„…ezt a feladványt hónapokkal később sikerült
a fürdőkádban megoldanom.
Mondanom sem kell, hogy hatalmas katarzist okozott
a hosszú gondolkodás sikere.
A mai napig hasonló katartikus örömet okoz,
ha egy nehéz feladatot sikerül megoldani“
(Keleti Tamás)

A Radó Ferenc Emlékverseny 1997-ben a középiskolák közt már jól működő erdélyi matematika versenyek mintájára indult 5-8 osztályos diákok számára. A szervezők szándéka az volt, hogy folyamatosan bevonják a középiskola négy évfolyamát, és ez a verseny legyen a tanév utolsó versenye.

Úgy gondoljuk, hogy ezt a célt sikerült elérni, ma már a verseny 8 évfolyamon zajlik, és nemcsak a tanév utolsó versenye, hanem egyben az egyik legrangosabb vetélkedője is. Erre a versenyre elsősorban azok a diákok hivatalosak, akiknek valamilyen más versenyen már sikerült eredményt elérni. Így természetesen a feladatsorok is ehhez vannak igazítva, egy erős regionális verseny mércéjét követik. Ennek az is egy következménye, hogy az eredmények várhatóan nem a $80\% - 100\%$ intervallumban torlódnak, hanem a $20\% - 50\%$ tartományban. Véleményünk szerint a verseny minden résztvevője dicséretet érdemel, és aki 50% fölött teljesít, az már díjat.

A feladatokat összeállító bizottság tagjai (András Szilárd, Csapó Hajnalka, Demeter Albert, László Tamás, Lukács Andor, Simon József, Szilágyi Zsolt, Zsombori Gabriella), az elmúlt néhány év szokásához híven, nagyrészt az erdélyi matematikaversenyek továbbra is matematikával foglalkozó díjazottjai közül kerültek ki, reméljük, hogy a következő években újabb és újabb tagokkal bővül majd ez a csapat. A feladatok összeállítása során a versenybe bekerülő feladatokon kívül sok érdekes probléma született, ezekből néhányat mi sem tudunk megoldani. Természetesen az ötletek nemcsak matematikára korlátozódtak, íme néhány a versenyre vonatkozóan: csak az általunk meg nem oldott feladatokat adjuk fel a versenyre, a győzteseket az érkezéskor kisorsoljuk, a versenyen a diákcsapatok szerkesszenek feladatokat a tanároknak, különböző évfolyamok feladatait összekeverjük stb. A hagyományt tisztelők megnyugtatása (és persze saját testi épségünk megőrzése) kedvéért ezekről az ötletekről lemondtunk (bár meglepetések még lehetnek). Mégis újdonságnak számít az idei versenyen, hogy a XI. és XII. évfolyam versenyzői bármilyen segédanyagot használhatnak (könyvtár, Internet) és a megoldásokat öt óra alatt kell elkészíteniük.

Az eddigi versenyek megszervezéséért köszönettel tartozunk a Báthory István Líceum vezetőségének és tanárainak, a kolozsvári kollégáknak, vendégfogadó diákoknak és szüleiknek a segítségükért, a versenyen résztvevő kollégáknak a tudatosan vállalt megerőltetésekért, valamint a Romániai Magyar Pedagógusok Szövetségének, az Illyés Közalapítványnak és azoknak a kolozsvári cégeknek, akik a versenyt anyagilag támogatták.

A feladatokat összeállító bizottság és
a verseny szervező bizottsága

V. osztály

1. Egy tankönyv oldalainak számozása során 495 számjegyet nyomtattak a lapokra (a számozás 1-től kezdődik és a könyv végéig tart, minden oldalon egy szám van). Hány oldalas a tankönyv?

2. Határozd meg azt az $\overline{xyz}$ számot, amelyre $\overline{zxy} + \overline{xyz} = 811$.

3. Két játékos felváltva választ egy-egy számot az

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16\}$$

halmazból a következő szabályok szerint:

a) egyetlen szám sem választható kétszer;

b) minden lépés után a kiválasztott számok összege teljes négyzet kell legyen (tehát az első szám is).

(Például ha az első kiválasztott szám 4, akkor a második csak 5 vagy 12 lehet, stb.)

Az veszít, aki nem tud választani. Bizonyítsd be, hogy az első játékosnak van nyerő stratégiája!

4. Az $A \subset \mathbb{N}$ halmaz rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

a) $0 \in A$;

b) ha $x \in A$, akkor $3x + 1 \in A$;

c) ha $y \in A$ és y páros, akkor $\frac{y}{2} \in A$.

Igaz-e, hogy $10 \in A$? Hát az, hogy $14 \in A$?

VI. osztály

1. Határozd meg azokat az $a, b \in \mathbb{N}$ számokat, amelyekre

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a+b+1} = 1.$$

2. **a)** Alakítsd át az $\frac{1}{1,001}$ törtet tizedes törtté!

b) Határozd meg az $x = \frac{1}{1,\underbrace{00...00}_{99}1}$ számban a tizedesvessző utáni $2003.$ számjegyet!

3. **a)** Egy huszárral (lóval) be lehet-e járni egy 4×4-es táblát úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintsünk?

b) Vágjunk ki egy mezőt az előbbi táblából úgy, hogy a megmaradt mezőket végigjárhassuk az a) pont feltételének megfelelően. Melyik mezőt kell elhagyni ahhoz, hogy bejárható legyen a megmaradt rész?

4. Egy háromszög alakú papírdarabot ollóval darabokra vágunk (minden vágás egyenes és a darabokat is tovább darabolhatjuk). A kapott darabokat az oldalaik száma szerint csoportosítjuk. Bizonyítsd be, hogy ha legalább 4 csoport van, akkor legalább annyi háromszög alakú darab van, mint amennyi csoport!

VII. osztály

1. **a)** Bizonyítsd be, hogy három egymás utáni természetes szám szorzata osztható 3 -mal.
b) Határozd meg azokat az n természetes számokat, amelyekre

$$n(n+4)(n+11)=3^n-1.$$

2. Az ABC háromszögbe beírtuk az MNP háromszöget ($M\in(BC)$, $N\in(CA)$ és $P\in(AB)$) úgy, hogy $NP\parallel BC$. Legyen $A_1\in BC$ úgy, hogy $AA_1\perp BC$ valamint $\{A_2\}=AA_1\cap PN$. Bizonyítsd be, hogy

a) $\dfrac{PN}{BC}+\dfrac{A_1A_2}{AA_1}=1$; **b)** $\dfrac{T_{MNP}}{T_{ABC}}\le\dfrac{1}{4}$.

3. Tekintsük a

$$B=\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{5}+5\sqrt{4}}+...+\frac{1}{100\sqrt{101}+101\sqrt{100}}$$

összeget. Bizonyítsd be, hogy $B<\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{101}}\right)$.

4. Az ABC egyenlő szárú és derékszögű ($m(\widehat{ABC})=90^\circ$) háromszögön kívül felvesszük az M pontot úgy, hogy teljesüljön a $m(\widehat{MAC})=15^\circ$ és $m(\widehat{MCA})=30^\circ$ egyenlőség. Számítsd ki az $\widehat{MBA}$ mértékét!

5. Egy szabályos n oldalú sokszögben Andor és Zsolt felváltva behúznak egy-egy átlót, Andor piros színnel és Zsolt kékkel (kezdetben egy átló sincs meghúzva és egy átlót csak egy színnel szabad behúzni). Mindketten arra törekednek, hogy egy háromszöget rajzoljanak a saját színükkel (a háromszög csúcsai a sokszögnek is csúcsai). A játéknak akkor van vége, amikor az első egy színnel rajzolt háromszög megjelenik, és az nyer, aki ezt kialakította. Bizonyítsd be, hogy $n\ge 8$ esetén a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája. Mi ez a stratégia?

VIII. osztály

1. Határozd meg azokat az $x,y\in\mathbb{N}^*$ természetes számokat, amelyekre

$$x^2=2y^2+xy+36.$$

2. **a)** Bizonyítsd be, hogy

$$\left(1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}\right)(x^2-2x+1)=nx^{n+1}-(n+1)x^n+1,$$

$\forall\, n\ge 1$

b) Határozd meg az

$$S=1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^3}+...+\frac{100}{3^{99}}$$

összeg egészrészét.

3. Az $ABCDA'B'C'D'$ kockában $M \in (AB)$, $N \in (CC')$, $P \in (A'D')$ és $Q \in (BB')$ úgy, hogy teljesüljenek az $AM = \frac{1}{2}l$, $NC = A'P = \frac{1}{8}l$ és $BQ = \frac{1}{4}l$ egyenlőségek, ahol l a kocka oldalélének hossza. Bizonyítsd be, hogy MP merőleges NQ-ra!

4. Tekintsük az

$$S_n = \frac{1}{2\sqrt{1\cdot 2} + 1\sqrt{2\cdot 3}} + \frac{1}{3\sqrt{2\cdot 3} + 2\sqrt{3\cdot 4}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n\cdot(n+1)} + n\sqrt{(n+1)\cdot(n+2)}}$$

összeget (minden tag szerkezete ugyanaz, mint az utolsónak).

a) Bizonyítsd be, hogy $S_n = \sqrt{2} - \sqrt{\frac{n+2}{n+1}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

b) Határozd meg a legkisebb $n \in \mathbb{N}$ értéket, amelyre $S_n \geq \frac{1}{3}$.

5. Egy papírkocka néhány élét felvágjuk, és a kockát kiterítjük a síkba úgy, hogy egy olyan síkbeli alakzathoz jussunk, amely hat négyzetből áll és minden négyzetnek van közös oldala legalább egy másik négyzettel. Hány különböző kiterített papírdarabot kaphatunk, ha két kiterítés pontosan akkor különböző, amikor nem lehet őket egymásra illeszteni?

IX. osztály

1. Határozd meg az

$$\begin{cases} 1 + \sqrt{xy} = y + z \\ 1 + \sqrt{yz} = z + x \\ 1 + \sqrt{zx} = x + y \end{cases}$$

egyenletrendszer valós megoldásait.

2. a) Adjál példát olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ alakú függvényre, amelynek grafikus képe pontosan két egész koordinátájú pontot tartalmaz.

b) Bizonyítsd be, hogy ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvény grafikus képe legalább három egész koordinátájú pontot tartalmaz, akkor végtelen sok ilyen pontot tartalmaz.

3. Az $ABCD$ négyszög AB és CD oldalán mozog az $M \in (AB)$ és $N \in (CD)$ pont úgy, hogy teljesüljön az $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND}$ egyenlőség. Határozd meg az MN szakasz felezőpontjának mértani helyét!

4. Határozd meg azokat az x és y természetes számokat, amelyekre $\frac{x}{y} + \frac{y}{3} + \frac{3}{x} = 6$.

5. Bizonyítsd be, hogy $3\cdot 2^n - 2$ darab egységnyi hosszúságú vektorból ki lehet választani 2^n darabot úgy, hogy az összegük hossza legalább $2^{\frac{n}{2}}$ legyen!

X. osztály

1. Bizonyítsd be, hogy ha $z \in \mathbb{C}$ és $|z| = 1$, akkor
$$\left|1 + z^2\right| + 2|1 - z| \geq 2 .$$

2. Határozd meg a következő egyenletrendszer valós megoldásait:
$$\begin{cases} \dfrac{2\log_2 a \cdot \log_2 b}{\log_2^2 ab} = \log_2 c \\ \dfrac{2\log_2 b \cdot \log_2 c}{\log_2^2 bc} = \log_2 a \\ \dfrac{2\log_2 c \cdot \log_2 a}{\log_2^2 ca} = \log_2 b \end{cases} .$$

3. Tekintsük az $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $\forall\ n \geq 0$ összefüggésekkel értelmezett sorozatot. Bizonyítsd be, hogy ha az $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{N}$ számtani haladvány tartalmazza az $(F_n)_{n\geq 0}$ sorozat egy elemét, akkor végtelen sok elemét is tartalmazza.

4. Tekintsük a $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k C_{n-k}^k x^{n-2k}$, $n \geq 0$ polinomsorozatot.

a) Bizonyítsd be, hogy $P_{n+1}(x) = x \cdot P_n(x) - P_{n-1}(x)$, $\forall\ n \geq 1$.

b) Számítsd ki $P_n(2)$ -t!

5. Egy térbeli konvex poliédernek k lapja és összesen p éle van. Hány él mentén kell felvágjuk a poliédert, ahhoz, hogy kiteríthessük a síkba?

XI. osztály

1. Bizonyítsd be, hogy a
$$\Delta = \begin{vmatrix} P_1(1) & P_1(2) & \cdots & P_1(n) \\ P_2(1) & P_2(2) & \cdots & P_2(n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ P_n(1) & P_n(2) & \cdots & P_n(n) \end{vmatrix}$$
determináns nulla, ha $P_1, P_2, \ldots, P_n$ legfeljebb $(n-2)$-ed fokú polinomok.

2. Ha $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ az n-ed rendű egységgyökök, számítsd ki a $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\varepsilon_k}{(2-\varepsilon_k)^2}$ összeget!

3. Határozd meg az $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, nem identikusan nulla függvényt, amely teljesíti a következő feltételeket:

a) $f(z_1) \cdot f(z_2) = f(z_1 \cdot z_2)$, $\forall\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

b) $f(z_1 + z_2) + f(z_1 - z_2) = 2f(z_1) + 2f(z_2)$, $\forall\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

c) a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$ függvény folytonos.

4. Határozd meg az $x_n = x_{\left[\frac{n}{2}\right]} + n + 1 - \left[\frac{n}{2}\right]$, $\forall n \geq 2$ és $x_1 = 1$ sorozat általános tagját és bizonyítsd be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} = 1$.

5. Egy üres táblára felírtuk az (x_0, y_0) számpárt. Minden lépésben letöröljük a táblán található (x,y) számpárt és a helyére a $\left(\frac{6x+3y}{5}, \frac{3x+14y}{5}\right)$ számpárt írjuk. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy néhány lépés után a táblán két egyforma szám jelenjen meg?

XII. osztály

1. Bizonyítsd be, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{\sin x}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\}\\ 0, & x\in\{k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\}\end{cases}$$

függvénynek van primitív függvénye.

2. Bizonyítsd be, hogy ha $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ integrálható függvény, akkor

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^n}dx = \int_0^1 f(x)dx.$$

3. A $[0,1]$ intervallum elemeinek tizedes reprezentációja segítségével értelmezzük az $f:[0,1]\to[0,1]$ függvényt a következő módon:

$$x = 0,a_1a_2a_3a_4\ldots a_{2k-1}a_{2k}\ldots \quad\Rightarrow\quad f(x)=0,a_2a_1a_4a_3\ldots a_{2k}a_{2k-1}\ldots$$

(ha $x\in\mathbb{Q}$, akkor nem használjuk a csak 9-eseket tartalmazó szakaszos reprezentációt). Bizonyítsd be, hogy f integrálható és számítsd ki az integrálját!

4. A $(G,\cdot)$ csoportnak pontosan két automorfizmusa van.

a) Bizonyítsd be, hogy $(G,\cdot)$ kommutatív csoport!

b) Bizonyítsd be, hogy ha $(G,\cdot)$ véges csoport, akkor izomorf a $(\mathbb{Z}_3,+)$, $(\mathbb{Z}_4,+)$ vagy $(\mathbb{Z}_6,+)$ csoportok közül az egyikkel!

5. Legyen $p\geq 3$ egy prímszám és $(\mathbb{Z}_p,+)$ elemeinek egy permutációjából kiindulva bármely két egymás melletti szám alá írjuk be a $\mathbb{Z}_p$-beli összegüket (Például $(\mathbb{Z}_5,+)$-ben az $\hat{1}\ \hat{0}\ \hat{4}\ \hat{3}\ \hat{2}$ permutációból kiindulva a mellékelt ábrát kapjuk). Így a p-edik sorban csak egy elem áll. Ezt nevezzük a permutációhoz rendelt utolsó számnak.

a) Bizonyítsd be, hogy utolsó számként $(\mathbb{Z}_p,+)$ bármelyik eleme megjelenhet.

b) Bizonyítsd be, hogy ha az összes permutációhoz rendelt utolsó számot összeadjuk ($(\mathbb{Z}_p,+)$-ben), az eredmény $\hat{0}$.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\hat{1} & & \hat{0} & & \hat{4} & & \hat{3} & & \hat{2} \\
& \hat{1} & & \hat{4} & & \hat{2} & & \hat{0} & \\
& & \hat{0} & & \hat{1} & & \hat{2} & & \\
& & & \hat{1} & & \hat{3} & & & \\
& & & & \hat{4} & & & &
\end{array}
$$

Megoldások

V. osztály

1. 1-től 9-ig 9 számjegyet kell nyomtatni, 10-től 99-ig $2 \cdot 90 = 180$ számjegyet, tehát megmarad $495 - 189 = 306$ számjegy. Ezeket hármasával használják fel a nyomtatás során, tehát további 102 oldalt számoznak meg. Így a könyv összesen $9 + 90 + 102 = 201$ oldalt tartalmaz.

2. Mivel $\overline{zxy} = 100 \cdot z + \overline{xy}$ és $\overline{xyz} = 10 \cdot \overline{xy} + z$, az adott egyenlőség egyenértékű a $101 \cdot z + 11 \cdot \overline{xy} = 811$ egyenlőséggel. A 811 szám 11-gyel való osztási maradéka 8 és a 101 osztási maradéka 2, ezért $z = 4$. Így $11 \cdot \overline{xy} = 407$, tehát $\overline{xy} = 37$ és $\overline{xyz} = 437$.

3. Az első stratégiája abból áll, hogy kényszerhelyzetbe hozza az ellenfelét. Ha ugyanis 16-tal indul, akkor a második csak 9-et választhat. Így az első kötelező módon 11-et kell válasszon, a második 13-at és végül az első 15-t. Ez után a kiválasztott számok összege

$$16 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64$$

és a következő teljes négyzetig a távolság 17. Mivel ez nincs a halmazban, a második játékos nem tud választani, tehát veszít.

4. A fordított út módszerét használjuk, megpróbáljuk meghatározni, hogyan juthatunk el a 14-hez a megadott szabályok szerint. Mivel 14-nek a 3-mal való osztási maradéka 2, ezért csak a c) tulajdonság segítségével következtethetünk arra, hogy $14 \in A$. Ehhez viszont az szükséges, hogy $28 \in A$. $28 = 3 \cdot 9 + 1$, tehát ha $9 \in A$, akkor b) alapján $28 \in A$. Másrészt 3-mal osztható számhoz csakis a c) alapján juthatunk és ehhez tudnunk kellene nagyobb 3-mal osztható számokról is az A halmazban. Ilyen számot a feltételek nem biztosíthatnak, tehát a $28 \in A$ tulajdonságot ismét csak az $56 \in A$-ból kaphatjuk meg. Ez ismét csak a $112 \in A$-ból következhet. $112 = 3 \cdot 37 + 1$, tehát elégséges a $37 \in A$. De $37 = 3 \cdot 12 + 1$ és $12 \vdots 3$, tehát ismét $74 \in A$ szükséges és ehhez a $148 \in A$-t kellene belátni. A $148 = 3 \cdot 49 + 1$, $49 = 3 \cdot 16 + 1$ és $16 = 3 \cdot 5 + 1$ egyenlőségek alapján ismét elégséges belátni, hogy $5 \in A$. Ehhez az előbbi ötletek alapján az szükséges, hogy $10 \in A$, $20 \in A$ majd $40 \in A$ és ezt már elérhetjük a $40 = 3 \cdot 13 + 1$, $13 = 3 \cdot 4 + 1$, $4 = 3 \cdot 1 + 1$ és $1 = 3 \cdot 0 + 1$ egyenlőségek alapján. Tehát a végső következtetések a következő alakban írhatók:

$$a) \Rightarrow 0 \in A \overset{b)}{\Rightarrow} 1 \in A \overset{b)}{\Rightarrow} 4 \in A \overset{b)}{\Rightarrow} 13 \in A \overset{b)}{\Rightarrow} 40 \in A \overset{c)}{\Rightarrow} 20 \in A \overset{c)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{c)}{\Rightarrow} 10 \in A \overset{c)}{\Rightarrow} 5 \in A \overset{b)}{\Rightarrow} 16 \in A \overset{b)}{\Rightarrow} 49 \in A \overset{b)}{\Rightarrow} 148 \in A \overset{c)}{\Rightarrow} 74 \in A \overset{c)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{c)}{\Rightarrow} 37 \in A \overset{b)}{\Rightarrow} 112 \in A \overset{c)}{\Rightarrow} 56 \in A \overset{c)}{\Rightarrow} 28 \in A \overset{c)}{\Rightarrow} 14 \in A.$$

Tehát $14 \in A$. Látható, hogy igaz a $10 \in A$ tulajdonság is.

VI. osztály

1. $1-\dfrac{1}{a+b+1}=\dfrac{a+b}{a+b+1}$, tehát ha az egyenlet bal oldaláról a harmadik tagot átvisszük a jobb oldalra és mindkét oldalon közös nevezőre hozunk, majd $a+b$-vel egyszerűsítünk, az $a+b+1=ab$ egyenlőséghez jutunk. Ha kifejezzük a-t, az $a=\dfrac{b+1}{b-1}=1+\dfrac{2}{b-1}$ egyenlőséghez jutunk, tehát $b-1\in\{1,2\}$. Ha $b-1=1$, akkor $b=2$ és $a=3$, míg $b-1=2$ esetén $b=3$ és $a=2$. Így a megoldások $(a,b)=(2,3)$ és $(a,b)=(3,2)$.

Más megoldás. Ha a nevezők legkisebb közös többszörösével beszorozzuk az egyenlet mindkét oldalát, akkor az

$$ab+b^2+b+a^2+ab+a+ab=a^2b+ab^2+ab$$

egyenlőséghez jutunk. Ebből következik, hogy

$$(a+b)(ab-a-b-1)=0,$$

és így $(a-1)(b-1)=2$. Tehát $(a,b)\in\left\{(3,2),(2,3)\right\}$.

2. a) Bővítjük a törtet 1000-rel, majd elvégezzük az osztást:

$$\frac{1}{1{,}001}=\frac{1000}{1001}=0,(999000).$$

b) Bizonyítjuk, hogy a tört tizedes reprezentációja egy tiszta szakaszos és meghatározzuk a szakaszban álló számjegyeket az osztás elvégzésével. Az első 100 számjegy 9-es míg a következő 100 darab 0 és ez után megjelenik ugyanaz a szám, amivel indultunk. Ez természetesen még nem bizonyítás, de ha igazoljuk, hogy az $y=0,(\underbrace{99...99}_{100}\underbrace{00...00}_{100})$ szakaszos tizedes tört pontosan x, akkor már használhatjuk észrevételeinket. Az átalakítási szabály alapján rendre írhatjuk, hogy:

$$y=0,(\underbrace{99...99}_{100}\underbrace{0...0}_{100})=\frac{\underbrace{99...99}_{100}\underbrace{0...0}_{100}}{\underbrace{99...99}_{200}}=\frac{\underbrace{99...99}_{100}\cdot 1\underbrace{0...0}_{100}}{\underbrace{99...99}_{100}\underbrace{0...0}_{100}+\underbrace{99...99}_{100}}=$$

$$=\frac{\underbrace{99...99}_{100}\cdot 1\underbrace{0...0}_{100}}{\underbrace{99...99}_{100}\cdot 1\underbrace{0...0}_{100}+\underbrace{99...99}_{100}}=\frac{\underbrace{99...99}_{100}\cdot 1\underbrace{0...0}_{100}}{\underbrace{99...99}_{100}\cdot 1\underbrace{0...0}_{99}1}=\frac{1\underbrace{0...0}_{100}}{1\underbrace{0...0}_{99}1}=$$

$$=\frac{1}{1,\underbrace{00...0}_{99}1}=x.$$

Tehát x tizedes ábrázolása egy tiszta szakaszos tizedes tört, és a szakaszban 100 darab 9-est követ 100 darab 0. Így a 2003. számjegy a szakasz 3. számjegye vagyis 9.

3. Az első ábrán megjelölt $1-2-3-4$ és $5-6-7-8$ mezők egy-egy hurkot alkotnak, amit kötelező végigjárni, ha belelépünk, ellenkező esetben nem lehet bejárni a táblát. Ha nem sarokban kezdjük, akkor az egyik hurkot nem tudjuk bejárni, mert amelyikbe először bemegyünk, abból nem tudunk kijönni, tehát mindenképpen sarokban kell kezdeni és a másik hurok bejárásával kell befejezni a körutat. Ez viszont nem lehetséges, mert így vagy a négy szürke mezőt nem tudjuk bejárni, vagy a négy szabad és világos mezőt. Egy mező elhagyásával csak akkor lehet a maradékot bejárni, ha egy sarokmezőben kezdünk és a másik hurok egyik sarokmezejét hagyjuk el, mert különben ugyanaz a probléma merülne fel, mint az előbb. A 2. ábrán egy ilyen bejárás látható, tehát szimmetria miatt a b) alpontra a válasz: csak sarokmezőt hagyhatunk el, és az elhagyott mezővel szomszédos sarokmezőből kell kezdeni.

5			3
	2	6	
	8	4	
1			7

1. ábra

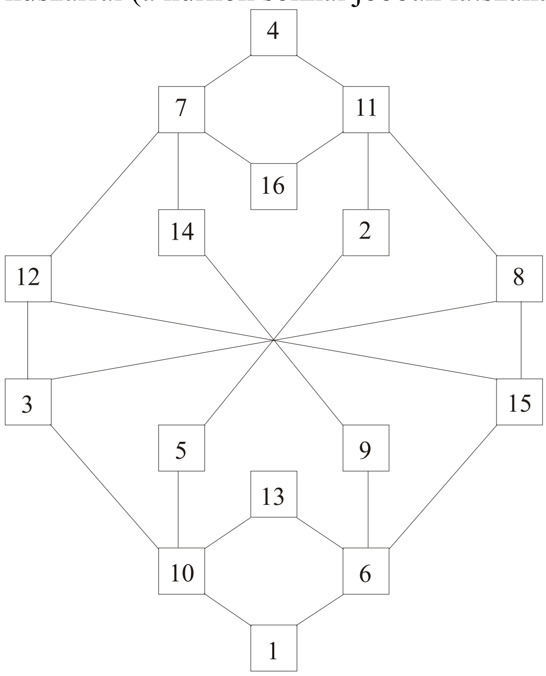
	13	6	3
5	2	9	12
14	11	4	7
1	8	15	10

2. ábra

4	5	12	13
3	6	11	14
2	7	10	15
1	8	9	16

3. ábra

Megjegyzés. Ha a tábla mezőit megszámozzuk 1-től 16-ig a 3. ábrának megfelelően, akkor a tábla ábrázolható a 4. ábra segítségével, itt a mezőket összekötő vonalak mutatják, hogy melyik mezőről melyikre lehet lépni a huszárral (a hurkok sokkal jobban látszanak).



4. A bizonyítás a következő észrevételeken alapszik:

1. Egy n oldalú darabból csak úgy lehet n-nél több oldalú darabkát elérni, ha egy háromszöget vágunk le, amely nem tartalmazza az n oldalú darabkának egynél több csúcsát. Így legfeljebb $(n+1)$ oldalú darabka keletkezhet.

2. Ha egy háromszög alakú darabot tovább darabolunk, akkor az újabb darabkák közt mindig van legalább egy háromszög (mivel háromszöget nem lehet úgy két részre vágni, hogy ne keletkezzen háromszög).

3. Egy n oldalú darabból csak úgy tudunk egy vágással n oldalú sokszöget kapni, ha a másik darab háromszög vagy négyszög.

Ha a darabok közt legfeljebb n oldalú van, akkor $3, 4, \ldots, n$ oldalú darabkák fordulhatnak elő, tehát legfeljebb $n-2$ csoport van. Másrészt 1. és 2. alapján az n oldalú darab létrehozása során legalább $n-3$ darab háromszög már van. Ha csak ennyi háromszög lenne, akkor az őket létrehozó $(n-3)$ vágáson kívül minden vágás során a kisebb darab négyszög lenne, mert van n oldalú darab, tehát a legtöbb oldalt tartalmazó darab oldalainak száma nem csökkenhet egyetlen vágás során sem, és mivel nem vágtunk le több háromszöget a 3. alapján csak négyszögeket vághattunk le. Mivel legalább négy csoport van, ezért a háromszögeken és négyszögeken kívül még két csoport kellene legyen és ez nem lehetséges, mert az előbbiek alapján csak a legtöbb oldalú darab csoportja van (és az is csak egy elemet tartalmaz).

VII. osztály

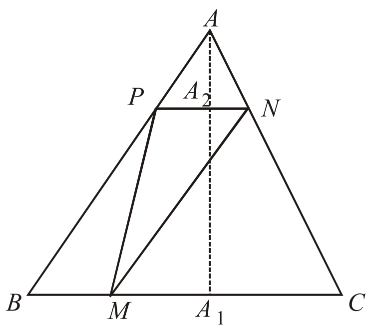
1. a) Három egymást követő természetes szám közül az egyik osztható 3-mal, tehát a szorzatuk is osztható 3-mal.
b) $n=0$ megfelel, mert ebben az esetben mindkét oldal értéke 0. Ha $n \geq 1$, akkor $3^n \vdots 3$.

$$n(n+4)(n+11)=n(n+1)(n+2)+3\left(4n^2+14n\right),$$

tehát $n(n+4)(n+11) \vdots 3$. Ha $n \geq 1$ megoldás, akkor $1 \vdots 3$. Mivel ez ellentmondás, az egyenletnek nincs szigorúan pozitív megoldása. Tehát az egyetlen megoldás az $n=0$.

2. a) Az $\dfrac{AP}{AB}$ tört értékét jelöljük k-val. Az $\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{NP}{BC}$ egyenlőségből $NP=k\cdot BC$. Másrészt $\dfrac{AA_2}{AA_1}=k$, tehát $AA_2=k\cdot AA_1$. Ebből következik, hogy $A_1A_2=(1-k)AA_1$, tehát $\dfrac{NP}{BC}+\dfrac{A_1A_2}{AA_1}=k+(1-k)=1$.
b) Az előbbi jelölésekkel

$$T[MNP]=\frac{1}{2}NP\cdot A_1A_2=\frac{1}{2}BC\cdot AA_1\cdot k(1-k)=T[ABC]\cdot k(1-k).$$



Másrészt $k(1-k)\leq\left(\dfrac{k+(1-k)}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $k=\dfrac{1}{2}$, tehát az MNP és az ABC háromszög területének aránya nem nagyobb, mint $\dfrac{1}{4}$.

3. A B összeget kiegészítjük az

$$A=\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{4}+4\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{6}+6\sqrt{5}}+...+\frac{1}{99\sqrt{100}+100\sqrt{99}}$$

összeggel. Az általános tag mindkét összegben a következőképpen alakítható:

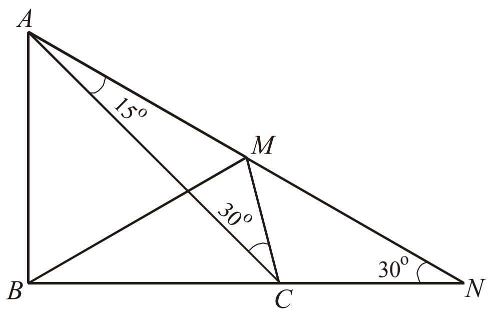
$$\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}=\frac{k\sqrt{k+1}-(k+1)\sqrt{k}}{k^2(k+1)-(k+1)^2k}=\frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{k(k+1)}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

tehát

$$A+B=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+...$$
$$...+\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}+\frac{1}{\sqrt{100}}-\frac{1}{\sqrt{101}}=1-\frac{1}{\sqrt{101}}.$$

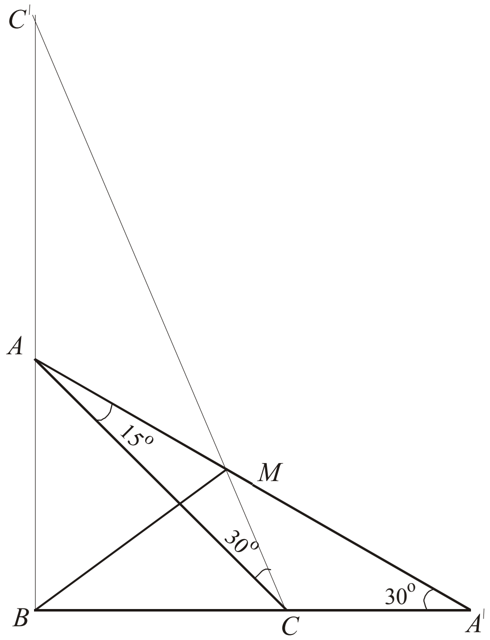
Másrészt $\dfrac{1}{(k+1)\sqrt{k+2}+(k+2)\sqrt{k+1}} < \dfrac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}$, mert $k\sqrt{k+1} < (k+1)\sqrt{k+2}$ és $(k+1)\sqrt{k} < (k+2)\sqrt{k+1}$, tehát B minden tagja kisebb, mint az A megfelelő tagja. Így $B < A$, tehát $2B < A + B = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{101}}$.

4. Meghosszabbítjuk a BC-t és az AM-et a metszéspontjukig. $m\left(\widehat{BAM}\right) = 60^\circ$, tehát $m\left(\widehat{BNA}\right) = 30^\circ$. Az ACN és AMC háromszögek hasonlók (szögeik páronként egyenlők), tehát írhatjuk, hogy $\dfrac{AC}{AN} = \dfrac{AM}{AC}$. Másrészt az ABC háromszögben ha $AB = x$, akkor $AC = x\sqrt{2}$ és az ABN háromszögben $AN = 2x$, tehát



$$AM = \frac{AC^2}{AN} = \frac{2x^2}{2x} = x.$$

Az ABM háromszögben $AB = AM$ és $m\left(\widehat{BAM}\right) = 60^\circ$, tehát a háromszög egyenlő oldalú és így $m\left(\widehat{MBA}\right) = 60^\circ$.



Más megoldás. Feltételezhetjük, hogy $AB = 1$. Az ABA' háromszögben $AA' = 2AB = 2$, tehát $BA' = \sqrt{3}$ és így $A'C = \sqrt{3} - 1$. Az ACC' és $CA'A$ háromszögek hasonlósága alapján $\dfrac{C'A}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$, tehát $C'A = \sqrt{3} + 1$.

Ha az ABA' háromszögben a CMC' egyenesre alkalmazzuk a Menelaosz tételt, az $\dfrac{BC}{CA'} \cdot \dfrac{A'M}{MA} \cdot \dfrac{AC'}{C'B} = 1$ összefüggéshez jutunk.

Ez alapján következik, hogy $\dfrac{A'M}{MA} = 1$, tehát $AM = AB = 1$. Így az ABM háromszög egyenlő oldalú ($m(\widehat{BAM}) = 60^\circ$), tehát $m(\widehat{ABM}) = 60^\circ$.

Megjegyzés. Ha az ABN derékszögű háromszögben felvesszük az $M_1 \in AN$ pontot úgy, hogy $m(\widehat{ABM_1}) = 60^\circ$, akkor igazolható, hogy $m(\widehat{M_1AC}) = 15^\circ$ és $m(\widehat{M_1CA}) = 30^\circ$. Az utóbbi két egyenlőség alapján az M_1 pont egybeesik az M ponttal, tehát $m(\widehat{MBA}) = 60^\circ$.

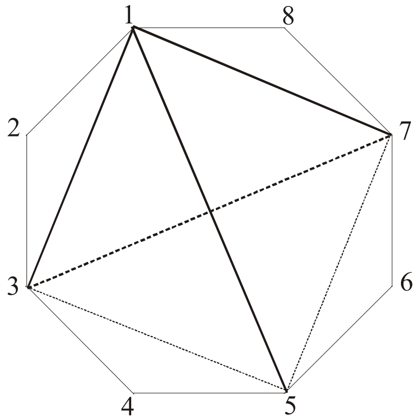
5. Feltételezhetjük, hogy Andor kezd. A stratégia lényege az, hogy Zsolt lépéseit Andor megszabhatja, ha ugyanis egy háromszögben már két oldal piros, akkor Zsolt vagy berajzolja a harmadik oldalt kékkel, vagy elveszíti a játékot. Így Andornak arra kell törekednie, hogy két ilyen háromszöget alakítson ki. Számozzuk meg a sokszög csúcsait 1-től 8-ig (a többi csúcs nem lényeges a stratégia szempontjából) a mellékelt ábrának megfelelően. Andor első lépésben meghúzza az $1-3$ átlót.

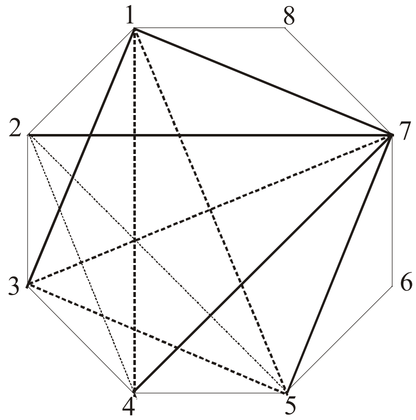
Ha Zsolt első átlója nem tartalmazza az 1-es vagy 3-as csúcsot, akkor Andor meghúzza az $1-7$ átlót és így Zsoltnak meg kell húzni a $3-7$ átlót (különben veszít). Ez után Andor meghúzhatja az $1-5$ átlót. Az így kialakult ábrán (bal oldali ábra) Zsolt a $3-5$ és $5-7$ átlók közül csak egyet tud meghúzni, tehát elveszíti a játékot.

Ha Zsolt első átlója az 1-es vagy 3-as csúcsból indul ki, akkor feltételezhetjük, hogy ez a $3-5$ átló (legfeljebb újraszámozzuk a csúcsokat). A további lépéseket a következő táblázatba foglaltuk (Zsolt mindvégig kényszerlépéseket tesz):

A	$1-7$	$5-7$	$4-7$	$2-7$
Zs	$3-7$	$1-5$	$1-4$	$2-4$ és $2-5$

Látható, hogy az így kialakított állásban Zsolt ismét csak egy átlót húzhat be, tehát így is veszít.





VIII. osztály

1. $x^2-xy-2y^2=(x+y)(x-2y)$, tehát az egyenlet $(x+y)(x-2y)=36$ alakban írható. Ebből következik, hogy $\begin{cases} x+y=a \\ x-2y=b \end{cases}$ alakú rendszerekhez jutunk, ahol $a,b\in\mathbb{N}^*$, $a\cdot b=36$ és $a>b$. Ha az első egyenlet jobb és bal oldalából kivonjuk a második egyenlet megfelelő oldalait, akkor $3y=a-b$ adódik, tehát a 36-nak csak az olyan $a\cdot b$ alakú felbontásait kell vizsgálni, amelyekben $(a-b)\vdots 3$. Mivel $a\vdots 3$ vagy $b\vdots 3$ (mert a szorzat osztható 3-mal) ezért mindkettő osztható kell legyen 3-mal. Így csak az $(a,b)=(12,3)$ eset felel meg és ebből következik, hogy $x=9$ és $y=3$.

2. a) Elvégezzük a szorzást és a tagokat a megfelelő módon csoportosítjuk:

$$\left(1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}\right)\left(x^2-2x+1\right)=$$

$$=x^2+2x^3+...+(n-2)x^{n-1}+(n-1)x^n+nx^{n+1}-$$

$$-2x-2\cdot 2x^2-2\cdot 3x^3-...-2(n-1)x^{n-1}-2nx^n+$$

$$+1+2x+3x^2+4x^3+...+nx^{n-1}$$

$$=1-(n+1)x^n+nx^{n+1}$$

Mivel x^k együtthatója $(k-1)-2k+(k+1)=0$, ha $k=\overline{1,n-1}$ a végeredmény valóban $1-(n+1)x^n+nx^{n+1}$.

b) Az a) alapján $S=\dfrac{3^{101}-203}{4\cdot 3^{99}}$ és ez $\dfrac{9}{4}$-ed körül van, tehát összehasonlítjuk 2-vel és 3-mal. A $2<S \Leftrightarrow 8\cdot 3^{99}<9\cdot 3^{99}-203 \Leftrightarrow 203<3^{99}$ és $S<3 \Leftrightarrow 3^{101}-203<4\cdot 3^{100} \Leftrightarrow 0<203+3^{100}$ ekvivalenciák alapján állíthatjuk, hogy $2<S<3$, tehát az összeg egész-része 2.

3. Kiszámítjuk az M,N,P,Q pontok által meghatározott szakaszok közül néhánynak a hosszát (az MQ kivételével mindegyiknél kétszer használtuk Pitagorász tételét).

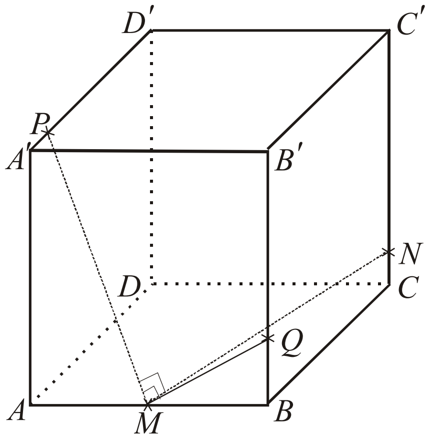
$$MP^2=MA^2+AA'^2+A'P^2=l^2\left(\frac{1}{4}+1+\frac{1}{64}\right)=\frac{81}{64}l^2;$$

$$MN^2=MB^2+BC^2+CN^2=l^2\left(\frac{1}{4}+1+\frac{1}{64}\right)=\frac{81}{64}l^2;$$

$$PN^2=NC'^2+C'D'^2+D'P^2=l^2\left(\frac{49}{64}+1+\frac{49}{64}\right)=\frac{81}{32}l^2;$$

$$MQ^2=MB^2+QB^2=l^2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)=\frac{5}{16}l^2;$$

$$PQ^2=B'Q^2+A'B'^2+A'P^2=l^2\left(\frac{9}{16}+1+\frac{1}{64}\right)=\frac{101}{64}l^2.$$



Mivel $PQ^2=PM^2+MQ^2$ és $PN^2=PM^2+MN^2$, következik, hogy $PM\perp MQ$ és $PM\perp MN$, tehát $PM\perp (MNQ)$ és így $PM\perp QN$.

4. a) Átalakítjuk az összeg általános tagját:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k(k+1)}+k\sqrt{(k+1)(k+2)}}=\frac{1}{k(k+1)\left(\sqrt{\dfrac{k+1}{k}}+\sqrt{\dfrac{k+2}{k+1}}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{\dfrac{k+1}{k}}-\sqrt{\dfrac{k+2}{k+1}}}{k(k+1)\left(\dfrac{k+1}{k}-\dfrac{k+2}{k+1}\right)}=\sqrt{\frac{k+1}{k}}-\sqrt{\frac{k+2}{k+1}},\ \ \forall\, k\geq 1.$$

Tehát

$$S_n=\sqrt{\frac{2}{1}}-\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{4}{3}}+...+\sqrt{\frac{n}{n-1}}-\sqrt{\frac{n+1}{n}}+$$
$$\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}=\sqrt{2}-\sqrt{\frac{n+2}{n+1}},\ \ \forall\, n\geq 1.$$

b) A megoldandó egyenlőtlenséget a következőképpen alakíthatjuk:

$$S_n > \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{2} - \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} > \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3\sqrt{2} - 1 > 3\sqrt{\frac{n+2}{n+1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 19 - 6\sqrt{2} > 9\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \Leftrightarrow n+1 > \frac{9}{10 - 6\sqrt{2}} \Leftrightarrow n > \frac{31 + 27\sqrt{2}}{14}.$$

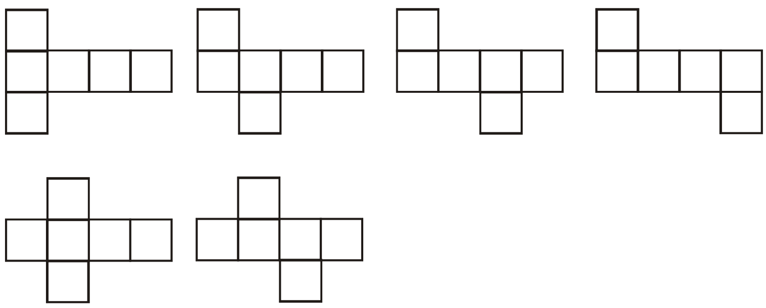
Tehát meg kell határozni a $\frac{31+27\sqrt{2}}{14}$ szám egészrészét. Mivel $\sqrt{2}$ értéke $\frac{3}{2}$ körül van a vizsgált szám körülbelül 5, így 5-tel hasonlítjuk össze.

$$\frac{31+27\sqrt{2}}{14} < 5 \Leftrightarrow 27\sqrt{2} < 39 \Leftrightarrow 9\sqrt{2} < 13 \Leftrightarrow 162 < 169,$$

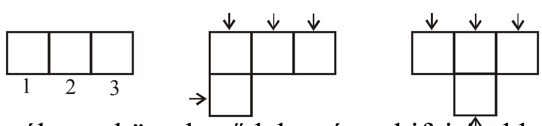
tehát $\frac{31+27\sqrt{2}}{14} < 5$ (az, hogy $\frac{31+27\sqrt{2}}{14} > 4$, következik abból, hogy $\sqrt{2} > 1$) és így $n = 5$ a legkisebb $n \in \mathbb{N}^*$, amelyre $S_n > \frac{1}{3}$.

5. A kiterítésben két négyzetet szomszédosnak nevezünk, ha van közös oldaluk, több négyzet esetén akkor mondjuk, hogy szomszédosak ha mindegyik szomszédos legalább egy másikkal. A kiterítés során nem kaphatunk négynél több szomszédos négyzetet, amelyek középpontjai egy egyenesre illeszkedjenek, tehát a kiterítéseket osztályozhatjuk aszerint, hogy legtöbb hány szomszédos négyzet középpontja illeszkedik egy egyenesre.

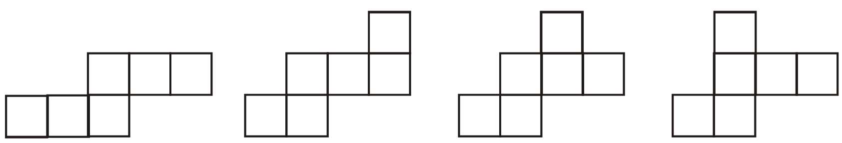
Ha van négy szomszédos négyzet, amelyek középpontjai egy egyenesre illeszkednek, akkor a következő esetek lehetségesek (a többi ezekre illeszthető):



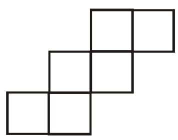
Ha csak legfeljebb három szomszédos négyzet középpontja illeszkedik egy egyenesre, akkor szimmetria alapján elégséges azokat az eseteket megvizsgálni, amikor az ábrán az 1 vagy 2-vel megjelölt oldalhoz illeszkedik négyzet. Így viszont csak a nyilakkal megjelölt oldalakhoz csatlakozhatnak további mezők.



Minden lehetőséget megvizsgálva, a következő lehetséges kifejtésekhez jutunk:



Ha legfeljebb két szomszédos négyzet középpontja illeszkedik egy egyenesre, akkor csak a következő ábra lehetséges:



Tehát összesen 11 különböző papírdarabot kaphatunk a kocka kiterítésével.

IX. osztály

1. A létezési feltételek alapján x, y és z azonos előjelűek, tehát az egyenletek jobb oldalából adódik, hogy $x,y,z \geq 0$. Belátható, hogy ha valamelyik ismeretlen 0, akkor ellentmondáshoz jutunk, tehát feltételezhetjük, hogy $x,y,z > 0$. Ha az egyenletek megfelelő oldalait páronként kivonjuk egymásból, a következő rendszerhez jutunk:

$$\begin{cases} \sqrt{y}\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right) = y - x \\ \sqrt{z}\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right) = z - y \\ \sqrt{x}\left(\sqrt{z}-\sqrt{y}\right) = x - z. \end{cases}$$

Ha $x < y$, akkor az első egyenlet alapján $x > z$ és így a harmadik egyenletből $z > y$, ami ellentmondás. Hasonlóképpen az $y < x$ feltevés is ellentmondáshoz vezet: $y < x \overset{1.}{\Rightarrow} x < z \overset{3.}{\Rightarrow} z < y$ és ez is ellentmondás. Tehát csak az $x = y$ eset lehetséges, és így $x = y = z$ majd $x = y = z = 1$ következik.

2. a) Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2} \cdot x \cdot (1 - x)$ függvény grafikus képe tartalmazza a $(0,0)$ és $(1,0)$ egész koordinátájú pontokat de $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$ esetén $f(x) \notin \mathbb{Z}$, mert $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Tehát ez a függvény teljesíti a kért feltételt.

b) Ha a koordinátarendszer kezdőpontját a grafikus kép egyik rácspontjába választjuk, akkor a függvény $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \overline{a}\overline{x}^2 + \overline{b}\overline{x}$ alakban írható, ahol $\overline{x}$ az új koordinátarendszerben a változó. Tehát elégséges belátni, hogy ha létezik $\overline{x}_1, \overline{x}_2$ úgy, hogy $f(\overline{x}_1), f(\overline{x}_2) \in \mathbb{Z}$, akkor végtelen sok $\overline{x} \in \mathbb{Z}$ esetén teljesül az $f(\overline{x}) \in \mathbb{Z}$ összefüggés. Ez viszont igaz, mert az

$$\begin{cases} \overline{a}\overline{x}_1^2 + \overline{b}\overline{x}_1 = \overline{y}_1 \\ \overline{a}\overline{x}_2^2 + \overline{b}\overline{x}_2 = \overline{y}_2 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldásai ($\overline{a}, \overline{b}$ ismeretlenekkel) racionális számok ($\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{y}_1, \overline{y}_1 \in \mathbb{Z}$), tehát ha $\overline{x}$ osztható $\overline{a}$ és $\overline{b}$ nevezőjével, akkor $f(\overline{x})$ egész szám. Ilyen $\overline{x}$ végtelen sok van, tehát a bizonyítás teljes.

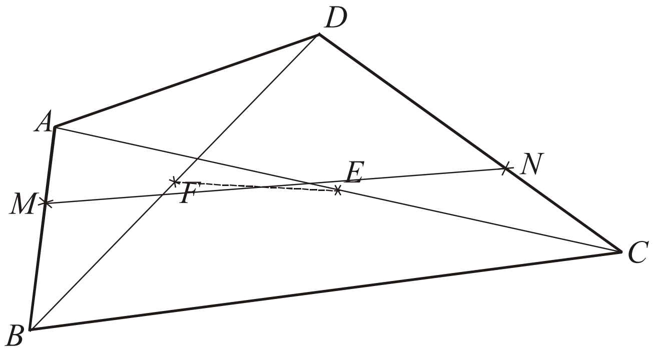
3. Legyen O egy tetszőleges pont a síkban, E és F az AC és BD felezőpontja valamint $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{CN}{CD} = t \in [0,1]$. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OC} + t \cdot \overrightarrow{CD}$, tehát $\dfrac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}}{2} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2} + t \cdot \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}}{2}$. Az $\dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2}$ vektor O-beli reprezentánsának végpontja az AC szakasz felezőpontja. Másrészt $\overrightarrow{EF} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}}{2}$, mert

$$\overrightarrow{EF} = \frac{\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EB}}{2} = \frac{\dfrac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}}{2} + \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}}{2}}{2} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}}{4}$$

és $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ alapján

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right).$$

Tehát $\frac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}}{2}=\overrightarrow{OE}+t\cdot\overrightarrow{EF}$. Így $t\in[0,1]$ esetén a vektor O-beli reprezentánsának végpontja az EF szakaszt futja be.



4. Ha $x\,\vdots\,3$ és $y\,\vdots\,3$, akkor $x=3a$, $y=3b$ és így $\frac{a}{b}+b+\frac{1}{a}=6$ vagyis $\frac{a^2+b}{ab}=6-b$. Ennek az egyenletnek a jobb oldala egész és a bal oldala csak $a=b=1$ vagy $a=2$ és $b=4$ esetén egész szám. Mivel ezekben az esetekben az egyenlőség nem teljesül, feltételezhetjük, hogy x és y közül az egyik nem osztható 3-mal. Az egyenlet

$$3x^2+y^2x+9y=18xy \qquad (1)$$

alakban írható. Ha $y\,\vdots\,3$, akkor ebből következik, hogy $3x^2\,\vdots\,9$, tehát $x\,\vdots\,3$. Mivel ez nem lehetséges és $y^2x\,\vdots\,3$ következik, hogy $x=3x_1$, $x_1\in\mathbb{N}^*$ és $(y,3)=1$.

Tehát

$$9x_1^2+y^2x_1+3y=18x_1y. \qquad (2)$$

Ebben az egyenletben $y^2\not\vdots\,3$ és $y^2x_1\,\vdots\,3$, tehát $x_1=3x_2$ és $x_2\in\mathbb{N}^*$. Ebből következik, hogy:

$$27x_2^2+y^2x_2+y=18x_2y \qquad (3)$$

$27x_2^2\,\vdots\,y$ és $(y,3)=1$ alapján $x_2^2\,\vdots\,y$. Másrészt a (3) alapján $y\,\vdots\,x_2$, tehát létezik $d\in\mathbb{N}^*$ úgy, hogy $y=x_2\cdot d$. Az $x_2^2\,\vdots\,y$ oszthatóság pontosan akkor teljesül, ha $x_2\,\vdots\,d$, tehát létezik $d_1\in\mathbb{N}^*$ úgy, hogy $x_2=d\cdot d_1$. Innen $y=d^2\cdot d_1$ és ha a kapott összefüggéseket visszahelyettesítjük a (3) összefüggésbe a

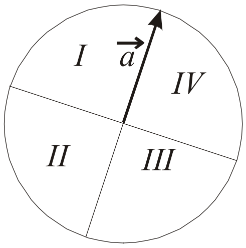
$$27d_1+d^3\cdot d_1^2+1=18d\cdot d_1 \qquad (4)$$

egyenlőséghez jutunk. Az 1-en kívül minden tag tartalmazza a d_1-et, ezért $1\,\vdots\,d_1$ és így $d_1=1$. d-re a $d^3-18d+28=0$ egyenlethez jutunk, tehát $d=2$. Ebből következik, hogy $x=9x_2=9d\cdot d_1=18$ és $y=d^2\cdot d_1=4$ az egyenlet egyetlen megoldása.

Más megoldás. Az egyenlet $3\left(x^2+3y\right)=xy(18-y)$ (5) alakba is írható, tehát $y\in\{1,2,3,\ldots,17\}$. Ha x páratlan, akkor (1) bal oldala páratlan bármilyen y esetén, ami ellentmondás. Tehát x páros. (1) alapján ebből következik, hogy y is páros. A 4-gyel való oszthatóságot vizsgálva az is következik, hogy $y\,\vdots\,4$. Az előbbiek alapján $y\in\{4,8,12,16\}$. Ezek közül csak az $y=4$ esetben jutunk természetes x értékhez, és ez $x=18$. Tehát az egyetlen megoldás $(x,y)=(18,4)$.

5. $n=1$ esetén 4 egységvektorból kell kiválasztani 2-t úgy, hogy az összegük hossza legalább $\sqrt{2}$ legyen. Felrajzoljuk a vektorokat O középponttal és az O középpontú egységsugarú kört diszjunkt negyedekre bontjuk úgy, hogy az osztóvonalak legalább egy vektort fedjenek (ezt jelöljük

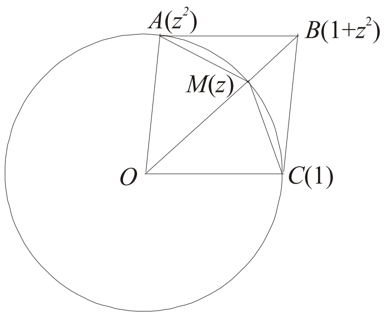
$\vec{a}$-val). Számozzuk meg a negyedeket a mellékelt ábrának megfelelően. Ha az I. vagy IV. negyedben van legalább egy vektor, akkor ezt $\vec{a}$-val összeadva az összeg hossza legalább $\sqrt{2}$. Ellenkező esetben a II. és III. negyedben van három vektor. Ezek közt létezik kettő, amelyek által bezárt szög mértéke nem nagyobb, mint $90°$ és így az összegük hossza legalább $\sqrt{2}$. Megjegyezzük, hogy a gondolatmenet általánosabb formában is működik, gyakorlatilag azt bizonyítottuk, hogy 4 darab legalább l hosszúságú vektor közül kiválasztható 2, amelyek összege legalább $l\sqrt{2}$ hosszúságú. A továbbiakban a matematikai indukció módszerét használjuk. Igazoljuk, hogy ha $3 \cdot 2^n - 2$ darab legalább l hosszúságú vektorból ($\forall\, l > 0$ esetén) kiválasztható 2^n úgy, hogy az összegük hossza legalább $l \cdot \left(\sqrt{2}\right)^n$, akkor $3 \cdot 2^{n+1} - 2$ darab legalább l hosszúságú vektorból ($\forall\, l > 0$ esetén) kiválasztható 2^{n+1} úgy, hogy az összegük hossza legalább $l \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{n+1}$. E célból tekintsünk $3 \cdot 2^{n+1} - 2$ darab legalább l hosszúságú vektort, majd rendre 4 vektor elkülönítésével jelöljük meg azokat a párokat, amelyek összege legalább $l\sqrt{2}$ hosszúságú. Így összesen $3 \cdot 2^n - 2$ párt tudunk megjelölni. A párokhoz tartozó összegvektorok hossza legalább $l\sqrt{2}$ és kiválasztható közülük 2^n úgy, hogy az összegük hossza legalább $l\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^n = l \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{n+1}$ legyen. Az így megszerkesztett összeg az eredeti vektorokból 2^{n+1} darabot tartalmaz, tehát az állítást igazoltuk. A matematikai indukció elve alapján bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $3 \cdot 2^n - 2$ darab legalább l hosszúságú vektorból ($\forall\, l > 0$ esetén) kiválasztható 2^n úgy, hogy az összegük hossza legalább $l \cdot \left(\sqrt{2}\right)^n$ legyen, tehát a feladat bizonyítása teljes.



X. osztály

1. $2z = z + z = z + z^3 + z - z^2 + z^2 - z^3$, tehát

$$2 = 2|z| \leq \left|z + z^3\right| + \left|z - z^2\right| + \left|z^2 - z^3\right| = \left|1 + z^2\right| + 2|1 - z|.$$



Az egyenlőtlenséget geometriailag is könnyű belátni. A mellékelt ábra jelölései alapján a feladat ekvivalens az

$$OB + 2 \cdot AM \geq 2$$

egyenlőtlenséggel. Ez viszont az

$$AM + MC \geq AC \text{ és}$$
$$AC + OB \geq OA + CB$$

egyenlőtlenségek összeadásából következik.

2. A $\log_2 a = x$, $\log_2 b = y$ és $\log_2 c = z$ jelöléssel a

$$\begin{cases} \dfrac{2xy}{(x+y)^2} = z \\ \dfrac{2yz}{(y+z)^2} = x \\ \dfrac{2zx}{(z+x)^2} = y \end{cases} \qquad (1)$$

egyenletrendszerhez jutunk. A törtek létezési feltételéből $x+y\neq 0$, $y+z\neq 0$ és $z+x\neq 0$. Ha a nevezőkkel keresztbeszorzunk és az egyenleteket páronként kivonjuk egymásból előbb a (2), majd a (3) rendszerhez jutunk.

$$(2)\ \begin{cases} 2xy=z\left(x^2+2xy+y^2\right)\\ 2yz=x\left(y^2+2yz+z^2\right)\\ 2zx=y\left(x^2+2xz+z^2\right)\end{cases} \qquad \begin{cases}(y-z)\left(2x+x^2-yz\right)=0\\ (z-x)\left(2y+y^2-zx\right)=0\\ (x-y)\left(2z+z^2-xy\right)=0\end{cases}\ (3)$$

Ha $x\neq y\neq z\neq x$, akkor a (3) rendszerből az $\begin{cases}xy=2z+z^2\\ yz=2x+x^2\\ zx=2y+y^2\end{cases}$ rendszerhez jutunk. Ha két egyenlet megfelelő oldalait egymásból kivonjuk, az $x+y+z+2=0$ (5) egyenlőséghez jutunk. Így a (2) rendszer első egyenletéből a (4) rendszer első egyenlete és az (5) alapján következik, hogy $4z+2z^2=z\cdot(z+2)^2$, vagyis $z_1=0$ és $z_2=-2$. A $z_1=0$ esetben $x=y=0$ és így a törtek nem értelmezettek, míg a $z_2=-2$ esetben $x+y=0$-hoz jutunk, tehát ez sem lehetséges. Az előbbiek alapján a három ismeretlenből legalább kettő egyenlő. A szimmetria miatt feltételezhetjük, hogy $x=y$. Ebből (1) alapján $z=\frac{1}{2}$ és így (3) első egyenlete alapján $\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y^2+\frac{3}{2}y\right)=0$. A megoldások $y_1=\frac{1}{2}$, $y_2=0$ és $y_3=-\frac{3}{2}$, ezek közül az y_2 nem megfelelő (ismét ellentmondáshoz vezet) és a másik két esetben az $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, illetve $\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ megoldásokhoz jutunk. Ez alapján az eredeti rendszer megoldásai a $\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}},\sqrt{2},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ és $\left(\sqrt{2},\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ számhármasok.

3. Legyen r a haladvány állandó különbsége és F_k a haladvány egyik tagja. Tehát létezik $n\in\mathbb{N}^*$ úgy, hogy $F_k=x_1+(n-1)r$ és végtelen sok olyan $l\in\mathbb{N}$ értéket keresünk, amelyre $F_l=x_1+(m-1)r$ valamilyen $m\in\mathbb{N}^*$ esetén. Ilyen l érték pontosan akkor létezik, ha $F_l-F_k=(m-n)r$, vagyis ha F_l-nek és F_k-nak r-rel való osztási maradéka egyenlő. Másrészt az $\left(F_n\right)_{n\geq 0}$ sorozat képzési szabálya alapján rögzített $r\in\mathbb{N}^*$ esetén az F_n számok r-rel való osztási maradékaira is ugyanaz a képzési szabály. Így ha F_a és F_{a+1} r-rel való osztási maradékai ugyanazok, mint F_b és F_{b+1} osztási maradékai, akkor a maradékok periodikusan ismétlődnek. Viszont, ha tekintjük a

$$\left\{(q_1,q_2)\middle|q_1,q_2\in\mathbb{N},\ q_1,q_2<r,\ \exists m\in\mathbb{N}:(F_m-q_1)\,\vdots\, r\text{ és}\left(F_{m+1}-q_2\right)\vdots\, r\right\}$$

halmazt, akkor ez csak véges sok elemet tartalmazhat (legfeljebb r^2-et) és ezért létezik olyan a és b, amelyre F_a és F_{a+1} r-rel való osztási maradékai ugyanazok, mint F_b és F_{b+1} osztási maradékai. Tehát a maradékok periodikusan ismétlődnek és így a bizonyítás teljes.

4. a) Kiszámítjuk az egyenlőség jobb oldalán álló polinomot.

$$x \cdot P_n(x) - P_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k C_{n-k}^k x^{n+1-2k} - \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^j C_{n-1-j}^j x^{n-1-2j} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k C_{n-k}^k x^{n+1-2k} - \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^{(j+1)-1} C_{n-(j+1)}^{(j+1)-1} x^{n+1-2(j+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k C_{n-k}^k x^{n+1-2k} - \sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} (-1)^{k-1} C_{n-k}^{k-1} x^{n+1-2k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} (-1)^k \left(C_{n-k}^k + C_{n-k}^{k-1}\right) \cdot x^{n+1-2k} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} (-1)^k C_{n+1-k}^k x^{n+1-2k} = P_{n+1}(x).$$

b) Ha $s_n = P_n(2)$, akkor az a) pont alapján $s_{n+1} = 2s_n - s_{n-1}$, $\forall\, n \geq 1$. Tehát az $(s_n)_{n\geq 0}$ sorozat számtani haladvány, és így $s_n = n+1$, $\forall\, n \geq 0$.

Megjegyzés. Ha $x \neq 2$, akkor

$$P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\left(\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

5. A kiterített poliéderben a lapok egy-egy oldalban érintkezhetnek, és mivel a kiterítés során $(k-1)$ sík szűnik meg, ezért pontosan $(k-1)$ olyan él van a kiterítésben, amelyre két lap illeszkedik. Eredeti állapotban (kiterítés előtt) minden élre két lap illeszkedik, tehát mindig $p-(k-1) = p-k+1$ él mentén kell felvágni a poliédert.

XI. osztály

1. Ha $P \in \mathbb{C}[X]$ egy k-ad fokú polinom, akkor a $Q(x) = P(x+1) - P(x)$ polinom $(k-1)$-ed fokú. Tehát ha az utolsó oszloppal kezdődően minden oszlopból kivonjuk az előtte levő oszlopot, akkor a

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_1(1) & P_{11}(1) & P_{11}(2) & \cdots & P_{11}(n-1) \\ P_2(1) & P_{21}(1) & P_{21}(2) & \cdots & P_{21}(n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ P_n(1) & P_{n1}(1) & P_{n1}(2) & \cdots & P_{n1}(n-1) \end{vmatrix}$$

egyenlőséghez jutunk, ahol $P_{k1}(x) = P_k(x+1) - P_k(x)$, $\forall\, k = \overline{1,n}$. Ha az utolsó oszloptól kezdve és a harmadikkal befejezve rendre mindegyik oszlopból kivonjuk az előtte álló oszlopot, akkor a

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_1(1) & P_{11}(1) & P_{12}(1) & \cdots & P_{12}(n-2) \\ P_2(1) & P_{21}(1) & P_{22}(1) & \cdots & P_{22}(n-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ P_n(1) & P_{n1}(1) & P_{n2}(1) & \cdots & P_{n2}(n-2) \end{vmatrix}$$

egyenlőséghez jutunk, ahol $P_{k2}(x)=P_{k1}(x+1)-P_{k1}(x)$, $\forall\, k=\overline{1,n}$. Ezt folytatva rendre a $P_{k(j+1)}(x)=P_{kj}(x+1)-P_{kj}(x)$, $\forall\, k=\overline{1,n}$ polinomok segítségével felírhatjuk, hogy

$$\Delta=\begin{vmatrix} P_1(1) & P_{11}(1) & P_{12}(1) & \cdots & P_{1(n-1)}(1) \\ P_2(1) & P_{21}(1) & P_{22}(1) & \cdots & P_{2(n-1)}(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ P_n(1) & P_{n1}(1) & P_{n2}(1) & \cdots & P_{n(n-1)}(1) \end{vmatrix}.$$

Másrészt, ha a P_k polinom fokszáma r_k, akkor a P_{kj} polinom fokszáma r_k-j, ha $r_k-j\geq 0$ és P_{kj} identikusan 0 ha $r_k-j<0$. Tehát a fokszámokra adott feltétel alapján az utolsó oszlopban minden elem 0, és így $\Delta=0$.

2. Tekintsük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ függvényt, ahol $x_k\in\mathbb{R}$, $k=\overline{1,n}$ és a $T=\dfrac{1}{f(x)}$ törtet. A T törtet felírjuk

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-x_n}\quad(1)$$

alakban és meghatározzuk az együtthatókat. Ha az előbbi egyenlőséget beszorozzuk $(x-x_k)$-val, az

$$\frac{1}{(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}=A_k+(x-x_k)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\frac{A_j}{x-x_j}\quad(2)$$

egyenlőséghez jutunk. Az (1) összefüggés minden $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{x_j \,\middle|\, j=\overline{1,n}\right\}$ esetén érvényes, de a (2)-es már $x=x_k$ esetén is, tehát következik, hogy

$$A_k=\frac{1}{(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}=\frac{1}{f'(x_k)},$$

mert

$$f'(x)=(x-x_2)\ldots(x-x_n)+(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)+\ldots$$
$$\ldots+(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

és az összegnek csak egy tagja nem tartalmazza az $(x-x_k)$ tényezőt. Tehát

$$\frac{1}{f(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f'(x_k)}\cdot\frac{1}{x-x_k},\ x\in\mathbb{R}\setminus\left\{x_j \,\middle|\, j=\overline{1,n}\right\}.$$

Ha ezt az egyenlőséget deriváljuk, az

$$\frac{f'(x)}{f^2(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f'(x_k)}\cdot\frac{1}{(x-x_k)^2},\ x\in\mathbb{R}\setminus\left\{x_j \,\middle|\, j=\overline{1,n}\right\}$$

egyenlőséghez jutunk. Másrészt, ez a közös nevezőre hozás után egy polinomiális azonosságot jelent, érvényes akkor is, ha $x_k\in\mathbb{C}$, $k=\overline{1,n}$ és x olyan komplex szám, amelyre a törtek értelmezettek. $x_k=\varepsilon_k$, $k=\overline{1,n}$ esetén $f(x)=x^n-1$, tehát $f'(x)=nx^{n-1}$ és így

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon_k}{(2-\varepsilon_k)^2}=n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\varepsilon_k^{n-1}(2-\varepsilon_k)^2}=n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f'(\varepsilon_k)(2-\varepsilon_k)^2}=$$
$$=n\frac{n\cdot 2^{n-1}}{(2^n-1)^2}=\frac{n^2\cdot 2^n}{(2^n-1)^2}.$$

3. A b) feltételből $z_1=z_2=0$ esetén következik, hogy $f(0)=0$ és $z_1=z_2\neq 0$ esetén, hogy $f(2z)=4f(z)$, $\forall z\in\mathbb{C}$. Ebből és az a) feltételből következik, hogy $f(2)=4$. A $4=f(2)=f(1\cdot 2)=f(1)\cdot 4$ egyenlőség alapján $f(1)=1$. A matematikai indukció módszerét használva igazoljuk, hogy $f(n)=n^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Feltételezzük, hogy $f(k)=k^2$, ha $k=\overline{0,n}$ és kiszámítjuk $f(n+1)$-et:

$$f(n+1)+f(n-1)=2f(n)+2f(1)\Rightarrow f(n+1)=(n+1)^2,$$

tehát a matematikai indukció elve alapján $f(n)=n^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Ha a b) feltételbe $z_1=0$-t helyettesítünk, következik, hogy $f(-z)=f(z)$, $\forall z\in\mathbb{C}$, tehát az előbbiek alapján $f(n)=n^2$, $\forall n\in\mathbb{Z}$. Így viszont az a) feltétel alapján $f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{f(m)}{f(n)}=\left(\frac{m}{n}\right)^2$, $\forall m,n\in\mathbb{Z}$ és $n\neq 0$ esetén. Tehát $f(q)=q^2$, $\forall q\in\mathbb{Q}$. Ez viszont a c) feltétel alapján azt jelenti, hogy $g(q)=q^2$, $\forall q\in\mathbb{Q}$, tehát g folytonossága alapján $g(x)=x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Az a) feltétel alapján $1=f(-1)=f(i)f(i)$. Mivel $f(i)=f\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)f\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$ és $f\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\in\mathbb{R}$ (mert $f:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$), következik, hogy $f(i)\geq 0$, tehát $f(i)=1$. Az a) feltétel alapján $f(iy)=f(i)f(y)=y^2$, $\forall y\in\mathbb{R}$, tehát

$$f(x+iy)+f(x-iy)=2f(x)+2f(y)=2x^2+2y^2 \text{ és}$$
$$f(x+iy)\cdot f(x-iy)=f\left(x^2+y^2\right)=\left(x^2+y^2\right)^2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Ebből a két egyenlőségből következik, hogy $f(x+iy)=x^2+y^2$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$, tehát $f(z)=|z|^2$, $\forall z\in\mathbb{C}$.

4. A sorozat első 16 tagját az alábbi táblázatba foglaltuk:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
x_n	1	3	4	6	7	8	9	11	12	13	14	15	16	17	18	20
x_n-n	0	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4

Észrevehető, hogy kettő hatványai közt a sorozat tagjai egyenként növekednek és a kettő hatványainál az ugrás 2. Így az x_n-n különbség 2^k és $2^{k+1}-1$ közt mindig k. Ha $2^k\leq n\leq 2^{k+1}-1$, akkor $k=[\log_2 n]$, tehát azt sejtjük, hogy $x_n=n+[\log_2 n]$. Ezt matematikai indukcióval igazoljuk. Tekintjük a következő állítást:

$$P(n):\quad x_k=k+[\log_2 k],\ \forall k\leq 2^n-1.$$

A táblázat alapján láttuk, hogy ez igaz $n \in \{1,2,3,4\}$ esetén. Ha $P(n)$ igaz és $2^n \le k \le 2^{n+1} - 1$, akkor $2^{n-1} \le \left[\frac{k}{2}\right] \le 2^n - 1$, $x_k = x_{\left[\frac{k}{2}\right]} + k + 1 - \left[\frac{k}{2}\right] = \left[\frac{k}{2}\right] + \left[\log_2 \left[\frac{k}{2}\right]\right] + k + 1 - \left[\frac{k}{2}\right] =$

$$= n - 1 + k + 1 = k + n = k + [\log_2 k],$$

tehát $P(n+1)$ is igaz. Így a matematikai indukció elve alapján

$$x_k = k + [\log_2 k],\ \forall\, k \in \mathbb{N}^*.$$

A $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log_2 x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x \cdot \ln 2} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x \cdot \ln 2} = 0$ határérték, a $-1 + \log_2 n < [\log_2 n] \le \log_2 n$ egyenlőtlenség, és a fogó tétel alapján következik, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x_n}{n} = 1$.

5. Az n-edik törlés utáni számpár legyen $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$. A feltételek alapján $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$, ahol $A = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{14}{5} \end{bmatrix}$. Ebből következik, hogy

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = A^n \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ b_n & c_n \end{bmatrix}, \text{ ahol}$$

$$a_n = \frac{9 + 3^n}{10},\ b_n = \frac{3^{n+1} - 3}{10} \text{ és } c_n = \frac{3^{n+2} + 1}{10},\ \forall\, n \ge 1.$$

Ha $x_n = y_n = z$, akkor az $\begin{cases} a_n x_0 + b_n y_0 = z \\ b_n x_0 + c_n y_0 = z \end{cases}$ egyenletrendszerhez jutunk. A Cramer szabály segítségével a megoldás $x_0 = \frac{z(c_n - b_n)}{\det A^n}$ és $y_0 = \frac{z(a_n - b_n)}{\det A^n}$, tehát $\frac{x_0}{y_0} = \frac{c_n - b_n}{a_n - b_n} = \frac{3^{n+1} + 2}{6 - 3^n}$. Innen következik, hogy $3^n = \frac{6x_0 - 2y_0}{x_0 + 3y_0}$, tehát annak szükséges és elégséges feltétele, hogy valahány lépés után a táblán két egyforma szám álljon az, hogy $\log_3 \frac{6x_0 - 2y_0}{x_0 + 3y_0} \in \mathbb{N}$.

XII. osztály

1. Tekintjük a

$$G_k : \left(k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}\right) \to \mathbb{R},\ G_k(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{\cos x} \cdot \cos \frac{1}{\sin x}, & x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}\right) \setminus \{k\pi\} \\ 0, & x = k\pi \end{cases}$$

függvényeket.

$$G_k'(x) = \begin{cases} \frac{\sin x\left(1 + \cos^2 x\right)}{\cos^2 x} \cdot \cos \frac{1}{\sin x} + \sin \frac{1}{\sin x}, & x \ne k\pi \\ 0, & x = k\pi \end{cases},$$

mert

$$\lim_{x\to k\pi}\frac{G_k(x)-G_k(k\pi)}{x-k\pi}=\lim_{x\to k\pi}\frac{(-1)^k\sin(x-k\pi)}{x-k\pi}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\sin x\cdot\cos\frac{1}{\sin x}=0$$

(a $\cos\dfrac{1}{\sin x}$ korlátos és a $\sin x$ tart a 0 -hoz). Másrészt a $h_k:\left(k\pi-\dfrac{\pi}{4},k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)\to\mathbb{R}$,

$$h_k(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x\left(1+\cos^2 x\right)}{\cos^2 x}\cdot\cos\dfrac{1}{\sin x}, & x\in\left(k\pi-\dfrac{\pi}{4},k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)\setminus\{k\pi\}\\ 0, & x=k\pi\end{cases}$$

függvények folytonosak, tehát léteznek a $H_k:\left(k\pi-\dfrac{\pi}{4},k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)\to\mathbb{R}$ primitív függvényeik úgy, hogy $H_k'(x)=h_k(x)$, $\forall\, x\in\left(k\pi-\dfrac{\pi}{4},k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)$ és $\forall\, k\in\mathbb{Z}$. Ez alapján

$$f(x)=\left(G_k-H_k\right)'(x),\ \forall\, x\in\left(k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{4}\right)\text{ és }\forall\, k\in\mathbb{Z}.$$

Az f függvény folytonos a $\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2}-\dfrac{5\pi}{12},\dfrac{(2k+1)\pi}{2}+\dfrac{5\pi}{12}\right)$ intervallumokon, ezért létezik

$$F_k:\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}-\frac{5\pi}{12},\frac{(2k+1)\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}\right)\to\mathbb{R}$$

primitívje ezeken az intervallumokon. A Lagrange tétel következménye alapján minden $k\in\mathbb{Z}$ esetén létezik olyan $c_k\in\mathbb{R}$, amelyre $\left(G_k-H_k\right)(x)=F_k(x)+c_k$, $\forall\, x\in I_k$ és $\forall\, k\in\mathbb{Z}$, ahol $I_k=\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2}-\dfrac{5\pi}{12},k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\forall\, k\in\mathbb{Z}$. Tehát tetszőleges F_0 primitívből kiindulva induktíven meghatározhatók a c_k, $k\in\mathbb{Z}$ konstansok úgy, hogy az

$$F(x)=\begin{cases}\left(G_k-H_k\right)(x), & x\in\left(k\pi-\dfrac{\pi}{4},k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)\\ F_k(x)+c_k, & x\in\left[k\pi+\dfrac{\pi}{4},(k+1)\pi-\dfrac{\pi}{4}\right]\end{cases}$$

függvény folytonos legyen. Ebben az esetben F deriválható is és $F'(x)=f(x)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, tehát f primitíválható.

2. Mivel f integrálható, korlátos is. Így létezik $M>0$ úgy, hogy $|f(x)|<M$, $\forall\, x\in[0,1]$. Az $\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{1+x^n}dx$ integrálok léteznek, tehát ha $\varepsilon>0$ tetszőleges, akkor az

$$\left|\frac{f(x)}{1+x^n}-f(x)\right|=|f(x)|\frac{x^n}{1+x^n}\le M\cdot x^n$$

egyenlőtlenség alapján

$$\left|\int_0^1\frac{f(x)}{1+x^n}dx-\int_0^1 f(x)dx\right|\le M\cdot\int_0^1 x^n dx=\frac{M}{n+1}.$$

Mivel létezik olyan $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, amelyre $0 < \dfrac{M}{n+1} < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$, a határérték ε-os értelmezése alapján következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \dfrac{f(x)}{1+x^n} dx = \int\limits_0^1 f(x) dx$.

3. Tekintsük a $[0,1]$ intervallumon az $x_k = \dfrac{k}{10^{2n}}$, $k = \overline{0,10^{2n}}$ számok által meghatározott felbontást és legyen $\xi_k = x_k + y_k$, ahol $0 \leq y_k < \dfrac{1}{10^{2n}}$, $k = \overline{0,10^{2n}}$. Az f értelmezése alapján $f(\xi_k) = f(x_k) + f(y_k)$ és $0 \leq f(y_k) < \dfrac{1}{10^{2n}}$, $k = \overline{0,10^{2n}}$, tehát

$$\sum_{k=0}^{10^{2n}-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{10^{2n}} \left(\sum_{k=0}^{10^{2n}-1} f(x_k) + \sum_{k=0}^{10^{2n}-1} f(y_k) \right)$$

Másrészt $\sum\limits_{k=0}^{10^{2n}-1} f(y_k) < \dfrac{10^{2n}}{10^{2n}}$ és az $\left\{ f(x_k) \middle| k = \overline{0,10^{2n}-1} \right\}$ halmaz egyenlő az $\left\{ x_k \middle| k = \overline{0,10^{2n}-1} \right\}$ halmazzal, tehát

$$\sum_{k=0}^{10^{2n}-1} f(x_k) = \sum_{k=0}^{10^{2n}-1} x_k = \frac{10^{2n} \cdot \left(10^{2n} - 1\right)}{2 \cdot 10^{2n}}.$$

Ezek alapján

$$\left| \sum_{k=0}^{10^{2n}-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - \frac{1}{2} \right| = \left| -\frac{1}{2 \cdot 10^{2n}} + \frac{1}{10^{2n}} \sum_{k=0}^{10^{2n}-1} f(y_k) \right| < \frac{3}{2 \cdot 10^{2n}}.$$

A Riemann-féle integrálhatóság jellemzési tétele alapján (lásd Balázs Márton: Hogyan tanítanám az integrálszámítást? vagy András Szilárd, Csapó Hajnalka, Lukács Andor: Matematika a XII. osztály számára) f integrálható és $\int\limits_0^1 f(x) dx = \dfrac{1}{2}$.

4. a) $\forall\, a \in G$ esetén az $f_a(x) = a \cdot x \cdot a^{-1}$, $\forall\, x \in G$ függvény automorfizmus. Mivel a $(G,\cdot)$ csoportnak pontosan két automorfizmusa van és ezek közül az egyik az identikus függvény, az f_a függvények közül néhány az identikus függvényt kell adja és a többi egymással kell egyenlő legyen. Ha f_a identikus függvény, akkor $a \cdot x = x \cdot a$, $\forall\, x \in G$, ha pedig $f_a(x) = f_b(x)$, $\forall\, x \in G$, akkor $x = a$ esetén $ab = ba$ következik (*). Másrészt a $Z(G) = \left\{ x \in G \middle| xy = yx,\ \forall y \in G \right\}$ halmaz részcsoportja a G-nek (a G centruma), és az előbbiek alapján ha $a \notin Z(G)$, akkor is $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall\, b \in G$ (ha $b \in Z(G)$, akkor b tulajdonsága alapján, míg ellenkező esetben a (*) tulajdonság alapján). Ez azt mutatja, hogy a centrumon kívül nincs elem, tehát $(G,\cdot)$ kommutatív csoport.

b) Ha G elemeinek száma n és d relatív prím az n-nel, akkor a $g_d : G \to G$, $g_d(x) = x^d$, $\forall\, x \in G$ függvény automorfizmusa a $(G,\cdot)$ csoportnak, tehát legfeljebb két ilyen d létezhet. Ez azt jelenti, hogy $\varphi(n) \leq 2$, ahol φ az Euler-féle függvény és így $n \in \{1,2,3,4,6\}$.

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)...\left(1 - \frac{1}{p_k}\right), \text{ ha } n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$$

Az $n=1$ és $n=2$ eset nem jó mert ekkor csak egyfajta csoport van és annak nincs két automorfizmusa. $n=3$ esetén $(G,\cdot)\simeq(\mathbb{Z}_3,+)$, mert minden háromelemű csoport izomorf $(\mathbb{Z}_3,+)$-szal. $n=4$ esetén $(G,\cdot)$ vagy a $(\mathbb{Z}_4,+)$-szal izomorf vagy a Klein csoporttal. Mivel a Klein csoportnak több mint két automorfizmusa van, ezért $(G,\cdot)\simeq(\mathbb{Z}_4,+)$. $n=6$ esetén is az izomorfizmusoktól eltekintve csak egyfajta csoport lehetséges, tehát $(G,\cdot)\simeq(\mathbb{Z}_6,+)$. $(\mathbb{Z}_3,+)$, $(\mathbb{Z}_4,+)$ és $(\mathbb{Z}_6,+)$ csoportoknak pontosan két automorfizmusuk van, tehát a bizonyítás teljes.

5. a) Ha az $a_1,a_2,\ldots,a_p$ permutációból indulunk ki, akkor a második sorban a_k+a_{k+1}, a harmadik sorban $a_k+2a_{k+1}+a_{k+2}$, a negyedik sorban $a_k+3a_{k+1}+3a_{k+2}+a_{k+3}$ alakú összegek jelennek meg, és így a p-edik sorban az $S=a_1+C_{p-1}^1a_2+C_{p-1}^2a_3+\ldots+C_{p-1}^{p-2}a_{p-1}+a_p$ összeg jelenik meg. Másrészt, $\hat{0}\cdot x=\hat{0}$, $\forall x\in\mathbb{Z}_p$, tehát az előbbi összegben megjelenő együtthatók p-vel való osztási maradékát kell kiszámítanunk. Ha $C_{p-1}^k\equiv r_k(\bmod p)$, akkor a $C_{p-1}^k=\dfrac{(p-1)!}{k!\cdot(p-1-k)!}$ összefüggés, valamint a Wilson tétel ($(p-1)!\equiv-1(\bmod p)$) alapján írhatjuk, hogy:

$$r_k\cdot k!\cdot(-(k+1))(-(k+2))\ldots(-(p-1))\equiv-1(\bmod p).$$

Tehát $p\geq 3$ alapján $r_k\equiv(-1)^{k-1}(\bmod p)$ és így $(\mathbb{Z}_p,+)$-ban írhatjuk, hogy

$$S=a_1-a_2+a_3-\ldots-a_{p-1}+a_p=2(a_1+a_3+a_5+\ldots+a_p).$$

Mivel $(2,p)=1$, elégséges belátni, hogy az $a_1+a_3+\ldots+a_p$ összeg bármilyen értéket felvehet. Ha $\dfrac{p+1}{2}$ páratlan, akkor a_1-et tetszőlegesen választjuk és a többieket olyan párokba rendezzük, amelyeknek az összege 0. Így $S=2a_1$ és ez bármelyik $(\mathbb{Z}_p,+)$-beli elemet felveheti. Ha $\dfrac{p+1}{2}$ páros, akkor a_1-et tetszőlegesen választjuk, $a_3=0$-t választunk, és a többieket olyan párokba rendezzük, amelyeknek az összege 0. Így ismét $S=2a_1$ és ez bármelyik $(\mathbb{Z}_p,+)$-beli elemet felveheti.

b) Egy tetszőleges elem $\dfrac{p+1}{2}(p-1)!$ esetben jelenik meg pozitív előjellel és $\dfrac{p-1}{2}(p-1)!$ esetben negatív előjellel (ha az összes összeget tekintjük). Így az utolsó számok összege

$$\left[\frac{p+1}{2}(p-1)!-\frac{p-1}{2}(p-1)!\right]\left(\hat{0}+\hat{1}+\hat{2}+\ldots+\widehat{p-1}\right)=\hat{0}.$$

Befejezésül lássunk néhányat azokból a feladatokból, amelyek nem kerültek be a versenybe (ezek közül az m-mel jelölteket nem sikerült teljesen megoldani).

1. Melyik az a legkisebb $n \in \mathbb{N}^*$ természetes szám, amelyre az $1,2,3,\dots,n$ számokat 3 csoportba lehet osztani úgy, hogy ha minden csoporthoz hozzárendeljük a hozzátartozó számok összegéből és négyzetösszegéből alkotott rendezett számpárt, akkor mind a három csoporthoz ugyanaz a számpár tartozik.

2. Határozzuk meg azokat az x, y, z természetes számokat, amelyekre az $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$ összeg természetes szám.

3. Egy hatszögben kiválasztunk két szembenfekvő oldalt, és a felezőpontjaikat összekötő szakasz felezőpontját összekötjük a rájuk nem illeszkedő csúcsokat összekötő szakasz felezőpontjával. Bizonyítsd be, hogy az így szerkeszthető három egyenes összefutó.

4. Szerkesszél olyan $f:[0,1]\to[0,1]$ függvényt, amelynek végtelen sok szakadási pontja van és létezik primitív függvénye.

6. Bizonyítsd be, hogy ha egy n-ed fokú polinomfüggvény grafikus képe legalább $n+1$ rácspontot tartalmaz, akkor végtelen sok rácspontot tartalmaz.

6. (m) Határozd meg a legkisebb olyan halmazt, amely teljesíti az alábbi feltételeket

a) $A \subset \mathbb{N}$;
b) $0 \in A$;
c) ha $x \in A$, akkor $3x+1 \in A$;
d) ha $y \in A$ és y páros, akkor $\frac{y}{2} \in A$.

7. (m) Adottak egy szabályos n szög csúcsai adottak. A és B felváltva meghúz egy-egy átlót vagy oldalt úgy, hogy a behúzott szakaszoknak ne legyen közös pontja (végpont sem). Az veszít, aki nem tud ilyen átlót meghúzni. Kinek van nyerő stratégiája?

8. (m) Két játékos felváltva választ egy-egy számot az $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16\}$ halmazból a következő szabályok szerint:

a) egyetlen számot sem lehet kétszer választani (akkor sem, ha az ellenfél választotta);
b) a kiválasztott számok összege minden lépés után legyen prímszám (az első szám is).

Az veszít, aki először nem tud választani. Kinek van nyerő stratégiája?

9. (m) Két játékos felváltva választ egy-egy elemet $\mathbb{Z}_n$-ből a következő szabályok szerint:

a) egyetlen elemet sem lehet kétszer választani (akkor sem, ha az ellenfél választotta);
b) a kiválasztott elemek összege ($\mathbb{Z}_n$-ben) minden lépés után az addigi összegektől különböző kell legyen.

Az veszít, aki először nem tud választani. Kinek van nyerő stratégiája?

10. (m) Hány különböző kiterítése van egy szabályos n oldalú hasábnak, ha a magassága nem egyenlő az alapél hosszával? (a nem egybevágó kiterítéseket vesszük különbözőknek)