„…mert emberek vagyunk valamennyien,
akik mindig csak az érem egyik oldalát látjuk,
s ha akadnak is közöttünk egyesek,
akik magasabb szemléletre tesznek szert–
azok az érem élén állanak,
és így nem látják egyik oldalt sem.“
(Vándor Lajos)

Az 1997-ben először megszervezett Radó Ferenc Emlékverseny ebben az évben VIII. születésnapjához érkezett. Az első évben csak 5-8 osztályos diákok számára megszervezett verseny 2000-től kezdve már 8 évfolyamon zajlik és kiforrott arculattal rendelkezik. A versenyfeladatokat összeállító bizottság tagjai most már hagyományosan olyan volt versenyzők, akik továbbra is matematikával foglalkoznak. Örvendetes, hogy ez a bizottság minden évben 1-2 taggal bővül. Ebben az évben a feladatszerkesztő zsűrinek a következő tagjai voltak: András Szilárd, Baricz Árpád, Demeter Albert, László Tamás, Sipos Kinga, Szilágyi Márta és Zsombori Gabriella. A feladatok jellegét most is az előző évek versenytapasztalata határozta meg. A feladatsorokat úgy próbáltuk kiegyensúlyozni, hogy ez a technikai felkészültséget, de a fogalmi tisztaságot és mélységet is mérje, hisz a tapasztalat az, hogy sok versenyzőnek van komoly problémája egyik vagy másik téren. Ugyanakkor továbbra sem mondtunk le a logikai feladatokról melyek bár igen kedveltek a versenyzők körében, mindig komoly nehézségek elé állítják őket. A feladatsorok színvonalát úgy igyekeztünk meghatározni, hogy minél közelebb álljon a hazai tantárgyversenyek és más komoly megmérettetések szintjéhez. Reméljük, hogy a Radó versenyek feladatainak megoldása és a versenyre való felkészülés hozzájárul az egyéb versenyeken nyújtott teljesítmény növeléséhez és egy komoly mezőnyben elfoglalt helyünkről való reális kép kialakításához. A feladatsorok nehézségének következménye, hogy az eredmények most is várhatóan a $30\% - 60\%$ intervallumban torlódnak. Az eddigi versenyek feladatsorai és megoldásai megtalálhatók a http://www.math.ubbcluj.ro/~andrasz honlapon.

Az idén az 5. és a 6. osztályos diákok 2,5 órát írnak, a 7–10. osztályosok 3 órát és a 11–12-es diákoknak 5 óra áll rendelkezésükre és tetszőleges segédeszközt használhatnak (könyvek, internet stb.).

A versenyek megszervezéséért köszönettel tartozunk a Báthory István Líceum vezetőségének és tanárainak, a kolozsvári kollégáknak, vendégfogadó diákoknak és szüleiknek a segítségükért, a versenyen résztvevő kollégáknak a tudatosan vállalt megerőltetésekért.

A feladatokat összeállító bizottság és
a verseny szervező bizottsága

A feladatok szerzői:

András Szilárd	V.3, V.4, VI.2, VI.3, VI.4, VII.2, VII.5, VIII.2, VIII.3, VIII.5, IX.2, IX.5, X.2, X.4, XI.1, XI.2, XI.3, XI.4, XI.5, XII.1, XII.2, XII.4
Csapó Hajnalka	X.3
Farkas Csaba	VII.4, VIII.4, IX.4
László Tamás	XII.3
Sipos Kinga	IX.3, X.1, XII.5

A többi feladat a zsűri együttes erőfeszítésének végeredménye.

V. osztály

1. Az A, B és C halmazokra teljesülnek a következő egyenlőségek:

1. $A \cap B = \{1,2,3,4\}$; **2.** $A \cap C = \{1,2,5\}$;

3. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{5,6,10\}$;

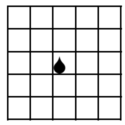
4. $(B \setminus C) \cup (C \setminus B) = \{3,4,5,6,7,8,9\}$.

Hány eleme lehet A-nak?

2. **a)** Bizonyítsd be, hogy a $99 \cdot k$ szám középső számjegye 9-es, ha $k \in \{2,3,\dots,9\}$.

b) Micimackó és Malacka egy szám számjegyeinek fordított sorrendben való leírásával kapott számot az eredeti szám fordítottjának nevezi (például a 135 szám fordítottja az 531). Egy szép tavaszi délelőtt Micimackó az összeadást és kivonást gyakoroltatta Malackával és a következő feladatot adta Malackának: Válassz egy különböző számjegyekből álló háromjegyű számot, írd fel a fordítottját is, a nagyobbik számból vondd ki a kisebbiket és az eredményhez add hozzá annak a fordítottját. Malacka néhány perc számolás után boldogan mutatta, hogy az eredmény 1098. Micimackó csak rápillantott az eredményre és máris mondta, hogy téves az eredmény. Honnan tudta ezt Micimackó, hisz nem tudhatta, hogy Malacka milyen háromjegyű számot választott?

3. A mellékelt ábrán látható 5×5-ös négyzetháló minden mezején egy szénaboglya található. Egy boglya egy perc alatt ég le, és amelyik pillanatban leég, kigyullad két oldalszomszédos mezőn található boglya. (Egy négyzetháló két mezeje oldalszomszédos, ha van egy közös oldala.) A középső mezőn levő szénaboglyát a Gonosz Varázsló meggyújtja. Legalább hány perc alatt ég le mind a 25 boglya?



4. Micimackó tanította Bagolynak a számok többszöröseit és gyakorlásként a következő játékot játszotta Bagollyal:

1. felírták a táblára a természetes számokat 2-től 18-ig;
2. felváltva választottak egy-egy számot és letörölték a tábláról a kiválasztott számot annak minden többszörösével együtt; (minden lépésben csak a táblán maradt számokból lehet választani, tehát például ha az első játékos kiválasztja a 6-ot, akkor letörlik a 6-t, a 12-t és 18-at, majd a következő játékos a megmaradt számokból választ és így tovább);
3. az nyer, aki az utolsó számot letörli a tábláról.

Micimackó megengedte Bagolynak, hogy kezdjen és azt mondta, hogy ha megértette a leckét, akkor mindig megverheti őt. Hogyan kell Bagolynak játszania, ha nyerni szeretne?

VI. osztály

1. Határozd meg az a és b természetes számokat, ha $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}=1-\frac{1}{b}$.

2. Az ABC egyenlő szárú háromszögben $[AB]\equiv[AC]$, $m(\widehat{BAC})=120°$, M a $[BC]$ szakasz felezőpontja és $N\in[AC]$ úgy, hogy $AN=\frac{1}{4}AC$. Számítsd ki az $\widehat{MNA}$ szög mértékét!

3. **a)** Bizonyítsd be, hogy a $999\cdot k$ szám középső két számjegye 9-es és a két szélső összege 9, ha $k\in\{2,3,\ldots,9\}$.

b) Micimackó és Malacka egy szám számjegyeinek fordított sorrendben való leírásával kapott számot az eredeti szám fordítottjának nevezi (például az 1357 szám fordítottja a 7531). Egy szép tavaszi délelőtt Micimackó az összeadást és kivonást gyakoroltatta Malackával és a következő feladatot adta Malackának: Válassz egy különböző számjegyekből álló négyjegyű számot, írd fel a fordítottját is, a nagyobbik számból vond ki a kisebbiket és az eredményhez add hozzá annak a fordítottját. Malacka néhány perc számolás után boldogan mutatta, hogy az eredmény 10980. Micimackó csak rápillantott az eredményre és máris mondta, hogy téves az eredmény. Honnan tudta ezt Micimackó, hisz nem tudhatta, hogy Malacka milyen négyjegyű számot választott?

4. Válasszál ki az $A=\{1,2,3,\ldots,20\}$ halmazból egy olyan $H\subseteq A$ részhalmazt, amelyre igaz a következő állítás:

Ha $a,b\in H$ és $a\neq b$, akkor $a\cdot b$ nem teljes négyzet.

Legfeljebb hány eleme lehet H-nak? Hát akkor, ha három különböző H-beli elem szorzata sem lehet teljes négyzet?

VII. osztály

1. Határozd meg az a, b, c valós számokat, ha $a+b+c=\sqrt{5}$ és

$$\begin{cases} a^2+b^2=2ac \\ b^2+c^2=2ba \\ c^2+a^2=2cb \end{cases}.$$

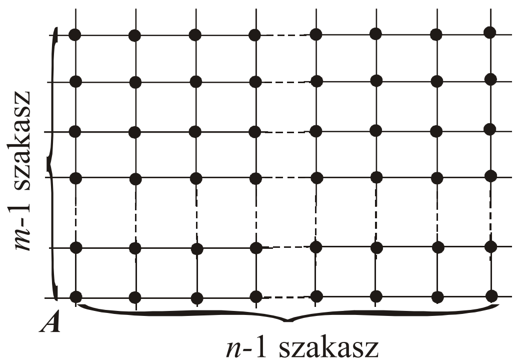
2. **a)** Határozd meg az a és b természetes számokat, ha teljesül az $5^b-2^a=1$ egyenlőség.

b) Határozd meg az összes olyan $n\in\mathbb{N}$ természetes számot, amelyre az $A=\dfrac{n}{n+1}+\dfrac{n+1}{n+2}$ racionális szám tizedes tört alakja véges.

3. Legtöbb hány darab egymás utáni természetes szám írható fel úgy, hogy egyik szám számjegyeinek összege se legyen 7-tel osztható?

4. Határozd meg az ABC A-ban derékszögű háromszög szögeinek mértékét fokokban, ha az oldalak hosszaira teljesül az $(AB-AC)^2=2(\sqrt{2}-1)AB\cdot AC$ összefüggés!

5. Egy $(m-1)\times(n-1)$-es téglalapot ($m,n\in\mathbb{N}^*$) egységnyi négyzetekre bontunk (lásd a mellékelt ábrát). Rácspontnak nevezzük az így kapott négyzetek csúcsait. Egy bábut az A pontból kiindulva felváltva két játékos mozgat úgy, hogy mindegyik játékos egy átlósan szomszédos rácspontra helyezi a bábut (így a bábu egy lépésének hossza $\sqrt{2}$). Kinek van nyerő stratégiája, ha a bábu útja nem szabad metssze önmagát (sem rácspontban sem más pontban) és az veszít, aki nem tud tovább lépni?



VIII. osztály

1. Határozd meg az $x, y \in \mathbb{Z}$ számokat, ha teljesül az $x^2 + y^2 = x + y + 8$ egyenlőség!

2. Legtöbb hány darab egymás utáni természetes szám írható fel úgy, hogy egyik szám számjegyeinek az összege se legyen 11-gyel osztható?

3. Legyen $d_1 \parallel d \parallel d_2$ három párhuzamos egyenes úgy, hogy d a d_1 és d_2 között helyezkedjen el. Ha a d_1-en felvettünk m darab pontot a d_2-n n darab pontot, akkor a felvett pontokat az összes lehetséges módon összekötve az összekötő egyenesek legalább hány pontban metszik a d egyenest? Legtöbb hány metszéspont keletkezhet?

4. Az $ABCDA'B'C'D'$ kockában az AB, BB' és CC' éleken vegyük fel rendre az M, N és P pontokat úgy, hogy $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NB'} = \frac{CP}{PC'}$.
Legyenek $\{O\} = A'M \cap AN$ és E, F, G az N vetületei a PA', PB' és PO egyenesekre. Igazold, hogy:

a) $GE \perp A'P$;

b) az N, E, F és G pontok egy síkban helyezkednek el.

5. Egy $2 \times n$ méretű ($n \in \mathbb{N}^*$) csokoládédarabot két játékos felváltva tördel darabokra a következő szabályok szerint:

1. egyszerre csak egy darabot lehet eltörni;

2. csak egyenes vonalak mentén lehet törni

3. a keletkező két darab szintén téglalap kell legyen, amelynek oldalhosszai természetes számok.

Kinek van nyerő stratégiája, ha az nyer, aki először tud 1×1-es darabot törni?

IX. osztály

1. Határozd meg az $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ pozitív valós számokat, ha $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ és $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_{k+1}\sqrt{x_k} + x_k\sqrt{x_{k+1}}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x_{n+1}}}, \forall\, n \geq 1$.

2. Bizonyítsd be, hogy ha $b, c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvények és $a \in \mathbb{R}^*$, akkor a következő tulajdonságok ekvivalensek:

a) Az $y_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y_n(x) = ax^2 + b(n)x + c(n)$ parabolacsalád csúcspontjai egy egyenesen vannak.

b) Létezik olyan egyenes, amely érinti az előbbi parabolacsalád minden tagját.

3. Az M pont egy olyan H síkbeli halmazban mozog, amelynek területe T. Rögzített O pont és $\vec{v}$ vektor esetén az M minden lehetséges helyzetére szerkesszük meg az N pontot úgy, hogy teljesüljön az $a \cdot \overrightarrow{OM} + b \cdot \overrightarrow{ON} = \vec{v}$ egyenlőség, ahol $a, b \in \mathbb{R}^*$ rögzített számok. Mekkora a területe annak az alakzatnak, amelyet az N pont leír?

4. Oldd meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} ax_2x_1 = c + bx_2 \\ ax_3x_2 = c + bx_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ ax_nx_{n-1} = c + bx_n \\ ax_1x_n = c + bx_1 \end{cases}$$

ha $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $b^2 + 4ac > 0$.

5. Hány olyan háromszög létezik, amelynek minden oldalhossza az $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ halmaz eleme?

X. osztály

1. Egy $n \times n$-es táblázat bal felső sarkába 0-t, a jobb alsó sarkába pedig x-et írunk ($x \in \mathbb{R}, n \geq 2$). Ki lehet-e tölteni a táblázat többi szabad mezejét egymástól különböző számokkal úgy, hogy minden sorból és minden oszlopból tetszőlegesen kiválasztva egy-egy mezőt (összesen n darabot), a kiválasztott mezőkön álló számok összege mindig ugyanannyi legyen?

2. Oldd meg a következő egyenletrendszert a komplex számok halmazában:

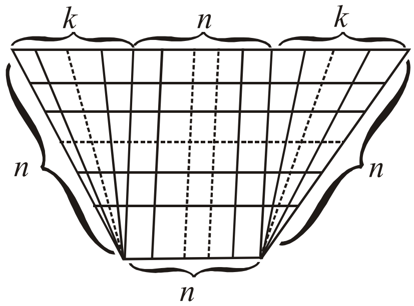
$$\begin{cases} 2x_1x_2 = x_1^2 + a \\ 2x_2x_3 = x_2^2 + a \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 2x_{n-1}x_n = x_{n-1}^2 + a \\ 2x_nx_1 = x_n^2 + a \end{cases}$$

ahol $a > 0$ valós szám, $n \geq 2$.

3. Jelöljük H-val az $\{1, 2, 3, \ldots, 2004\}$ halmazt. Határozd meg azoknak az $f: H \to H \setminus \{3j+2 \mid j = \overline{0,667}\}$ függvényeknek a számát, amelyekre a $k + f(k) + f^2(k)$, $k = \overline{1,2004}$ számok közt pontosan 1000 darab osztható 3-mal!

4. Bizonyítsd be, hogy ha az M az ABC háromszög BC oldalának olyan pontja, amelyre az ABM és ACM háromszögek BM illetve CM oldalához írt külső körök sugara egyenlő, akkor $AM = \sqrt{p(p-a)}$. Tanulmányozd az M pont létezését!

5. Hány négyszög látható a mellékelt ábrán (a számok a diszjunkt szakaszok számát jelölik)?



XI. osztály

1. Az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorzat teljesíti az $x_{n+1} = 2x_n + \left[\frac{x_n}{2^n}\right]$, $\forall\, n \geq 1$ rekurziót és az $x_1 = 5$ kezdeti feltételt. Határozd meg a sorozat általános tagjának képletét.

2. Bizonyítsd be, hogy az $A \in M_3(\mathbb{R})$ mátrix esetén a következő két kijelentés egyenértékű

a) $\det(A^2 + A + I_3) = 0$; **b)** $-1 + \det A = \operatorname{Tr} A = -\operatorname{Tr} A^*$.

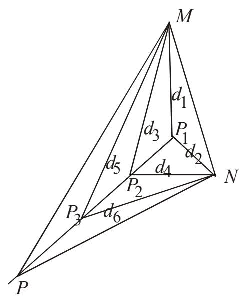
3. Adott az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ függvény.

a) Bizonyítsd be, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén a függvény grafikus képe eltolható egy $\vec{v}$-ral úgy, hogy az eltolás után tartalmazzon legalább egy rácspontot és $|\vec{v}| \leq \varepsilon$.

b) Bizonyítsd be, hogy minden f grafikus képe eltolható úgy, hogy legalább két rácspontra illeszkedjen (az eltolás vektorának mértéke tetszőleges lehet)!

c) Mi a feltétele annak, hogy a grafikus kép eltolható legyen úgy, hogy eltolás után legalább három rácspontra illeszkedjen (az eltolás vektora tetszőleges lehet)?

4. Adott a $d_1 = 2$, $d_{n+1} = \sqrt{d_n^2 + \frac{3\cdot(-1)^n + 1}{2} n + 2\cdot(-1)^n}$, $\forall\, n \geq 1$ összefüggésekkel értelmezett sorozat.



a) Bizonyítsd be, hogy ha M és N rögzített pontok a síkban és $MN = \sqrt{5+2\sqrt{3}}$, akkor minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén létezik olyan P_n síkbeli pont, amelyre $P_nM = d_{2n-1}$ és $P_nN = d_{2n}$.

b) Bizonyítsd be, hogy a $(P_n)_{n\geq 1}$ pontok egy egyenesre illeszkednek.

5. Az $\{1,2,3,\ldots,4n\}$ halmaz $2k$-ad osztályú variációi közül válasszuk ki azokat, amelyekben az elemek összege páros. Számítsd ki a kiválasztott variációk elemeinek összegét! (Például az $\{1,2,3,4\}$ halmaz másod-osztályú variációi közül az $(1,3)$, $(3,1)$, $(2,4)$ és $(4,2)$ variációkban páros az elemek összege. A kiválasztott variációk elemeinek összege $1+3+3+1+2+4+4+2=20$.)

XII. osztály

1. Ha A és B két tetszőleges pont a $\mathcal{P}$ parabolán, akkor jelöljük M-mel az A-ban és B-ben húzott érintők metszéspontját, N-nel az AB húr felezőpontját és P-vel az N vetületét a parabola szimmetriatengelyére. Szerkesszük meg az $MVPQ$ paralelogrammát (V a parabola csúcspontja) és jelöljük C-vel a VQ egyenes és a parabola második metszéspontját. Bizonyítsd be, hogy ha a $\mathcal{P}$ parabola pontjain értelmezünk egy műveletet, amely az előbbi szerkesztés szerint az (A,B) párhoz a C pontot rendeli hozzá ($C = A \oplus B$), akkor az így értelmezett művelettel a parabola pontjai egy Abel csoportot alkotnak és ez izomorf az $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ csoporttal!

2. Az $f:[0,1]\to[0,1]$ folytonosan deriválható függvényre $f(x)\leq x$, $\forall x\in[0,1]$. Számítsd ki a

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]$$

határértéket!

3. Adott $(G,\cdot)$ csoportra szerkeszd meg azt a (bennfoglalásra nézve) legkisebb $M\subseteq G$ részcsoortot, amelyre igaz a következő állítás:
Ha $(H,*)$ egy csoport, $\varphi:G\to H$ egy szürjektív morfizmus és $M=\{x\in G|\varphi(x)=e_H\}$, akkor $(H,*)$ kommutatív.

4. Bizonyítsd be, hogy ha az $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ és $g:[0,1]\to\mathbb{R}_+^*$ folytonos függvényekre teljesül az

$$f^2(x)\leq\alpha+\beta\int_0^x g(t)f(t)\,dt,\ \forall x\in[0,1]$$

egyenlőtlenség ($\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+^*$), akkor

$$f(x)\leq\alpha+\frac{\beta}{2}\int_0^x g(t)\,dt,\ \forall x\in[0,1].$$

5. Két játékos (Konstruktív és Destruktív) felváltva lép a következő szabályok szerint:

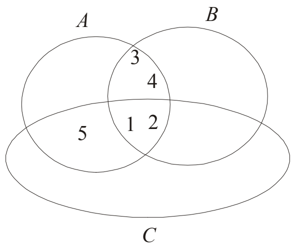
1. Konstruktív elhelyez három kavicsot tetszőlegesen (ezeket elhelyezheti egy kupacba vagy külön kupacokba, létrehozhat új kupacot stb.)
2. Destruktív elvesz két kupacot a már meglévők közül.

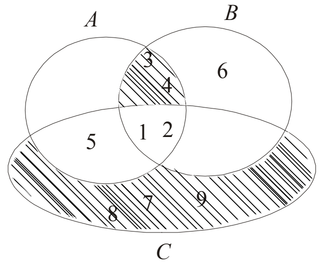
Konstruktív fel tud-e építeni egy n elemű kupacot?

Megoldások

V. osztály

1. $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap (A \cap C) = \{1,2\}$. Tehát az 1, 2, 3, 4 és 5 elemek az első ábrán látható módon helyezkednek el a halmazokban.





A $[(B \setminus C) \cup (C \setminus B)] \setminus [(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] = \{3,4,7,8,9\}$ halmaz a második ábrán bevonalkázott rész, tehát a 7, 8 és 9 a $C \setminus (A \cup B)$ részbe kerül. Az utolsó feltétel alapján $B \setminus (A \cup C) = \{6\}$, tehát a második ábrának megfelelő a számoknak a halmazokban való elhelyezkedése.
A megmaradt számot – a 10-et – írhatjuk az $A \setminus (B \cup C)$ vagy $(B \cap C) \setminus A$ részbe, és további számokat nem írhatunk be, tehát az A halmazban 5, vagy 6 elem lehet.

2. a) $99k = (100-1)k = \overline{k00} - k = \overline{(k-1)9u}$, ahol $u = 10 - k$. Tehát $99k = \overline{x9y}$, ahol $x + y = 9$ és $x, y \in \{1,2,...,8\}$.

b) Ha a Malacka által választott szám $A = \overline{abc}$, akkor a fordítottja $\overline{cba}$ és a különbség (feltételezhetjük, hogy $a > c$)

$$K = \overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 99(a-c).$$

Az a) alpont alapján, ha $a - c \geq 2$, akkor $99(a-c)$ tizedes alakja $\overline{x9y}$, ahol $x + y = 9$ és $x, y \in \{1,2,...,8\}$. Tehát ha a kivonás eredményéhez hozzáadjuk a fordítottját, akkor az eredmény $\overline{x9y} + \overline{y9x} = 1089$.
Ha pedig $a - c = 1$, akkor $K = 99$, és így $99 + 99 = 198$, tehát az eredmény nem lehet 1098. Micimackó rögtön láthatta, hogy nem helyes Malacka számolása.

3. A középső mezőtől valamely sarokmezőig a legrövidebb út 4 lépésből áll (2 vízszintes és 2 függőleges), ezért 5-nél kevesebb perc alatt nem éghet le az összes boglya.

Vizsgáljuk meg, hogy 5 perc elégséges-e. Ha az első percben olyan mezőkre terjed a tűz, amelyeknek van egy közös csúcspontjuk, akkor létezni fog egy csúcs, amelyhez csak további 5 perc alatt jut el (2 vízszintes és 3 függőleges vagy 2 függőleges és 3 vízszintes terjeszkedéssel).

		2		
	2	1		

	×		×	
•	2	1	2	•
	×		×	

Tehát az első lépésben olyan mezőkre kell átterjedjen a tűz, amelyeknek nincs közös csúcsuk. Feltételezhetjük, hogy a baloldali ábrának megfelelően terjed a tűz.

Ha a harmadik percben a tűz átterjed a pontokkal jelzett mezők valamelyikére, akkor az × -el jelölt mezők valamelyikére csak további 3 perc alatt terjed át. Ez ismét több lenne, mint 5 perc, tehát a harmadik perc után a következő alakzathoz kell jutnunk:

A negyedik percben a tíz, ponttal jelölt mező közül 8-ra terjedhet át a tűz. De a két üresen maradó, ponttal jelölt mezőn levő boglya csak további 2 perc alatt gyúlhat meg, mert ezeknek nincs oldalszomszédos mezőjük azokkal a mezőkkel, amelyekre a negyedik percben terjedt át a tűz. Tehát 5 perc alatt nem éghetnek le a boglyák.

	•		•	
•	3	•	3	•
	2	1	2	
•	3	•	3	•
	•		•	

Az alábbi ábrán látható, hogy 6 perc már elégséges:

5	4	5	6	5
4	3	4	3	4
5	2	1	2	5
4	3	4	3	4
5	4	5	6	5

4. Bagoly lehetséges nyerő stratégiája, hogy első lépésben kitörli a 2-t és annak többszöröseit, így a táblán marad 6 prímszám, illetve a 9 és 15. A továbbiakban, ha Micimackó prímet töröl, Bagoly is ugyanezt teszi, különben úgy töröl, hogy a táblán csak prímek maradjanak.

A prímszámoknak 1-en kívül csak önmaguk osztóik, ezért egy prímszám csak úgy törölhető ki a tábláról, ha azt valamelyik játékos kiválasztja törölni, így két különböző kimenetele lehet a játéknak aszerint, hogy a 9-et és a 15-öt 3 többszöröseként törölték-e vagy nem. Az előbbi eset további 6 lépést jelent, míg az utóbbi 8-cat, amelyből Micimackó teszi meg az elsőt. Következésképpen Bagoly nyer.

VI. osztály

1. $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}=\frac{2a+1}{a(a+1)}$ és $1-\frac{1}{b}=\frac{b-1}{b}$. Ezek a törtek irreducibilisek mert két egymás utáni természetes szám (b és $b-1$, illetve a és $a+1$) relatív prím és relatív prímek az összegükkel is. (Ha $d\in\mathbb{N}$ és $d\mid a(a+1)$ akkor $d\mid a$ vagy $d\mid(a+1)$. A $d\mid(2a+1)$ feltételből következik, hogy $d\mid a$ és $d\mid(a+1)$, tehát $d=1$). Másrészt két irreducibilis tört csakis akkor egyenlő egymással, ha a számlálók és a nevezők külön-külön egyenlők. Tehát $2a+1=b-1$ és $a(a+1)=b$. Ebből a két egyenlőségből következik, hogy

$a^2+a=2a+2\Leftrightarrow a(a+1)=2(a+1)\Leftrightarrow(a+1)(a-2)=0\Leftrightarrow a=2.$.

Tehát $a=2$ és $b=6$ a megoldás.

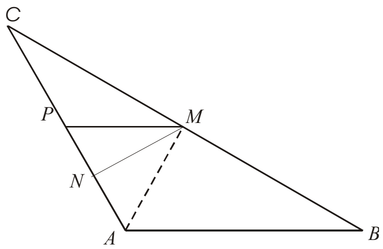
II. megoldás. A $\frac{2a+1}{a(a+1)}=\frac{b-1}{b}$ egyenlőségből következik, hogy $b(2a+1)=a(a+1)(b-1)$. Mivel $(a,2a+1)=1$ következik, hogy $b\,\vdots\,a$. Hasonlóan $b\,\vdots\,(a+1)$, tehát az $(a,a+1)=1$ feltétel alapján $b\,\vdots\,a(a+1)$. Így létezik olyan $k\in\mathbb{N}$, amelyre $b=ka(a+1)$. Ebből az egyenlet alapján következik, hogy $b=1+k(2a+1)$. De $k\mid ka(a+1)$ és $k\mid k(2a+1)$, tehát $k\mid 1$. Ez csak úgy lehetséges, ha $k=1$, tehát $b=a(a+1)=2a+2$. Ebből következik, hogy $a=2$ és $b=6$.

2. AM oldalfelező a BAC egyenlő szárú háromszögben, tehát $AM\perp BC$. Ha P az AC felezőpontja, akkor az AMC derékszögű háromszögben MP az átfogóhoz tartozó oldalfelező, tehát

$$MP=\frac{1}{2}AC=PA.$$

Ez alapján $m\left(\widehat{CAM}\right)=90°-m\left(\widehat{C}\right)=60°$, mert

$$m\left(\widehat{ACB}\right)=m\left(\widehat{ABC}\right)=30°.$$



Az AMP háromszögben $AP=PM$ és $m\left(\widehat{PAM}\right)=60°$, tehát ez a háromszög egyenlő oldalú és így az MN oldalfelező egyben magasság is, tehát $m\left(\widehat{MNA}\right)=90°$.

3. a) $999 \cdot k = (1000-1)k = \overline{k000} - k = \overline{(k-1)99l}$, ahol $l = 10 - k$.
Tehát a két középső számjegy 9-es és a két szélső összege 9.

b) Ha Malacka az $\overline{abcd}$ számot választotta ($a > d$), akkor a $K = \overline{abcd} - \overline{dcba}$ különbséget a következőképpen írhatjuk:

$$K = 1000a + 100b + 10c + d - (1000d + 100c + 10b + a) =$$

$$= 999(a-d) + 90(b-c).$$

Az $a)$ alpont alapján, ha $a - d \geq 2$, akkor $999(a-d)$ tízes számrendszerbeli alakja $\overline{x99y}$, ahol $x + y = 9$ és $x, y \in \{1, 2, \ldots, 8\}$. Másrészt, ha $|b-c| \geq 2$, akkor $90|b-c|$ szám tízes számrendszerbeli alakja $\overline{uv0}$, ahol $u + v = 9$ (a 9-es szorzótáblán $\overline{uv}$ alakú eredmények vannak, ahol $u + v = 9$ és $u, v \in \{1, 2, \ldots, 8\}$). Ha $b > c$, akkor az $\overline{x99y} + \overline{uv0}$ összeadást kell elvégezni, míg $b < c$ esetén az $\overline{x99y} - \overline{uv0}$ kivonást. De az összeadás algoritmusa alapján

$$\begin{array}{r} \overline{x99y}\,+ \\ \overline{uv0} \\ \hline \overline{(x+1)\,u\,(v-1)\,y} \end{array} \quad \text{és} \quad \begin{array}{r} \overline{x99y}\,- \\ \overline{uv0} \\ \hline \overline{xvuy} \end{array}$$

Így ha az eredményhez hozzáadjuk a fordítottját, a következő eredmények lehetségesek ($x + y = u + v = 9$ miatt):

$$\begin{array}{r} \overline{(x+1)\,u\,(v-1)\,y}\,+ \\ \overline{y\,(v-1)\,u\,(x+1)} \\ \hline 10 \quad 8 \quad 9 \quad 0 \end{array} \quad \text{és} \quad \begin{array}{r} \overline{xvuy}\,+ \\ \overline{yuvx} \\ \hline \overline{9999} \end{array}$$

Ha $|b-c| = 1$, akkor $\overline{x99y} \pm 90$ műveleteket kell elvégezni. Az eredmények pedig $\overline{(x+1)\,08y}$ vagy $\overline{x90y}$. Ebben az esetben a végeredmények megegyeznek az előző eset eredményeivel (ekkor $u = 0$ és $v = 9$).
Az $a - d = 1$ esetben $K = 999 + 90(b-c)$. Ha $b < c$, akkor K egy háromjegyű szám, ezért fordítottjával összeadva, nem lehet az eredmény 10980, mint amennyit kapott Malacka. Tehát $b > c$.

Ha $b - c \geq 2$, akkor $K = 999 + \overline{uv0} = \overline{1u\,(v-1)\,9}$
($u + v = 9$, $u, v \in \{1, 2, \ldots, 8\}$), ekkor a végeredmény

$$
\begin{array}{r}
\overline{1u\,(v-1)\,9} + \\
\overline{9\,(v-1)\,u1} \\
\hline
10\quad 8\quad\ 90
\end{array}
\;.
$$

Ha $b-c=1$, akkor $K=999+90=1089$, a végeredmény pedig 10890. Mivel Malacka ezektől különböző eredményt talált, a számolás hibás.

4. Csoportosítsuk azokat a számokat, amelyek szorzatából teljes négyzeteket kaphatunk:
I. csoport: 1, 4, 9, 16
II. csoport: 2, 8, 18
III. csoport: 3, 12
IV. csoport: 5, 20
Ezekből a csoportokból csak egy-egy elem szerepelhet H-ban és a többi számot mind beletehetjük H-ba, tehát H-ban legtöbb $20-(3+2+1+1)=13$ elem lehet.

Például a $H=\{1,2,3,5,6,7,10,11,13,14,15,17,19\}$ halmaz teljesíti a feltételt. Ha a háromtényezős szorzatok sem szabad teljes négyzetek legyenek, akkor az előbbi csoportokból mindegy, hogy melyik elemet tesszük a H-ba (ha két szám szorzatát egy csoport egyik elemével szorozzuk és teljes négyzetet kapunk, akkor a csoport bármelyik tagjával szorozva teljes négyzetet kapunk). A $H=\{1,3,5,6,7,10,11,13,14,17,19\}$ halmaz teljesíti a feltételeket, így H-ban legalább 11 elem lehet. Másrészt ha $2\in H$, akkor az $(5,10)$ és $(7,14)$ párokból egy-egy elem nem kerülhet H-ba, tehát 11 elemnél több ebben az esetben sem lehet H-ban. Így feltételezhetjük, hogy $2\notin H$ (és így a 2-es csoportjából sincs elem H-ban). Ebben az esetben ha $15\in H$, akkor a 3, 20 és 5 elemek közül legalább kettőt ki kell zárni H-ból, tehát ebben az esetben sem lehet 11 elemnél több a H-ban. Ha viszont $2\notin H$ és $15\notin H$, akkor H szintén nem tartalmazhat 11 elemnél többet, tehát a megadott halmazban a lehető legtöbb elem van.

VII. osztály

1. Az egyenleteket összeadva kapjuk, hogy
$2a^2+2b^2+2c^2=2ac+2ba+2ca \Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$,
ahonnan $a=b=c=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

2. a) $5^b - 1 = 2^a$, tehát $4\left(5^{b-1} + 5^{b-2} + ... + 5 + 1\right) = 2^a$. Ha $a \geq 3$, akkor a zárójelben levő összeg páros szám kell legyen és ez csak akkor teljesül, ha b páros. Ebben az esetben $b = 2b_1$, $b_1 \in \mathbb{N}$ és $5^b - 1 = 25^{b_1} - 1 = 24M \vdots 3$, tehát ellentmondáshoz jutunk.
Az $a < 3$ értékeket megvizsgáljuk és a $b = 1,\ a = 2$ megoldáshoz jutunk.

b) $A = \dfrac{n(n+2) + (n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{2n^2 + 4n + 1}{(n+1)(n+2)}$.

Mivel $2n^2 + 4n + 1 = 2n(n+2) + 1$ és $2n^2 + 4n + 1 = 2(n+1)^2 - 1$, a számláló relatív prím $(n+1)$-gyel és $(n+2)$-vel. Így a tört nem egyszerűsíthető. A tizedes reprezentációja pontosan akkor véges, ha a nevező prímtényezős felbontása csak a 2 és 5 hatványait tartalmazza. Mivel $(n+1, n+2) = 1$, az $n = 0$ triviális eseten kívül minden lehetséges esetben az egyik tényező 2-nek hatványa és a másik tényező 5-nek. De $(n+2) - (n+1) = 1$, tehát meg kell keresni azokat az $a, b \in \mathbb{N}^*$ számokat, amelyekre $2^a - 5^b = 1$ vagy $5^b - 2^a = 1$.

A $2^a - 1 = 5^b$ egyenlet esetén 2^a 6-ban végződik, tehát $a \vdots 4$ és így $a = 4a_1$, $a_1 \in \mathbb{N}^*$, tehát

$$2^a - 1 = \left(2^4\right)^{a_1} - 1 = \left(2^4 - 1\right)\left(\left(2^4\right)^{a_1 - 1} + \left(2^4\right)^{a_1 - 2} + ... + 2^4 + 1\right) \vdots 3.$$

Ez ellentmondás, mert 5 hatványai nem oszthatók 3-mal, tehát az egyenletnek nincs 0-tól különböző megoldása.

Az a) alpont alapján a második egyenlet megoldása $a = 2,\ b = 1$ tehát a vizsgált összeg csak $n \in \{0, 3\}$ esetén véges tizedes tört.

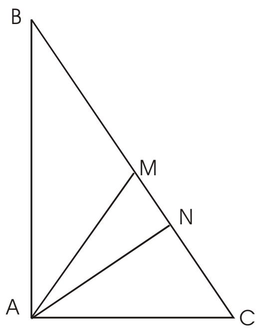
3. Ha $A = \overline{x0}$, ahol $x \in \mathbb{N}$, akkor az A, $A+1$, $A+2$, $A+3$, $A+4$, $A+5$ és $A+6$ számokból képzett számjegyösszegek egymás utáni számok. Így ezek közül legalább az egyik osztható 7-tel. Ugyanakkor ha $A - 1 = \overline{y9}$, $y \in \mathbb{N}$, akkor az $A-1$, $A-2$, $A-3$, $A-4$, $A-5$, $A-6$ és $A-7$ számokból származó számjegyösszegek is egymás utáni számok, tehát ezek közt is van egy, amely osztható 7-tel. Így legtöbb 12 darab egymás utáni számot írhatunk fel a feltételnek megfelelően és ehhez az szükséges, hogy $A+6$ és $A-7$ számjegyeinek összege legyen $7-$tel osztható. Másrészt ha $y = \overline{z\underbrace{999...9}_{k-1}}$, ahol z utolsó számjegye nem 9 és z számjegyeinek összege n, akkor

$$A=\overline{y9}+1=\overline{z\underbrace{99...9}_{k}}+1=\overline{(z+1)00...0},$$

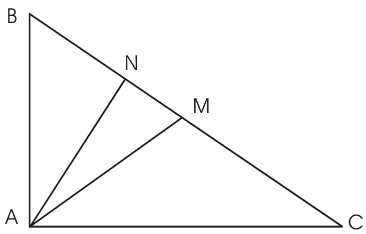
tehát A számjegyeinek összege $n+1$. Így a vizsgált számjegyösszegek $n+9k-5$, $n+9k-4$, $n+9k-3$, $n+9k-2$, $n+9k-1$, $n+9k$, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$, $n+6$ és $(n+7)\vdots 7$, illetve $(n+9k-6)\vdots 7$. Az első feltétel alapján $n\vdots 7$ és $(9k-6)\vdots 7$. Ezek a feltételek $n=0$ és $k=3$ esetén teljesülnek, tehát a $\{k \mid 994 \le k \le 1005\}$ halmaz 12 eleme teljesíti a feltételt.

4. $(AB-AC)^2=AB^2-2AB\cdot AC+AC^2$, tehát $AB^2+AC^2=2\sqrt{2}AB\cdot AC$ és így a Pitagorász-tétel alapján

$$BC^2=2\sqrt{2}AB\cdot AC.$$



De $T[ABC]=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}BC\cdot h$, ahol h az A-ból húzott magasság. Az előbbi összefüggések alapján $h=BC\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ha M a BC felezőpontja, akkor $AM=\frac{BC}{2}$, tehát az AMN derékszögű háromszögben $AM=AN\cdot\sqrt{2}$. Így a Pitagorász- tétel alapján $MN=AN$.



Ha $AC<AB$, akkor az átfogón a pontok sorrendje $B-M-N-C$, tehát $m\left(\widehat{AMC}\right)=2m\left(\widehat{ABC}\right)$ (mert $AM=BM$). De az AMN derékszögű háromszög egyenlő szárú, tehát $m\left(\widehat{ABC}\right)=22°30'$ és így

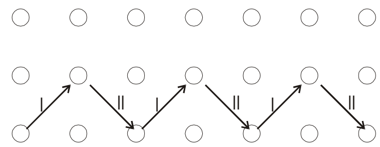
$$m\left(\widehat{ACB}\right)=67°30'.$$

Ha $AC>AB$, akkor az átfogón a pontok sorrendje $B-N-M-C$, tehát

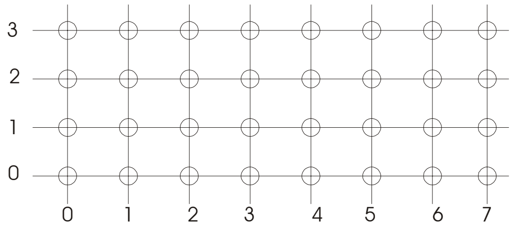
$$m\left(\widehat{AMB}\right)=2m\left(\widehat{ACB}\right)=45°.$$

Így $m\left(\widehat{ACB}\right)=22°30'$ és $m\left(\widehat{ABC}\right)=67°30'$.

5. Ha m vagy n páratlan, akkor a második játékosnak van nyerő stratégiája, mert mindig kényszerhelyzetbe hozhatja az I. játékost azáltal, hogy mindig kilépik a téglalap páros hosszúságú oldalára. Így végül valamelyik sarokba kerül az I. játékos, ahonnan nem tud tovább lépni (lásd a mellékelt ábrát).



Ha m is és n is páros, akkor az I. játékosnak van nyerő stratégiája és ez abban áll, hogy ő mindig jobbra felfele lépik.



Ha az ábrának megfelelően meghúzzuk és megszámozzuk a rácsvonalakat, akkor az I. játékos lépései után a bábu mindkét koordinátája páratlan és a második játékos lépései után a bábu mindkét koordinátája páros (koordinátának nevezzük a két rácsvonal számát, amelyek metszéspontjában áll a bábu).

Így a második játékos lépései után az első mindig tud lépni és eljuttathatja a bábut a jobb felső sarokba.

VIII. osztály

1. Ha az eredeti egyenletet 4-gyel beszorozzuk és átrendezzük, a

$$(2x-1)^2+(2y-1)^2=34$$

egyenlethez jutunk. De a 34 csak egyféleképpen bontható fel két páratlan teljes négyzet összegére ($34=25+9$), tehát a következő esetek lehetségesek:

$$\begin{cases}2x-1\in\{\pm3\}\\2y-1\in\{\pm5\}\end{cases},\begin{cases}2x-1\in\{\pm5\}\\2y-1\in\{\pm3\}\end{cases}.$$

Ezekből az esetekből a következő megoldásokhoz jutunk:

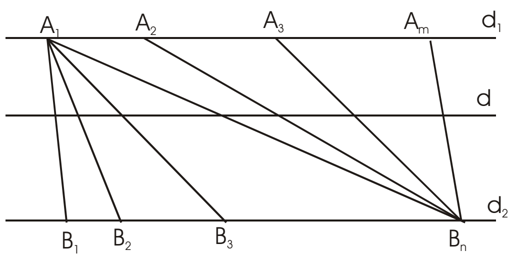
$$M=\{(2,3),(2,-2),(-1,3),(-1,-2),(3,2),(-2,2),(3,-1),(-2,-1)\}.$$

2. 1-től 28-ig egy szám számjegyeinek összege sem osztható 11-gyel, tehát a továbbiakban ennél több számot keresünk. Így a számok közt biztosan van olyan, amelyik 9-re végződik. Ha $A = \overline{z\underbrace{99...9}_{k}}$, egy ilyen szám, ahol z számjegyeinek összege m és z utolsó számjegye nem 9-es, akkor az $A+1 = \overline{(z+1)\underbrace{00...0}_{k}}$ szám számjegyeinek összege $m+1$, és az $A+2, ... A+10$ számok számjegyeinek összege rendre $m+2$, $m+3$, $m+4$, ..., $m+10$. Ez 10 egymásutáni szám, tehát csak akkor nincs köztük 11-gyel osztható, ha m osztható 11-gyel. Ha z utolsó számjegye nem 8, akkor a következő 9 szám számjegyeinek összege szintén $m+2$, $m+3$, ..., $m+10$ és az $A+20$ szám számjegyeinek összege $m+11$. Ez osztható 11-gyel, tehát az A szám után nem lehet 19-nél többet kiválasztani úgy, hogy teljesüljön a kért feltétel. Ha az A előtti számokat vizsgáljuk meg, akkor a számjegyek összege $m+9\cdot k$, $m+9k-1$, ..., $m+9(k-1)$, $m+9(k-1)+8 = m+9k-1$, $m+9k-2$, ..., $m+9k-9$ és $m+9k-10$ (20 darab szám). Ezek közt legalább egy osztható 11-gyel, tehát a legtöbb számot, akkor lehet kiválasztani, ha $m+9k-10$ osztható 11-gyel. Mivel $m \vdots 11$, a $9k+1$ kell 11-gyel osztható legyen. A legkisebb ilyen k a 6 és a megfelelő számok 999981, 999982, ..., 1000018. Ha a z utolsó számjegye 8 és van legalább két 9-es utána, akkor az előbbi gondolatmenet nem változik, míg ha csak 1 darab 9-es van utána, akkor (mivel legalább 28 egymásutáni szám van) választhatunk más 9-ben végződő számot.

3. Az $A_1B_1, A_1B_2, ..., A_1B_n, B_nA_2, B_nA_3, ..., B_nA_m$ egyenesek a d egyenest $n+m-1$ különböző pontban metszik. Másrészt ha

$$A_1A_2 = A_2A_3 = ... = A_{m-1}A_m = x,\ B_1B_2 = B_2B_3 = ... = B_{n-1}B_n = y,$$

hol x és y a d távolsága d_1-től és d_2-től, akkor az A_iB_j egyenes az A_1B_{j+i} vagy $A_{i+j-n}B_n$ egyenest a d-n metszi (ha $i+j \le n$, akkor az elsőt, míg ha $i+j>n$, akkor a másodikat). Így az előbb felsorolt metszéspontokon kívül nincs más metszéspont d-n, tehát a d-re illeszkedő metszéspontok számának minimuma $m+n-1$.



Ha A_iB_j és A_kB_l metszéspontja $O_{j,l}^{i,k}$, akkor az $O_{j,l}^{i,k}$-nek d_1 és d_2-től való u és v távolságaira igaz, hogy $\frac{u}{v} = \frac{A_iA_k}{B_jB_l}$.

Ha d olyan, hogy a d_1 és d_2- től vett x és y távolságaira $\frac{x}{y}$ racionális és $A_1A_2 = A_2A_3 = ... = A_{n-1}A_n = \sqrt{2}$, valamint

$$B_1B_2 = B_2B_3 = ... = B_{m-1}B_m = 1,$$

akkor egyetlen $O_{j,l}^{i,k}$ pont sem illeszkedik d-re (mert $O_{j,l}^{i,k}$-re a távolságok aránya irracionális), tehát a d egyenesen mn metszéspont keletkezik (minden A_iB_j egyenes más pontban metszi a d egyenest).

4. Tekintsük a mellékelt ábrát.

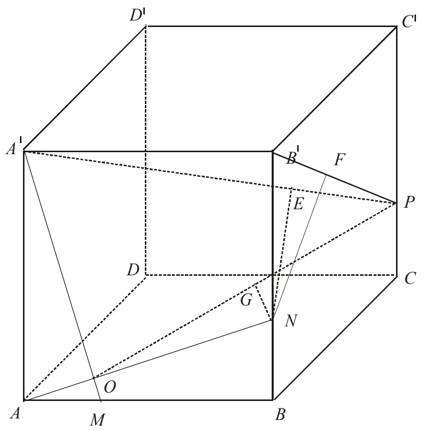
a) $\frac{BN}{B'N} = \frac{CP}{C'P} \Rightarrow NP \| BC \Rightarrow NP \perp (A'ABB') \Rightarrow NP \perp (A'ONB')$.

$$\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{B'N} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{BN}{BB'} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{BN}{AB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AM = BN \Rightarrow A'AM_\Delta \equiv ABN_\Delta$$

(mert $AB = AA'$, $AM = BN$, $m\left(\widehat{A'AM}\right) = m\left(\widehat{ABN}\right) = 90°$)

$\Rightarrow m\left(\widehat{NAB}\right) = m\left(\widehat{MA'A}\right)$ és $m\left(\widehat{A'MA}\right) = m\left(\widehat{BNA}\right)$. De tudjuk, hogy $m\left(\widehat{NAB}\right) + m\left(\widehat{AMA'}\right) = 90° \Rightarrow m\left(\widehat{AOM}\right) = 90°$.



Másrészt $PN \perp (NB'A'O)$, $NO \perp A'M$, tehát a három merőleges tétele alapján $PO \perp OA'$. Így a $PO \perp OA'$ és $A'O \perp ON$ merőlegességek alapján $A'O \perp (PNO)$. Az előbbi reláció, az $NG \perp OG$ merőlegesség és a három merőleges tétele alapján $A'G \perp NG$. De $NG \perp OP$, tehát $NG \perp (A'OP)$. $PE \perp PA'$ és $NG \perp (OA'P)$ alapján $GE \perp PA'$ (1) (3⊥t).

b) $A'B' \perp (B'NP)$, $B'F \perp NF$ alapján $A'F \perp NF$ (3⊥t). Így az $NF \perp B'P$ alapján $NF \perp (AB'P)$. Ebből az $NE \perp PA'$ és a három merőleges tétele alapján következik, hogy $EF \perp PA'$ (2). Az (1), (2) és $PA' \perp NE$ összefüggések alapján következik, hogy az N, E, F és G pontok az E pontban a PA'-re emelt merőleges síkban helyezkednek el, tehát koplanárisak.

5. A megoldás a következő két észrevételen alapszik:

1) Ha $n = k + m$ és a $2 \times k$ illetve a $2 \times m$ méretű csokoládédarabból kiindulva a kezdő játékos nyerhet, akkor az első játékos felosztja egy $2 \times k$ és egy $2 \times m$ méretű darabra majd az így kapott két darabhoz viszonyítva ameddig csak lehet ugyanabban a darabban tördel, amelyben a második. Így, ha lejegyeznénk a töréseket, akkor azok sorrendje felcserélhető úgy, hogy előbb az első darabban elvégzett töréseket írjuk le, majd külön a második darabban elvégzett töréseket.

Az egyik darabban a második játékos kezd és így a végén az első játékos (nem lévén más lehetősége) az utolsó törése helyett megkezdi a másik darabot. Ebben a darabban ő nyerhet, tehát a végén a második játékosnak két lehetősége van. Vagy elveszti ebben a darabban a játékos vagy visszatér az első darabhoz és így ebben szerepcsere történt, tehát az első játékos nyer. Így ebben az esetben az első játékos mindenképp nyerhet.

2) Ha n tetszőleges $k + m$ alakú felbontása esetén a $2 \times k$ és a $2 \times m$ méretű darabok közül pontosan az egyik vesztes darab annak, aki ezzel kezd, akkor a II. játékos nyerhet ha a nyertes darabban a nyerő stratégiának megfelelően kezd, majd mindig ugyanabban a darabban tördel, mint az első. Így a törések sorrendje ismét felcserélhető és a vesztes darabban az első játékos kezd, tehát vagy elveszíti itt, vagy végigjátssza a nyertes darabban a második által kezdett játszmát és ezt is elveszíti.

$n \in \{2, 3\}$ esetén az első veszít míg $n \in \{4, 5, 6\}$ esetén az első nyerhet ha a $4 = 2 + 2$, $5 = 2 + 3$, $6 = 3 + 3$ felosztásoknak megfelelően tör először.

Mivel a $7 = 2 + 5 = 3 + 4$ felbontások mindegyikében pontosan egy vesztes darab van, a második észrevétel alapján a 2×7-es darabból kiindulva az első veszít. A továbbiakban az első észrevétel, a $8 = 4 + 4$, $9 = 4 + 5$, $10 = 5 + 5$, $11 = 5 + 6$, $12 = 6 + 6$, $13 = 9 + 4$, $14 = 9 + 5$, $15 = 10 + 5$, $16 = 12 + 4$ és általában $n = (n - 4) + 4$ felbontások alapján az első minden $n \geq 8$ esetén nyerhet.

IX. osztály

1. Ha $n=1$-re írjuk fel az adott egyenlőséget, az $\dfrac{1}{x_1\sqrt{x_2}+x_2\sqrt{x_1}}=1-\dfrac{1}{\sqrt{x_2}}$ összefüggéshez jutunk. Ez nem teljesülhet, ha $x_1=0$ vagy $x_2=0$, ezért feltételezhetjük, hogy $x_1\geq 1$ és $x_2\geq 1$. $x_2=1$ esetén a jobb oldal 0 és a bal oldal szigorúan pozitív, tehát ez sem lehetséges és így $x_2\geq 2$. Másrészt a nevezők eltüntetése után az egyenlet $1+x_1+\sqrt{x_1x_2}=x_1\sqrt{x_2}+x_2\sqrt{x_1}$ alakban írható. Ezt összehasonlítva az eredeti egyenlőséggel az $1+x_1+\sqrt{x_1x_2}=\dfrac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_2}-1}$ egyenlőséghez jutunk. De ha $x_1\geq 2$, akkor

$$\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_2}-1}=1+\frac{1}{\sqrt{x_2}-1}\leq 1+\frac{1}{\sqrt{2}-1}=2+\sqrt{2},$$

tehát $x_1+\sqrt{x_1x_2}\leq 1+\sqrt{2}$. Viszont az $x_1\geq 1$ és $x_2\geq 2$ egyenlőtlenségek alapján $x_1+\sqrt{x_1x_2}\geq 1+\sqrt{2}$, tehát éppen az egyenlőségnek kell teljesülnie és ez csak akkor lehetséges ha $x_1=1$ és $x_2=2$. A továbbiakban a matematikai indukció módszerével igazoljuk, hogy $x_k=k$, $\forall\, k\geq 1$. Tekintsük a $P(n):\quad x_k=k,\ k\in\{1,2,\ldots,n\}$ állítást. Láttuk, hogy $P(1)$ és $P(2)$ igaz. Ha $P(n)$ igaz, akkor az adott összefüggések alapján

$$1-\frac{1}{\sqrt{x_{n+1}}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_{k+1}\sqrt{x_k}+x_k\sqrt{x_{k+1}}}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{x_{k+1}\sqrt{x_k}+x_k\sqrt{x_{k+1}}}+$$

$$+\frac{1}{x_{n+1}\sqrt{x_n}+x_n\sqrt{x_{n+1}}}=1-\frac{1}{\sqrt{x_n}}+\frac{1}{x_{n+1}\sqrt{x_n}+x_n\sqrt{x_{n+1}}}=$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{x_{n+1}\sqrt{n}+n\sqrt{x_{n+1}}}.$$

Az előbbi egyenlőségek alapján az $\dfrac{1}{\sqrt{x_{n+1}}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{x_{n+1}\sqrt{n}+n\sqrt{x_{n+1}}}$ egyenlethez jutunk, amelynek az egyetlen megoldása $x_{n+1}=n+1$, tehát a $P(n+1)$ állítás is igaz. A matematikai indukció alapján $P(n)$ igaz minden $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$-re, tehát $x_n=n$, $\forall\, n\geq 1$.

2. Az $y = ux + v$ egyenletű egyenes pontosan akkor érinti az $y = ax^2 + b(n)x + c(n)$ egyenletű parabolát, ha az előbbi két egyenletből alkotott rendszernek egyetlen megoldása van. Ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy az y kiküszöbölésével kapott $ax^2 + (b(n) - u)x + c(n) - v = 0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa 0 legyen, vagyis, hogy $b(n)^2 - 4ac(n) + u^2 - 2b(n)u + 4av = 0$. Az $y = ux + v$ egyenletű egyenes pontosan akkor érinti a parabolacsalád összes tagját, ha az előbbi összefüggés minden $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül. Mivel a csúcs koordinátái $y_V = -\dfrac{b(n)^2 - 4ac(n)}{4a}$ és $x_V = -\dfrac{b(n)}{2a}$ az előbbi egyenlőség ekvivalens az $y_V = u \cdot x_V + v + \dfrac{u^2}{4a}$ egyenlőséggel ($a \neq 0$) és ez azt jelenti, hogy a csúcsok az $y = ux + v + \dfrac{u^2}{4a}$ egyenletű egyenesen helyezkednek el. Tehát a két állítás egyenértékű.

3. $a \cdot \overrightarrow{OM} + b \cdot \overrightarrow{ON} = \vec{v} \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} \cdot \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \dfrac{1}{b} \cdot \vec{v}$. Ha M', O' a sík két pontja úgy, hogy $\overrightarrow{OM'} = \dfrac{a}{b}\overrightarrow{OM}$ és $\overrightarrow{OO'} = \dfrac{1}{b}\vec{v}$, akkor az eredeti összefüggés egyenértékű azzal, hogy

$$\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{ON} = -\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{O'N} = -\overrightarrow{OM'}.$$

Tehát az N pont által leírt síkrész területe megegyezik az M' pont által leírt alakzat területével, amikor M a H síkbeli halmazban mozog. De mivel $\overrightarrow{OM'} = \dfrac{a}{b}\overrightarrow{OM}$, a keresett terület a H halmaz pontjai által meghatározott terület $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2$-ed része, azaz $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 \cdot T$.

4. Egyenértékű átalakításokkal a rendszer a következővé írható át:

$$\begin{cases} x_2\left(ax_1 - b\right) = c & (1) \\ x_3\left(ax_2 - b\right) = c & (2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ x_n\left(ax_{n-1} - b\right) = c & (n-1) \\ x_1\left(ax_2 - b\right) = c & (n) \end{cases}.$$

$a = b = 0$ eset nem fordulhat elő, hisz $b^2 + 4ac > 0$.

Ha $a = 0,\ b \neq 0$, akkor $x_1 = x_2 = ... = x_n = -\dfrac{c}{b}$.

Ha $a \neq 0,\ b = 0$, akkor $x_1 = x_2 = ... = x_n = \pm\sqrt{\dfrac{c}{a}}$.

Ha $a \neq 0,\ b \neq 0$, akkor a következő esetek lehetségesek:

1) Ha létezik $m \in \{1, 2, ..., n\}$ úgy, hogy $x_m = \dfrac{b}{a} \overset{(m)}{\Rightarrow} c = 0$.

Ha $c \neq 0$, akkor nincs megoldás.

Ha $c = 0$, akkor $b^2 + 4ac = b^2 > 0,\ \forall b \in \mathbb{R}^*$.

$$x_m = \frac{b}{a} \overset{(m-1)}{\Rightarrow} x_{m-1} = \frac{b}{a} \overset{(m-2)}{\Rightarrow} x_{m-2} = \frac{b}{a} \Rightarrow ...$$

$$... \overset{(1)}{\Rightarrow} x_1 = \frac{b}{a} \overset{n}{\Rightarrow} x_n = \frac{b}{a} \Rightarrow ... \overset{(m+1)}{\Rightarrow} x_{m+1} = \frac{b}{a}$$

2) Ha $\forall m \in \{1, 2, ..., n\}$, $ax_m - b \neq 0$, akkor, bevezetve az

$$f(x) = \frac{c}{ax - b},\ f : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{b}{a}\right\} \to \mathbb{R}$$

függvényt, a rendszer a következőkkel egyenértékű:

$$\begin{cases} x_2 = f\left(x_1\right) \\ x_3 = f\left(x_2\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = f\left(x_{n-1}\right) \\ x_1 = f\left(x_n\right) \end{cases} \Rightarrow x_1 = f\left(x_n\right) = (f \circ f)\left(x_{n-1}\right) = ... = f_n\left(x_1\right),$$

ahol f_n az f n-szeres összetettjét jelöli.

$$(f \circ f)(x) = \frac{c}{a\dfrac{c}{ax - b} - b} = \frac{acx - bc}{-abx + ac + b^2}$$

Látható, hogy a kétszeres összetétel is két elsőfokú kifejezés hányadosa. Ha feltételezzük, hogy léteznek az A_m, B_m, C_m, D_m valós számok úgy, hogy $f_m(x) = \dfrac{A_m x + B_m}{C_m x + D_m}$ rögzített $m \in \mathbb{N}^*$ esetén, akkor az

$$f_{m+1}(x) = f\left(f_m(x)\right) = \frac{cC_m x + cD_m}{\left(aA_m - bC_m\right)x + \left(aB_m - bD_m\right)},$$

egyenlőség alapján és $\exists A_{m+1}, B_{m+1}, C_{m+1}, D_{m+1} \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $f_{m+1}(x) = \dfrac{A_{m+1}x + B_{m+1}}{C_{m+1}x + D_{m+1}}$. A matematikai indukció elve alapján minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén léteznek $A_n, B_n, C_n, D_n \in \mathbb{R}$ számok úgy, hogy $f_n(x) = \dfrac{A_n x + B_n}{C_n x + D_n}$. Így az $f_n(x) = x$ egyenlet egyenértékű egy másodfokú egyenlettel, tehát legtöbb két gyöke lehet. Másrészt $f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{c}{ax - b} = x \Leftrightarrow ax^2 - bx - c = 0$, $\Delta = b^2 + 4ac > 0$, így az $f(x) = x$ egyenletnek két különböző gyöke van és ezek a gyökök már származtatnak két megoldást. Ha $f(x) = x$, akkor

$\left(f \circ f\right)(x) = f(x) = x \Rightarrow f_3(x) = f_2(x) = f_1(x) = x \Rightarrow \ldots \Rightarrow f_n(x) = x$,

tehát ebben az esetben a rendszernek csak az $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \alpha$ és $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = \beta$ megoldása van, ahol α és β az $ax^2 - bx - c = 0$ egyenlet gyökei.

5. Jelölje k, l, m rendre a háromszög legrövidebb, középső és leghosszabb oldalát. Számoljuk össze, hány olyan háromszög van, melynek leghosszabb oldala pontosan m és másik két oldala az $\{1, 2, \ldots, m\}$ halmazból van.

Rögzített m és $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ esetén l a következő feltételeknek kell eleget tegyen: $m \geq l \geq k$ és $l + k > m$. Ilyen k, l, m oldalhosszakkal valóban szerkeszthető háromszög, hisz a másik két oldalra felírt háromszög- egyenlőtlenség is teljesül:

$$m \geq l \text{ és } k \geq 1 \Rightarrow m + k > l,\ m \geq k \text{ és } l \geq 1 \Rightarrow m + l > k.$$

Tehát rögzített m és k esetén $l \in \left\{\max\{m + 1 - k, k\}, \ldots, m\right\}$.

1) Ha $m = 2m_0,\ m_0 \in \mathbb{N}^*$, akkor a következő két eset lehetséges:

a) $k \leq m + 1 - k \Leftrightarrow 2k \leq 2m_0 + 1 \Leftrightarrow k \leq m_0$, tehát $l \in \left\{2m_0 + 1 - k, \ldots, 2m_0\right\}$.

b) $k > m+1-k \Leftrightarrow 2k \geq 2m_0 + 1 \Leftrightarrow k > m_0$, tehát $l \in \{k, \ldots, 2m_0\}$

Következésképpen rögzített $m = 2m_0$-ra

$$\sum_{k=1}^{m_0} k + \sum_{k=m_0+1}^{2m_0} \left(2m_0 - k + 1\right) = m_0\left(m_0 + 1\right)$$

háromszög szerkeszthető.

2) Rögzített $m = 2m_0 + 1,\ m_0 \in \mathbb{N}^*$-ra az előbbihez hasonló gondolatmenettel $\left(m_0 + 1\right)^2$ háromszög szerkeszthető.

Jelölje h_n az $\{1, 2, \ldots, n\}$ oldalhosszakkal képezhető háromszögek számát. Ekkor $h_1 = 1$ és az előbbiek alapján

$$h_{2n+1} = h_{2n-1} + n(n+1) + (n+1)^2,$$

valamint $$h_{2n} = h_{2n+1} - (n+1)^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Ezek alapján

$$h_{2n+1} = h_{2n-1} + (n+1)(2n+1) = h_{2n-3} + \left[(n-1)+1\right]\left[2(n-1)+1\right] +$$

$$+(n+1)(2n+1) = \ldots = h_1 + \sum_{k=1}^{n}(k+1)(2k+1) =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(2k^2 + 3k + 1\right) = \frac{n+1}{6}\cdot\left(4n^2 + 11n + 6\right),\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$h_{2n} = h_{2n+1} - (n+1)^2 = \frac{n+1}{6}\cdot\left(4n^2 + 5n\right),\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Megjegyzés. A h_{n+1} és h_n közti összefüggéseket rövidebb úton is levezethetjük, ha csak azokat a háromszögeket számoljuk meg, amelyekben a legnagyobb oldal hossza $n+1$.

X. osztály

1. Ha minden sorban $a \neq 0$ és minden oszlopban $b \neq 0$ állandó különbségű számtani haladványt írunk, akkor az m-edik sor k-adik oszlopában $(m-1)a + (k-1)b$ áll és ha kiválasztunk n elemet úgy, hogy közülük semelyik kettő ne legyen egy sorban vagy egy oszlopban, akkor az összegük $S = \left(1 + 2 + \ldots + (n-1)\right)a + \left(1 + 2 + \ldots + (n-1)\right)b$ és ez állandó. Ha a és b azonos előjelű, akkor minden sorban és minden oszlopban szigorúan monoton számtani haladvány kerül és így ha $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$, akkor a táblázatban nincs két azonos szám, tehát elégséges az a-t és a b-t úgy megválasztani, hogy teljesüljön az $(n-1)(a+b)=x$ egyenlőség és $\frac{a}{b}\notin\mathbb{Q}$. Ha $x\neq 0$, akkor ez végtelen sok különböző módon lehetséges, míg $x=0$ esetén az első sor második eleme ugyanaz, mint az utolsó oszlop utolsó előtti eleme. Ha $n=2$, akkor ez a két elem lehet egyenlő és így helyes kitöltést eredményez, míg $n\geq 3$ esetén a kitöltés nem lehetséges.

2. A rendszer egyenletei alapján $x_{i+1}=\frac{x_i^2+a}{2x_i}$, ha $i\in\{2,3,\ldots,n\}$ és $x_1=\frac{x_n^2+a}{2x_n}$. Tehát ha $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\frac{z^2+a}{2z}$, akkor $x_2=f(x_1)$, $x_3=f(x_2)=f(f(x_1))$, általában $x_k=f^{(k-1)}(x_1)$ ha $k\in\{2,3,\ldots,n\}$ és $x_1=f^{(n)}(x_1)$. Másrészt

$$\frac{f(z)-\sqrt{a}}{f(z)+\sqrt{a}}=\frac{(z-\sqrt{a})^2}{(z+\sqrt{a})^2},\ \frac{f(f(z))-\sqrt{a}}{f(f(z))+\sqrt{a}}=\left(\frac{z-\sqrt{a}}{z+\sqrt{a}}\right)^{2^2}$$

és általában $\frac{f^{(k)}(z)-\sqrt{a}}{f^{(k)}(z)+\sqrt{a}}=\left(\frac{z-\sqrt{a}}{z+\sqrt{a}}\right)^{2^k}$, ha $k\geq 1$ és az előbbi kifejezések nevezője nem nulla. Látható, hogy $f(z)=\sqrt{a}\Leftrightarrow z=\sqrt{a}$ és $f(z)=-\sqrt{a}\Leftrightarrow z=-\sqrt{a}$, tehát az $x_1=x_2=\ldots=x_n=\sqrt{a}$ és $x_1=x_2=\ldots=x_n=-\sqrt{a}$ számok megoldások. A többi megoldás teljesíti az $x_1=f^{(n)}(x_1)$ egyenlőséget, tehát az

$$\frac{x_1-\sqrt{a}}{x_1+\sqrt{a}}=\left(\frac{x_1-\sqrt{a}}{x_1+\sqrt{a}}\right)^{2^n}$$

egyenlethez jutunk. Az $x_1\notin\{\pm\sqrt{a}\}$ feltétel miatt ez ekvivalens az

$$\left(\frac{x_1-\sqrt{a}}{x_1+\sqrt{a}}\right)^{2^n-1}=1$$

egyenlettel, amelynek megoldásai $\frac{\sqrt{a}\left(1+\varepsilon_k\right)}{1-\varepsilon_k}$, ahol $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{2^n-1}+i\sin\frac{2k\pi}{2^n-1}$ és $k\in\{1,2,\ldots,2^n-1\}$.

Ezt visszahelyettesítve a következő szám n -eseket kapjuk:

$$x_j = \frac{\sqrt{a}\left(1+\varepsilon_k^{2^{j-1}}\right)}{1-\varepsilon_k^{2^{j-1}}},\ j=\overline{1,n},$$

tehát a megoldások

$$x_j = \sqrt{a},\ j=\overline{1,n},$$

$$x_j = -\sqrt{a},\ j=\overline{1,n} \text{ és}$$

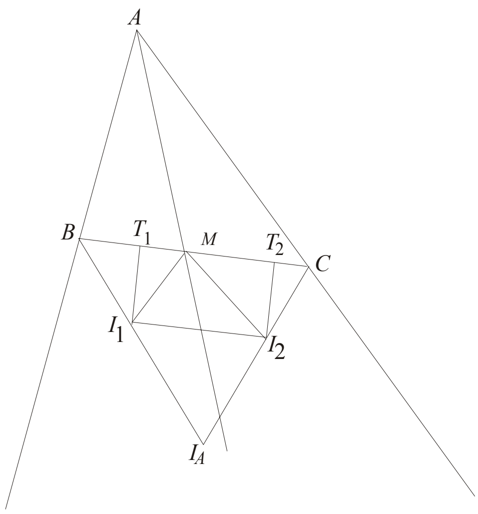
$$x_j = \frac{\sqrt{a}\left(1+\varepsilon_k^{2^{j-1}}\right)}{1-\varepsilon_k^{2^{j-1}}},\ j=\overline{1,n}, \text{ minden rögzített } k\in\{1,2,\dots,2^n-1\}\text{-re.}$$

3. Ha $x\in\mathbb{Z}$, az x^2+x szám 3-mal való osztási maradéka 0 vagy 2 aszerint, hogy x-nek a 3-mal való osztási maradéka a $\{0,2\}$ vagy az $\{1\}$ halmazhoz tartozik. Ebből következik, hogy ha $k=3m+2$, $m\in\mathbb{N}$, akkor $k+f(k)+f^2(k)$ nem osztható 3-mal (az osztási maradék 2 vagy 1), tehát az $f(2), f(5),\dots f(2003)$ értékeket tetszőlegesen megválaszthatjuk. Minden értéket a $H\setminus\{3j+2 \mid j=\overline{0,667}\}$ halmazból választunk, tehát ez 1336^{668} különböző módon lehetséges. Jelöljük p-vel azoknak a 3-mal osztható számoknak a számát, amelyekre $\left[k+f(k)+f^2(k)\right]\vdots 3$. Ez azt jelenti, hogy $f(k)$ osztható 3-mal vagy a 3-mal való osztási maradéka 2. A második eset nem lehetséges, tehát minden $f(k)$ értékeket a $\{3,6,9,\dots,2004\}$ halmazból választhatunk. Ebben az előbbi halmazban $\frac{1}{3}\cdot 2004=668$ elem van, tehát ezeket az értékeket 668^p különböző módon választhatjuk. A maradék $668-p$ darab 3-mal osztható k szám esetén $f(k)$-nak a 3-mal val osztási maradéka1, tehát ezeket 668^{668-p} különböző módon választhatjuk. Így $C_{668}^{p}\cdot 668^p\cdot 668^{668-p}=C_{668}^{p}\cdot 668^{668}$ különböző módon választhatjuk ki az $f(k)$ értékeket, ha $k\vdots 3$. Ahhoz, hogy pontosan 1000 darab 3-mal osztható szám legyen a $k+f(k)+f^2(k)$, $k=\overline{1,2004}$ számok közt, pontosan $1000-p$ darab $3v+1$ alakú k számra kell teljesülnie a $[k+f(k)+f^2(k)]\vdots 3$ összefüggésnek. Ez viszont pontosan akkor teljesül, ha $f(k)$ is $3v+1$ alakú és így 668^{1000-p} lehetőség van. A többi $668-(1000-p)=p-332$ darab $3v+1$ alakú számra $\left[k+f(k)+f^2(k)\right] \not\vdots\, 3$, tehát az $f(k)$ értékek 3-mal való osztási maradéka 0 vagy 2. Ez 668^{p-332} módon lehetséges, tehát $C_{668}^{1000-p}\cdot 668^{1000-p}\cdot 668^{p-332}=C_{668}^{1000-p}\cdot 668^{668}$ lehetőség van az $f(k)$ értékek megválasztására ha k-nak 3-mal való osztási maradéka 1. Mivel $p\in\{332,333,\dots,668\}$, a különböző függvények száma

$$\sum_{p=332}^{668} C_{668}^{p}\cdot C_{668}^{1000-p}\cdot 1336^{668}\cdot 668^{668}\cdot 668^{668}=$$

$$=1336^{668}\cdot 668^{1336}\cdot\sum_{p=332}^{668} C_{668}^{p}\cdot C_{668}^{1000-p}=668^{2004}\cdot 2^{668}\cdot C_{1336}^{1000}.$$

4. A mellékelt ábrán I_1 és I_2 az ABM és ACM háromszögekben a BM és MC oldalhoz írt kör középpontja és I_A az ABC háromszög BC oldalához írt kör középpontja. Ha r_0-val jelöljük az első két hozzáírt kör sugarát, akkor az



$$r_0=\frac{T[ABM]}{p_1-BM} \text{ és}$$

$$r_0=\frac{T[ACM]}{p_2-MC}$$

egyenlőségek alapján

$$T[ABC]=r_0(p_1+p_2-BC)=r_0(AM+p-a),$$

ahol p_1, p_2 és p rendre az ABM, ACM és ABC háromszög fél kerülete. Másrészt $I_1I_2 \parallel BC$ és így

$$\frac{r_a-r_0}{r_a}=\frac{I_1I_2}{BC}=\frac{MT_1+MT_2}{a},$$

ahol T_1 és T_2 az érintési pontok és $r_a=\dfrac{T[ABC]}{p-a}$ az ABC háromszög BC oldalához írt kör sugara.

De $MT_1 = p_1 - AM$ és $MT_2 = p_2 - AM$, tehát $1 - \frac{r_0}{r_a} = \frac{p - AM}{a}$.

Ebből következik, hogy $\frac{r_0}{r_a} = \frac{AM - (p-a)}{a}$. A levezetett egyenlőségek alapján

$$AM^2 - (p-a)^2 = a\frac{r_0}{r_a} \cdot \frac{T[ABC]}{r_0} = a(p-a),$$

tehát $AM = \sqrt{p(p-a)}$.

5. Ha téglalapot osztottunk volna fel, akkor $C_{n+1}^2 \cdot C_{2k+n+1}^2$ darab négyszög lenne (a téglalap két szomszédos oldalán ki kell választani a négyszög tartóegyenesei által meghatározott két-két metszéspontot). Elégséges ebből a számból levonni a kétoldalt keletkezett háromszögek számát. Az egyik oldalon $n \cdot C_{k+1}^2$ háromszög keletkezik (az egyik csúcsa rögzített, a szembefekvő oldal tartóegyenesét n egyenes közül választjuk ki és minden tartóegyenesen $(k+1)$ pont közül választjuk ki a háromszög lét csúcsát), tehát a vizsgált ábrán $C_{n+1}^2 C_{2k+n+1}^2 - 2nC_{k+1}^2$ négyszög látható.

XI. osztály

1. A rekurzió alapján $x_2 = 10 + 2 = 12$, $x_3 = 24 + 3 = 27$, $x_4 = 54 + 3 = 57$. n szerinti indukcióval igazoljuk, hogy $\left[\frac{x_n}{2^n}\right] = 3$, $\forall\, n \geq 2$. Az indukciós állítás a következő:

$$P(n): \left[\frac{x_k}{2^k}\right] = 3, \quad \forall\ 2 \leq k \leq n.$$

Az $\frac{x_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{x_n}{2^n} + 3 \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$, $\frac{x_n}{2^n} = \frac{x_{n-1}}{2^{n-1}} + 3 \cdot \frac{1}{2^n}$, ..., $\frac{x_3}{2^3} = \frac{x_2}{2^2} + 3 \cdot \frac{1}{2^3}$ egyenlőségek összeadásából következik, hogy

$$\frac{x_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{x_2}{4} + \frac{3}{8}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{n-2}}\right) = 3 + \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Tehát $4 > \frac{x_{n+1}}{2^{n+1}} > 3$ és így $\left[\frac{x_{n+1}}{2^{n+1}}\right] = 3$. A matematikai indukció elve alapján

$$\left[\frac{x_n}{2^n}\right]=3,\ \forall\, n\geq 2, \text{ tehát}$$

$$x_{n+1}=3\cdot 2^{n+1}+3\cdot 2^{n-1}-3=15\cdot 2^{n-1}-3, \forall\, n\geq 2.$$

2. Ha $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$, akkor

$$P(\lambda)=\det(A-\lambda I_3)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=-\lambda^3+\operatorname{Tr}(A)\lambda^2-\operatorname{Tr}(A^*)\lambda+\det(A)$$

ahol A^* az A adjungáltja (λ^3 és λ^2 csak az $(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda)$ kifejtéséből származik, a szabadtag $P(0)=\det(A)$ és a λ együtthatója $P'(0)=\operatorname{Tr}(A^*)$). Ez alapján ha

$$\det(A^2+A+I_3)=\det(A-\varepsilon_1 I_3)\det(A-\varepsilon_2 I_3)=0,$$

ahol ε_1 és ε_2 nem valós harmadrendű egységgyökök, akkor a két egységgyök közül legalább az egyik gyöke a P harmadfokú és valós együtthatójú polinomnak. Mivel $\varepsilon_2=\overline{\varepsilon_1}$ és P együtthatói valósak ez csak úgy lehetséges, ha mindkét egységgyök gyöke P-nek. Ha p-vel jelöljük a P harmadik gyökét, akkor

$$P(x)=-(x-p)(x^2+x+1)=-x^3+(p-1)x^2+(p-1)x+p,$$

tehát az együtthatók azonosításából adódik, hogy

$$-1+\det A=\operatorname{Tr}(A)=-\operatorname{Tr}(A^*).$$

Az előbbiek alapján látható, hogy a fordított implikáció is igaz, mert ha az előbbi egyenlőségek teljesülnek, akkor a P gyökei ε_1, ε_2 és $p=-\det A$. Ez alapján $\det(A^2+A+I_3)=P(\varepsilon_1)P(\varepsilon_2)=0$.

3. a) Ahhoz, hogy a tulajdonság igaz legyen elégséges igazolni, hogy $\forall\varepsilon>0$ esetén a grafikus kép eltolható az Ox tengellyel párhuzamosan. Az általánosság csorbítása nélkül feltételezhetjük, hogy $a>0$ (ha $a<0$, a grafikus kép Ox szerinti szimmetrikusára végezzük el a bizonyítást). Ha $y\in\mathbb{N}$, akkor az $f(x)=y$ egyenlet megoldásai $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac+4ay}}{2a}$. Ha valamelyik gyök törtrésze kisebb, mint ε, akkor a grafikus kép eltolható az Ox-szel párhuzamosan úgy, hogy az eltolás után tartalmazzon legalább egy rácspontot. Tehát elégséges igazolni, hogy létezik olyan $k\in\mathbb{Z}$ és $y\in\mathbb{Z}$, amelyre teljesül a $k\le\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac+4ay}}{2a}\le k+\varepsilon$. (1)

Ez az egyenlőtlenség a következőképpen alakítható:

$$(1)\Leftrightarrow 2ak+b\le\pm\sqrt{b^2-4ac+4ay}\le 2ak+2a\varepsilon+b\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ak^2+kb+c\le y\le ak^2+a\varepsilon^2+2ak\varepsilon+kb+b\varepsilon+c.$$

Az előbbi egyenlőtlenségsorozatban a szélső tagok különbsége $a\varepsilon^2+2ak\varepsilon+b\varepsilon$ és ha ez nagyobb, mint 1, akkor létezik köztük legalább egy egész szám. Ez lehetséges, mert ha rögzített $\varepsilon>0$-ra $k\ge\max\left\{0,\frac{1-b\varepsilon-a\varepsilon^2}{2a\varepsilon}\right\}$, akkor az egyenlőtlenség teljesül. Látható, hogy k növelésével y is növekszik, tehát k megválasztható úgy, hogy $b^2-4ac+4ay>0$.

b) A grafikus kép pontosan akkor tolható el úgy, hogy illeszkedjen az (x_1,y_1) és (x_2,y_2) rácspontokra, ha létezik $u,v\in\mathbb{R}$ úgy, hogy

$$a(x_1+u)^2+b(x_1+u)+c+v=y_1 \text{ és}$$
$$a(x_2+u)^2+b(x_2+u)+c+v=y_2.$$

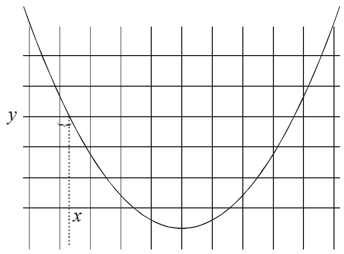
Ebből következik, hogy

$$u=\frac{1}{2a}\left(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}-b\right)-\frac{x_1+x_2}{2} \text{ és } v=y_2-a(x_2+u)^2-b(x_2+u)-c.$$

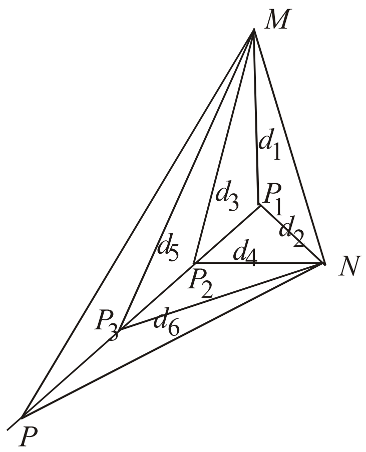
Az így kapott számok valósak, tehát tetszőleges $x_1\ne x_2$ és $y_1,y_2\in\mathbb{Z}$ esetén eltolható a parabola úgy, hogy illeszkedjen a két kiválasztott pontra.

c) Ha az eltolás után a parabola illeszkedik az (x_i,y_i), $i\in\{1,2,3\}$ pontokra, akkor az előbbi alpontban kapott összefüggések alapján az (x_1,y_1), (x_2,y_2) és (x_3,y_3), (x_2,y_2) pontpárok által meghatározott u értékek azonosak. Ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy

$$a=\frac{1}{x_1-x_3}\left(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}-\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}\right)\in\mathbb{Q}.$$



4. A feltételek alapján $d_1 = 2$ és $d_2 = \sqrt{4-1-2} = 1$, tehát a koszinusz tétel alapján $m(\widehat{MP_1N}) = 150^\circ$. Ugyanakkor $d_3 = \sqrt{7}$ és $d_4 = \sqrt{2}$. Ha $\alpha = m(\widehat{P_2P_1N})$, akkor az MP_1P_2 és NP_1P_2 háromszögekben a koszinusz tétel alapján $\cos\alpha = \dfrac{x^2-1}{2x}$ és $\cos(210-\alpha) = \dfrac{x^2-3}{4x}$, ahol $P_1P_2 = x$.



Ezek alapján $\sin\alpha = -(1+\sqrt{3})\dfrac{x^2-\sqrt{3}}{2x}$, tehát a $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ összefüggésből

$$-(1+\sqrt{3})^2\,\frac{\left(x^2-1\right)\left(x^2-3\right)}{4x^2} = \frac{\left(x^2-1\right)^2}{4x^2}$$

egyenlethez jutunk és így $x^2 \in \left\{1, \dfrac{29+4\sqrt{3}}{13}\right\}$. Ha $x^2 = 1$, akkor $P_1P_2 = 1$, $m(\widehat{P_2P_1N}) = 90^\circ$ és $m(\widehat{P_2P_1M}) = 120^\circ$. Mivel ez lehetséges eredményeket ad és a szerkesztés egyértelmű, ezért az $x^2 = \dfrac{29+4\sqrt{3}}{13} > 1$ esetet nem szükséges vizsgálni. A továbbiakban igazoljuk, hogy a többi pont is ezen a P_1P_2 egyenesen van. A rekurzió alapján $d_{2n+2}^2 = d_{2n}^2 + 2n - 1$, tehát

$$d_{2n+2}^2 = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1) = 1 + n^2 \text{ és } d_{2n+1}^2 = 3 + (n+1)^2 = n^2 + 4 + 2n$$

ha $n \geq 1$, tehát ha a P_1P_2 egyenesen felvesszük a $\left(P_{n+1}\right)_{n\geq 1}$ pontokat úgy, hogy $P_1P_{n+1}=n$, $\forall\, n\geq 1$, akkor $MP_{n+1}^2=n^2+4+2\cdot 2\cdot n\cdot\dfrac{1}{2}=d_{2n+1}^2$ és $NP_{n+1}^2=1+n^2=d_{2n+2}$. Így igazoltuk a kért tulajdonságú pontok létezését és beláttuk azt is, hogy egy egyenesen vannak.

Megjegyzés. Ha a szerkesztés elvégezhető, akkor egyértelmű a pontok helyzete, tehát a bizonyítás első része elhagyható.

5. Minden $2k$-ad osztályú kombináció pontosan $(2k)!$ variációt származtat, ezért elégséges a páros összegű $2k$-ad osztályú kombinációk elemeinek összegét megszámolni. Egy tetszőleges $\{a_1,a_2,...,a_{2k}\}$ kombináció elemeinek az összege pontosan akkor páros, ha páros sok páratlan számot tartalmaz. Ha $2p$-vel jelöljük ($0\leq p\leq k$) a kombinációban megjelenő páros számok számát, és rögzítjük p-t, akkor egy tetszőleges páros szám $C_{2n-1}^{2p-1}\cdot C_{2n}^{2n-2p}$ darab kombinációban szerepel, tehát a kombinációkban megjelenő páros számok összege (a megjelenések számát is figyelembe véve):

$$C_{2n-1}^{2p-1}\cdot C_{2n}^{2k-2p}\cdot\sum_{j=1}^{2n}2j=C_{2n-1}^{2p-1}\cdot C_{2n}^{2k-2p}\cdot 2n(2n+1).$$

Hasonló gondolatmenet alapján a kombinációkban megjelenő páratlan számok összege:

$$C_{2n-1}^{2k-2p-1}\cdot C_{2n}^{2p}\cdot\sum_{j=1}^{2n}(2j-1)=C_{2n-1}^{2k-2p-1}\cdot C_{2n}^{2p}\cdot(2n)^2.$$

Mivel $0\leq p\leq k$ a kiválasztott kombinációkban szereplő számok összege:

$$2n(2n+1)\sum_{p=0}^{k}C_{2n-1}^{2p-1}\cdot C_{2n}^{2n-2p}+(2n)^2\sum_{p=0}^{k}C_{2n-1}^{2k-2p-1}\cdot C_{2n}^{2p}.$$

A továbbiakban ezeket az összegeket számítjuk ki. Tekintjük az

$$(1+x)^{2n}+(1-x)^{2n}=2\left(1+C_{2n}^2x^2+C_{2n}^4x^4+...\right) \text{ és}$$

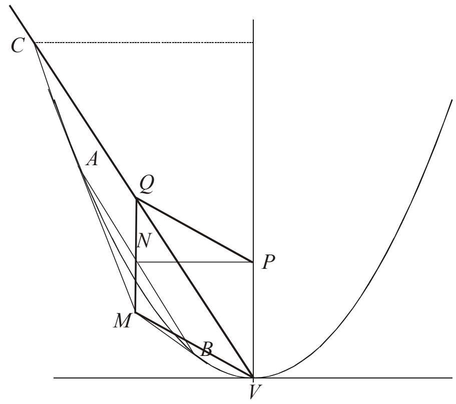
$$(1+x)^{2n-1}-(1-x)^{2n-1}=2\left(C_{2n-1}^1x+C_{2n-1}^3x^3+...\right)$$

polinomokat. A szorzatukban x^{2k-1} együtthatója felírható

$4\sum_{p=0}^{k}C_{2n-1}^{2p-1}\cdot C_{2n}^{2n-2p}$ és $4\sum_{p=0}^{k}C_{2n-1}^{2k-2p-1}\cdot C_{2n}^{2p}$ alakban (ha valamelyik kombinációs együttható felső indexe negatív vagy nagyobb, mint az alsó index, akkor az illető kombinációs együttható 0). Másrészt a szorzat

$(1+x)^{4n-1}-(1-x)^{4n-1}-2x\left(1-x^2\right)^{2n-1}$ alakban írható, tehát az x^{2k-1} tag együtthatója $2\left(C_{4n-1}^{2k-1}+(-1)^k C_{2n-1}^{k-1}\right)$. Ez alapján a kiválasztott variációk tagjainak összege $(2k)!\cdot n(4n+1)\cdot\left[C_{4n-1}^{2k-1}+(-1)^k C_{2n-1}^{k-1}\right]$.

XII. osztály



1. Ha a parabola csúcspontját választjuk origónak és a szimmetriatengelyét Oy tengelynek, akkor az egyenlete $y=ax^2$ ($a>0$). Ha $A\left(x_0,ax_0^2\right)$ és $B\left(x_1,ax_1^2\right)$ a két rögzített pontok, akkor az érintők egyenletei $y=ax_0(2x-x_0)$ és $y=ax_1(2x-x_1)$. Tehát a metszéspont koordinátái $M\left(\frac{x_0+x_1}{2},ax_0x_1\right)$. Az AB szakasz felezőpontjának koordinátái $N\left(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{a\left(x_0^2+x_1^2\right)}{2}\right)$, tehát az N-nek az Oy-re eső vetülete $P\left(0,\frac{a\left(x_0^2+x_1^2\right)}{2}\right)$. Az MP felezőpontja egybeesik a VQ felezőpontjával, tehát a Q pont koordinátái

$$y_Q=ax_0x_1+\frac{a}{2}\left(x_0^2+x_1^2\right)\text{és}$$
$$x_Q=\frac{x_0+x_1}{2}.$$

Ez alapján a VQ egyenes egyenlete $y=a(x_0+x_1)x$ és így a parabolával való második metszéspont abszcisszája

$$x_C=x_0+x_1.$$

Értelmezzük a $P=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| y=ax^2\right\}$ halmazon (a parabola pontjaiból alkotott halmaz) az $f:P\to\mathbb{R}$, $f(A)=x_A$ függvényt. Ez a függvény bijektív és az előbbiek alapján $f(A\oplus B)=f(A)+f(B)$. Ez alapján következik, hogy $(P,\oplus)$ Abel csoport és $(P,\oplus)\simeq(\mathbb{R},+)$. Másrészt a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$, $g(x)=e^x$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$ függvény izomorfizmus, tehát a $g\circ f:P\to\mathbb{R}_+^*$ függvény izomorfizmus a $(P,\oplus)$ és $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ csoportok közt.

Megjegyzés. A bizonyításban felhasználtuk a következő tulajdonságokat:

1) Ha $(G,\cdot)$ csoport és $H\subseteq M$ egy tetszőleges nem üres halmaz, amelyen adott a $*:H\times H\to M$ függvény (tehát nem tudjuk a $*$-ról, hogy belső művelet-e, vagy sem), és $f:G\to H$ egy műveletartó bijektív függvény, akkor $(H,*)$ csoport és $(H,*)\simeq(G,\cdot)$, az f pedig izomorfizmus (XII. osztályos tankönyv 214. oldal 6. megoldott feladat).

2) G_1,G_2,G_3 csoportok, $G_1\simeq G_2$ és $G_2\simeq G_3$ $\Rightarrow G_1\simeq G_3$, mert ha $f:G_1\to G_2$ és $g:G_2\to G_3$ izomorfizmusok, akkor $g\circ f:G_1\to G_3$ is izomorfizmus (XII. osztályos tankönyv 211. oldal 3. megjegyzése).

2. Az f függvény teljesíti a Lagrange tétel feltételeit minden $\left[\frac{k}{n},\frac{k}{n}+\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right]$ intervallumon ($k=\overline{0,n-1}$), tehát minden $k\in\{0,1,2,...,n-1\}$ esetén létezik $c_k\in\left(\frac{k}{n},\frac{k}{n}+\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ úgy, hogy teljesüljön az

$$f\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)f'(c_k)$$

egyenlőség. Az $f(x)\le x$, $\forall\, x\in[0,1]$ egyenlőtlenség alapján $\frac{k}{n}+\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\le\frac{k+1}{n}$, tehát $c_k\in\left(\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right)$ és így írhatjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot f'(c_k)=$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(c_k\right)\cdot f'(c_k)+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(c_k\right)\right]\cdot f'(c_k)$$

Az $f \cdot f'$ függvény folytonos, tehát

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(c_k\right) \cdot f'(c_k) = \int_0^1 f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} f^2(x)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} f^2(1), \qquad (1)$$

mert $f(0) = 0$ a feltételek alapján. Másrészt f folytonos a $[0,1]$ intervallumon, tehát egyenletesen folytonos és így $\forall \varepsilon_1 > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy teljesüljön az $|f(x) - f(\overline{x})| < \varepsilon_1$ egyenlőtlenség, ha $|x - \overline{x}| < \delta$. Ez alapján létezik olyan $n(\varepsilon_1) \in \mathbb{N}$ küszöbszám, amelyre $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(c_k)\right| < \varepsilon_1$, minden $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ esetén ha $n \ge n(\varepsilon)$.
Tehát

$$\left|\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(c_k)\right] f'(c_k)\right| < \varepsilon_1 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f'(c_k).$$

Másrészt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f'(c_k) = \int\limits_0^1 f'(x) dx = f(1)$, tehát az $O_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f'(c_k)$ sorozat konvergens és így korlátos is. Ha $M > 0$ az $(O_n)_{n\ge 1}$ sorozat egy felső korlátja és $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2M}$, akkor $\left|\frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(c_k)\right] f'(c_k)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ minden $n \ge n(\varepsilon)$ esetén. Az (1)-es összefüggés, az előbbi egyenlőtlenség és a majorálási kritérium alapján következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] = \frac{1}{2} f^2(1).$$

3. Keressük meg azokat az elemeket, amelyek mindenképpen benne kell legyenek az M halmazban. Ha $a, b \in H$ és H kommutatív, akkor $a^{-1}b^{-1}ab = e_H$, tehát ha $\varphi(x) = a$ és $\varphi(y) = b$, akkor $\varphi(x^{-1}y^{-1}xy) = \varphi(x^{-1})\varphi(y^{-1})\varphi(x)\varphi(y) = a^{-1}b^{-1}ab = e_H$. Így tetszőleges $x, y \in G$ esetén $x^{-1}y^{-1}xy \in M$. Mivel az ilyen alakú elemek nem biztos, hogy részcsoportot alkotnak, ezért a legkisebb M részcsoportnak tartalmaznia kell az ilyen elemek halmaza által generált részcsoportot. Tehát ha $M_0 = \left\langle \left\{x^{-1}y^{-1}xy \,\middle|\, x, y \in G\right\} \right\rangle$, akkor $M_0 \subseteq M$. Másrészt ha

$(H,*)$ egy csoport és a $\varphi : G \to H$ szürjektív morfizmus esetén $\varphi(m) = e_H$ bármely $m \in M_0$, akkor tetszőleges $a, b \in H$ elemekre létezik az $x \in G$ és az $y \in G$ úgy, hogy $a = \varphi(x)$ és $b = \varphi(y)$. Ebből következik, hogy $a * b = \varphi(x) * \varphi(y) = \varphi(xy)$ és $b * a = \varphi(y) * \varphi(x) = \varphi(yx)$.
De $x^{-1}y^{-1}xy \in M_0$, tehát $\varphi(x^{-1}y^{-1}xy) = e_H$ és $\varphi(x^{-1}y^{-1}) * \varphi(xy) = e_H$.
De $\varphi(x^{-1}y^{-1}) = \varphi((yx)^{-1}) = [\varphi(yx)]^{-1}$, tehát $\varphi(xy) = \varphi(yx)$ és így $(H,*)$ kommutatív.
Az előbbiek alapján a legkisebb részcsoport, amely eleget tesz a feltételeknek az M_0.

4. Ha $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \alpha + \beta \int\limits_0^x g(t)f(t)dt$, $\forall\, x \in [0,1]$, akkor

$$h'(x) = \beta g(x) f(x) \leq \beta g(x) \sqrt{h(x)},$$

mert $h(x) > 0$, $f(x) \leq \sqrt{h(x)}$ a megadott feltétel alapján és $\beta g(x) \geq 0$. Ez

alapján $\quad \dfrac{h'(t)}{\sqrt{h(t)}} \leq \beta g(t),\ \forall\, t \in [0,1]$,

tehát $\quad \sqrt{h(x)} - \sqrt{h(0)} = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^x \dfrac{h'(t)}{\sqrt{h(t)}}dt \leq \dfrac{\beta}{2}\int\limits_0^x g(t)dt$ és így $h(0) = \alpha$

alapján $\quad h(x) \leq \left(\alpha + \dfrac{\beta}{2}\int\limits_0^x g(t)dt\right)^2$.

A feltétel alapján $f(x) \leq h(x) \leq \alpha + \dfrac{\beta}{2}\int\limits_0^x g(t)dt$, $\forall\, x \in [0,1]$.

5. Igen, Konstruktív fel tud építeni egy n elemű kupacot $3^{n-4} + 3^{n-5} + \ldots + 3^1 + 3^0 + 1$ lépésben, ha a következő stratégiát követi:

Az első 3^{n-4} lépésben Konstruktív minden kavicsot új kupacba tesz, de minden lépése után Destruktív elvesz két kupacot, így az első 3^{n-4} lépés után 3^{n-4} darab egyelemű kupac lesz.

A következő 3^{n-5} lépésben Konstruktív minden kavicsot egy legalább egyelemű kupacba rak, de minden lépése után Destruktív elvesz két kupacot, így az első $3^{n-4} + 3^{n-5}$ lépés után 3^{n-5} darab legalább kételemű kupac áll.

Továbbá Konstruktív a $\left(3^{n-4}+3^{n-5}+...+3^{n-i}\right)$-edik lépését követően, a következő $3^{n-(i+1)}$ lépésben minden kavicsot egy legalább $(i-3)$ elemű kupacba tesz ($i=5,6,...,n-1$) úgy, hogy mindezen lépések során egyetlen kupacba sem rak többször, és soha sem tesz egynél többet. Feltéve, hogy közvetlenül Destruktív $\left(3^{n-4}+3^{n-5}+...+3^{n-i}\right)$-edik lépése után még áll legalább 3^{n-i} legalább $(n-i)$ elemű kupac, indukcióval bizonyítjuk, hogy Destruktív következő $3^{n-(i+1)}$ lépése után állni fog legalább $3^{n-(i+1)}$ darab, legalább $(i-2)$ elemű kupac. Valóban, ha Konstruktív a $\left(3^{n-4}+3^{n-5}+...+3^{n-i}\right)$-edik lépését követően a $3^{n-(i+1)}$ lépés mindenikében kavicsait a megadott szabály szerint helyezi el, ekkor függetlenül Destruktív $3^{n-(i+1)}$ lépésétől, a kérdéses időpontban valóban állni fog legalább $3^{n-(i+1)}$, legalább $(i-2)$ elemű kupac.

$i=n-1$-re: Destruktív $\left(3^{n-4}+...+3^{0}\right)$ lépése után lesz legalább egy legalább $n-3$ elemű kupac, amelyre Konstruktív a következő lépésben ráhelyezve mindhárom kavicsát, állni fog az n elemű kupac.

Készült a csíkszeredai Státus Kiadó nyomdájában
Tel/fax: 0266/310-486
www.status.com.ro
office@status.com.ro