrari în cadrul sistemului de ecuaţii de mai sus:

$$\begin{cases} x - y - z = b_1 \\ x + y - 2z = b_2 \\ 2x + z = b_3 \end{cases}$$

Scris sub forma unei operaţii cu matrice, sistemul de ecuaţii reprezintă ecuaţia $AX = B$, unde A reprezintă matricea sistemului de ecuaţii:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Rezolvarea sistemului de ecuaţii înseamnă, de fapt, rezolvarea ecuaţiei matriceale $AX = B$. Efectuăm pe rând transformările necesare ale liniilor:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & b_1 \\ 1 & 1 & -2 & b_2 \\ 2 & 0 & 1 & b_3 \end{array}\right) \begin{array}{c} S_2 - S_1 \to S_2 \\ \sim \\ S_3 - 2S_1 \to S_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & b_1 \\ 0 & 2 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 2 & 3 & b_3 - 2b_1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & b_1 \\ 0 & 2 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 2 & 3 & b_3 - 2b_1 \end{array}\right) \begin{array}{c} S_2 : 2 \\ \sim \\ S_3 - S_2 \to S_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{b_2 - b_1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -b_1 - b_2 + b_3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{b_2 - b_1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -b_1 - b_2 + b_3 \end{array}\right) \begin{array}{c} S_3 : 4 \\ \sim \\ S_1 + S_2 \to S_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{b_1 + b_2}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{b_2 - b_1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-b_1 - b_2 + b_3}{4} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{b_1 + b_2}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{b_2 - b_1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-b_1 - b_2 + b_3}{4} \end{array}\right) \begin{array}{c} S_2 + \frac{1}{2}S_3 \to S_2 \\ \sim \\ S_1 + \frac{3}{2}S_3 \to S_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8}b_1 + \frac{1}{8}b_2 + \frac{3}{8}b_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{8}b_1 + \frac{3}{8}b_2 + \frac{1}{8}b_3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4}b_1 - \frac{1}{4}b_2 + \frac{1}{4}b_3 \end{array}\right)$$

Reconstituind sub forma unui sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{8}b_1 + \frac{1}{8}b_2 + \frac{3}{8}b_3 \\ y = -\frac{5}{8}b_1 + \frac{3}{8}b_2 + \frac{1}{8}b_3 \\ z = -\frac{1}{4}b_1 - \frac{1}{4}b_2 + \frac{1}{4}b_3 \end{cases}$$

În acest mod de scriere, coeficienţii lui b_1, b_2, b_3 sunt elementele matricei inverse a matricei A, iar raţionamentul de mai sus indică faptul că, dacă prin transformările $T_1, T_2, ..., T_q$ obţinem din A matricea unitate, atunci cu ajutorul aceloraşi transformări obţinem A^{-1} din I_n. Poate că ne putem da seama mai uşor, dacă observăm că orice transformare elementară a liniilor înseamnă o înmulţire cu o matrice inversabilă. Astfel, dacă notăm prin $E_1, E_2, ..., E_q$ matricele asociate celor q transformări prin care obţinem din A I_n, atunci putem scrie că

$$E_q E_{q-1} \cdot \ldots \cdot E_1 A = I_n$$

şi, prin urmare:

$$A^{-1} = E_q E_{q-1} \cdot \ldots \cdot E_1 = E_q E_{q-1} \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot I_n.$$

Deci, într-adevăr, dacă prin transformările $T_1 \to T_2 \to \ldots \to T_q$ obţinem din A matricea I_n, atunci, cu ajutorul aceloraşi transformări, obţinem din I_n matricea A^{-1}.

6. Observaţii didactice

• În cele de mai sus am schiţat doar unul din modurile posibile în care poate fi structurată materia de predat. În cursul realizării concrete trebuie să avem în vedere anumite activităţi prin care putem construi proprietăţile şi introduce noţiunile. Aceste activităţi pot fi chiar şi discuţii bazate pe întrebări ridicate în comun, dirijate, însă este mult mai eficient să propunem studierea mai multor probleme în paralel, în grupuri mici, după care imaginea de ansamblu va lua naştere prin schimbul de informaţii între grupuri. Această metodă este deosebit de utilă când examinăm proprietăţile operaţiilor.

• Merită să descompunem proprietăţile cât mai mult. De exemplu, în cursul căutării algoritmului de rezolvare a sistemelor şi a celui referitor la calculul matricei inverse, propunem următoarele activităţi:

- să clarificăm noţiunea de matrice inversă cu ajutorul unei probleme concrete;
- să organizăm una sau două activităţi referitoare la rezolvarea sistemului cu ajutorul transformărilor;
- o activitate dedicată identificării transformărilor şi a matricelor asociate acestora;
- recapitularea experienţelor şi experimentarea algoritmului;
- exerciţii.

• Merită să dedicăm $4-5$ activităţi doar pentru ridicarea la putere a matricelor: o activitate introductivă, în cursul căreia, cu ajutorul problemelor de modelare, ajungem la problema în sine. O activitate dedicată experimentării, una dedicată ridicării la putere a matricelor 2×2, în sfârşit alte două activităţi pentru ridicarea la putere a matricelor de alte dimensiuni.

• Introducerea determinanţilor, precum şi aplicarea regulii lui Cramer este bine să o începem doar după clarificarea noţiunilor şi a algoritmilor de bază. În materia actuală detaliile calculului şi introducerea noţiunilor sunt amestecate în aşa măsură încât problematica întregului capitol devine neclară pentru mulţi dintre elevi.

CAPITOLUL XI
ÎN LUMEA PROBABILITĂŢILOR

În acest capitol vom aborda introducerea noţiunii de probabilitate folosind metoda predării bazate pe curiozitatea elevilor. Recomandăm predarea acestui capitol elevilor clasei a X-a în 6 ore. Pe parcursul învăţării calculului probabilităţiilor ne propunem dezvoltarea următoarelor competenţe: interpretarea situaţiilor zilnice în care intervin întâmplarea şi ambiguitatea, evaluarea enunţurilor de probabilitate, formarea unei gândiri probabilistice, diferită de logica obişnuită, dezvoltarea gândirii combinatorice şi a tehnicilor de numerare.

1. Ai trişat vreodată la teză?

Cu această întrebare punem elevul într-o situaţie delicată. Dacă răspunde cinstit, s-ar putea să suporte consecinţele, de aceea poate cel mai bine n-ar răspunde deloc. Ca să scape din situaţia în care se află, i-am putea propune să dea cu zarul. De ce să nu lase răspunsul la voia întâmplării? Adevăr sau întâmplare? Să lăsăm zarul să decidă ce răspunde elevul, răspuns determinat de următoarele reguli:

(i) Dacă în urma aruncării obţine 1 sau 2, trebuie să răspundă „da" indiferent de adevăr.

(ii) Dacă în urma aruncării obţine 3 sau 4, trebuie să răspundă „nu" indiferent de adevăr.

(iii) Dacă în urma aruncării obţine 5 sau 6, trebuie să spună adevărul.

Rezultatul aruncării poate fi văzut numai de elev. Nimeni nu va şti dacă a spus adevărul sau a minţit. Dacă întrebăm un număr mare de elevi, din răspunsurile lor vom putea afla, oare, câţi dintre ei au trişat la teză?

Pentru a găsi răspunsul, trebuie să facem cunoştinţă cu principiile fundamentale ale probabilităţilor.

2. Introducerea noţiunii de probabilitate

Am aruncat de 1000 de ori un zar obişnuit şi am urmărit de câte ori am obţinut un număr par. Rezultatele acestui experiment sunt cuprinse în tabelul de mai jos:

Numărul aruncărilor	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
Numere PARE	44	94	139	191	241	289	340	399	450	507
Frecvenţă relativă	0,44	0,47	0,463	0,478	0,482	0,482	0,486	0,499	0,5	0,507

Dacă numărul aruncărilor este destul de mare, atunci frecvenţa relativă a apariţiei numerelor pare că oscilează în jurul unei valori constante, această valoare reprezentând probabilitatea aruncării cu zarul a unui număr par, care în cazul nostru este $\frac{1}{2}$.

Observaţie. Merită să analizăm mai multe cazuri asemănătoare, chiar şi cu ajutorul numerelor aleatoare generate pe calculator[7]. Aproximaţia bazată pe simulare permite calcularea frecvenţei relative şi în cazul în care numărul posibilităţilor este infinit. Astfel vom putea examina şi probleme mai complicate, de exemplu: de ce se află cercurile tablei de „darts”, tocmai acolo unde sunt? Sau cum trebuie să delimităm 5 regiuni pe o ţintă circulară astfel ca toate regiunile sa fie la fel de greu de nimerit?

Prin aceasta am executat un experiment de probabilitate, am repetat acelaşi experiment în condiţii identice. Rezultatul posibil al unui experiment se numeşte eveniment. Probabilitatea unui eveniment examinat poate fi interpretat pe baza tabelelor de frecvenţă, în felul următor:

Definiţie 11.1. Dacă pe parcursul unui număr de n experimente evenimentul A are loc de k ori, atunci raportul $\frac{k}{n}$ reprezintă frecvenţa relativă a evenimentului A. Numărul $P(A)$ în jurul căruia oscilează frecvenţa relativă a unui eveniment, când n tinde la infinit, reprezintă probabilitatea evenimentului respectiv.

[7]Calculatoarele nu generează în realitate numere aleatoare, pentru că ele generează numerele pe baza unui algoritm, dar numerele generate corespund scopului nostru.

Această definiţie este potrivită pentru a obţine o aproximare a probabilităţii unui eveniment, însă pentru calculul valorii exacte nu este deloc potrivită. Este adevărat că, efectuând un număr cât mai mare de experimente, obţinem o aproximare din ce în ce mai bună, însă nu obţinem valoarea exactă. De unde putem şti dacă în primul tabel frecvenţele oscilează în jurul valorii $0,5$ şi nu în jurul valorii $0,50001$? Am putea decide acest lucru numai după un număr imens de experimente şi nici atunci nu am putea fi siguri. Din acest motiv avem nevoie şi de o altă definiţie.

Un experiment asemănător putem efectua cu o cutie de chibrituri. Pe feţele cutiei scriem câte un număr de la 1 la 6, astfel încât numerele 1 şi 2 să fie scrise pe feţele cu suprafaţa cea mai mică, 3 şi 4 pe feţele de arie mijlocie, iar 5 şi 6 pe feţele cu aria cea mai mare. Aşezăm cutia de chibrituri pe marginea mesei, îi dăm un bobârnac ca să zboare în sus, repetăm acest lucru de 50 de ori şi notăm faţa pe care a căzut cutia (acestea sunt evenimentele posibile). Experimentul trebuie efectuat cu o cutie plină, cea goală zboară prea departe.

FIGURA 11.1. Aruncarea în sus a cutiei de chibrituri

OBSERVAŢIE. Este bine să efectuăm acest experiment în cadrul unei activităţi în grupuri mici şi să întocmim mai multe tabele. Dacă cutiile au dimensiuni aproximativ identice (de exemplu cutii nou-nouţe de acelaşi tip), atunci putem calcula frecvenţa relativă şi din rezultatele centralizate.

Un rezultat posibil:

Faţa cea mai mare	Faţa mijlocie	Faţa cea mai mică
44	5	1

În funcţie de problema examinată putem întocmi tabele de mai multe feluri. Putem să urmărim fiecare faţă separat. În acest caz tabelul va arăta astfel (noi vom întocmi toate tabelele pentru 50 de aruncări, dar pentru a sesiza stabilitatea frecvenţei relative, avem nevoie de mult mai multe aruncări).

Numărul feţei de deasupra	1	2	3	4	5	6
Frecvenţa						

Dacă urmărim doar de câte ori cade cutia pe o faţă mică, mijlocie sau mare, tabelul nostru se va schimba în felul următor:

Latura de deasupra	Cea mai mare	Cea mijlocie	Cea mai mică
Frecvenţa			

În mod firesc putem analiza altceva, de exemplu dacă faţa cu numărul 4 va fi deasupra. În acest caz tabelul va arăta astfel:

Faţa de deasupra	Faţa cu nr. 4	Altă faţă
Frecvenţa		

Este clar că experimentul este acelaşi (aruncăm cutia în sus), dar la acest eveniment putem asocia diferite sisteme de evenimente. În primul caz, evenimentele sunt: cutia cade pe faţa cu numărul 1, pe faţa numărul 2 şi aşa mai departe; în al doilea caz, evenimentele vor fi: cutia cade pe faţa cea mai mică, pe cea mijlocie sau pe cea mai mare; iar în al treilea caz: cutia cade pe faţa cu numărul 4 sau nu cade pe faţa cu numărul patru. Bineînţeles putem observa şi faptul că, dacă am întocmit primul tabel, atunci pe baza acestuia vom putea completa ulterior celelalte două tabele, dar dacă am întocmit numai tabelul al doilea sau al treilea, atunci celelalte două tabele nu pot fi completate ulterior. Din această observaţie rezultă că, din evenimentele urmărite în primul tabel, pot fi produse celelalte evenimente. De exemplu, cazul în care faţa cea mai mare a cutiei va fi sus poate fi descompus în două evenimente mai simple: apariţia feţei cu numărul 5 şi a feţei cu numărul 6. Este evidentă importanţa deosebită a evenimentelor cele mai simple, care nu pot fi descompuse şi care se numesc evenimente elementare, iar celelalte se numesc evenimente compuse.

Se vede că vom avea nevoie de descompunerea evenimentelor compuse în evenimente mai simple, pentru a putea calcula, pe baza acestei descompuneri, probabilitatea evenimentelor, având în vedere probabilitatea evenimentelor mai simple.

DEFINIŢIE 11.2. **Evenimentele elementare** sunt evenimente care nu pot fi descompuse. **Evenimentele compuse** pot fi descompuse în evenimente elementare distincte.

În cazul problemei cutiei de chibrituri, evenimentele cuprinse în tabelul 2 sunt evenimente elementare, iar toate celelalte sunt evenimente compuse. Analog, în cazul unui zar evenimentele elementare sunt: A_i–faţa pe care apare cifra i este deasupra, unde $1 \leq i \leq 6$. În cazul tabelelor întocmite sistemele de evenimente au o însuşire comună: am numărat toate rezultatele posibile şi fiecare rezultat posibil a fost încadrat la un singur eveniment. Aceste sisteme de evenimente se numesc sisteme de evenimente complete.

DEFINIŢIE 11.3. Dacă în cazul tuturor rezultatelor posibile ale unui experiment se îndeplineşte exact un eveniment, spunem că evenimentele respective constituie un **sistem complet de evenimente**.

Dacă orice eveniment al unui sistem complet de evenimente se produce cu aceeaşi probabilitate, atunci sistemul se numeşte **câmp clasic de probabilitate**. În cazul cutiei de chibrituri, fiecărui tabel din cele trei tabele i se poate ataşa un sistem complet de evenimente, care nu este câmp clasic în niciunul dintre cazuri. În acelaşi timp, în cazul zarului, mulţimile $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}\}$, $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\}$ şi $\{\{4\},\{1,2,3,5,6\}\}$ conţin câte un sistem complet de evenimente, dintre care primele două pot fi considerate clasice. Acesta cuprinde practic presupunerea implicită a unui cub perfect, ale cărui feţe apar fiecare cu aceeaşi probabilitate. Dacă un sistem de evenimente complet este clasic şi este compus din n evenimente, atunci probabilitatea evenimentelor elementare este $\frac{1}{n}$; astfel, dacă un eveniment A poate fi descompus ca o reuniune a k evenimente elementare, atunci probabilitatea lui va fi $\frac{k}{n}$. Acesta este de fapt modelul Laplace al probabilităţii clasice, formulat în felul următor: „Dacă dorim să determinăm probabilitatea unui eveniment, trebuie să căutăm toate cazurile care determină apariţia evenimentului respectiv. Acestea sunt cazurile favorabile. Probabilitatea este egală cu raportul dintre numărul cazurilor favorabile şi numărul total de cazuri.” Într-o formulare mai nouă:

Definiţie 11.4. Într-un câmp clasic de probabilitate pentru fiecare eveniment A

$$P(A) = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul total al cazurilor}}.$$

Dacă experimentul constă în extragerea primului număr câştigător la o tragere loto (unde se extrag cinci din numerele $1, 2, \ldots, 90$), atunci evenimentele

- A : Se extrage un număr între 1 şi 30 ($1 \leq S \leq 30$, unde S este numărul extras)
- B : Se extrage un număr între 30 şi 60 ($30 \leq S \leq 60$)
- C : Se extrage un număr între 60 şi 90 ($60 \leq S \leq 90$)

nu alcătuiesc un sistem complet de evenimente, deoarece în cazul extragerii numerelor 30 şi 60 au loc două evenimente. Dacă evenimentul E_i în cazul fiecărui $1 \leq i \leq 90$ înseamnă că s-a extras bila numărul i, atunci $E_1, E_2, \ldots, E_{90}$ alcătuiesc un câmp clasic de probabilitate şi în acest câmp

$$P(B) = P(C) = \frac{31}{90}, \quad P(A) = \frac{30}{90}.$$

Să analizăm, în cazul aruncării a două monede, care este probabilitatea ca amândouă monedele să ne arate aceeaşi faţă, de exemplu cap? Scriem toate rezultatele posibile, apoi aruncăm monedele de 20 de ori şi notăm rezultatele. De exemplu, rezultatul posibil să fie notat cu CC, CP, PP. Înainte de a executa experimentul, să facem un pronostic. Cele trei evenimente alcătuiesc un sistem complet de evenimente, dar nu formează un câmp de probabilitate clasic, deoarece rezultatele nu apar cu aceeaşi probabilitate (acest lucru se poate observa deja în cazul în care aruncăm de 20 de ori). Din acest motiv, este bine să analizăm evenimente elementare care alcătuiesc un câmp de probabilitate clasic. Să presupunem că vom folosi două monede diferite (una de 50 de bani şi una de 10 bani). Astfel, rezultatele posibile vor fi:

10 bani	50 bani	
C	C	CC
C	P	CP
P	C	PC
P	P	PP

În acest caz, cele patru evenimente au o probabilitate identică şi alcătuiesc un câmp de evenimente complet, deci putem aplica formula lui Laplace. Astfel, probabilitatea ca, în urma aruncării, pe amândouă monedele să obţinem cap este $\frac{1}{4}$, iar probabilitatea evenimentului A de a obţine în experimentul de mai sus două feţe de acelaşi tip (pajură sau cap) este

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

În acelaşi timp, probabilitatea evenimentului B de a avea în experimentul de mai sus două feţe diferite este

$$P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Analizând acest experiment, observăm că se pot produce două evenimente: putem avea de două ori cap sau pajură, acesta fiind evenimentul A, sau putem avea două feţe diferite (un cap şi o pajură), acesta fiind evenimentul B. Totodată evenimentele A şi B nu pot avea loc în acelaşi timp, deci se exclud reciproc. În acest caz, vorbim de evenimente complementare. Evenimentul complementar evenimentului A se notează cu $\overline{A}$. Putem constata că suma probabilităţilor a două evenimente complementare este întotdeauna egală cu 1.

Care este probabilitatea apariţiei capului sau pajurii în experimentul de mai sus? Notăm acest eveniment cu C. Acesta este evenimentul sigur, deoarece rezultatul aruncării poate să fie doar cap sau pajură, aşadar

$$P(C) = \frac{4}{4} = 1.$$

Probabilitate mai mare nu poate exista, deoarece frecvenţa relativă a producerii evenimentelor nu poate fi mai mare de 1. Probabilitatea unui eveniment sigur este 1.

Care este probabilitatea apariţiei a trei feţe cap din două aruncări? Acesta este un **eveniment imposibil**, deoarece niciunul dintre rezultatele experimentului nu este favorabil producerii lui. Evenimentul imposibil este notat prin simbolul $\emptyset$. Probabilitatea acestui eveniment este 0. În general, în cazul unui experiment, complementarul unui eveniment sigur este întotdeauna un eveniment imposibil.

Am văzut că evenimentele sunt de fapt submulţimi ale câmpului de evenimente, deci în cazul evenimentelor vom efectua operaţii similare cu cele de la mulţimi.

DEFINIŢIE 11.5. **Reuniunea** (suma) evenimentelor arbitrare A şi B (notat $A \cup B$) conţine toate rezultatele posibile, care se produc dacă are loc cel puţin unul dintre cele două evenimente.

DEFINIŢIE 11.6. **Intersecţia** (produsul) evenimentelor arbitrare A şi B (notat cu $A \cap B$) conţine toate rezultatele posibile, care au loc dacă se produce atât evenimentul A cât şi evenimentul B.

DEFINIŢIE 11.7. Evenimentele A şi B **se exclud reciproc**, dacă nu pot avea loc în acelaşi timp, adică $A \cap B = \emptyset$.

Fie A evenimentul în care aruncăm cu zarul un număr mai mic sau egal cu 3, iar B evenimentul în care rezultatul aruncării va fi cel puţin 5. Evenimentul C, care se produce dacă are loc fie evenimentul A, fie evenimentul B, este reuniunea evenimentelor A şi B, reprezentată prin $A \cup B$.

$$A \cup B = \{1, 2, 3\} \cup \{5, 6\} = \{1, 2, 3, 5, 6\}. \tag{39}$$

Astfel $P(A) = \frac{3}{6}$, $P(B) = \frac{2}{6}$ şi $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$. Observăm că, dacă A şi B nu pot avea loc simultan, atunci $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Fie D evenimentul în care aruncăm cu zarul un număr par, iar E evenimentul în care aruncăm cu zarul un număr divizibil cu 3. În acest caz, $P(D) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. În acelaşi timp, aruncările favorabile evenimentului $D \cup E$ sunt $2, 3, 4, 6$, adică $P(D \cup E) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Pe parcursul numărării cazurilor favorabile pentru $D \cup E$ am observat că acele cazuri care sunt favorabile pentru amândouă evenimentele trebuie numărate numai o singură dată. Astfel, în general

$$P(D \cup E) = P(D) + P(E) - P(D \cap E).$$

Aceasta corespunde principiului includerii şi excluderii

$$|D \cup E| = |D| + |E| - |D \cap E|$$

referitoare la cardinalul mulţimilor. Pe baza acestei formule, putem obţine o formulă şi pentru probabilitatea reuniunii unei mulţimi finite de evenimente.

Problemă rezolvată

Într-un castron sunt trei fructe diferite: un măr, o pară şi o prună. Fie A evenimentul în care mărul este viermănos, B evenimentul în care para este viermănoasă, iar C evenimentul în care pruna este viermănoasă. Cu ajutorul evenimentelor A, B, C şi a operaţiilor cu evenimente să descriem evenimentele de mai jos:

a) toate cele trei fructe sunt viermănoase,
b) niciun fruct nu este viermănos,
c) cel puţin unul dintre fructe este viermănos,
d) exact un fruct este viermănos,
e) există un fruct care nu este viermănos.

REZOLVAREA PROPUSĂ A PROBLEMEI. **a)** Cele trei fructe pot fi toate viermănoase, dacă cele trei evenimente au loc în acelaşi timp: $A \cap B \cap C$.

b) Nici un fruct nu este viermănos, dacă complementarele celor trei evenimente au loc în acelaşi timp: $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.

c) Putem avea cel puţin un fruct viermănos, în cazul în care mărul are viermi sau para are viermi sau pruna are viermi: $A \cup B \cup C$.

d) Avem exact un fruct viermănos, dacă mărul este viermănos şi celelalte două nu sunt, ori para este viermănoasă şi celelalte două nu sunt, ori pruna este viermănoasă şi celelalte două nu sunt:

$$(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C).$$

e) Există un fruct care nu este viermănos, în cazul în care ori mărul, ori para, ori pruna nu are viermi: $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$. □

3. Noţiunea de probabilitate condiţionată

Să încercăm să construim un model asemănător problemei descrise în capitolul introductiv. Să presupunem că avem două cutii. Prima

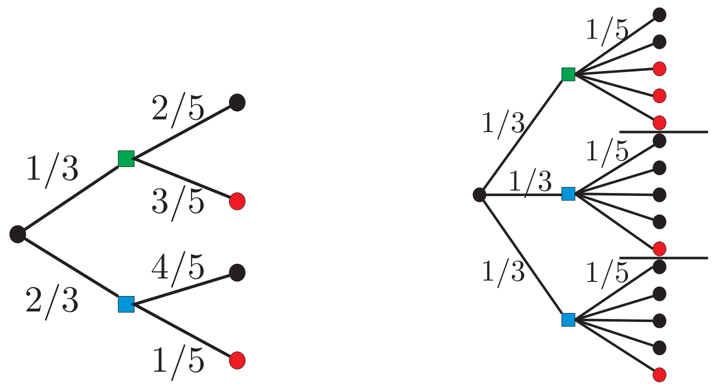


FIGURA 11.2. Reprezentări echivalente

cutie conţine 3 bile roşii şi 2 negre, a doua cutie conţine 1 bilă roşie şi 4 bile negre. Experimentul constă în aruncarea unui zar şi scoaterea unei bile din cutie pe baza rezultatului aruncării. Dacă rezultatul aruncării este divizibil cu 3, atunci vom scoate bila din prima cutie, în celelalte cazuri o vom scoate din cutia cealaltă. Care este probabilitatea scoaterii unei bile roşii? Să notăm cu E_1 evenimentul care are loc tocmai atunci când rezultatul aruncării este divizibil cu 3 şi cu E_2 evenimentul complementar (referitor la aruncarea cu zarul). Este evident că $P(E_1) = \frac{1}{3}$ şi $P(E_2) = \frac{2}{3}$. Dacă aruncarea a avut loc, în funcţie de rezultat va trebui să analizăm evenimente diferite. Pe grafurile de mai sus am prezentat aceste posibilităţi. În primul graf am ilustrat alegerile şi probabilităţile lor. Pe acest graf nu putem aplica definiţia probabilităţii clasice, deoarece muchiile aflate la acelaşi nivel nu au aceeaşi probabilitate. Din acest motiv, transformăm graful astfel încât să apară evenimente elementare cu probabilităţi identice. Astfel am obţinut graful al doilea. Pe baza lui, probabilitatea scoaterii bilei roşii este $P(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, deoarece există 15 cazuri posibile şi 5 cazuri favorabile. Această probabilitate se calculează în felul următor:

$$P(A) = \frac{3}{15} + 2 \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}.$$

Adică în graful iniţial înmulţim probabilităţile de-a lungul muchiilor corespunzătoare fiecărui punct roşu, după care le adunăm.

Să formulăm afirmaţiile anterioare şi în mod general. Dacă scoaterea unei bile roşii constituie evenimentul A, atunci pe baza conţinutului cutiilor cunoaştem doar probabilitatea evenimentului în care scoatem o bilă roşie dacă E_1 a avut loc (acesta este $3/5$) sau dacă E_2 a avut loc (acesta este $1/5$). Aceste probabilităţi se numesc **probabilităţi condiţionate**. Ele ne indică probabilitatea lui A, dacă ştim că E_1, sau E_2 a avut loc. În general notăm cu $P(A|X)$ probabilitatea condiţionată a evenimentului A referitoare la evenimentul X.

Folosind aceste notaţii, în cazul problemei de mai sus avem $P(A|E_1) = \frac{3}{5}$ şi $P(A|E_2) = \frac{1}{5}$. Pe baza grafului al doilea se vede că $P(A|E_1)$ apare practic ca un raport dintre numărul cazurilor favorabile atât pentru A cât şi pentru E_1 şi numărul cazurilor favorabile pentru E_1 (deoarece, dacă E_1 a avut loc, atunci trebuie să analizăm numai cazurile favorabile lui). Această observaţie poate fi scrisă sub forma raportului dintre probabilitatea lui $A \cap E_1$ şi probabilitatea lui E_1:

$$P(A|E_1) = \frac{3}{5} = \frac{\frac{3}{15}}{\frac{5}{15}} = \frac{P(A \cap E_1)}{P(E_1)}.$$

Definiţie 11.8. Dacă A şi X sunt două evenimente, atunci

$$P(A|X) = \frac{P(A \cap E_1)}{P(E_1)}.$$

Folosind noţiunile introduse, putem vedea că în problema anterioară am calculat probabilitatea evenimentului A pe baza relaţiei

$$P(A) = P(A|E_1)P(E_1) + P(A|E_2)P(E_2).$$

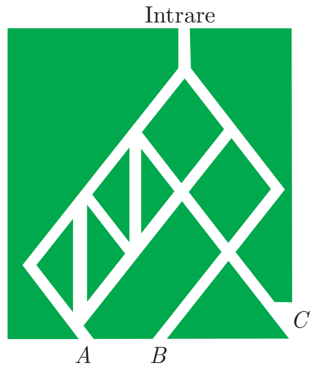
Putem scrie o relaţie asemănătoare şi în cazul în care, în graful iniţial, la prima ramificaţie avem mai multe posibilităţi. Este important ca evenimentele $E_1, E_2, \ldots, E_n$ care apar aici să formeze un sistem complet de evenimente (pentru ca între ramurile arborelui să nu existe suprapuneri). Astfel, este valabilă următoarea teoremă (teorema probabilităţii totale):

Teoremă 11.9. *Dacă $E_1, E_2, \ldots, E_n$ este un sistem complet de evenimente şi A este un eveniment oarecare, atunci*

$$P(A) = P(A|E_1)P(E_1) + P(A|E_2)P(E_2) + \ldots + P(A|E_n)P(E_n).$$

Problemă rezolvată

În figura alăturată putem vedea planul unui labirint. Petrică intră în labirint şi în fiecare punct de ramificaţie alege o direcţie arbitrară, astfel încât să se depărteze de intrare. Sora şi părinţii lui îl aşteaptă la cele trei ieşiri ale labirintului.

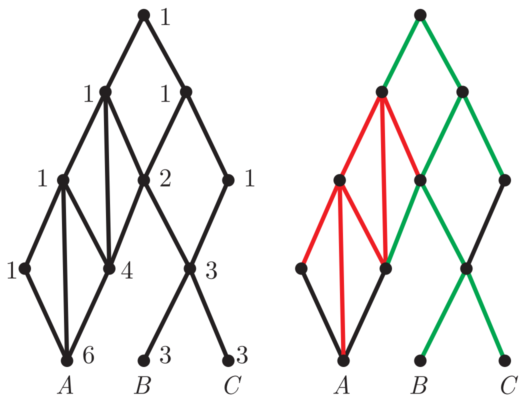


a) În câte feluri (pe câte trasee diferite) poate să iasă Petrică din labirint?

b) Care este probabilitatea evenimentului ca Petrică să ajungă în braţele mamei sale, care îl aşteaptă la ieşirea A?

Soluţie propusă. **a)** În fiecare punct de ramificaţie al labirintului am marcat numărul posibilităţilor de a ajunge la ramificaţia respectivă. De pe graf putem citi că Petrică poate ajunge în punctul A pe 6 căi, în punctul B şi C pe câte 3 căi, astfel există în total 12 trasee de ieşire din labirint.

b) Probabilitatea parcurgerii diferitelor muchii nu este egală. Pe graf vom marca cu roşu muchiile pe care Petrică le va alege cu o probabilitate de $\frac{1}{3}$, cu verde cele alese cu o probabilitate de $\frac{1}{2}$, iar cu negru pe acelea care vor fi alese cu o probabilitate 1 în punctele de ramificaţie respective.



În punctul A se poate ajunge în 6 moduri. Probabilitatea acestor trasee este pe rând următoarea:

- stânga-stânga-stânga-dreapta: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{18}$;
- stânga-stânga-jos: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$;
- stânga-stânga-dreapta-stânga: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{18}$;
- stânga-jos-stânga: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}$;
- stânga-dreapta-stânga-stânga: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{12}$;
- dreapta-stânga-stânga-stânga: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{8}$.

Traseele diferite reprezintă evenimente disjuncte, deci probabilitatea sosirii la ieşirea A este:

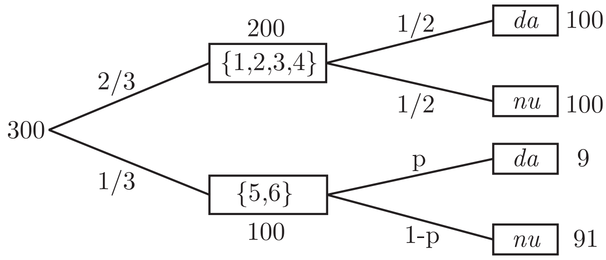
$$P(A) = 3 \cdot \frac{1}{18} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{13}{24} \approx 0,54.$$

□

4. Analiza răspunsurilor impuse de cazualitate

Să revenim la întrebarea formulată în introducere. Să presupunem că am întrebat 300 de elevi prin metoda propusă şi că 109 dintre ei au răspuns cu „da” la întrebarea legată de trişarea în timpul scrierii tezelor. Printre cei întrebaţi câţi elevi au trişat deja cel puţin o dată în timpul unei teze?

Să reprezentăm pe un graf regulile descrise în cadrul problemei şi să notăm cu p raportul elevilor (din populaţia totală) ce au trişat cel puţin o dată (aceasta este o aproximaţie posibilă a probabilităţii).



Să notăm cu A evenimentul în care elevul întrebat răspunde cu „da”. Probabilitatea p va apărea în treapta a doua, ca probabilitatea condiţionată a răspunsului „da” în situaţiile când aruncarea are ca rezultat 5 sau 6. Frecvenţa relativă a răspunsurilor „da”, adică $\frac{109}{300}$, este o estimare a probabilităţii lui. Pe baza teoremei probabilităţii totale (sau în mod direct pe baza grafului):

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot p + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2},$$

de unde

$$p = 3 \cdot P(A) - 1.$$

Pe baza acestor date, valoarea estimată a lui p este $0,09$.

OBSERVAŢIE. Raţionamentul următor foloseşte aceeaşi logică, numai că el nu operează cu probabilităţi ci direct cu frecvenţe: din 300 de elevi aproximativ 100 vor răspunde cu „da”, deoarece aruncarea cu zarul prescrie acest răspuns, şi aproximativ alţi 100 vor răspunde cu „nu” tot din acest motiv. Aceste răspunsuri sunt absolut lipsite de interes din punctul de vedere al studiului. Contează doar acei 9 elevi care nu aparţin grupurilor ale căror răspunsuri au fost complet determinate de aruncarea zarului. Dacă aceşti 9 elevi au respectat regulile de joc şi nu au minţit, atunci în grupul celor care au dat răspunsuri pozitive adevărate, din cei 100 de elevi 9 au trişat în timpul scrierii tezei. Raportul p al fraudelor poate fi estimat la aproximativ 9%.

Observăm că, dacă alegem un elev dintre cei ce au răspuns cu „da”, probabilitatea faptului că el/ea într-adevăr a trişat deja, măcar odată, este de $\frac{9}{109}$. Acest lucru se vede şi pe graf, dar poate fi calculat şi astfel

$$P(E_2|A) = \frac{P(E_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|E_2) \cdot P(E_2)}{P(A)} = \frac{\frac{9}{100} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{109}{300}} = \frac{9}{109}.$$

Datorită acestei formule nu putem selecta, dintre elevii care au răspuns cu „da”, pe cei care într-adevăr au trişat, deci însăşi metoda de întrebare asigură caracterul anonim al respondentului. În general există două surse de eroare: prima este legată de alegerea eşantionului, această sursă de eroare fiind independentă de metoda de întrebare folosită. Cealaltă sursă de eroare o constituie răspunsurile false (nesincere). În cazul interviurilor directe, trebuie să luăm în calcul un număr mai mare de răspunsuri false. Astfel, din cauza lipsei caracterului anonim al respondentului, într-un interviu direct raportul p al celor care dau răspunsuri nesincere poate fi subestimat. Desigur, acest studiu nu poate exclude răspunsurile false; datorită caracterului anonim al respondentului, ne putem aştepta ca rezultatul să fie mai puţin influenţat sau denaturat ca în cazul unui interviu direct.

5. Exerciţii propuse

1. Aruncăm două zaruri o singură dată. Găsiţi evenimentul complementar pentru rezultatele posibile.

a) Cu ambele zaruri aruncăm 1.

b) Cu unul dintre zaruri aruncăm 1.

c) Suma numerelor rezultate este 10.

d) Suma numerelor rezultate este cel puţin 10.

f) Suma numerelor rezultate este cel mult 11.

2. Într-o cofetărie, înainte de ora închiderii, au rămas doar trei feluri de ştrudele: cu vişine, cu brânză şi cu mere. Intră un cumpărător care doreşte patru ştrudele şi lasă pe seama vânzătorului alegerea ştrudelelor.

a) Care sunt soluţiile posibile?

b) Care dintre evenimentele de mai jos sunt posibile, care sunt cele sigure şi care sunt imposibile?

A : Cumpărătorul a primit din toate cele trei feluri de ştrudele.

B : Dintr-un fel a primit cel puţin două bucăţi.

C : A primit patru ştrudele diferite.

D : A primit două ştrudele cu vişine.

3. Aruncăm un zar regulat (cu şase feţe). Să calculăm probabilitatea următoarelor evenimente:

A: aruncăm un număr divizibil cu 5;

B: aruncăm un număr par;

C: aruncăm 1 sau 3.

Să analizăm dacă aceste trei evenimente alcătuiesc sau nu un câmp de evenimente complet.

4. Aruncăm un zar. Rezultatele posibile ale experimentului au fost împărţite în trei evenimente, dintre care două sunt cele de mai jos:

A1: Aruncăm 4 sau 6.

A2: Aruncăm un număr prim.

a) Descrieţi al treilea eveniment astfel încât cele trei evenimente împreună să formeze un sistem complet de evenimente.

b) Care este probabilitatea diferitelor evenimente?

5. Aruncăm un zar galben, unul roşu şi unul verde unul după altul. Care este probabilitatea ca fiecare număr aruncat să fie un număr prim?

6. Care este evenimentul cu şansă mai mare, dacă aruncăm un zar regulat de trei ori şi suma numerelor va fi 11, sau dacă această sumă va fi 12? Cavalerul De Méré a argumentat în felul următor:

obţinem suma de 11, dacă aruncările noastre sunt:

$$6,4,1;\;\; 6,3,2;\;\; 5,5,1;\;\; 5,4,2;\;\; 5,3,3;\;\; 4,4,3;$$

obţinem suma de 12, dacă cele trei aruncări sunt:

$$6,5,1;\;\; 6,4,2;\;\; 6,3,3;\;\; 5,5,2;\;\; 5,4,3;\;\; 4,4,4.$$

Deci ambele posibilităţi au aceeaşi şansă de a se produce. Care este greşeala din argumentarea cavalerului De Méré?

7. Dacă aruncăm un zar de patru ori este avantajos să pariem că din cele patru aruncări cel puţin o dată vom avea şase. Dacă aruncăm două zaruri de douăzeci şi patru de ori, atunci nu e avantajos să pariem pe cel puţin un şase dublu, cu toate că $\frac{4}{6} = \frac{24}{36}$. Să explicăm fenomenul. (Pariul este avantajos sau dezavantajos dacă şansa de a câştiga este mai mare sau mai mică decât $\frac{1}{2}$.)

8. Într-o clasă am ales la întâmplare un elev. Fie A evenimentul în care elevul ales este băiat, B evenimentul în care elevul ales învaţă franceza, C evenimentul în care elevul ales a câştigat un concurs de matematică. Ştim că efectivul clasei este 30, din care 20 sunt băieţi. 10 elevi învaţă limba franceză, printre care 3 băieţi: Petre, Bogdan şi Nicu. Singurul din clasă care a câştigat un concurs de matematică este Paul.

a) Descrieţi următoarele evenimente: $A \cap (B \cup C)$; $\overline{A} \cap B \cap C$.

b) Calculaţi probabilitatea acestor evenimente.

9. În timpul testării unui medicament analgezic pentru bolnavi de migrenă (cu dureri de cap severe) din 200 de pacienţi 100 au primit tablete fără efect (placebo), ceilalţi o sută însă au primit tablete noi cu substanţă activă, în aşa fel încât pacienţii nu puteau şti ce tablete le-au fost administrate. Pacienţii au relatat despre efectul tabletelor. Pe baza relatărilor a fost întocmit următorul tabel:

	durerea s-a diminuat	durerea nu s-a diminuat
au primit medicament	79	21
au primit placebo	38	62

a) Pe baza experimentelor, care este probabilitatea ca noul medicament să aibă efect?

b) Medicul a examinat un pacient la care tableta administrată nu a avut niciun efect. Care este probabilitatea ca pacientul să fi primit placebo?

10. Unui băiat i s-a promis că poate merge să joace fotbal doar dacă câştigă cel puţin două partide de şah din trei partide consecutive. Partenerii săi sunt Tata şi Bunicul, în ordinea Tata-Bunicul-Tata sau Bunicul-Tata-Bunicul. Tata joacă mai bine decât Bunicul. Care este ordinea mai avantajoasă din punctul de vedere al băiatului (care vrea să meargă la fotbal)?

CAPITOLUL XII
CUBUL PUZZLE HAPPY CUBE

1. Ce este Happy Cube?

Happy Cube este o gamă de puzzle provenită din Belgia, creată de Dirk Laureyssens în anul 1986. Este un puzzle de două sau trei dimensiuni, confecţionat din burete expandat. Gama completă Happy Cube conţine patru seturi, fiecare set conţine şase modele diferite. Fiecare model este compus din şase elemente de puzzle, iniţial cuprinse într-un cadru dreptunghiular (vezi fig. 12.1). Din aceste şase elemente poate fi construit şi un cub (vezi fig. 12.2).

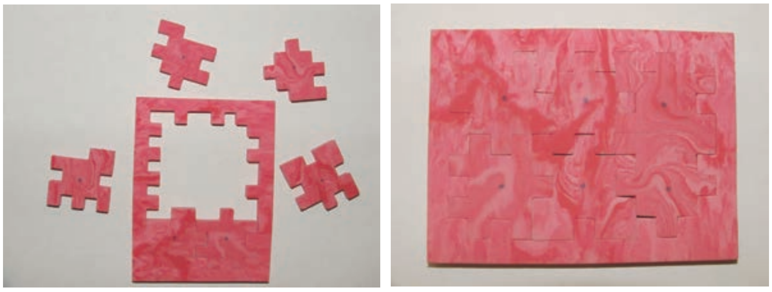


Figura 12.1. Un model Happy Cube

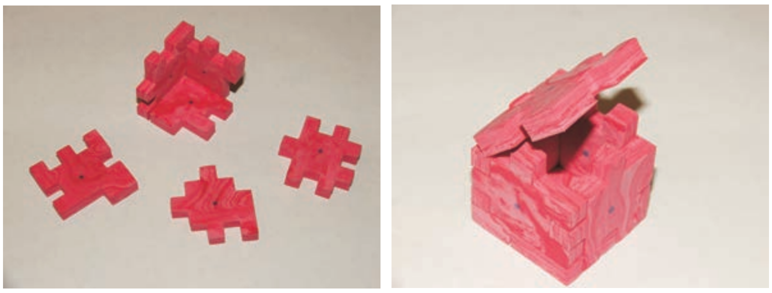


Figura 12.2. Montarea unui cub Happy Cube

Cubul Happy Cube este comercializat, poate fi comandat şi pe pagina oficială de internet a firmei producătoare[8] şi se găseşte la foarte mulţi comercianţi în întreaga lume.

Seturile gamei complete, în ordinea creşterii gradului de dificultate a montării, sunt următoarele:

- **Little Genius** (★) :

Nature	*Fruits*	*Animals*	*Emotions*	*Transports*	*Symbols*
(⋆)	(⋆⋆)	(⋆⋆⋆)	(⋆⋆⋆⋆)	(⋆⋆⋆⋆⋆)	(⋆⋆⋆⋆⋆⋆)

- **Happy Cube** (★★) :

Milano	*New York*	*Tokyo*	*Amsterdam*	*Paris*	*Brussels*
(⋆)	(⋆⋆)	(⋆⋆⋆)	(⋆⋆⋆⋆)	(⋆⋆⋆⋆⋆)	(⋆⋆⋆⋆⋆⋆)

- **Profi Cube** (★★★) :

Confusius	*Da Vinci*	*Marco Polo*	*Rubens*	*Watt*	*Newton*
(⋆)	(⋆⋆)	(⋆⋆⋆)	(⋆⋆⋆⋆)	(⋆⋆⋆⋆⋆)	(⋆⋆⋆⋆⋆⋆)

- **Marble Cube** (★★★★) :

MartinL. King	*Omar Khayyam*	*Marie Curie*	*Buckminster Fuller*	*Mahatma Gandhi*	*Albert Einstein*
(⋆)	(⋆⋆)	(⋆⋆⋆)	(⋆⋆⋆⋆)	(⋆⋆⋆⋆⋆)	(⋆⋆⋆⋆⋆⋆)

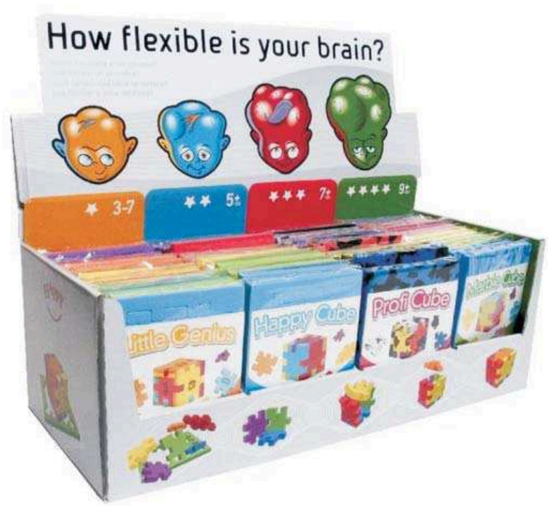


FIGURA 12.3. Gama completă Happy Cube

[8] `www.happycube.com`

Cele patru seturi au niveluri de dificultate diferite, iar cele şase modele din fiecare set sunt clasificate, de asemenea, după gradul de dificultate. Gradul de dificultate este indicat prin numărul crescător al steluţelor. În acelaşi timp producătorul recomandă seturile diferite pentru categorii de vârste distincte. Astfel setul Little Genius este recomandat copiilor de vârste între 3 şi 7 ani, Happy Cube începând de la vârsta de 5 ani, Profi Cube de la 7 ani, iar Marble Cube de la 9 ani.

Jucătorii au posibilitatea de a rezolva trei tipuri de probleme:

- reaşezarea celor şase elemente în cadrul dreptunghiular – această acţiune se numeşte misiunea cu două dimensiuni;

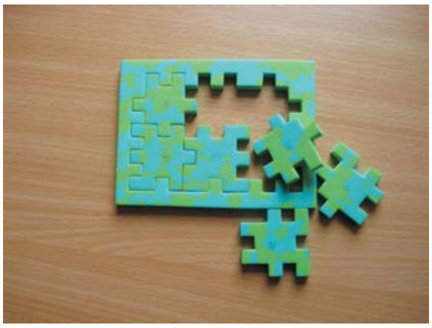


FIGURA 12.4. Misiunea cu două dimensiuni

- montarea unui cub din cele şase elemente de puzzle – aceasta fiind misiunea cu trei dimensiuni;

FIGURA 12.5. Misiunea cu trei dimensiuni

- montarea unui corp mai complicat prin combinarea elementelor mai multor cuburi (eventual identice) – care se numeşte misiunea cu dimensiuni infinite[9].

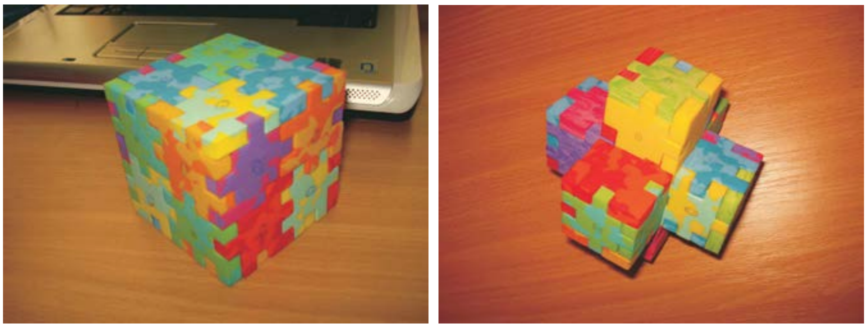


FIGURA 12.6. Misiunea cu dimensiuni ∞

2. Jocuri înrudite

Jocul de puzzle Happy Cube a devenit cunoscut în întreaga lume, fiind preluat fără schimbări în multe ţări, în unele fiind elaborate jocuri asemănătoare. Astfel, în Olanda acest joc se numeşte *Wirrel Warrel*, iar în Spania a devenit cunoscut sub numele de *Cococrasch*.

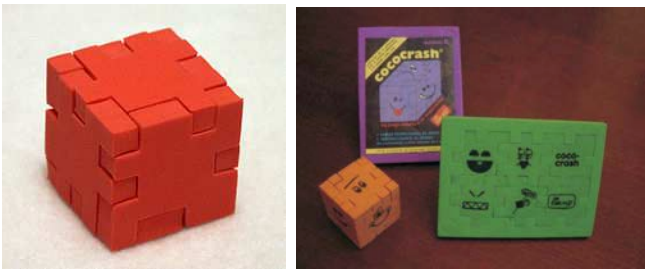


FIGURA 12.7. Wirrel Warrel din Olanda şi Cococrash din Spania

Se vede că aceste jocuri sunt asemănătoare cu Happy Cube din Belgia, doar numele a fost schimbat, în rest caracterul cuburilor a rămas acelaşi.

[9]Această denumire, folosită de firma producătoare, nu este destul de precisă din punct de vedere matematic, fiindcă toate corpurile montate au trei dimensiuni.

În acelaşi timp, în Statele Unite ale Americii există un joc asemănător denumit *Snafooz*. Singura deosebire constă în faptul că gama completă *Snafooz* conţine şase cuburi cu feţe de dimensiunea 6×6, faţă de cuburile Happy Cube, care au feţe de 5×5.

FIGURA 12.8. Snafooz din Statele Unite

În Japonia se comercializează un joc asemănător sub numele de *Rubber*, însă feţele cubului au dimensiunea 4×4.

FIGURA 12.9. Rubber din Japonia

3. Activităţi şi ipoteze

Am folosit cuburile Happy Cube în scopuri educaţionale pentru prima dată în anul 2004. Copiii de $10 - 11$ ani, după ce au reuşit să monteze cuburile, au primit următoarele sarcini:

- să încerce să descrie strategiile proprii, folosite pe parcursul montării, sau pur şi simplu să enumere ideile care le-au trecut prin minte între timp.
- să găsească o formă de prezentare pentru a descrie etapele montării.

Ulterior, am organizat activităţi similare şi pentru elevi de liceu şi pentru studenţi. Pe tot parcursul activităţilor am folosit seturile Profi Cube şi Marble Cube. Spre surpriza noastră, elevii cei mai tineri au descris aceleaşi strategii ca şi colegii lor mult mai în vârstă (cu mai multă experienţă şi mai multe studii). Majoritatea participanţilor au descris backtracking-ul sau algoritmul greedy, iar pentru ilustrarea etapelor montării au construit un fel de graf.

Pe parcursul activităţilor, însă, a apărut o ipoteză. Ni s-a părut că ordinea de dificultate dată de producătorul cuburilor nu este corectă. Cei mai mulţi elevi participanţi au rezolvat mai uşor montarea majorităţii cuburilor din setul Marble, considerat mai dificil, decât montarea celor 3-4 cuburi din setul Profi, considerat mai uşor. Din acest motiv am început să examinăm clasificarea cuburilor.

Pentru a determina ordinea de dificultate corectă şi pentru a demonstra ipoteza noastră, am efectuat analize teoretice pe cuburi şi cu ajutorul elevilor am executat şi măsurători practice. Pe parcursul analizei teoretice am asociat (cu ajutorul bucăţilor de puzzle) câte un graf fiecărui cub, iar pe baza proprietăţilor grafurilor am definit indici de complexitate. Structura grafurilor este oglindită de algoritmul greedy, folosit pe parcursul rezolvării de mai mulţi elevi. O parte a analizelor teoretice au fost efectuate cu ajutorul unor programe în Matlab. În cursul măsurătorilor practice 120 de studenţi au montat toate cele 12 cuburi şi a fost măsurat timpul de montare a fiecărui cub, după care rezultatele măsurătorilor au fost analizate din punct de vedere statistic. În final, am analizat relaţiile între posibilele ierarhizări bazate pe consideraţii teoretice şi cele bazate pe observaţii empirice, după care am formulat câteva concluzii.

O parte din activităţile noastre au fost organizate în cadrul programului Comenius intitulat DQME II[10] (Developing Quality in Mathematics Education II), iar analiza efectivă a fost efectuată pentru programul FP7 PRIMAS [11](Promoting Inquiry in Mathematics and Science Education Across Europe) Rezultatele analizei au fost publicate în revista Nieuw Archief voor Wiskunde ([**6**]).

[10]`http://www.dqme2.eu/`

[11]http://www.primas-project.eu

4. Programele de montare a cubului Happy Cube

Firma producătoare a elaborat un program denumit *Happy Solver*, care se găseşte şi poate fi descărcat gratuit de pe pagina oficială a firmei. Cu ajutorul acestui program, putem viziona rezolvarea oricărui cub din gama Happy Cube, iar cei interesaţi pot să creeze şi forme mai complicate, alegând elementele din diferite seturi, pe care programul încearcă să le asambleze. Bineînţeles, programul reuşeşte numai dacă forma respectivă poate fi montată cu elementele selectate.

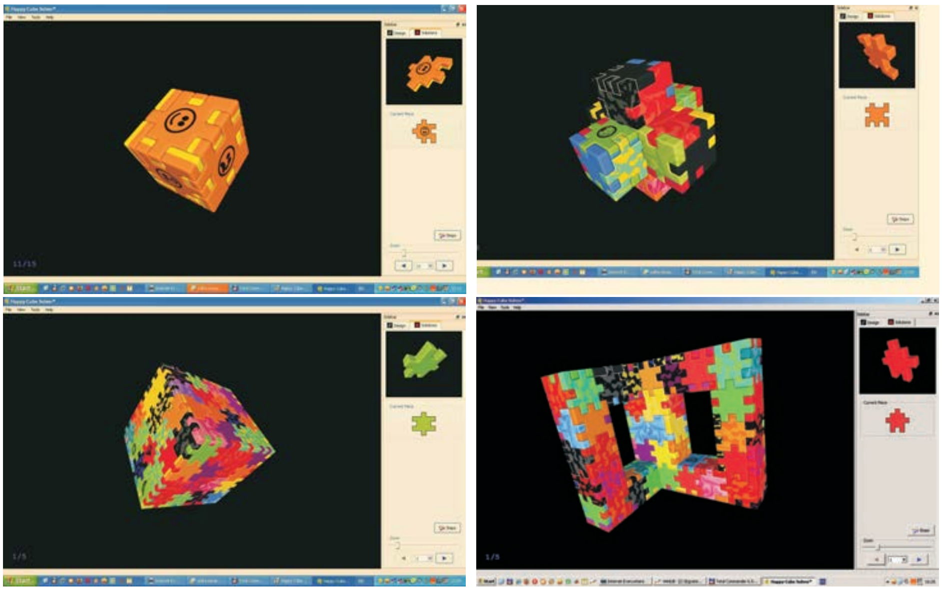


FIGURA 12.10. Forme realizate cu ajutorul programului Happy Solver

Programul are două mari dezavantaje: în primul rând nu este interactiv (cuburile nu pot fi asamblate de către utilizator, nu pot fi definite cuburi noi etc.) şi nu recunoaşte rezolvările echivalente. Astfel, în cazul aceluiaşi cub, programul găseşte mai multe soluţii, cu toate că acestea sunt echivalente (de exemplu cuburile se pot întrepătrunde prin rotire sau un cub poate fi obţinut prin reflexia altui cub).

În anul 2005, în cadrul unui proiect universitar, *István Sipos* şi *István Máté* au elaborat un program propriu, interactiv, pentru asamblarea cuburilor. Acest program oferă un număr mare de posibilităţi celor interesaţi. Cele mai importante sunt: jucătorii pot să asambleze cuburile singuri, pot să-şi aleagă dimensiunea dorită ($3 \times 3 \times 3$, $4 \times 4 \times 4$, $5 \times 5 \times 5$ sau $6 \times 6 \times 6$) şi programul poate să creeze cuburi noi. Elementele şi cuburile în curs de construcţie pot fi rotite în orice direcţie pentru a fi mai vizibile. Prin toate aceste posibilităţi se dezvoltă şi intuiţia spaţială a jucătorului. Jucătorul poate să aleagă unul din cuburile seturilor Profi sau Marble, sau poate genera cu ajutorul programului cuburi diferite de cele din seturile existente. Programul măsoară şi timpul necesar pentru montarea cubului respectiv, iar valorile de timp măsurate pot fi salvate pe calculator, jucătorul având posibilitatea să-şi alcătuiască un clasament cu cele mai bune rezultate. În acelaşi timp, programul permite şi vizionarea rezolvării cubului, pe care o vizualizează pas cu pas. Pe figura 12.11 putem vedea interfaţa programului în timpul jocului.

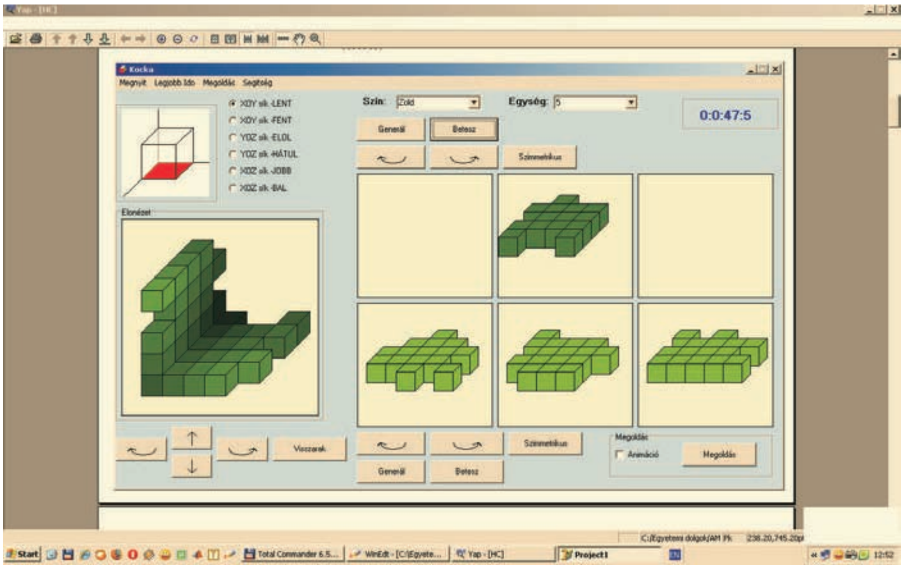


FIGURA 12.11. Programul în timpul jocului

În colţul din dreapta sus vedem timpul scurs, la mijloc sunt cele şase feţe ale cubului generat, în câmpul din stânga poate fi montat cubul însuşi, iar deasupra acestui câmp se alege partea cu care dorim să îmbinăm faţa următoare. Sus, la mijloc, putem alege şi culoarea cubului: roşu, albastru sau verde. Dedesubt se află două butoane: „Generează” şi „Inserează”; denumirile explică rolul acestor butoane. Dacă jucătorul renunţă fără a putea monta cubul, atunci în colţul din dreapta jos apasă pe butonul „Rezolvare” şi programul îi va arăta paşii prin care se poate asambla cubul.

Acest program poate fi folosit atât pentru studiu, cât şi pentru distracţie.

În anul 2006, tot în cadrul unui proiect universitar, Tamás Sipos a scris un program şi pentru asamblarea unui cub $4D$. Acest program însă, nu poate fi folosit în scopuri de joacă, deoarece elevii nu au o intuiţie spaţială funcţională.

5. Analiza teoretică a cuburilor

În cele ce urmează vom examina cum se pot reprezenta elementele cuburilor, ce fel de algoritmi de asamblare li se pot ataşa pe baza acestor reprezentări şi cum putem măsura complexitatea procesului de asamblare.

5.1. Reprezentarea cuburilor. Fiecare cub este asamblat din şase feţe (elemente de puzzle). În vederea unei analize matematice mai uşoare, vom asocia unei feţe o matrice de 5×5. Această matrice se obţine prin introducerea de cifre 1 în locurile în care puzzle-ul este completat şi de 0-uri în locurile libere (unde încă nu este completat).

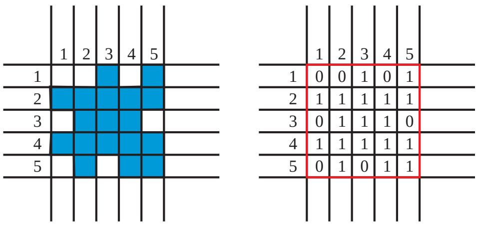


FIGURA 12.12. Reprezentarea unei feţe prin intermediul unei matrice

Această construcţie este reprezentată în figura 12.12. În vederea unei examinări mai simple a îmbinărilor, am asociat câte o matrice diferitelor poziţii ale elementelor de puzzle. Pentru a descrie rotaţiile unei feţe, am asociat 8 matrice pentru fiecare faţă a cubului. Dintre acestea, patru rezultă din rotirea feţei, iar celelalte patru din simetricele acestor rotiri. Deci, celor şase feţe ale cubului le vom asocia $6 \cdot 8$, adică 48 de matrice. Notăm aceste matrice cu $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_{48}$. Bineînţeles, printre acestea apar şi matrice identice, din cauza feţelor simetrice, ceea ce nu constituie o problemă, deoarece în cele ce urmează vom discuta şi aceste cazuri.

Între matricele astfel obţinute putem defini o relaţie $\sim$. Spunem că $A \sim B$ dacă matricele A şi B aparţin unor feţe diferite ale aceluiaşi cub şi aceste feţe se îmbină pe muchiile de sus (fără să fie rotite). Această îmbinare poate fi descrisă cu următoarele condiţii:

$$a_{1i} + b_{1i} = 1, i \in \{2, 3, 4\};$$
$$a_{11} + b_{11} \leq 1 \text{ şi dacă } a_{11} + b_{11} = 0, \text{ atunci } \min\{a_{21}, b_{21}\} = 0;$$
$$a_{15} + b_{15} \leq 1 \text{ şi dacă } a_{15} + b_{15} = 0, \text{ atunci } \min\{a_{25}, b_{25}\} = 0,$$

unde a_{ij} este elementul din linia i şi coloana j a matricei A, în mod similar b_{ij} este elementul din linia i şi coloana j a matricei B.

Astfel, asamblarea cubului înseamnă, de fapt, determinarea celor 12 perechi, care corespund pe baza relaţiei $\sim$.

Cu ajutorul relaţiei $\sim$ putem genera o matrice de incidenţă F, care este o matrice de 48×48. Această matrice se obţine prin introducerea în poziţia (i, j) a cifrei 1, dacă $M_i \sim M_j$, adică cele două elemente pot fi îmbinate de-a lungul muchiilor superioare, iar în caz contrar introducem 0 în poziţia (i, j). Astfel, dacă adunăm elementele din coloana j, vom obţine numărul feţelor, care se potrivesc la faţa codificată de M_j într-o poziţie fixată a acesteia. Deoarece fiecare element de puzzle are locul lui în cub, montarea cubului poate fi începută cu oricare din elemente.

Să alegem ca element de pornire faţa determinată de matricea M_j pentru care numărul $\sum_{i=1}^{48} f_{ij}$ este cel mai mic. Astfel încercăm să micşorăm numărul posibilelor încercări. Bineînţeles, cazul cel mai favorabil ar fi dacă acest număr minim ar fi 1, adică dacă am găsi un element ce are o latură la care se poate îmbina exact un element dintre celelalte. Acest caz foarte favorabil de regulă nu există, cu excepţia cubului Watt din setul Profi Cube, pentru care găsim o poziţie de pornire atât de sigură. Acest lucru ne uşurează semnificativ începerea montării cubului (desigur numai dacă am analizat elementele în prealabil). În cazul fiecărui cub putem determina un element cu o latură la care se pot ataşa un număr minim de alte elemente. Vom folosi această metodă şi pentru configuraţiile ce se formează în continuare, deci vom încerca să continuăm o configuraţie dată (compusă din câteva elemente de puzzle) de-a lungul unei muchii, pentru care numărul posibilităţilor de îmbinare este minim. Practic, folosim un algoritm greedy, ne străduim ca fiecare pas să fie cel mai bun posibil, pe baza unui anumit criteriu. Acest lucru, bineînţeles, nu garantează că astfel vom avea cei mai puţini paşi de făcut, însă nu putem obţine un algoritm mai bun ca acesta decât dacă prevedem configuraţiile spaţiale ce pot lua naştere sau dacă analizăm mult mai multe cazuri.

Fie c_1 cea mai mică sumă de coloană a matricei F, adică

$$c_1 = \min_{1 \le j \le 48} \sum_{i=1}^{48} f_{ij}. \tag{40}$$

Numim această valoare c_1, primul indice de complexitate în procesul de analizare al cuburilor. Tabelul următor cuprinde acest indice referitor la cuburile celor două seturi studiate:

Profi	c_1	**Marble**	c_1
Confusius	8	King	2
Da Vinci	8	Khayyam	8
Marco Polo	7	Curie	3
Rubens	6	Fuller	2
Watt	1	Gandhi	2
Newton	2	Einstein	3

Observăm că o bună parte a cuburilor conţin elemente simetrice. Astfel numerele c_1 nu sunt perfect caracteristice pentru această situaţie, deoarece nu ţin cont de simetria elementelor puzzle. Când am examinat îmbinarea unei astfel de feţe simetrice, fiecare situaţie a fost considerată un caz aparte, cu toate că, de fapt, pentru elevul ce se ocupă de montarea cubului, acest lucru nu a însemnat o posibilitate diferită. Din acest motiv trebuie să evităm ca aceste situaţii să fie calculate ca şi cazuri diferite.

În figurile 12.27 şi 12.28 sunt enumerate şi numerotate elementele fiecărui cub. În tabelul următor enumerăm feţele simetrice ale fiecărui cub folosind figurile de mai înainte (semnul „-" înseamnă că în cazul cubului corespunzător nu există niciun element simetric):

Profi	Element simetric	**Marble**	Element simetric
Confusius	3,4,5,6	King	3
Da Vinci	2,3,4,5	Khayyam	4,6
Marco Polo	1,3,4,6	Curie	-
Rubens	1,4,6	Fuller	6
Watt	-	Gandhi	-
Newton	-	Einstein	-

În cazul fiecărei matrice M_k vom număra câte din cele opt matrice asociate feţei codificate cu M_k, sunt identice cu M_k datorită simetriei feţei. Numărul astfel obţinut va fi notat cu s_k iar în matricea de incidenţă F în rândul şi coloana M_k vom înlocui cifrele 1 cu $\frac{1}{s_k}$. Matricea astfel obţinută va fi notată cu FS.

Să examinăm această situaţie şi într-un caz concret. Cubul Confusius, după cum am observat în tabelul de mai sus, are 4 elemente simetrice. Acestea sunt prezentate în figura 12.13.

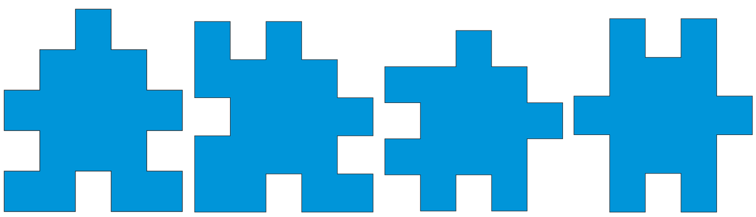


FIGURA 12.13. Elementele simetrice ale cubului Confusius

În figura 12.13 primul element are o axă de simetrie verticală; din acest motiv simetricul lui faţă de axă va genera aceeaşi matrice ca şi poziţia iniţială, deci în cazul acestei matrice $s_k = 2$ şi astfel $\frac{1}{s_k} = \frac{1}{2}$. Elementele al doilea şi al treilea sunt simetrice în raport cu una din diagonale, deci $s_k = 2$ şi $\frac{1}{s_k} = \frac{1}{2}$. Al patrulea element are două axe de simetrie, astfel $s_k = 4$ şi $\frac{1}{s_k} = \frac{1}{4}$.

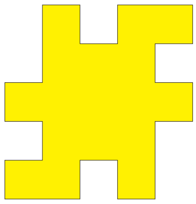


FIGURA 12.14. Unul dintre elementele simetrice ale cubului Marco Polo

Elementul cubului Marco Polo din figura 12.14 are tot două poziţii identice, deoarece elementul puzzle are numai o singură simetrie centrală. Astfel $s_k = 2$ şi $\frac{1}{s_k} = \frac{1}{2}$.

Figura 12.15 reprezintă un element al cubului Omar Khayyam. Observăm că acesta este simetric central şi axial în raport cu mai multe axe. Acest element poate fi rotit în mod arbitrar, el va genera de fiecare dată aceeaşi matrice, deci $s_k = 8$ şi $\frac{1}{s_k} = \frac{1}{8}$.

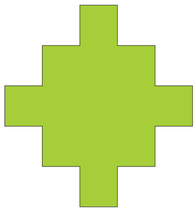


FIGURA 12.15. Un element simetric al cubului Omar Khayyam

Pe baza considerentelor anterioare, vom interpreta indicele de complexitate cs_1 care ne arată, practic, câte cazuri vom avea pe parcursul îmbinării primelor două elemente. Acest lucru este important, deoarece se poate întâmpla ca, pe parcursul montării, să fim nevoiţi să demontăm complet cubul şi să pornim cu un pas iniţial diferit.

$$cs_1 = \min_{1 \le j \le 48} \sum_{i=1}^{48} f s_{ij} \tag{41}$$

Tabelul următor cuprinde indicii cs_1:

Profi	cs_1	**Marble**	cs_1
Confusius	4	King	2
Da Vinci	4	Khayyam	3
Marco Polo	4	Curie	3
Rubens	5	Fuller	2
Watt	1	Gandhi	2
Newton	2	Einstein	3

6. Etapele asamblării unui cub

Pentru a clarifica etapele asamblării unui cub, considerăm cubul Watt al setului Profi Cube şi parcurgem etapele pas cu pas. După cum

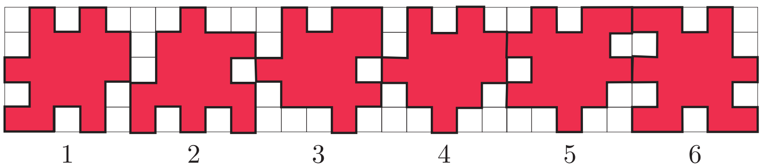


FIGURA 12.16. Elementele cubului Watt

am spus mai sus, pe parcursul asamblării există un punct de pornire sigur, adică o faţă la care se poate ataşa o singură faţă diferită. Pe baza elementelor puzzle prezentate în figura 12.16, la latura din dreapta a primului element se poate asambla doar al doilea element. Această îmbinare este prezentată în figura 12.17.

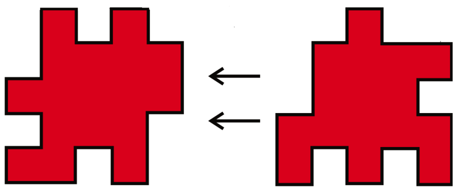


FIGURA 12.17. Îmbinarea primelor două elemente ale cubului Watt

După ce am realizat îmbinarea acestor două elemente, trebuie să examinăm câte elemente pot fi ataşate la fiecare dintre cele patru poziţii posibile. În figura 12.18 putem vedea că la partea dreaptă pot fi ataşate două elemente diferite şi anume elementele 4 şi 5 (vezi figura 12.16), iar pentru partea stângă avem trei posibilităţi de îmbinare şi anume elementul 6, care poate fi ataşat în trei poziţii diferite.

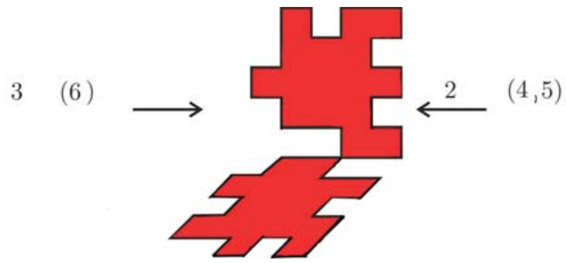


FIGURA 12.18. Posibilităţile de îmbinare pentru configuraţia obţinută după primul pas

Pentru următorul pas vom alege faţa cubului cu care se pot îmbina un număr minim de elemente, după care, în mod similar, vom examina aceste elemente pentru a determina numărul elementelor ce pot fi ataşate. În continuarea montării cubului vom alege întotdeauna poziţia în care există cele mai puţine posibilităţi de îmbinare a elementelor. În acest fel, vom putea construi cubul, luând în considerare toate posibilităţile favorabile. Cu această metodă trebuie să examinăm de fiecare dată doar configuraţia existentă (deci nu trebuie să vizualizăm în imaginaţia noastră forme ce încă nu sunt montate) şi la fiecare pas vom alege o posibilitate de a continua, care, în caz de revenire, va oferi cele mai puţine alternative pentru pasul următor.

7. Grafurile corespunzătoare cuburilor

Etapele posibile ale montării pot fi reprezentate într-o structură de arbore (graf). Elementul de pornire va fi identificat cu rădăcina şi fiecare posibilitate de-a continua cu o ramură nouă. Astfel, obţinem graful ataşat montării cubului. Figura 12.19 reprezintă graful cubului Watt.

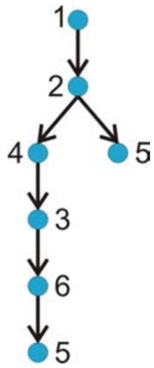


FIGURA 12.19. Structura rezolvării cubului Watt

În cazul cubului Watt, această structură va fi un arbore cu două ramuri, unde numerotarea nodurilor corespunde cu numerotarea elementelor corespunzătoare din figura 12.16. Acest graf ne arată modul montării cubului Watt din două încercări, şi anume $1-2-5$ sau $1-2-4-3-5-6$. Varianta a doua este chiar soluţia.

Dacă începem montarea cubului cu un alt element, putem obţine un arbore cu mai multe ramuri, în timp ce reprezentăm posibilităţile şi aşa vom avea mai multe încercări. Bineînţeles, timpul necesar astfel pentru montarea cubului va fi şi el mai lung, dacă cumva, cu puţin noroc, nu ghicim (sau prevedem) soluţia exactă. Oricum, acest graf ne arată cât de repede poate fi montat cubul Watt cu puţină analiză şi cu ajutorul unei strategii la îndemână.

Pentru alegerea poziţiilor, vom folosi algoritmul greedy şi, dacă ne împotmolim pe parcursul montării, aceasta înseamnă că revenim la un stadiu anterior, deci graful obţinut oglindeşte practic posibilităţile unui backtracking greedy.

Cu scopul înregistrării ideilor urmărim pas cu pas construirea grafului cubului Watt. În primul rând, trebuie să căutăm un element puzzle (pe care alegem o latură) cu care se îmbină un număr minim de elemente diferite. Această piesă este elementul 1 al cubului (vezi figura 12.20), deci la rădăcina arborelui va fi pusă cifra 1.

Corespunzător poziţiei reprezentate în figura 12.20, la muchia din dreapta a elementului se poate ataşa un singur element, acesta fiind

Figura 12.20. Elementul de pornire

elementul 2 (după cum observăm în figura 12.16, latura stângă al elementului 2 se potriveşte perfect). Această îmbinare este reprezentată în figura 12.21.

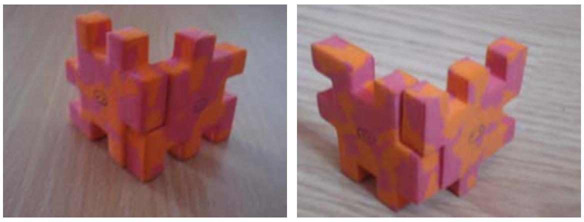


Figura 12.21. Primul nivel

Astfel, pe primul nivel al grafului cubului Watt va apărea elementul 2. Acum trebuie să examinăm, cum putem ataşa cele mai puţine elemente la cele două elemente deja îmbinate. La partea superioară a configuraţiei din prima imagine a figurii 12.21 îmbinăm elementul 6 în trei poziţii diferite. Pe urmă verificăm, câte elemente pot fi ataşate la cealaltă parte, adică la partea superioară a configuraţiei din imaginea a doua. După ce am încercat toate elementele posibile, ne dăm seama că numai elementele 4 şi 5 se potrivesc. În această direcţie avem numai două posibilităţi de a merge mai departe. În celelalte două poziţii, în care putem continua, avem cel puţin câte două posibilităţi de îmbinare, de aceea, pentru a continua, vom alege poziţia ce se poate îmbina cu piesele 4 şi 5. Astfel, la nivelul al doilea al grafului vor fi introduse aceste două elemente.

Prin urmare, de aici graful se va ramifica în două, într-o ramură din stânga şi una din dreapta. Amândouă ramificările vor fi analizate separat, pentru a determina care ne va duce la rezolvare. Să începem cu analiza părţii din dreapta, prin adăugarea elementului 5 la configuraţia deja existentă. Astfel obţinem configuraţia din figura 12.22.

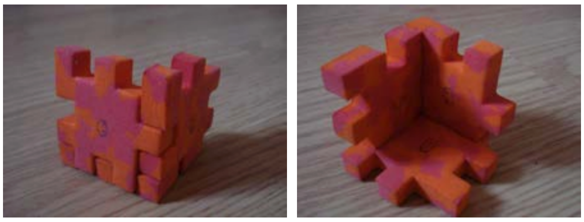


FIGURA 12.22. Partea din dreapta la al doilea nivel

Pentru a putea trece mai departe, va trebui să determinăm, cu care latură a configuraţiei se îmbină cele mai puţine elemente. Putem observa însă că la partea de sus a configuraţiei din prima imagine a figurii 12.22 nu poate fi ataşat niciunul dintre elemente. Prin urmare, această ramificaţie a grafului ne-a dus în impas, deci nu vom putea continua în această direcţie. În procesul de asamblare a cubului, aceasta înseamnă că trebuie să facem un pas înapoi, deci va trebui să ne întoarcem la nivelul anterior; altfel spus, va trebui să examinăm ce se întâmplă dacă pornim pe partea stângă şi în loc de elementul 5 vom introduce elementul 4. Introducerea acestui element va avea ca rezultat configuraţia de pe figura 12.23.

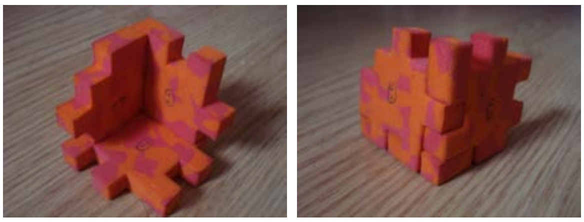


FIGURA 12.23. Latura din stânga a nivelului secund

Scopul este, şi în acest caz, găsirea feţei cu care pot fi îmbinate cele mai puţine elemente. Există trei locuri libere unde pot fi introduse elemente. După câteva încercări, vom constata că elementul 6 se potriveşte în unul dintre aceste locuri, în trei poziţii diferite. Într-un alt loc se potriveşte elementul 5 în două poziţii diferite, iar în partea superioară a configuraţiei de pe prima imagine a figurii 12.23 poate fi ataşat un singur element, şi anume elementul 3. Este deci evident că vom alege această ultimă posibilitate şi vom introduce elementul 3, care va fi prezentă şi la nivelul al treilea al grafului. În figura 12.24 putem vedea configuraţia la care ajungem în urma îmbinării descrise mai sus.

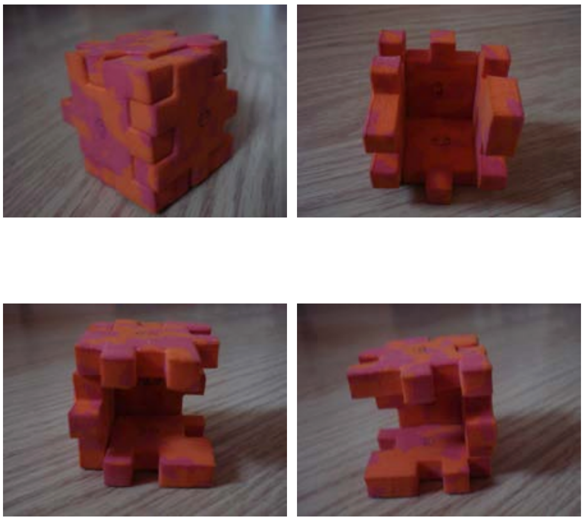


FIGURA 12.24. Al treilea nivel, partea stângă

Au rămas încă două locuri libere, în care trebuie să mai introducem elemente. Să încercăm să introducem cele două elemente rămase în partea frontală, vizibilă pe imaginea a treia din figura 12.24. Observăm repede că elementul 5 nu se potriveşte, însă elementul 6 intră exact în locul rămas liber. Astfel putem înscrie elementul 6 la nivelul patru al grafului. Rezultatul procesului de montare al cubului este prezentat în figura 12.25.

Ultimul loc rămas liber va fi completat de elementul 5, deci vom înscrie la nivelul al cincilea al grafului cifra 5 şi astfel am ilustrat posibilităţile apărute pe parcursul montării. În figura 12.26 vedem configuraţia rezultată după aşezarea ultimului element, adică cubul propriu-zis.

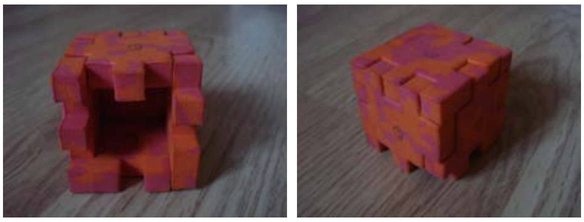


FIGURA 12.25. Nivelul al patrulea

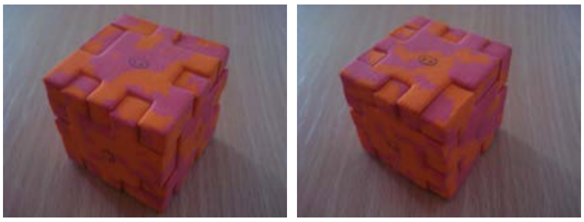


FIGURA 12.26. Cubul Watt

Urmărind toate posibilităţile de montare după graful cubului Watt, până la ramuri (în cazul prezentat sunt două), putem constata că acest cub poate fi montat relativ uşor, deoarece în afară de pasul efectuat la primul nivel, fiecare pas al procesului este determinat în mod unic. Putem observa, de asemenea, că doar una din ramificaţii ne-a dus la rezultat, cealaltă ne-a dus în impas, deci cubul Watt are un singur mod de rezolvare.

Un graf asemănător poate fi construit pentru fiecare tip de cub, dacă pe parcursul montării cuburilor urmărim paşii descrişi mai sus. În figurile 12.27 şi 12.28 am schiţat grafurile cuburilor studiate.

În mod evident, aceste grafuri vor avea întotdeauna cinci nivele, deoarece un cub are şase feţe, rădăcina ramificaţiei fiind elementul de pornire, iar restul ramurilor corespund nivelurilor. În cazul acestor arbori, primul indice de complexitate corectat corespunde numărului vârfurilor de la primul nivel. Tot aşa putem spune că indicele de complexitate de ordinul k, notat cu cs_k ne dă numărul vârfurilor de la nivelul k, unde $1 \leq k \leq 5$. Indicele cs_5 ne dă numărul vârfurilor de la nivelul al cincilea. În cele mai multe cazuri aceasta înseamnă totodată numărul rezolvărilor neechivalente. În cazul cuburilor studiate,

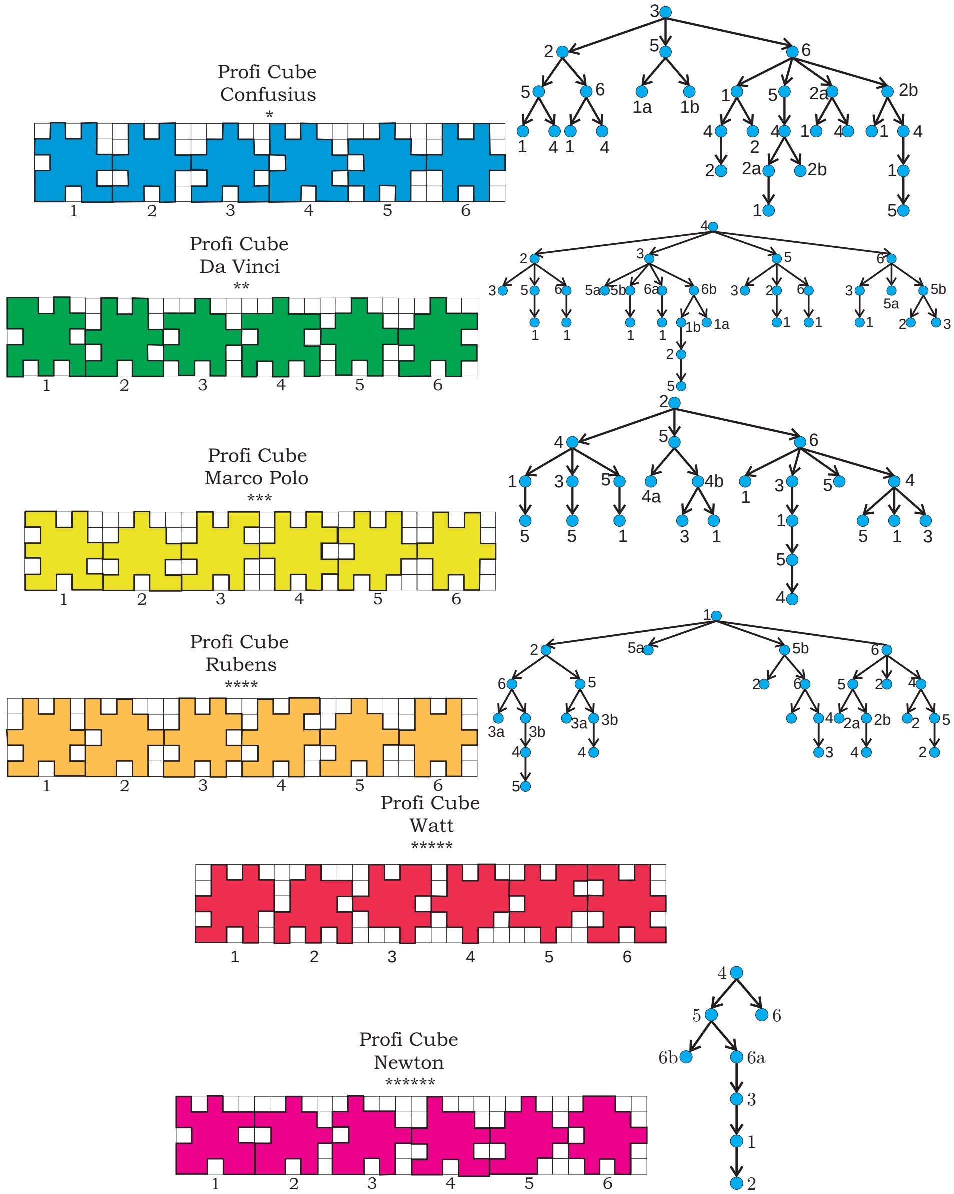


FIGURA 12.27. Grafurile cuburilor din setul Profi

valoarea cs_5 este 1, cu excepţia cuburilor Confusius şi Omar Khayyam. În cazul cubului Confusius $cs_5 = 2$, dar datorită elementelor simetrice cele două moduri de montare ale cubului sunt echivalente. În cazul

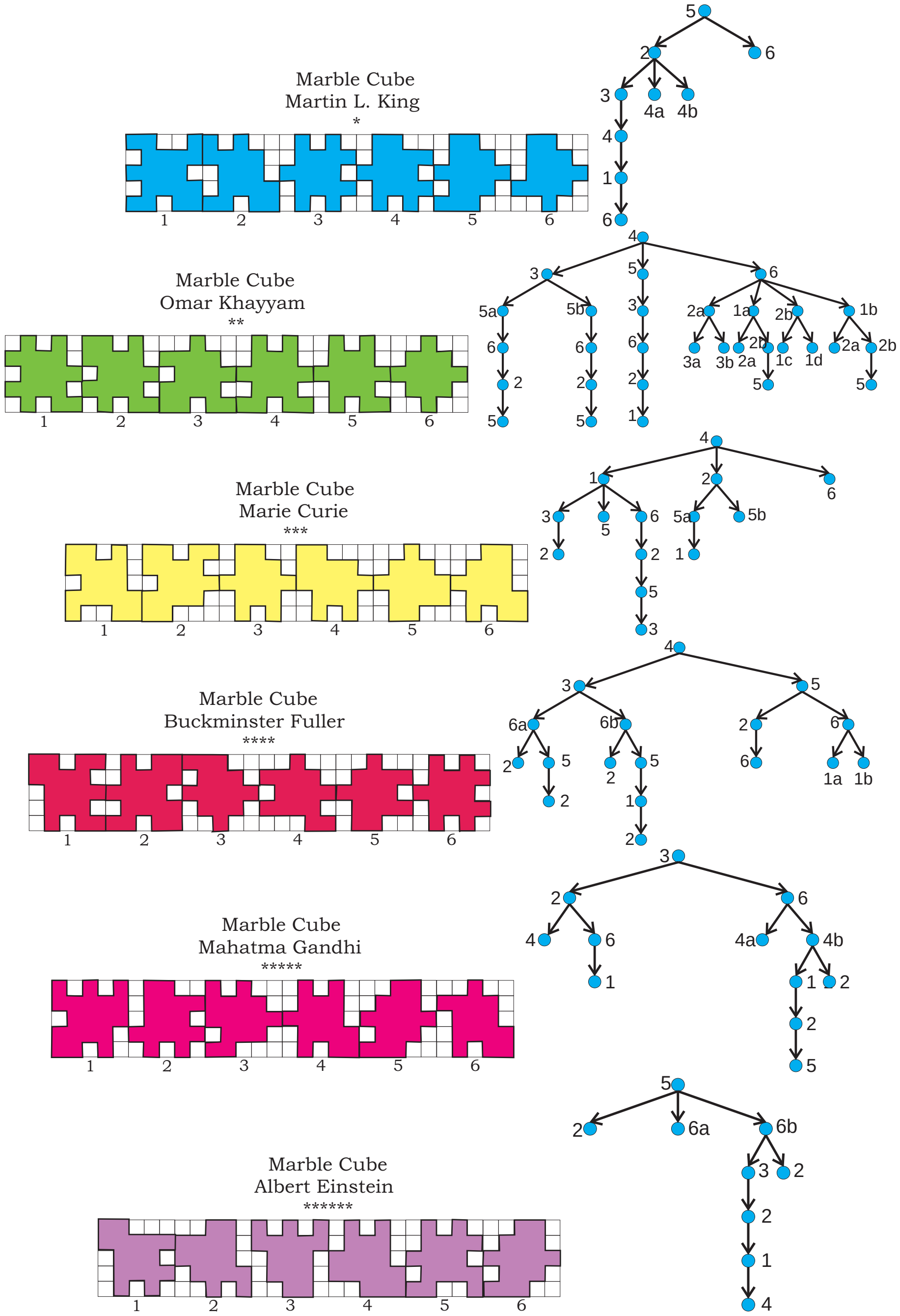


FIGURA 12.28. Grafurile cuburilor din setul Marble

cubului Omar Khayyam, însă, $cs_5 = 3$, deci acest cub are trei rezolvări diferite. Aceste rezolvări se pot vedea în figurile 12.35 şi 12.36.

Cu ajutorul grafurilor vom putea determina, de asemenea, numărul încercărilor nereuşite. Fiecare ramură pe care nu am putut ajunge la nivelul 5 nu ne-a oferit nicio soluţie, deci toate aceste ramificaţii ale grafului s-au dovedit fără succes pe parcursul încercărilor noastre. Să notăm pur şi simplu cu sp numărul acestor încercări nereuşite. Astfel, de exemplu, în cazul cubului Watt, $sp = 1$, după cum se vede şi în figura 12.19. Pe baza grafurilor, acest număr poate fi determinat cu uşurinţă şi în cazul celorlalte cuburi, numerele fiind cuprinse în următorul tabel:

Profi	sp	**Marble**	sp
Confusius	13	King	3
Da Vinci	14	Khayyam	8
Marco Polo	11	Curie	5
Rubens	12	Fuller	6
Watt	1	Gandhi	4
Newton	2	Einstein	3

8. Clasificările rezultate în urma analizelor teoretice

Pentru a ne forma o imagine şi mai complexă despre aceste cuburi, să analizăm încă trei factori în cazul fiecărui cub, după cum urmează:

(1) Probabilitatea montării unui cub, fără paşi backtracking, adică probabilitatea montării dintr-o singură încercare.
(2) Numărul mediu al paşilor necesari pentru montarea cubului cu paşi backtracking.
(3) Raportul dintre numărului ramurilor de la ultimul nivel şi numărul total al ramurilor (acest raport exprimă probabilitatea condiţionată a apariţiei rezolvării relativ la obţinerea unei configuraţii, care nu poate fi continuată).

Calculând separat aceşti indici pentru fiecare cub, obţinem trei clasificări diferite. Aceste clasificări sunt cuprinse în următorul tabel:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
r_7	8	5	6	7	9	12	10	11	1	3	4	2
r_8	6	8	12	5	7	11	9	10	1	3	4	2
r_9	8	5	6	7	12	11	9	10	1	3	4	2

Numerele $1, 2, \ldots, 6$ indică cuburile setului Profi în ordinea crescătoare a numărului steluţelor, iar numerele $7, 8, \ldots, 12$ cuburile setului Marble, tot în ordinea crescătoare a numărului steluţelor. Cuburile au fost clasificate pe baza indicilor cs_k, $1 \leq k \leq 5$. Mai exact, pe baza ordinii crescătoare a sumelor

$$cs_1,\ cs_1 + cs_2, \ldots, \sum_{k=1}^{5} cs_k.$$

Am procedat în mod asemănător şi în cazul indicelui *sp*. Astfel putem interpreta, împreună cu clasificările r_7, r_8, r_9, 9 şiruri teoretice posibile.

9. Analiza cuburilor prin activităţile organizate pentru montarea lor

Am organizat activităţi de montare a cuburilor cu scopul de a efectua şi analiza lor practică, nu numai teoretică. Scopul nostru a fost examinarea relaţiei între ordinea de complexitate determinată teoretic şi ordinea pe baza timpului de montare a cuburilor. Am fost curioşi în ce măsură coincid sau, dimpotrivă, în ce măsură diferă cele două clasificări. La aceste activităţi au participat în total peste 120 de elevi şi studenţi, astfel am reuşit să adunăm 120 de rezultate. Cu ocazia unei întâlniri au participat în general 10-15 elevi, uneori în grupuri mixte elevi-studenţi.

Fiecare participant a trebuit să monteze toate cele 12 cuburi; între timp, noi am măsurat perioada necesară montării fiecărui cub în parte. Înaintea montării cronometrate, fiecare a avut posibilitatea să monteze două cuburi, ce nu făceau parte din setul examinat. Am făcut acest exerciţiu pentru ca elevii să aibă ocazia de a cunoaşte caracterul cuburilor, să vadă cum se construieşte un cub din şase feţe şi – ceea ce este mai important – să-şi creeze o strategie utilă şi pentru montarea altor cuburi. Această introducere poate fi numită şi etapa de instruire pentru montare. După această etapă, elevii au primit pe rând câte un cub din seturile pe care le-am studiat. Cuburile au fost distribuite

FIGURA 12.29. Activitatea de montare a cubului

în ordine aleatorie. În mod firesc nu toată lumea şi-a găsit din prima încercare o metodă eficientă sau un punct de pornire corespunzător, unii au rezolvat problema mai uşor, alţii au avut nevoie de mai mult timp pentru a monta cubul. Succesul însă a adus o mare bucurie fiecăruia dintre elevi.

FIGURA 12.30. Toată lumea s-a bucurat de succes

FIGURA 12.31. Mai devreme sau mai târziu şi acestea se vor transforma în cub...

Primele 60 de rezultate provin de la studenţi cu specialitatea matematică sau matematică-informatică şi de la elevi de liceu, iar ultimele 60 de la studenţi la informatică sau inginerie informatică. Datele adunate au fost prelucrate şi analizate. Pentru început, am efectuat examinarea omogenităţii celor 120 de rezultate. Am aflat că şirul complet de date nu este omogen. După aceea, pe baza primelor 60 de rezultate ale măsurătorilor, am redactat o dendrogramă, apoi încă una separat pentru ultimele 60 de rezultate. Aceste două dendrograme pot fi văzute în figura 12.32. După ce am efectuat examinarea omogenităţii, am constatat că primele 60 de rezultate măsurate constituie deja un eşantion relativ omogen. Astfel, nu merită să lucrăm cu şirul de date întreg, primele 60 de date sunt suficiente. În continuare, am executat câteva calcule pe baza eşantioanelor omogene. Am obţinut următoarele clasificări:

(1) Clasificarea după timpul mediu de montare: a_i.
(2) Clasificarea după timpul mediu de montare, fără a lua în considerare datele extreme (cele mai mici 10% şi cele mai mari 10%): b_i.
(3) Clasificarea după timpul median: c_i.
(4) Clasificarea obţinută pe baza clasificării (clusterizării) ierarhice: d_i.

Aceste clasificări au fost reunite în tabelul de mai jos:

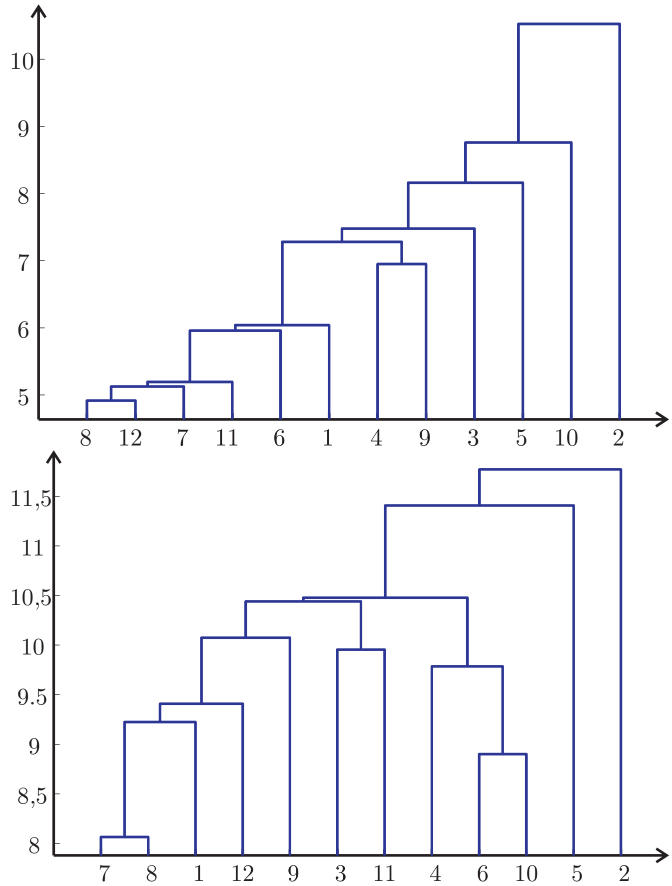


FIGURA 12.32. Dendrogramele obţinute din primele 60 şi din ultimele 60 de rezultate măsurate

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_i	8	12	7	11	10	1	6	4	5	3	9	2
b_i	8	12	7	11	6	10	4	1	5	9	3	2
c_i	8	12	7	11	5	6	9	10	1	3	4	2
d_i	7	12	8	5	11	6	1	4	10	9	3	2

Putem observa că primele două clasificări nu corespund exact. Diferenţa este cauzată de datele extreme foarte ridicate ale măsurătorilor. Au fost elevi care au petrecut foarte mult timp cu un singur cub (în unele cazuri peste o oră), ceea ce a dus la decalaje mari. Putem observa de asemenea că, având în vedere timpul mediu de montare, cubul Watt a rămas în urmă, cu toate că graful ne-a indicat un cub uşor de montat. Este posibil ca majoritatea elevilor să nu fi găsit poziţia de pornire, din acest motiv fiind nevoiţi să încerce mult mai multe posibilităţi, ceea ce în mod firesc le-a luat mai mult timp.

Clasificarea a fost efectuată cu ajutorul programului Matlab, rezultatul obţinut apare în figura 12.33.

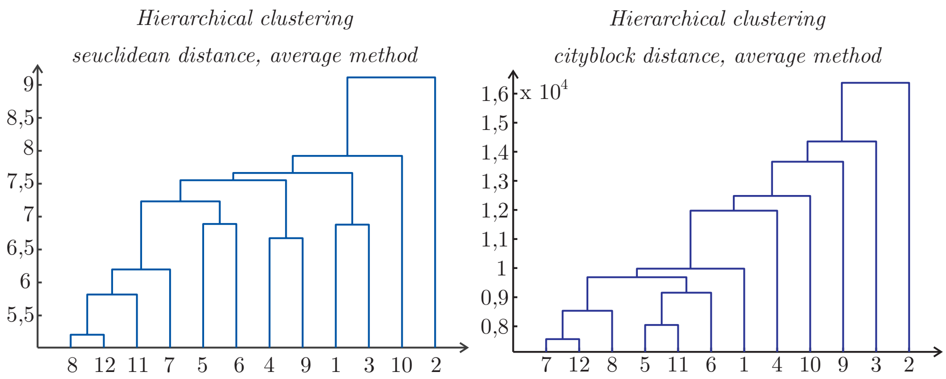


FIGURA 12.33. Clasificare pe baza rezultatelor măsurătorilor

În cele din urmă, putem stabili următoarea ierarhie practică bazată pe observaţii şi pe ierarhiile a_i, b_i, c_i, d_i:

Setul I: 8,12,7,11,5,6; Setul II: 1,4,10,9,3,2.

10. Compararea observaţiilor teoretice cu cele practice

Peste 50% din dispersia clasamentelor practice poate fi explicată folosind un singur criteriu ierarhic teoretic şi, în general, 2-3 clasificări teoretice explică $75-80\%$ din varianţele clasificărilor practice. Efectuând analiza factorială, am constatat următoarele:

- Clasificarea după valorile medii se corelează cel mai bine cu clasificarea constituită pe baza numărului ramurilor de pe grafuri.
- După eliminarea valorilor extreme, clasificarea bazată pe valorile medii se corelează cel mai bine cu clasificarea constituită pe baza sumei primilor doi indici de complexitate.

- Clasificarea obţinută prin calcularea timpului median se corelează cel mai bine cu clasificarea obţinută prin primul indice de complexitate.
- Clasificarea obţinută cu ajutorul clusterizării se corelează cel mai bine cu clasificarea obţinută din numărul mediu al paşilor (backtracking) necesari pentru montarea unui cub.

10.1. Observaţii finale. După analiza teoretică şi practică a cuburilor Happy Cube putem trage următoarele concluzii:

- Am putut observa că participanţii au folosit pe parcursul montării paşi backtracking sau greedy; au fost unii elevi care nu au folosit nicio strategie, au încercat în mod aleator posibilităţile.
- Putem afirma cu certitudine că ordinea de dificultate stabilită de firma producătoare este total greşită. Este evident şi faptul că nu Marble Cube este setul cel mai dificil. Totodată, firma producătoare nu a luat în considerare complexitatea montării cuburilor când a realizat seturile Profi sau Marble.
- În consecinţă, propunem următoarea ordine de dificultate:

  Setul I: Omar Khayyam, Mahatma Gandhi, Albert Einstein, Watt, Newton, Martin Luther King;

  Setul II: Marie Curie, Buckminster Fuller, Confusius, Marco Polo, Da Vinci, Rubens.

Examinarea cuburilor a durat practic mai mulţi ani şi pe parcursul ei am avut nevoie de o muncă în echipă bine coordonată. Astfel, majoritatea activităţilor de montare a cuburilor au fost conduse de Andrea Bartos Kocsis, tot ea redactând şi prima versiune a acestui capitol. Analiza computerizată a fost executată de Szilárd András şi Kinga Sipos, programele de joacă au fost scrise de István Sipos, Tamás Sipos şi István Máté. Datorăm, de asemenea, mulţumiri doamnelor Anna Soós şi Judit Szilágyi precum şi celor 120 de elevi şi studenţi care au participat la activităţile noastre.

11. Rezolvările cuburilor

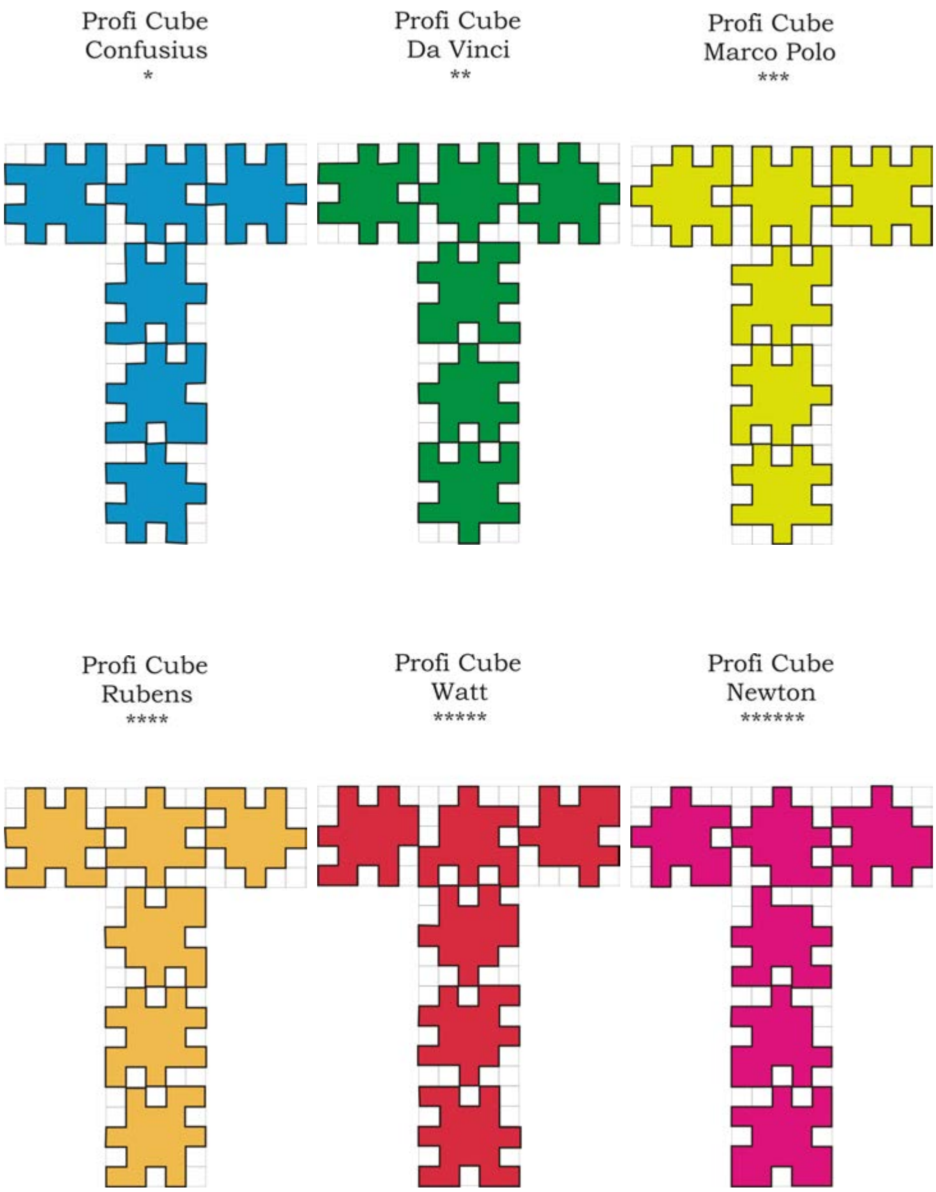


FIGURA 12.34. Rezolvările setului Profi Cube

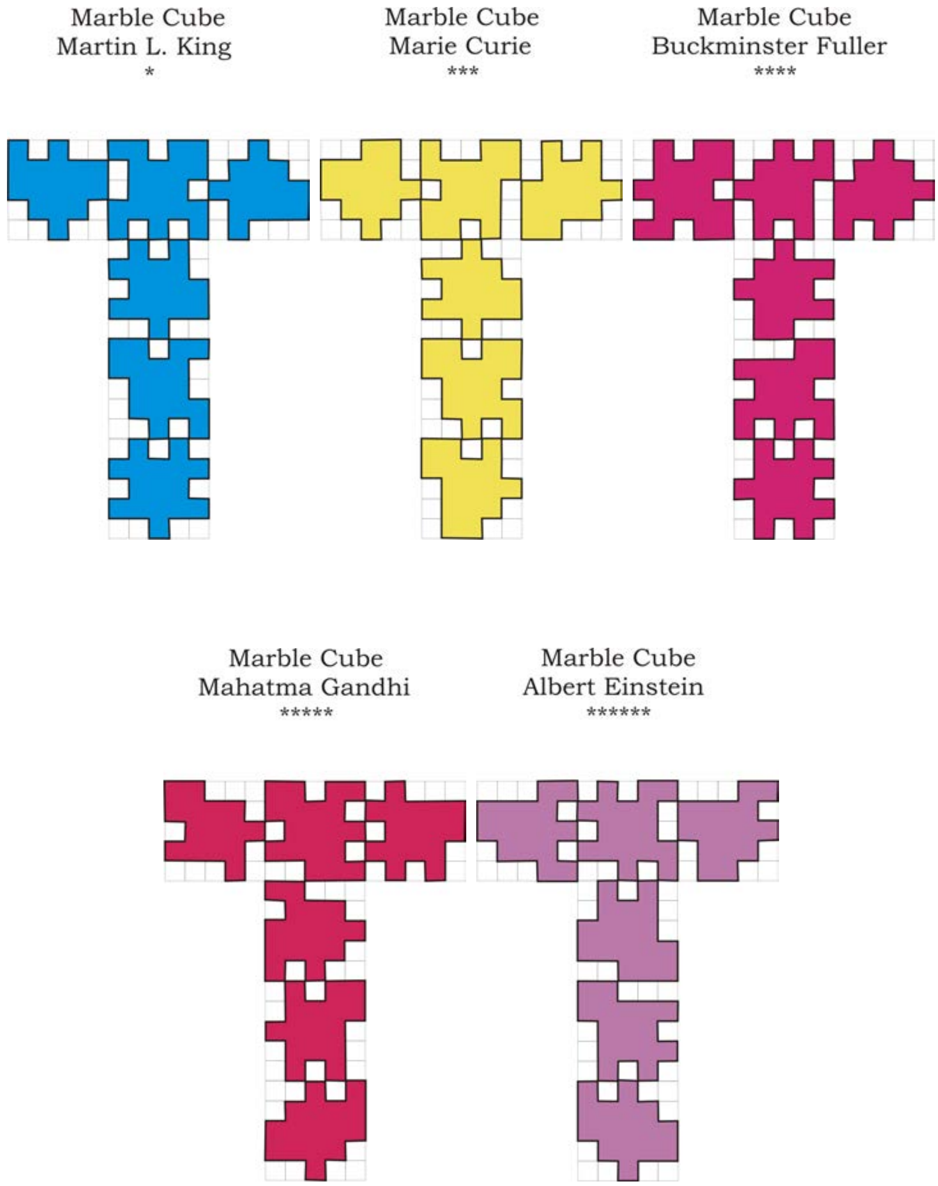


FIGURA 12.35. Rezolvările setului Marble Cube fără cubul Omar Khayyam

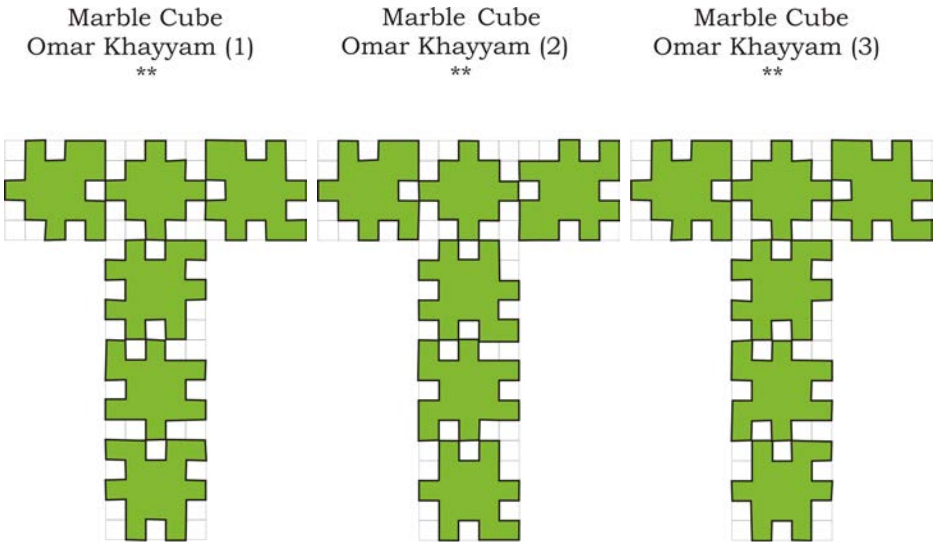


FIGURA 12.36. Rezolvările cubului Omar Khayyam

Bibliografie

[1] András Szilárd: *Dinamikus rendszerek*, Editura Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 2008

[2] András Szilárd, Nagy Örs: *Kíváncsiság vezérelt matematika oktatás*, Új útak és módok az oktatásban - conferinţă, 2010

[3] András Szilárd, Nagy Örs: *Measuring with unscaled pots - algorithm versus chance*, The Electronic Journal of Mathematics and Technology, 4(2010):3

[4] András Szilárd, Szilágyi Judit: *Modelling drug administration regimes for asthma: a Romanian experience*, Teaching Mathematics and its Applications 2010 29(1):1-13; doi:10.1093/teamat/hrp017

[5] András Szilárd, Szilágyi Judit: *A modelling experience in Romania*, DQME II report

[6] András Szilárd, Kinga Sipos, Anna Soós: Welke Wirrel Warrel is moeilijker?, Nieuw Archief voor Wiskunde, 2(2011), 121-126

[7] András Szilárd, Szilágyi Judit: *Tankönyv a X. osztály számára*, Editura Ábel, Cluj, 2003

[8] András Szilárd: *The centroid of some generalized pedal configurations*, Sutra: International Journal of Mathematical Science Education, Technomathematics Research Foundation Vol. 4, No. 1, pp. 59- 72, 2011

[9] András Szilárd, Szilágyi Zsolt: *Geometria II*, Editura Státus, Miercurea Ciuc, 2006

[10] András Szilárd: Constructing with nonstandard bricks, Australian Mathematics Teacher, Vol. 68, No. 4, pp. 23-29, 2012

[11] Werner Blum, Peter L.: *Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI study*, Springer, 2007

[12] Spencer Kagan: *Cooperative Learning*, Kagan Cooperative Learning, ed. a 2-a, 1994

[13] Werner Blum: *Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht - Herausforderung für Schüler und Lehrer*, 8-23, Franzbecker Verlag, Hildesheim, 2006

[14] Joel M. Cooper: *Cognitive dissonance-fifty years of a classic theory*, Sage Publications, 2007

[15] Kajsa Bråting, Johanna Pejlare: *Visualizations in mathematics*, Erkenntnis 68 (2008), no. 3, 345–358.

[16] H.S.M. Coxeter, S.L. Greitzer: *Geometry Revisited*, The Mathematical Association of America, 1967

[17] W.L. Curlette: *The Randomized Response Technique: Using Probability Theory to ask Sensitive Questions*, Mathematics Teacher, 73(1980):8, 618-621.

[18] R. Diepgen, W. Kuypers, K.H. Rüdiger: *Mathematik*, Sekundarstufe II. Stochastik, Berlin: Cornelsen 1993, p. 83.

[19] Christoph Drösser: *Csábító számok*, Atheneum, Budapest, 2008

[20] Fejes Tóth László: *Regular Figures*, Pergamon Press, 1964

[21] Fodor Ferenc: *The Densest Packing of 19 Congruent Circles in a Circle*, Geometriae Dedicata 74: 139-145, 1999 11.

[22] Marcus Giaquinto: *Visual thinking in mathematics. An epistemological study*, Oxford University Press, Oxford, 2007.

[23] Peter Galbraith, Werner Blum, George Booker: *Mathematical modelling: teaching and assessment in a technology-rich world*, Horwood Publishing Limited, 1998

[24] Hans-Wolfgang Henn: *Warum manchmal Katzen vom Himmel fallen oder von guten und von schlechten Modelle*, H. Hischer: Modellbildung, Computer und Mathematikunterricht, pp. 9-17, Franzbecker Verlag, Hildesheim, 2000

[25] Hannelore Lisei, Sanda Micula, Soós Anna: *Probability Theory trough Problems and Applications*, Presa Universitară Clujeană, Cluj, 2006

[26] K. Krüger: *Ehrliche Antworten auf indiskrete Fragen: Anonymisierung von Umfragen mit der Randomized Response Technik.* - Henn, H.-W., Maaß, K: Materialien für einen realitätsbezogenen MU. Istron-Band 8(2004), 118 - 127.

[27] P.T. Liu, L.P. Chow: *A new discrete quantitative randomized response models for quantitative data*, Journal of the American Statistical Association, 71(1976), 72-73.

[28] Lyn D. English: *Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images*, Studies in Mathematical Thinking and Learning, Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Mahwah, NJ, 1997

[29] Roger B. Nelsen: *Proofs Without Words–Exercises in Visual Thinking*, The Mathematical Association of America, 1993

[30] Roger B. Nelsen: *Proofs without words II*, The Mathematical Association of America, 2000

[31] Laura R. Novick, Sean M. Hurley: *To Matrix, Network, or Hierarchy: That Is the Question*, Cognitive Psychology 42, 158-216 (2001)

[32] M. Pantziara, A. Gagatsis,I. Elia: Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems, Educ Stud Math (2009) 72:39-60

[33] Ruszev-Ruszeva: *Matematikai mozaik*, Móra, Budapest, 1982

[34] Soós Anna: *A valószínűségszámítás elemei*, Presa Universitară Clujeană, Cluj, 2001

[35] http://www2.stetson.edu/ efriedma/

[36] Terembecki Csaba: *A Végtelen Világvége Hotel és más történetek*, Kaposvár, 2007

[37] Tuzson Zoltán: *Töltogetéses feladatokról*, Abacus Matematikai Lapok 10-14 éveseknek, 3(1997):6-8

[38] Tuzson Zoltán: *Hogyan oldjunk meg aritmetikai feladatokat?*, Editura Ábel, Cluj, 2005

[39] Stanley L. Warner: *Randomized Response: A Survey Technique for Eliminating Evasive Answer Bias*, Journal of the American Statistical Association, 60(1965), 63- 69.