IX. Radó Ferenc Emlékverseny
2006, december 8.-9.
Kolozsvár

IX. osztály

1. a) Határozd meg az x, y és z természetes számokat, ha

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1.$$

b) Bizonyítsd be, hogy minden $n \geq 3$ természetes szám esetén léteznek olyan $x_1, \ldots, x_n$ páronként különböző természetes számok, amelyekre $\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}=1$.

***

2. Bizonyítsd be, hogy ha $\{x^n\}=\{x^{n+1}\}=\{x^{n+2}\}$, ahol n természetes szám, $x \in \mathbb{R}$ és $\{a\}$ az a valós szám törtrésze, akkor $x \in \mathbb{Z}$.

***

3. a) Bizonyítsd be, hogy, ha a és b szigorúan pozitív számok, akkor

$$a^4+b^4 \geq ab\left(a^2+b^2\right).$$

b) Bizonyítsd be, hogy ha $a, b, c>0$ és $abc \geq 1$, akkor

$$\frac{1}{a^4+b^4+c}+\frac{1}{b^4+c^4+a}+\frac{1}{c^4+a^4+b} \leq 1.$$

Mircea Lascu

4. Az ABC háromszög BC, CA és AB oldalára vegyük fel rendre az M, N és P pontot úgy, hogy $\frac{BM}{MC}=1$, $\frac{CN}{NA}=\frac{1}{2}$ és $\frac{AP}{PB}=\frac{1}{2}$.

a) Fejezd ki az M, N és P pont helyzetvektorát az A, B és C helyzetvektorának függvényében, majd az A, B és C helyzetvektorát az M, N és P helyzetvektorának függvényében.

b) Szerkeszd meg az A, B és C pontot, ha ismert az M, N és P pont helyzete.

***

5. Az $ABCDA'B'C'D'$ kocka éleinek hossza n. Osszuk fel minden élét egységnyi hosszúságú szakaszokra és húzzuk meg az osztópontok által meghatározott összes olyan síkot, amely párhuzamos a kocka valamelyik lapjával. Az így kapott síkok egymáson és a kocka lapjain összesen $(n+1)^3$ pontot határoznak meg (minden ilyen pontra három sík illeszkedik). Hány különböző módon jelölhetünk meg 8 pontot az előbbiek közül úgy, hogy azok egy kocka csúcsai legyenek?

***

6. Igazold, hogy bárhogyan fedünk le egy 6×6-os négyzetet 1×2-es dominókkal (a dominók közt nincs átfedés és a négyzetet teljesen befedik), mindig létezik olyan egyenes, amely áthalad a négyzeten és egyetlen dominót sem vág két részre. Igaz-e az állítás egy 8×8-as négyzet esetén?

Demeter Albert

IX. Radó Ferenc Emlékverseny
2006, december 8.-9.
Kolozsvár

IX. osztály

MEGOLDÁSOK

1. a) Ha az x, y, z számok közül egyik sem kisebb, mint 3, akkor $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{3}$, $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{3}$ és $\frac{1}{z} \leq \frac{1}{3}$, tehát $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 1$ és egyenlőség pontosan akkor van, ha $x = y = z$. Másrészt, ha az $\{x, y, z\}$ halmazban van 1-es, akkor $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 1$. Ez alapján az $(x, y, z) = (3, 3, 3)$ megoldástól különböző megoldások esetén az $\{x, y, z\}$ halmazban van 2-es. A szimmetria alapján feltételezhetjük, hogy $z = 2$. Így az $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ egyenletet kell megoldanunk. Ebből következik, hogy $y = \frac{2x}{x-2} = 2 + \frac{4}{x-2} \in \mathbb{N}$, tehát $x - 2$ osztója a 4-nek. Megvizsgálva a lehetséges eseteket az $(x, y) = (3, 6)$, $(x, y) = (4, 4)$ illetve $(x, y) = (6, 3)$ megoldásokat kapjuk. Tehát az eredeti egyenlet megoldáshalmaza:
$M = \{(3,3,3), (2,3,6), (2,6,3), (3,2,6), (3,6,2), (6,2,3), (6,3,2), (2,4,4), (4,2,4), (4,4,2)\}$.
b) $n = 3$ esetén az $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ és $x_3 = 6$ megoldás megfelel.
Másrészt $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = 1$, tehát $n = 4$ esetén az $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$ és $x_4 = 12$ egy megoldás. A továbbiakban a matematikai indukció módszerét használjuk. Ha $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} = 1$, és az $x_1, x_2, ..., x_n$ számok páronként különböznek, akkor egyikük sem 1-es, tehát az

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2x_1} + ... + \frac{1}{2x_n}$$

egyenlőség alapján a $1 \leq i \leq n$ egy megoldása a vizsgált egyenletnek $(n+1)$ esetén. A matematikai indukció elve alapján minden $n \geq 3$ esetén létezik olyan $x_1, x_2, ..., x_n$, amelyekre teljesülnek a kért feltételek.
2. A $\{a\} = \{b\}$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a - b \in \mathbb{Z}$, tehát létezik olyan $p, q \in \mathbb{Z}$, amelyekre

$$x^{n+1} - x^n - p = 0 \text{ és} \qquad (1)$$
$$x^{n+2} - x^{n+1} - q = 0 \qquad (2)$$

Ha szorozzuk az előbbi egyenlőségek közül az első mindkét oldalát x-szel és az így kapott egyenlőség megfelelő oldalait kivonjuk a második egyenlőség két oldalából, akkor az $xp = q$ egyenlőséghez jutunk. Ha $p = 0$, akkor az $x^{n+1} - x^n = 0$ egyenlőséghez jutunk, ahonnan $x \in \{0,1\} \subset \mathbb{Z}$. Ha $p \neq 0$, akkor $x = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$. Az előbbi törtet irreducibilis alakba írjuk, tehát létezik olyan $u, v \in \mathbb{Z}$, amelyekre $v \neq 0$ és $(u,v) = 1$ valamint $x = \frac{u}{v}$. Ha ezt visszahelyettesítjük az (1) összefüggésbe, az

$$u^{n+1} = v(u^n + pv^n)$$

egyenlőséghez jutunk, ahonnan következik, hogy u^{n+1} osztható v-vel. Ha $v \neq 1$, akkor ez ellentmond annak, hogy u és v relatív prímek. Így csak a $v = 1$ eset lehetséges, tehát $x \in \mathbb{Z}$.

3. a) Az $a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2)$ egyenlőtlenség ekvivalens az $(a-b)^2(a^2+ab+b^2) \geq 0$ egyenlőtlenséggel, ami nyilvánvalóan igaz.

b) Alkalmazzuk az a) pontban igazolt egyenlőtlenséget, ekkor a bizonyítandó egyenlőtlenség a következőképpen alakul $\sum \frac{1}{a^4 + b^4 + c} \leq \sum \frac{1}{ab(a^2 + b^2) + c}$. Mivel $abc \geq 1$ ezért $c \geq \frac{1}{ab}$, tehát

$$\sum \frac{1}{ab(a^2 + b^2) + c} \leq \sum \frac{1}{\frac{1}{c}(a^2 + b^2) + c} = \sum \frac{c}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Tehát elégséges igazolni, hogy $a + b + c \leq a^2 + b^2 + c^2$.

Másrészt $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$ és $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \geq 3$, tehát $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \geq \frac{a+b+c}{3}$, vagyis a bizonyítás teljes.

4. A szakaszt adott arányban osztó pont helyzetvektorára vonatkozó összefüggés alapján írhatjuk, hogy

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}\right)$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right).$$

Ezt a három egyenletet tekintsük egy egyenletrendszernek az $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ és $\overrightarrow{OC}$ ismeretlenekkel. Ha a második egyenlőség mindkét oldalát szorozzuk kettővel és kivonjuk a harmadik egyenlőség megfelelő oldalaiból, akkor a

$$6\overrightarrow{ON} - 3\overrightarrow{OP} = 4\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$

egyenlőséghez jutunk (a törtek eltűntetése után), tehát (felhasználva az $\overrightarrow{OM}$ kifejezését)

$$5\overrightarrow{OC} = 6\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OM} - 3\overrightarrow{OP}.$$

Hasonló módon kapjuk, hogy

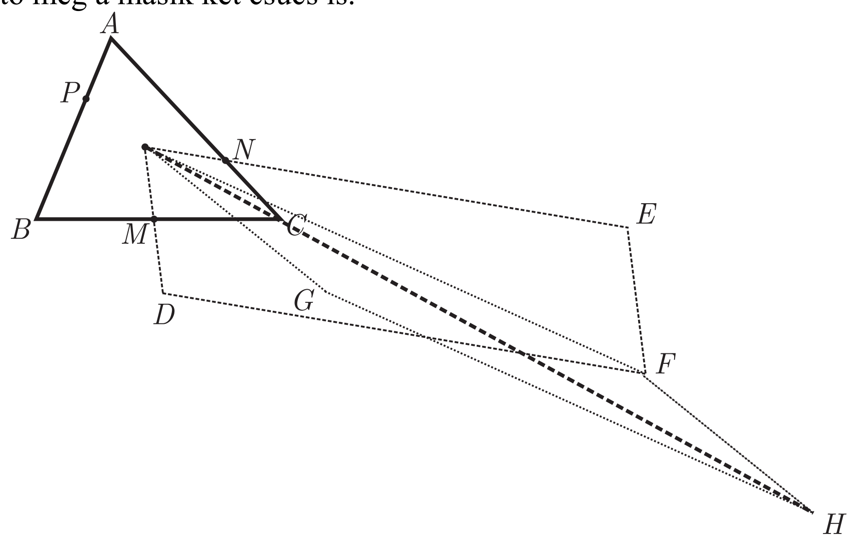
$$5\overrightarrow{OB} = 8\overrightarrow{OM} - 6\overrightarrow{ON} + 3\overrightarrow{OP} \text{ és}$$

$$5\overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{ON} - 4\overrightarrow{OM} + 6\overrightarrow{OP}\,.$$

Az utóbbi három egyenlőség alapján egyértelműen elvégezhető a szerkesztés. Vegyünk fel egy tetszőleges O pontot, majd az ON egyenesen az E pontot úgy, hogy $OE = 6ON$, az OM egyenesen a D pontot úgy, hogy $OD = 2OM$ és végül az OP egyenesen a G pontot úgy, hogy $OG = 2OP$ és $O \in (PG)$. Az OE-re és OD-re szerkesztett $OEFD$ paralelogramma F csúcsára $\overrightarrow{OF} = 6\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OM}$. Az OF-re és OG-re szerkesztett $FOGH$ paralelogramma H csúcsára pedig

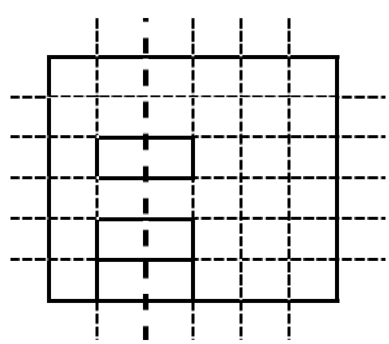
$$\overrightarrow{OH} = 6\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OM} - 3\overrightarrow{OP}\,,$$

ezért a C pontot megkaphatjuk, ha öt részre osztjuk az OH szakaszt. Hasonlóan szerkeszthető meg a másik két csúcs is.

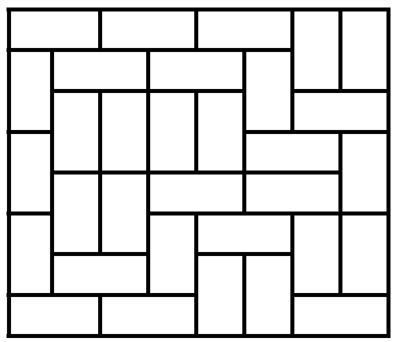


5. Összeszámoljuk a kockákat az élük hossza szerint. Egy darab n oldalhosszúságú kockát lehet kiválasztani, $2^3 = 8$ darab $(n-1)$ oldalhosszúságút, $3^3 = 27$ darab $(n-2)$ oldalhosszúságút és általában k^3 darab $(n-k+1)$ oldalhosszúságút. Így összesen $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ kockát lehet kiválasztani.

6. Összesen 5 darab függőleges és 5 darab vízszintes rácsegyenes van. Igazoljuk, hogy minden ilyen egyenes páros sok dominót metsz.



Ha páratlan sokat metszene, akkor a két keletkező rész tartalmazna valahány teljes dominót és páratlan sok egységnégyzetet, tehát mindkét rész páratlan sok egységnégyzetből állna. Ez ellentmondás (mert az oldalhossz 6), tehát a rácsegyenesek páros sok dominót metszenek. Ha nem lenne olyan rácsegyenes, amely egyetlen dominót sem szel ketté, akkor minden rácsegyenes legalább 2 dominót metszene. De egy dominót egynél több rácsegyenes nem metszhet, ezért legalább $2(5+5)=20$ dominó kell legyen a négyzeten. Másrészt a lefödés pontosan $\frac{36}{2}=18$ dominóból áll, tehát a feltételezésünk hamis és így létezik legalább egy olyan rácsegyenes, amely nem metsz egyetlen dominót sem.
8×8-as esetén nem igaz az állítás, a mellékelt ábrán látható egy ellenpélda.



IX. Radó Ferenc Emlékverseny
2006, december 8.-9.
Kolozsvár

X. osztály

MEGOLDÁSOK

1. Két számnak az n-nel való osztási maradéka pontosan akkor ugyanaz, ha a különbségük osztható n-nel. Az f függvény injektív, tehát minden $0 \le i \ne j \le n-1$ esetén $f(i) \ne f(j)$, azaz, ha $i \ne j$, akkor

$$\left[(ai^2 + bi + c) - (aj^2 + bj + c)\right] \not\vdots\, n \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[a(i-j)(i+j) + b(i-j)\right] \not\vdots\, n \Leftrightarrow (i-j)[a(i+j)+b] \not\vdots\, n\,.$$

Ez utóbbi összefüggésből következik, hogy $[a(i+j)+b] \not\vdots\, n$, ha $0 \le i \ne j \le n-1$, vagyis $ak + b \not\vdots\, n$, ha $0 \le k \le 2n-3$, ami egyenértékű azzal, hogy $ak + b \not\vdots\, n$, ha $0 \le k \le n-1$. Eszerint az b, $a+b$, $2a+b$, ..., $(n-1)a+b$ számoknak az n-nel való osztási maradékai a $\{1,2,3,\dots,n-1\}$ halmazban vannak. Így az előbbi számok közt van legalább kettő, amelynek ugyanaz az n-nel való osztási maradéka. Tehát létezik $0 \le i < j \le n-1$ úgy, hogy $[(ja+b)-(ia+b)] \vdots\, n$. Ez azt jelenti, hogy $(j-i)a \vdots\, n$, tehát amiatt, hogy $0 < j - i < n-2$ az n nem lehet relatív prím az a-val. Ugyanakkor az előbbiek alapján a b nem osztható n-nel, tehát a bizonyítás teljes.

2. Minden $1 \le i \le n$ szám esetén felírjuk a számtani-harmonikus középarányosok közti egyenlőtlenséget az $\underbrace{\frac{1}{a_i}, \frac{1}{a_i}, \dots, \frac{1}{a_i}}_{(n-1)-szer}, \frac{1}{a_{i+1}}$ számokra ($a_{n+1} = a_1$):

$$\frac{n}{\underbrace{a_i + \dots + a_i}_{(n-1)-szer} + a_{i+1}} \le \frac{\frac{1}{a_i} + \dots + \frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_{i+1}}}{n}, \text{ azaz}$$

$$\frac{n}{(n-1)a_i + a_{i+1}} \le \frac{\frac{n-1}{a_i} + \frac{1}{a_{i+1}}}{n}.$$

Mindkét oldalt $1 \le i \le n$ szerint összegezve kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{(n-1)a_i + a_{i+1}} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{n-1}{a_i} + \frac{1}{a_{i+1}}}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i},$$

ezt pedig n-nel elosztva a keresett egyenlőtlenséghez jutunk.

3. A megoldás során többször is felhasználjuk azt, hogy az $f(x) = a^x$ $(a \in \mathbb{R}^*_+)$ függvény szigorúan csökkenő, ha $a < 1$, illetve szigorúan növekvő, ha $a > 1$.
Az egészrész értelmezése alapján $x - 1 < [x] \le x$, $[x] \in \mathbb{Z}$, tehát

$$3^{x-1}+4^{x-1}<3^{[x]}+4^{[x]}=5^x\leq 3^x+4^x.$$

Az első egyenlőtlenségből $\frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^x+\frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^x-1<0$. Az $f_1(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^x+\frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^x-1$ függvény szigorúan csökkenő, $f_1(-2)>0$, $f_1(-1)<0$, tehát az $f_1(x)=0$ egyenlet egyetlen x_0 gyökére $x_0\in(-2,-1)$. Így az $f_1(x)<0$ egyenlőtlenség megoldása $x>x_0>-2$.

A második egyenlőtlenségből $0\leq\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1$. Az $f_2(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1$ függvény szigorúan csökkenő és $f_2(2)=0$, így a $0\leq f_2(x)$ egyenlőtlenség megoldása $x\leq 2$.

A kapott eredmények alapján $x\in(-2,2]$.

- Ha $x\in(-2,-1)$, akkor $[x]=-2$, ezt visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe kapjuk, hogy

$$3^{-2}+4^{-2}=5^x\Leftrightarrow 5^x=\frac{25}{144}\Leftrightarrow x=\log_5\frac{25}{144}.$$

Ez az érték hozzátartozik a $(-2,-1)$ intervallumhoz:

$$-2=\log_5\frac{25}{625}<x=\log_5\frac{25}{144}<\log_5\frac{25}{125}=-1,$$

tehát $x=\log_5\frac{25}{144}=2-2\log_5 12$ megoldás.

- Ha $x\in[-1,0)$, akkor $[x]=-1$, $3^{-1}+4^{-1}=5^x\Leftrightarrow x=\log_5\frac{7}{12}\in[-1,0)$:

$$-1=\log_5\frac{1}{5}\leq x=\log_5\frac{7}{12}<\log_5 1=0.$$

- Ha $x\in[0,1)$, akkor $[x]=0$, $3^0+4^0=5^x\Leftrightarrow x=\log_5 2\in[0,1)$:

$$0=\log_5 1\leq x=\log_5 2<\log_5 5=1.$$

- Ha $x\in[1,2)$, akkor $[x]=1$, $3+4=5^x\Leftrightarrow x=\log_5 7\in[1,2)$:

$$1=\log_5 5\leq x=\log_5 7<\log_5 25=2.$$

- Könnyen ellenőrizhető, hogy $x=2$ is megoldás.

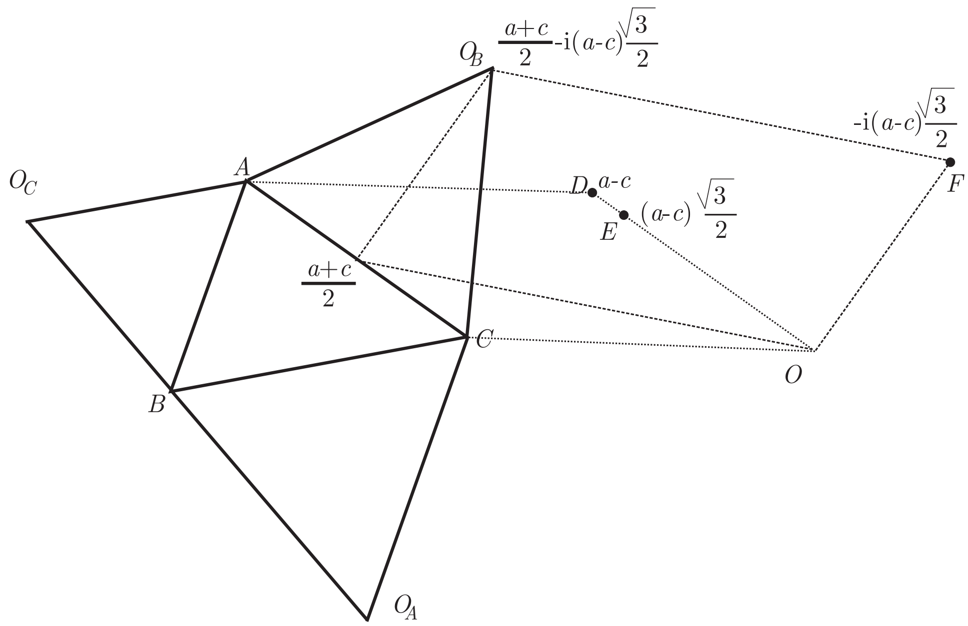
Tehát a megoldáshalmaz $M=\left\{\log_5\frac{25}{144},\ \log_5\frac{7}{12},\log_5 2,\ \log_5 7,\ 2\right\}$.

4. A mellékelt ábrának megfelelően választunk egy tetszőleges O pontot, az AC szakaszt eltoljuk úgy, hogy a C pont az O-ba kerüljön (így kapjuk a DO szakaszt), az OD-n felvesszük az E pontot úgy, hogy $OE=\frac{\sqrt{3}}{2}OD$, az OE szakaszt elforgatjuk negatív irányba 90°-kal (így kapjuk az OF szakaszt) és az OF szakaszt eltoljuk úgy, hogy az O pont az AC felezőpontjába kerüljön. Így az F pont az O_C pontba kerül, tehát írhatjuk, hogy

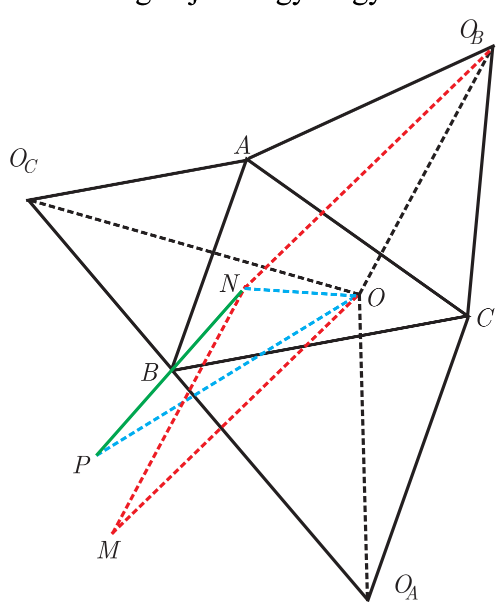
$$o_B=\frac{a+c}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}(a-c).$$

Hasonlóan

$$o_C = \frac{a+b}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}(b-a)$$
$$o_A = \frac{c+b}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}(c-b).$$



Az előbbi egyenlőségeket felfoghatjuk egy egyenletrendszernek az a, b és c ismeretlenekkel.



Ha megoldjuk a rendszert az

$$a=\frac{1}{2}\left(o_A+\varepsilon o_B-\varepsilon^2 o_C\right)$$
$$b=\frac{1}{2}\left(o_B+\varepsilon o_C-\varepsilon^2 o_A\right)$$
$$c=\frac{1}{2}\left(o_C+\varepsilon o_A-\varepsilon^2 o_B\right)$$

egyenlőségeket kapjuk, ahol $\varepsilon=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\varepsilon^3=-1$). A mellékelt ábrán látható, a c megszerkesztése.

OM az O_C-nek az O körüli 60°-os elforgatásából jön létre, $OMNO_B$ paralelogramma és OP az OO_A-nak az O körüli -60°-os elforgatásából jön létre. A rendszer megoldásából kapott egyenlőség pontosan azt fejezi ki, hogy a B pont az NP felezőpontja.

5. A k darab színnel színezett, $2n$ hosszúságú sálak száma k^{2n}. Az azonosítás miatt (lásd a figyelemfelkeltő példát a feladat szövegében) néhány sálat kétszer számoltunk. Pontosabban, minden olyan sálat, amely szimmetrikus színezésű (azaz a két szélétől egyenlő távolságra levő darabok színe megegyezik) egyszer, minden nem-szimmetrikus színezésű sálat pedig kétszer számoltunk. Tehát, ha S_n-nel, illetve A_n-nel jelöljük a szimmetrikus, illetve nem-szimmetrikus színezésű sálak számát, akkor $2A_n+S_n=k^{2n}$. Egy szimmetrikus színezésű sálat egyértelműen meghatározza az első n darabjának színe, így ezek száma $S_n=k^n$. Innen $A_n=\frac{k^{2n}-S_n}{2}=\frac{k^{2n}-k^n}{2}$. Mi a szimmetrikus és nem-szimmetrikus színezésű sálak összesített számára vagyunk kíváncsiak (és egy sál vagy szimmetrikus, vagy nem), azaz a keresett szám $A_n+S_n=\frac{k^{2n}+k^n}{2}$.

6. Ha $\overline{a_1a_2...a_k}$ az n 3-as számrendszerbeli reprezentációja, akkor minden megengedett művelet segítségével a reprezentációban szereplő számjegyek száma legfeljebb 1-gyel csökken. Ráadásul, ha kivonunk 1-et vagy 2-t, akkor a számjegyek száma csak abban az esetben csökken, ha $100...0$ vagy $1000...01$ alakú számból vonunk ki 1-et illetve 2-t. Az első esetben a számjegyek száma osztással is csökkenthető, a második esetben viszont a következő lépésben nem csökkenhet a számjegyek száma (a kapott szám nem osztható 3-mal és nem sorolható ismét be az előbbi két esethez) viszont két lépésben 2-vel csökkenthető a számjegyek száma ha csak 1-et vonunk ki és aztán osztunk 3-mal. Így látható, hogy a számjegyek számának a csökkentésére csak az osztást használhatjuk (ha nem szeretnénk a minimálisnál több lépésben eljutni az 1-eshez). Másrészt az előbbiekből az is kitűnik, hogy ha a kivonásokat nem arra használjuk, hogy 3-mal osztható eredményt kapjunk, akkor szintén nem a legkevesebb lépésben jutunk az 1-hez. Az előbbi észrevételek azt mutatják, hogy a szükséges lépésszám egyenlő $k-1+s+v$, ahol k az n-nek a 3-as számrendszerbeli reprezentációjában a számjegyek száma, s a reprezentációbeli nem nulla számjegyek száma és $v=0$, ha $a_1=2$ illetve $v=-1$, ha $a_1=1$. Így a minimális lépésszámot megadó lépéssorozat is egyértelműen meghatározott és a következő algoritmuson alapul: ha a szám osztható 3-mal, akkor osztunk 3-mal, ha nem akkor kivonjuk a 3-mal való osztási maradékot.

IX. Radó Ferenc Emlékverseny
2006, december 8.-9.
Kolozsvár

XI. osztály

MEGOLDÁSOK

1. Ha a pontok konvex burka egy k oldalú sokszög, akkor a belsejében $n-k$ pont van. Másrészt a behúzott szakaszok csak háromszög alakú tartományokat határozhatnak meg, ellenkező esetben további szakaszok behúzására van lehetőség. Így ha H-val jelöljük a keletkező háromszöglapok számát, akkor

$$H \cdot 180^\circ = (n-k)\cdot 360^\circ + (k-2)\cdot 180^\circ$$

vagyis $H = 2n-k-2$. Ebből látható, hogy a legtöbb háromszöglap akkor keletkezik, ha $k=3$ és ebben az esetben a keletkező háromszöglapok száma $H = 2n-5$. Ebben az esetben a szakaszok száma $\frac{1}{2}(3\cdot H+3) = 3n-6$ (mert mindenik háromszöglapnak 3 oldala van és a konvex burok 3 oldalán kívül mindenik él két háromszöghöz tartozik). A maximalitás belátható az Euler összefüggés alapján is, ha e az élek (behúzott szakaszok) száma, akkor

$$n-e+H=1$$

tehát e pontosan akkor maximális amikor a H maximális. Tehát akkor húzható be maximális számú szakasz, ha az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontok közül kiválasztható 3 úgy, hogy a többi pont a kiválasztottak által meghatározott háromszög belsejében legyen.

2. Jelölje $a \bmod b$ az $a\in\mathbb{N}$ számnak a $b\in\mathbb{N}^*$ számmal való osztási maradékát. Könnyű belátni, hogy a $\det A_k \bmod k$ maradék megegyezik a $\det B \bmod k$ maradékkal, ahol

$$B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & n-1 & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & n & 1 & 2 \\ \hline n-2 & n-1 & n & n-5 & n-4 & n-3 \\ n-1 & n & 1 & n-4 & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & n-3 & n-2 & n-1 \end{array}\right].$$

A $\det B$ kiszámolásához előbb lentről kezdve felfele mindegyik sorból kivonjuk a felette levő sort:

$$\det B=\left|\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 3 & n-2 & n-1 & n\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1-n\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1-n & 1\\ \hdashline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1-n & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-n & 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right|,$$

ezt még egyszer megismételjük, majd a legalsó sorból kiemelünk n -et:

$$\det B=\left|\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 3 & n-2 & n-1 & n\\ 0 & -1 & -2 & 3-n & 2-n & 1-2n\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n & n\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -n & 0 & 0 & 0\\ 0 & -n & n & 0 & 0 & 0\end{array}\right|=n\left|\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 3 & n-2 & n-1 & n\\ 0 & -1 & -2 & 3-n & 2-n & 1-2n\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n & n\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -n & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right|,$$

tehát $\det B \,\vdots\, n$.

Ha n nem lenne prím, akkor létezne valódi osztója, jelöljük k-val az n egy valódi osztóját. Az előzőek alapján $\det B \,\vdots\, n$ és $n \,\vdots\, k$, tehát $\det B \bmod k = 0$, így $\det A_k \bmod k = 0 \Leftrightarrow \det A_k \,\vdots\, k$ és ez ellentmond a $(\det A_k, n) = 1$ feltételnek.

3. Mivel $x_0 \in \mathbb{N}^*$ létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, amelyre $2^k \le x_0 < 2^{k+1}$. Így írhatjuk, hogy $x_0 = 2^k + v$, ahol $0 \le v < 2^k$. Ez alapján $[\log_2 x_0] = k$, tehát $x_1 = 2^{k+1} + v$, $x_2 = 2^{k+2} + v$ és indukcióval igazolható, hogy $x_n = 2^{n+k} + v$. Így tehát

$$x_n = 2^{n+[\log_2 x_0]} + x_0 - 2^{[\log_2 x_0]},\ n \ge 0.$$

Az explicit képlet alapján írhatjuk, hogy

$$2^{n+k} \le x_n < 2^{n+k+1},$$

tehát

$$2^{(n+1)k+\frac{n(n+1)}{2}} \le x_0 \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_n < 2^{(n+1)(k+1)+\frac{n(n+1)}{2}}$$

és így

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \sqrt{2}.$$

4. A modulus tulajdonságai alapján írhatjuk, hogy

$$\left|az + bz^2\right| \le |az| + \left|bz^2\right| \le |a||z| + |b|\left|z^2\right| \le |a| + |b|,$$

tehát az $f\left(C(0,1)\right) = \{f(z) \mid z \in C(0,1)\}$ halmaz az origó középpontú és $|a| + |b|$ sugarú zárt körlap része. Másrészt az előbbi egyenlőtlenségben egyenlőség is lehetséges, ha az az és bz^2 számok argumentuma egyenlő. Ha $a \cdot b \ne 0$, akkor az az argumentuma $\arg(a) + \arg(z)$ és a bz^2 argumentuma $\arg(b) + 2\arg(z)$, tehát egyetlen olyan z komplex szám létezik, amelyre $\left|z(az+b)\right| = |a| + |b|$. Így viszont az $a \cdot b$ esetben a képtartomány nem lehet egy körlap (mert a $|a| + |b|$ sugarú körlap kellene legyen, de ennek a pereméről csak egy pont tartozik a képtartományhoz). Tehát $a \cdot b = 0$. Ha

$a=0$, akkor a függvény $f(z)=bz^2$ és ez nem injektív, mert $f(-1)=f(1)$. Ha $b=0$, akkor $f(z)=az$. Ez a függvény pontosan akkor bijektív, ha $|a|=1$ és ebben az esetben az $\arg(a)$ szögű forgatásról van szó, tehát ez megőrzi a távolságot.

5. Ha $\overline{a_1 a_2 ... a_k}$ az n 3-as számrendszerbeli reprezentációja, akkor minden megengedett művelet segítségével a reprezentációban szereplő számjegyek száma legfeljebb 1-gyel csökken. Ráadásul, ha kivonunk 1-et vagy 2-t, akkor a számjegyek száma csak abban az esetben csökken, ha $100...0$ vagy $1000...01$ alakú számból vonunk ki 1-et illetve 2-t. Az első esetben a számjegyek száma osztással is csökkenthető, a második esetben viszont a következő lépésben nem csökkenhet a számjegyek száma (a kapott szám nem osztható 3-mal és nem sorolható ismét be az előbbi két esethez) viszont két lépésben 2-vel csökkenthető a számjegyek száma ha csak 1-et vonunk ki és aztán osztunk 3-mal. Így látható, hogy a számjegyek számának a csökkentésére csak az osztást használhatjuk (ha nem szeretnénk a minimálisnál több lépésben eljutni az 1-eshez). Másrészt az előbbiekből az is kitűnik, hogy ha a kivonásokat nem arra használjuk, hogy 3-mal osztható eredményt kapjunk, akkor szintén nem a legkevesebb lépésben jutunk az 1-hez. Az előbbi észrevételek azt mutatják, hogy a szükséges lépésszám egyenlő $k-1+s+v$, ahol k az n-nek a 3-as számrendszerbeli reprezentációjában a számjegyek száma, s a reprezentációbeli nem nulla számjegyek száma és $v=0$, ha $a_1=2$ illetve $v=-1$, ha $a_1=1$. Így a minimális lépésszámot megadó lépéssorozat is egyértelműen meghatározott és a következő algoritmuson alapul: ha a szám osztható 3-mal, akkor osztunk 3-mal, ha nem akkor kivonjuk a 3-mal való osztási maradékot.

6. Tekintsük a

$$H_1=\{0,3,5,...,3(m-1)\}=\{3k|0\le k\le m-1\},$$
$$H_2=\{3k+1|0\le k\le m-1\} \text{ és}$$
$$H_3=\{3k+2|0\le k\le m-1\}$$

halmazokat és jelöljük a pontok koordinátáit (x_X,y_X), (x_Y,y_Y) illetve (x_Z,y_Z)-vel. Az (X,Y,Z) pontrendszer súlypontja pontosan akkor rácspont, ha $x_X+x_Y+x_Z$ és $y_X+y_Y+y_Z$ osztható 3-mal. A két koordinátát egymástól függetlenül választhatjuk meg, ezért elégséges az x koordinátákra elvégezni a számlálást. Az $x_X+x_Y+x_Z$ pontosan akkor osztható 3-mal, ha vagy mind a 3 koordináta ugyanahhoz a H_j halmazhoz tartozik, vagy a három koordináta három különböző H_j halmazhoz tartozik. Minden H_j halmaznak pontosan m eleme van, így azoknak a ponthármasoknak a száma, amelyekben mindkét koordináta-hármas különböző H_j halmazokból van $6m^3\cdot 6n^3=36m^3n^3$. Azoknak a ponthármasoknak a száma, amelyekben az egyik koordináta-hármas ugyanabból a H_j halmazból van és a másik koordináta-hármas tagjai különböző H_j halmazokhoz tartoznak $6m^3\cdot 3n^3+6n^3\cdot 3m^3=36m^3n^3$. Ezeknél a ponthármasoknál a kiválasztott pontok nem eshetnek egybe, mert legalább az egyik koordinátájuk három különböző H_j halmazhoz tartozik. Amikor az x koordináták ugyanazon H_j halmazhoz tartoznak és az y koordináták ugyanazon H_i halmazhoz tartoznak, akkor a kiválasztásnál lehetnek azonos pontok is. Ezért előbb megszámoljuk azokat az eseteket, amikor mindhárom pont egybeesik, illetve amikor a kiválasztott pontko közül kettő esik egybe. Ha mindhárom pont egybeesik, akkor a koordinátáit $3m \cdot 3n = 9mn$ különböző módon választhatjuk ki, tehát ennyi esetben esik egybe a három kiválasztott pont. Ha kiválasztunk két pontot, akkor a koordinátáit $3m^2 \cdot 3n^2$ módon választhatjuk ki és ezekből összesen 6 rendezett ponthármas készíthető, tehát az ilyenek száma $6\left(9m^2n^2 - 9mn\right) = 54mn(mn-1)$. Végül ha a három pont koordinátáit választjuk ki, akkor $3m^3 \cdot 3n^3 = 9m^3n^3$ eset lehetséges, tehát ebből ki kell vonni azoknak a számát, amelyekben a koordinátáknak megfelelő pontok közt egybeesők is vannak. Így

$$9m^3n^3 - 54m^2n^2 + 54mn - 9mn = 9m^3n^3 - 54m^2n^2 + 45mn$$

esethez jutunk, tehát a végeredmény

$$36m^3n^3 + 36m^3n^3 + 9m^3n^3 - 54m^2n^2 + 45mn = 72m^3n^3 - 54m^2n^2 + 45mn\,.$$

IX. Radó Ferenc Emlékverseny
2006, december 8.-9.
Kolozsvár

XII. osztály

MEGOLDÁSOK

1. a) Ha az f függvény teljesíti a kért tulajdonságokat, akkor Darboux tulajdonságú, ezért minden intervallumot intervallumba képez. Mivel $Imf \subseteq \mathbb{Q}$ ezért f csak állandó függvény lehet.

b) A feltételek alapján $f(F(x)) + x^{2n+1} = 0$, tehát ha $F(x) = F(y)$, akkor $f(F(x)) = f(F(y))$ és így $-x^{2n+1} = -y^{2n+1}$, ahonnan $x = y$. Ez alapján az F függvény injektív. Mivel F folytonos és injektív, szigorúan monoton és így F' előjeltartó. Másrészt $f(F(-1)) = 1$ és $f(F(1)) = -1$, ami ellentmondás. Tehát nem létezik a kért tulajdonságú függvény.

2. A feltételek alapján $f^{(n-1)}(x) \in \int xe^x dx = e^x(x-1) + C_1$. De $f^{(n-1)}(0) = 0$, tehát $f^{(n-1)}(x) = e^x(x-1) + 1$. Így $f^{(n-2)}(x) = \int (e^x(x-1)+1)dx = e^x(x-2) + x + C_2$, de $f^{(n-2)}(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 2 \Rightarrow f^{(n-2)}(x) = e^x(x-2) + x + 2$. Ha ismét integrálunk az

$$f^{(n-3)}(x) = \int (e^x(x-2) + x + 1)dx = e^x(x-3) + \frac{x^2}{2} + 2x + C_3$$

egyenlőséghez jutunk. De $f^{(n-3)}(0) = 0$, tehát $C_3 = 3$. Matematikai indukciót használva igazoljuk, hogy tetszőleges $0 \le i \le n$ esetén

$$f^{(n-i)}(x) = e^x(x-i) + \frac{x^{i-1}}{(i-1)!} + 2\cdot\frac{x^{i-2}}{(i-2)!} + ... + (i-2)\frac{x^2}{2!} + (i-1)x + i \text{ (*)}.$$

Ha ez teljesül $0 \le i \le k-1$-re, akkor

$$f^{(n-k)}(x) = \int f^{(n-k+1)}(x)dx =$$
$$e^x(x-k) + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + 2\cdot\frac{x^{k-2}}{(k-2)!} + ... + (k-2)\frac{x^2}{2!} + (k-1)x + C_k.$$

De $f^{(n-k)}(0) = 0$, tehát $f^{(n-k)}(0) = 0 \Rightarrow C_k = k$ és így írhatjuk, hogy

$$f(x) = e^x(x-n) + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + 2\frac{x^{n-1}}{(n-2)!} + ... + (n-2)\frac{x^2}{2!} + (n-1)x + n.$$

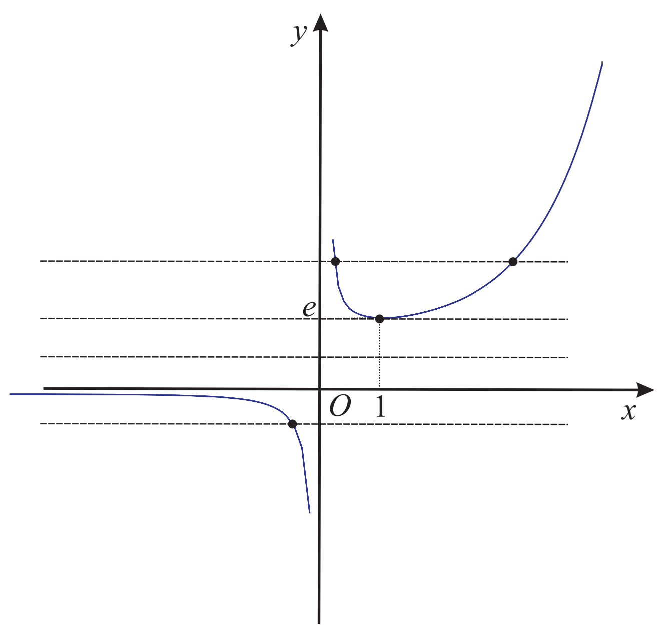
3. Mivel az $a = 0$ esetben az egyenletnek nincs megoldása, az egyenlet megoldásainak száma nem változik az $y = ax$ helyettesítéssel. (Az új egyenletben minden y megoldásnak egyértelműen megfelel az eredeti egyenlet egy x megoldása). Tehát elégséges vizsgálni az $e^y = a^{n-1}y$ egyenlet megoldásainak, ha $a \ne 0$. Az $y = 0$ nem megoldása ez utóbbi egyenletnek, tehát az egyenlet ekvivalens az $\frac{e^y}{y} = a^{n-1}$ egyenlettel.

Tekintsük az $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(y)=\dfrac{e^y}{y}$ függvényt (lásd a mellékelt ábrát). A függvény folytonos $\mathbb{R}^*$-on, szigorúan csökkenő a $(-\infty,0)$ intervallumon, szigorúan csökkenő a $(0,1)$-en, és szigorúan növekvő $(1,\infty)$-en. A függvény változási táblázata:

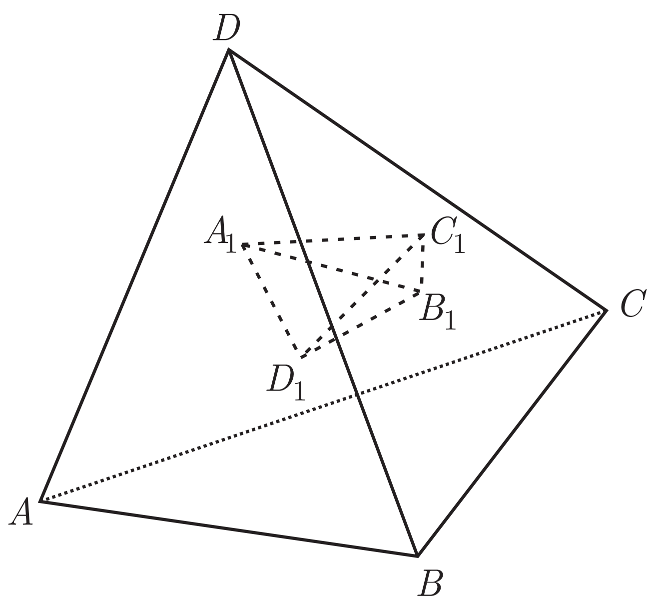
y	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(y)$	0	$\searrow\searrow\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow\searrow\searrow$	e	$\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow$	$+\infty$

Tehát, ha $a^{n-1}\in(-\infty,0)\cup\{e\}$, akkor az $f(y)=a^{n-1}$ egyenletnek pontosan egy megoldása van. Ha $a^{n-1}\in(0,e)$, akkor az egyenletnek nincs megoldása. Ha $a^{n-1}\in(e,\infty)$, az egyenletnek két megoldása van. A fentieket a következő táblázatba foglalhatjuk össze:

a	n	Megoldások száma
$a=0$	$n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$	0
$a<0$	n páros	1
$a\in\left(-\sqrt[n-1]{e},0\right)$	n páratlan	0
$a=-\sqrt[n-1]{e}$		1
$a\in\left(-\infty,-\sqrt[n-1]{e}\right)$		2
$a\in\left(0,\sqrt[n-1]{e}\right)$	$n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$	0
$a=\sqrt[n-1]{e}$		1
$a\in\left(\sqrt[n-1]{e},\infty\right)$		2



4. Tekintsük a következő ábrát. Megvizsgáljuk a pontrendszer szerinti felbontásban szereplő tetraéderek számát. Ha a keletkezett tetraéder egyik csúcsa az $\{A,B,C,D\}$ csúcsok közül van, és a másik három az $\{A_1,B_1,C_1,D_1\}$ pontok közül, akkor a következő négy tetraéder keletkezik: $DA_1B_1C_1, CD_1B_1C_1, BA_1D_1B_1, AA_1D_1C_1$. Ha az egyik csúcs az $\{A_1, B_1, C_1, D_1\}$ halmazban van és a maradék három $\{A, B, C, D\}$ halmazból, akkor szintén négy tetraéder keletkezik: A_1ABD, B_1BCD, C_1ACD és D_1ABC. A továbbiakban vizsgáljuk meg azokat a tetraédereket amelyeknek két csúcsa az $\{A_1, B_1, C_1, D_1\}$ halmazból és kettő az $\{A, B, C, D\}$ halmazból van. Az ilyen típusú tetraéderek az ABA_1D_1, ADA_1C_1, BCB_1D_1, CDB_1C_1, BDA_1B_1 és ACC_1D_1. Az $A_1B_1C_1D_1$ tetraédert is beleszámítva összesen 15 darabra bontottuk a tetraédert. Másrészt ha tekintünk egy O_1 pontot a tetraéder belsejében, ekkor a tetraéder négy részre daraboltuk. Ha O_2 a meglevő tetraéderek közül az egyik belsejében van, akkor a felbontásban szereplő tetraéderek száma 3-mal növekszik, tehát ha az O_3 és O_4 pontokat is hasonlóan vesszük fel, akkor a tetraédert feldarabolhatjuk 13 darabra. Tehát $n = 4$ estén megadtunk két olyan konfigurációt, amelyek szerinti felosztásokban nem azonos a tetraéderek száma. A továbbiakban minden $k \geq 5$ estén O_k legyen az $O_{k-1}BCD$ tetraéder belsejében. Így a második felbontásból kiindulva az n belső pont $3n+1$ kis tetraédert határoz meg. Ha az első felbontásból indulunk ki, az $O_4 = B_1$ választással, akkor az n belső pont $3n+3$ kis tetraédert határoz meg. Tehát minden $n \geq 4$ megszerkesztettük a két kért konfigurációt.



5. Ha $\overline{a_1a_2...a_k}$ az n 3-as számrendszerbeli reprezentációja, akkor minden megengedett művelet segítségével a reprezentációban szereplő számjegyek száma legfeljebb 1-gyel csökken. Ráadásul, ha kivonunk 1-et vagy 2-t, akkor a számjegyek száma csak abban az esetben csökken, ha $100...0$ vagy $1000...01$ alakú számból vonunk ki 1-et illetve 2-t. Az első esetben a számjegyek száma osztással is csökkenthető, a második esetben viszont a következő lépésben nem csökkenhet a számjegyek száma (a kapott szám nem osztható 3-mal és nem sorolható ismét be az előbbi két esethez) viszont két lépésben 2-vel csökkenthető a számjegyek száma ha csak 1-et vonunk ki és aztán osztunk 3-mal. Így látható, hogy a számjegyek számának a csökkentésére csak az osztást használhatjuk (ha nem szeretnénk a minimálisnál több lépésben eljutni az 1-eshez). Másrészt az előbbiekből az is kitűnik, hogy ha a kivonásokat nem arra használjuk, hogy 3-mal osztható eredményt kapjunk, akkor szintén nem a legkevesebb lépésben jutunk az 1-hez. Az előbbi észrevételek azt mutatják, hogy a szükséges lépésszám egyenlő $k-1+s+v$, ahol k az n-nek a 3-as számrendszerbeli reprezentációjában a számjegyek száma, s a reprezentációbeli nem nulla számjegyek száma és $v=0$, ha $a_1=2$ illetve $v=-1$, ha $a_1=1$. Így a minimális lépésszámot megadó lépéssorozat is egyértelműen meghatározott és a következő algoritmuson alapul: ha a szám osztható 3-mal, akkor osztunk 3-mal, ha nem akkor kivonjuk a 3-mal való osztási maradékot.

6. Ha tekintjük az $\sigma:\{1,2,\ldots,32\}\to\{1,2,\ldots,32\}$, $\sigma(i)=j_i$ függvényt, akkor ez egy permutáció és a $(k+1)$-adik sorban a kártyáknak σ^k szerinti rendezése látható. Ha felsorolnánk a σ, σ^2, σ^3, ..., σ^m,... permutációkat akkor biztosan létezne olyan, amely ismétlődik, mert csak véges sok 32 elemből álló permutáció létezik. Ha viszont $\sigma^m=\sigma^{m+k}$, akkor $\sigma^k=e$ és így már a σ is ismétlődik (a $(k+1)$-edik sorban). Ha minden permutációra meghatározzuk a legkisebb ilyen k értéket és kiszámítjuk az összes ilyen k legkisebb közös többszörösét, akkor az így kapott n szám teljesíti a kért feltételt. Belátható, hogy a legkisebb ilyen szám pontosan az $1,2,\ldots,32$ számok legkisebb közös többszöröse (és így ennek bármilyen egész számú többszöröse is jó).

IX. Radó Ferenc Emlékverseny
2006, december 8.-9.
Kolozsvár

X. osztály

1. Tekintsük az $f:\{0,1,2,\ldots,n-1\}\to\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ függvényt, ahol $f(x)$ az ax^2+bx+c számnak az n-nel való osztási maradéka. Bizonyítsd be, hogy ha az f függvény injektív, akkor a-nak és az n-nek van 1-nél nagyobb közös osztója és a b relatív prím az n-nel.

Demeter Albert

2. Bizonyítsd be, hogy ha $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$ és $a_1,a_2,\ldots,a_n$ szigorúan pozitív számok, akkor

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\geq\frac{1}{(n-1)a_1+a_2}+\ldots+\frac{1}{(n-1)a_n+a_1}.$$

Farkas Csaba

3. Oldd meg $3^{[x]}+4^{[x]}=5^x$ egyenletet ($x\in\mathbb{R}$)!

***

4. Az ABC háromszög BC, CA és AB oldalára kifele megszerkesztjük a BCO_A CAO_B és ABO_C egyenlő oldalú háromszögeket. Jelöljük a,b,c illetve o_A,o_B és o_C-vel az A,B,C, O_A,O_B és O_C pont affixumát.

a) Bizonyítsd be, hogy $o_A=\dfrac{b+c}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}(c-b)$.

b) Az O_A, O_B és O_C pontok ismeretében szerkeszd vissza az ABC pontokat.

***

5. k színnel színezett, téglalap alakúra kiszabott darabokból sálakat kell összevarrni. Mindenik színű darabkából tetszőleges számú áll rendelkezésünkre. Hány különbözően színezett $2n$ hosszúságú sálat lehet összeállítani, ha két sálat csak akkor tekintünk különbözőnek, ha nem helyezhetők egymás mellé úgy, hogy a megfelelő darabkák azonos színűek legyenek. Így például a következő két sálat azonosnak tekintjük mert a másodikat megfordítva ugyanaz, mint az első:

piros	kék	zöld	piros	fehér	kék

kék	fehér	piros	zöld	kék	piros

Demeter Albert

6. Egy n természetes számból kiindulva a következő műveleteket végezhetjük:

a) kivonunk 1-et;
b) kivonunk 2-t;
c) osztjuk 3-mal, ha osztható.

A műveleteket akárhányszor megismételhetjük, a műveletek sorrendjét tetszőlegesen megválaszthatjuk és minden műveletet az előző művelet eredményére alkalmazunk (kivétel az első lépésben, amikor a kiinduló érték n). Bizonyítsd be, hogy minden n esetén elérhetjük eredményként az 1-et, és határozd meg a minimális lépésszámot az n függvényében.

Demeter Albert

IX. Radó Ferenc Emlékverseny
2006, december 8.-9.
Kolozsvár

XI. osztály

1. Hogyan kell elhelyezkedjenek az A_1, A_2, ..., A_n pontok a síkban ahhoz, hogy a legtöbb szakaszt húzhassunk be a következő szabályok betartása mellett:

a) a szakaszok végpontjai az $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ halmazban vannak;

b) a behúzott szakaszok közül bármely kettőt tekintve azoknak nincs közös belső pontja.

Mennyi a meghúzható szakaszok maximális száma?

András Szilárd

2. Rögzített $n \geq 5$ páratlan természetes szám és tetszőleges $k \in \mathbb{N}^*$ esetén tekintsük az $A_k = \left[a_{ij}\right]_{1 \leq i,j \leq k}$ mátrixot, ahol a_{ij} az $(i+j-1)$ számnak a k-val való osztási maradéka. Bizonyítsd be, hogy ha $\det A_k$ relatív prím az n-nel, minden $3 \leq k \leq n-1$ esetén, akkor n prímszám.

Demeter Albert

3. Határozd meg az $x_{n+1} = 2^{[\log_2 x_n]} + x_n$ rekurzióval értelmezett sorozat általános tagját az $x_0 \in \mathbb{N}^*$ és az n függvényében, majd számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{x_0 x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$ határértéket.

András Szilárd

4. Jelöljük $C(O,1)$-gyel az origó középpontú, egységsugarú körlapot:

$$C(O,1) = \left\{z \in \mathbb{C} \middle| \, |z| \leq 1\right\}.$$

Bizonyítsd be, hogy ha az $f : C(O,1) \to C(O,1)$, $f(z) = z(a+bz)$ függvény bijektív, ahol $a, b \in \mathbb{C}$ akkor bármely $z_1, z_2 \in C(O,1)$ esetén

$$\left|z_1 - z_2\right| = \left[f(z_1) - f(z_2)\right].$$

Demeter Albert

5. Egy n természetes számból kiindulva a következő műveleteket végezhetjük:

a) kivonunk 1-et;

b) kivonunk 2-t;

c) osztjuk 3-mal, ha osztható.

A műveleteket akárhányszor megismételhetjük, a műveletek sorrendjét tetszőlegesen megválaszthatjuk és minden műveletet az előző művelet eredményére alkalmazunk (kivétel az első lépésben, amikor a kiinduló érték n). Bizonyítsd be, hogy minden n esetén elérhetjük eredményként az 1-et, és határozd meg a minimális lépésszámot az n függvényében.

Demeter Albert

6. A síkban az $O(0,0)$, $A(3m-1,0)$, $B(3m-1,3n-1)$ és $C(0,3n-1)$ pontok által meghatározott téglalap oldalain és a belsejében felvesszük az összes olyan pontot amelynek mindkét koordinátája egész szám ($m, n \in \mathbb{N}^*$). Az így felvett pontok közül (beleértve a téglalap csúcsait is) hány olyan (X, Y, Z) rendezett ponthármas választható ki, amelynek a súlypontja is egész koordinátákkal rendelkezik és $X \neq Y \neq Z \neq X$?

Farkas Csaba

IX. Radó Ferenc Emlékverseny
2006, december 8.-9.
Kolozsvár

XII. osztály

1. a) Határozd meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ primitiválható függvényeket, amelyekre $f(x)\in\mathbb{Q}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$!

b) Határozd meg azokat az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ primitiválható függvényeket, amelyeknek van olyan $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ primitívje, hogy $f(F(x))=-x^{2n+1}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, ahol $n\in\mathbb{N}$ rögzített.

Farkas Csaba

2. Határozd meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt, ha $f^{(n)}(x)=xe^{x}$ és $f^{(k)}(0)=0$ $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$ esetén.

***

3. Tárgyald az $e^{ax}=a^{n}x$ egyenlet megoldásainak a számát az $a\in\mathbb{R}$ és az $n\in\mathbb{N}^{*}\setminus\{1\}$ paraméter függvényében.

***

4. Ha egy tetraéder belsejében elhelyezünk $n\geq 4$ pontot, és a tetraédert szétvágjuk olyan kisebb diszjunkt belsővel rendelkező tetraéderekre, amelyeknek minden csúcsa a felvett pontok közül vagy az eredeti tetraéder csúcsai közül van, akkor azt mondjuk, hogy megadtuk a tetraédernek a felvett pontok szerinti felbontását. Bizonyítsd be, hogy minden $n\geq 4$ természetes számra megadható a tetraéder belsejében két olyan egyenként n pontból álló konfiguráció, hogy a pontok szerinti felbontásokban szereplő kis tetraéderek száma ne legyen azonos.

András Szilárd

5. Egy n természetes számból kiindulva a következő műveleteket végezhetjük:

a) kivonunk 1-et;
b) kivonunk 2-t;
c) osztjuk 3-mal, ha osztható.

A műveleteket akárhányszor megismételhetjük, a műveletek sorrendjét tetszőlegesen megválaszthatjuk és minden műveletet az előző művelet eredményére alkalmazunk (kivétel az első lépésben, amikor a kiinduló érték n). Bizonyítsd be, hogy minden n esetén elérhetjük eredményként az 1-et, és határozd meg a minimális lépésszámot az n függvényében.

Demeter Albert

6. Két 32 lapos kártyapaklit külön-külön összekeverünk és a lapokat kirakjuk két sorba az asztalra (az első sorban az egyik paklit, a második sorban a másik paklit). Minden $1\leq i\leq 32$ esetén jelöljük j_i-vel annak a kártyának a sorszámát a második sorban, amelyik az első sorban az i-edik helyen áll. A továbbiakban újabb kártyapaklikat rakunk ki egy-egy sorba úgy, hogy a k-adik sorban az a kártya legyen a j_i-edik helyen, amelyik a $(k-1)$-edik sorban az i-edik helyen volt (minden lehetséges j_i esetén). Igazold, hogy létezik olyan n természetes szám, amelyre az első két sorrendtől függetlenül az n-edik sor pontosan ugyanaz, mint az első.

Demeter Albert