VI. RADÓ FERENC EMLÉKVERSENY

Kolozsvár, 2002. május 11.

V. osztály

1. Határozd meg a $2\underbrace{33...33}_{2002}$ szám négyzetének utolsó hat számjegyét!

2. Egyértelműen meghatározzák-e az A, B és C halmazt az alábbi feltételek:

$A \cup B \cup C = \left\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\right\}$;

$A \setminus (B \cup C) = \left\{0,6,7,8\right\}$;

$\left\{4,5\right\} \subseteq B \setminus C$;

$\left\{1,2,3\right\} \subseteq A \cap C$;

$\{9\} \subseteq C \setminus A$;

$B \not\subset (A \cup C)$;

$(B \cap C) \setminus A \neq \varnothing$;

az $A \cap B \cap C$ halmaz két elemet tartalmaz és a $A \cap B$ halmaz hármat.

Ha a halmazok nem egyértelműen meghatározottak, adjál legalább két példát olyan A, B és C halmazra, amelyek teljesítik az előbbi feltételeket. Hány ilyen megoldás létezik?

3. Babonás Julcsa néninek két gyufás skatulyája van, mindegyikben 17 gyufaszál. Minden nap a tűz meggyújtására egyetlen gyufaszálat használ el. Ha a gyufaszál kivétele után valamelyik dobozban a maradt gyufák száma osztható 3-mal, akkor a másik skatulyából áttesz 2 szálat ebbe a dobozba és addig ismétli ezt a műveletet, amíg a gyufák száma egyik skatulyában sem lesz hárommal osztható. Elérheti-e Julcsa néni, hogy 32 nap után mindkét skatulyában egy-egy szál gyufa legyen? (Ha Julcsa néni olyan skatulyából kell 2 gyufaszálat áthelyezzen, amelyben 2-nél kevesebb van, akkor a szabályokat nem tarthatja be, tehát ebben az esetben nem érhető el a kívánt állapot.)

4. Egy 3×3-as tábla középső mezején egy baktérium áll. Minden másodpercben a létező baktériumok mindegyike, egymástól függetlenül, vagy átköltözik egy szomszédos mezőre, vagy helyben marad, és kettéosztódik. Legalább hány másodperc szükséges ahhoz, hogy a tábla minden mezején legyen legalább egy baktérium? (Két mezőt akkor nevezünk szomszédosnak, ha van egy közös oldaluk.)

VI. RADÓ FERENC EMLÉKVERSENY

Kolozsvár, 2002. május 11.

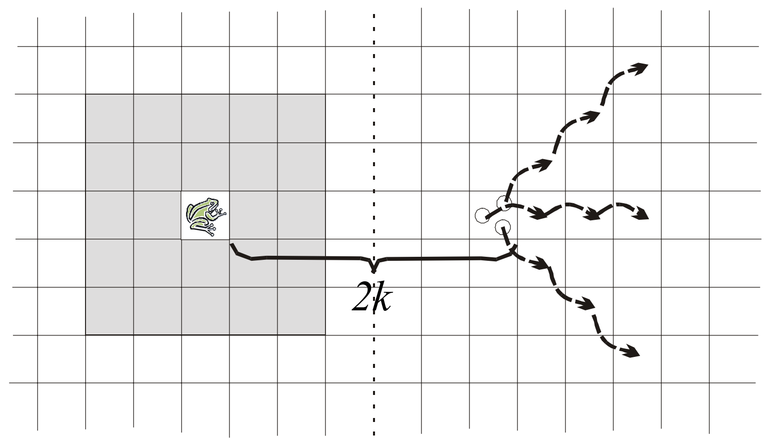
VI. osztály

1. Egy kocsmáros hordójában 100 liter bor van. A kocsmáros, miután megkezdi a hordót, minden este kitölt egy litert a hordóban levő folyadékból és egy liter vizet kever a hordó tartalmához. Írjuk fel a hordóbeli folyadék százalékos összetételét (bor/víz) a második, harmadik illetve negyedik nap reggelén. Mi a folyadék százalékos összetétele a 100-ik nap reggelén?

2. Bizonyítsd be, hogy a 3^{2002} szám legalább 925 számjegyű.

3. Az $ABCD$ és $ABEF$ paralelogrammákban $m\left(\widehat{ABC}\right)=m\left(\widehat{FAB}\right)=60^\circ$, (az A, D és F pontok egy egyenesen vannak) $AB=2$, $FA=4$ és $BC=6$. Melyik szakasz hosszabb, az AE, vagy az AC?

4. Egy végtelen sakktábla egyik mezején három bolha heverészik. Tőlük $2k$ mező távolságra (lásd a mellékelt ábrát) egy béka sütkérezik. Egyszer a béka észreveszi a bolhákat és elindul feléjük. Erre a bolhák az ábrán látható három különböző irányban (egyenes vonalban) menekülni kezdenek. Hogyan kell a békának ugrálnia, ha a lehető legrövidebb idő alatt szeretné elkapni mind a három bolhát és ő kétszer akkorát ugrik, mint a bolhák? (A bolhák mindig egy (átlósan- vagy oldal-) szomszédos mezőbe ugranak át és ezalatt a béka két ilyen ugrásnak megfelelő ugrást hajthat végre, az ábrán besatíroztuk azokat a mezőket, amelyekre a béka ugorhat ha a középső mezőn van.)



VI. RADÓ FERENC EMLÉKVERSENY

Kolozsvár, 2002. május 11.

VII. osztály

1. Írd fel egy kör kerületére az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számokat úgy, hogy az egymásmelletti számok szorzatainak az összege a lehető legkisebb legyen. Mennyi ebben az esetben ez az összeg?

2. Határozd meg a $12 + xy + yz + zx - 4(x + y + z)$ kifejezés minimális értékét, ha $x, y, z \in \left\{0, 1, 2, 3, 4\right\}$.

3. Egy hegyesszögű háromszög alakú tükörből téglalap alakú tükröt kellene kivágni. Legfeljebb mekkora lesz az így készített tükör felülete (az eredeti tükördarab felületének függvényében)?

4. Van három színes ceruzánk, egy kék, egy piros és egy zöld. Egy egyenlő oldalú háromszög egyik csúcsát zöldre és a másik kettőt pirosra színezzük. Egy lépésben felvesszük a meglevő pontok által a háromszög köré írt körön meghatározott üres (további kijelölt pontot nem tartalmazó) ívek felezőpontjait és a következő szabály szerint színezzük ki:

ha az ív két végpontja azonos színű, akkor a felezőpont színe megegyezik a végpontok színével;

ha az ív két végpontja nem azonos színű, akkor a középpontot a harmadik színnel színezzük.

Határozd meg, hogy $2n$ lépés után hány pont van kiszínezve az egyes színekkel!

5. Egy 2001×2001 méretű, sakktáblaszerűen színezett táblán (a sarokmezők fehér színűek) egyszerre három egymásmelletti (a középpontjaik egy egyenesre illeszkednek) mező színét megváltoztathatjuk (világosról sötétre és sötétről világosra, ugyanannak a mezőnek a színét többször is megcserélhetjük). Ilyen lépés ismétlésével elérhetjük-e, hogy a tábla minden mezeje fekete legyen? Mi a válasz ugyanerre a kérdésre, ha 2003×2003-as táblával indulunk?

VI. RADÓ FERENC EMLÉKVERSENY

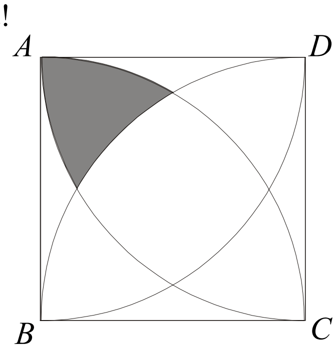
Kolozsvár, 2002. május 11.

VIII. osztály

1. Számítsd ki az $\left[\frac{5\cdot 1}{6}\right]+\left[\frac{5\cdot 2}{6}\right]+\left[\frac{5\cdot 3}{6}\right]+\left[\frac{5\cdot 4}{6}\right]+...+\left[\frac{5\cdot 2002}{6}\right]$ összeget, ahol $[x]$ az x valós szám egész részét jelenti $\Big([x]=k \Leftrightarrow k\in\mathbb{Z}, k\le x<k+1\Big)$.

2. Az $1,2,3,...,2n$ számokat osszuk két, egyenként n elemet tartalmazó csoportba. Kikeressük a számok közül a legnagyobbat és az őt nem tartalmazó csoportból a legkisebbet, feljegyezzük a különbségüket, majd ezt a két számot töröljük és ismételjük az egészet (a megmaradt számok közül kikeressük a legnagyobbat és az őt nem tartalmazó csoportból a legkisebbet, feljegyezzük a különbségüket és kitöröljük őket stb.) Milyen értékeket vehet fel a feljegyzett n szám összege?

3. Egy egység oldalú négyzet csúcspontjaiból húzzunk egységnyi sugarú köröket. (A mellékelt ábrán a négyzet belsejében keletkező síkrészek láthatók.) Számítsuk ki a besatírozott síkrész területét!



4. Egy henger alapköre és magassága egyaránt r. Mennyi annak az egyenes körkúpnak a magassága, amelynek alapsíkja megegyezik a henger alapsíkjával, a palástja tartalmazza a henger második alapkörét és az $\frac{S}{V}$ arány minimális, ahol S a kúp palástfelszíne és V a térfogata.

5. A $\{0,1\}$ halmazból ketten felváltva választanak egy-egy elemet úgy, hogy minden lépés után az addigi választásaik sorozatából ne lehessen kivágni két azonos, 3 hosszúságú szekvenciát (az összes választások sorozatát értve). Kinek van nyerő stratégiája, ha az veszít, aki nem tud lépni?

VI. RADÓ FERENC EMLÉKVERSENY

Kolozsvár, 2002. május 11.

IX. osztály

1. Határozzuk meg azokat az n természetes számokat, amelyekre

$$\left\{\frac{n^3+n-1}{6}\right\}=\left\{\frac{n^3-n}{4}\right\},$$

ahol $\{a\}$ az $a\in\mathbb{R}$ törtrészét jelenti.

2. Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$ függvényre teljesül az $|f(x)|\le 1$ egyenlőtlenség, ha $x\in\{-1,0,1\}$. Bizonyítsd be, hogy $|f(x)|\le 2x^2-1, \forall\, x\in\mathbb{Z}^*$.

3. Egy óra mechanizmusát gyártáskor elhibázták. Így az óra másodpercmutatója szabályosan jár (másodpercenként egyet ugrik), de a percmutató 90 másodpercenként ugrik egyet és ennek megfelelően a percmutató minden 12-ik ugrása után az óramutató is egyik beosztásról a következőre ugrik (a számlapon 60 beosztás van). 90 perc leforgása alatt hányszor fedi egymást a másodperc és a percmutató? 3 nap alatt hány olyan időpillanat létezik, amikor ezen az órán is és egy gyártási hiba nélküli órán is fedi egymást a három mutató?

4. Az ABC háromszög AB és AC oldalára kifelé, valamint az AH oldalfelezőre szerkesszük meg az $ABMN$, $ACPQ$ és $AHRS$ négyzeteket és jelöljük rendre D, E, F és G-vel az AB, MQ, NP és AC szakasz felezőpontját. Bizonyítsd be, hogy $DEFG$ paralelogramma és az $AHRS$, $DEFG$ paralelogrammák területének összege az $ABMN$ és $ACPQ$ négyzetek területének számtani középarányosa.

5. Az ABC háromszög minden oldalán vegyünk fel n pontot. Az AB és AC oldalon felvett pontokat kössük össze a BC oldalon felvett pontokkal. Ha az így kapott szakaszok közt nincs három összefutó szakasz, akkor határozd meg a háromszög belsejében keletkező metszéspontok számát.

VI. RADÓ FERENC EMLÉKVERSENY

Kolozsvár, 2002. május 11.

X. osztály

1. a) Bizonyítsd be, hogy ha az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ függvény konvex, akkor a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$, $g(x)=f^n(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ függvény is konvex ($n\in\mathbb{N}^*$).

b) Oldd meg a valós számok halmazában a $\left(2x+\dfrac{4}{x}\right)^n+\left(4x+\dfrac{2}{x}\right)^n=3^n\left(2^n+3^n\right)$ egyenletet, ha $n\in\mathbb{N}^*$ rögzített szám.

2. Az $ABCD$ négyszög oldalaira kifele szerkesszük meg az *MAB*, *NBC*, *PCD* és *QDA* azonos körüljárási iránnyal rendelkező hasonló háromszögeket. Jelöljük G_1-gyel és G_2-vel az *NPQ* és *BCD* háromszögek súlypontját. Bizonyítsd be, hogy $G_1G_2\parallel AM$.

3. Határozd meg az összes nem konstans f polinom függvényt, amelyre

$$f\left(f(x)+y\right)=f\left(x^2-y\right)+4f(x)y,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

4. Egy háromszög csúcsait az $1,2,3$ számokkal számozzuk (minden csúcshoz egy számot írunk úgy, hogy minden szám előforduljon), és minden oldalát $2n+1$ egyenlő részre osztjuk. Minden osztópontot megszámozunk az őt tartalmazó oldal két végpontjában levő szám valamelyikével (tetszőlegesen), majd a különböző oldalakon elhelyezkedő, különbözően számozott osztópontokat összekötjük egy-egy szakasszal. Legkevesebb hány összekötő szakaszt kell így behúzni?

5. Bizonyítsd be, hogy ha $k^3<n$, akkor egy szabályos $3n$ oldalú sokszög csúcsait k színnel színezve, találunk két azonosan színezett egyenlő oldalú háromszöget (melynek csúcsai a sokszögnek is csúcsai).

VI. RADÓ FERENC EMLÉKVERSENY

Kolozsvár, 2002. május 11.

XI. osztály

1. Bizonyítsd be, hogy végtelen sok olyan x_1 egész szám létezik, amelyből kiindulva az $x_{n+1} = 2x_n \pm \sqrt{3x_n^2 + 1}$ rekurziót teljesítő összes (az előjeleket minden lépésben tetszőlegesen megválaszthatjuk) sorozat tagjai egész számok!

2. Az $f_j(x) = a_j x^3 + b_j x^2 + c_j x + d_j \quad j = \overline{1,4}$ függvények együtthatói valós számok és létezik olyan $x_0 \in \mathbb{R}$, amelyre $f_1(x_0) = f_2(x_0) = f_3(x_0) = f_4(x_0) \neq 0$. Bizonyítsd be, hogy ha $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 1 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 1 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 1 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$ és $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 & d_1 \\ 1 & a_2 & b_2 & d_2 \\ 1 & a_3 & b_3 & d_3 \\ 1 & a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}$, akkor $\Delta_1 \Delta_3 \geq 0$.

3. Az a oldalélű kocka köré írjál minimális térfogatú szabályos négyoldalú gúlát úgy, hogy az alapja a kocka egyik lapjának síkjában legyen és a kocka többi négy csúcsa a gúla oldalélein helyezkedjen el.

4. a) Számítsd ki az $U : [a,b] \to \mathbb{R}$, $U(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & f_4(x) \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$ függvény deriváltját, ha $f_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ deriválható függvények és $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R} \quad i = \overline{1,4}$.

b) Az $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak és kétszer deriválhatók az (a,b) intervallumon. Bizonyítsd be, hogy $\forall\, x_1, x_2, x_3 \in [a,b]$ esetén létezik olyan $c \in (a,b)$, amelyre teljesül a következő egyenlőség:

$$f''(c)\begin{vmatrix} 1 & x_1 & g(x_1) \\ 1 & x_2 & g(x_2) \\ 1 & x_3 & g(x_3) \end{vmatrix} - g''(c)\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \\ 1 & x_3 & f(x_3) \end{vmatrix} = 0.$$

5. Egy $(2n-1)\times(2n-1)$-es tábla középső mezején egy baktérium áll. Minden másodpercben a létező baktériumok mindegyike vagy átköltözik egy szomszédos mezőre, vagy helyben marad, és kettéosztódik. Bizonyítsd be, hogy $n \geq 3$ esetén $2n+2$ másodperc alatt elérhető az, hogy a tábla minden mezején legyen legalább egy baktérium. (Két mezőt akkor nevezünk szomszédosnak, ha van egy közös oldaluk.)

MEGOLDÁSOK

V. osztály

1. Határozd meg a $2\underbrace{33...33}_{2002}$ szám négyzetének utolsó hat számjegyét!

Megoldás. Elvégezzük a szorzást:

$$
\begin{array}{r}
2\underbrace{33...333333}_{2002}\cdot 2\underbrace{33...333333}_{2002} \\
\hline
699...999999 \\
699...999999 \\
699...999999 \\
699...999999 \\
699...999999 \\
699...999999 \\
\text{....................} \\
\hline
\text{....................}888889
\end{array}
$$

Tehát az utolsó hat számjegy 888889.

2. Egyértelműen meghatározzák-e az A, B és C halmazt az alábbi feltételek:

$A \cup B \cup C = \left\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\right\}$;

$A \setminus (B \cup C) = \left\{0,6,7,8\right\}$;

$\left\{4,5\right\} \subseteq B \setminus C$;

$\left\{1,2,3\right\} \subseteq A \cap C$;

$\{9\} \subseteq C \setminus A$;

$B \not\subset (A \cup C)$;

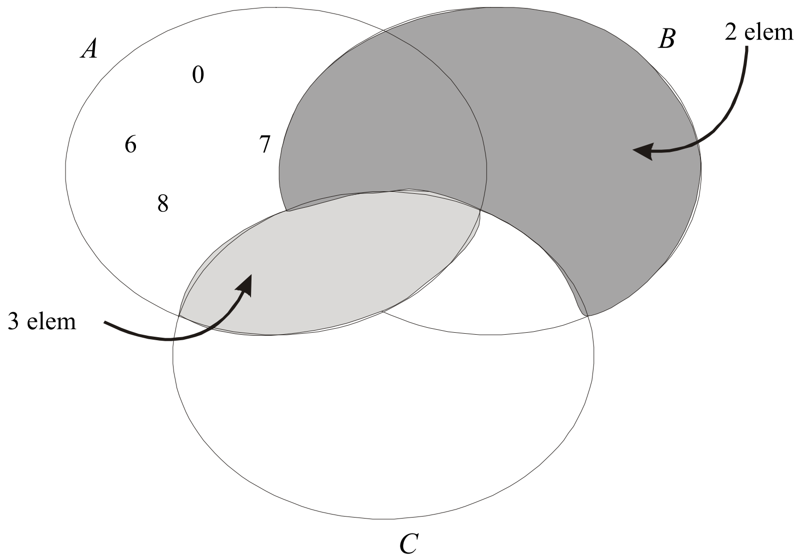
$(B \cap C) \setminus A \neq \varnothing$;

az $A \cap B \cap C$ halmaz két elemet tartalmaz és a $A \cap B$ halmaz hármat.

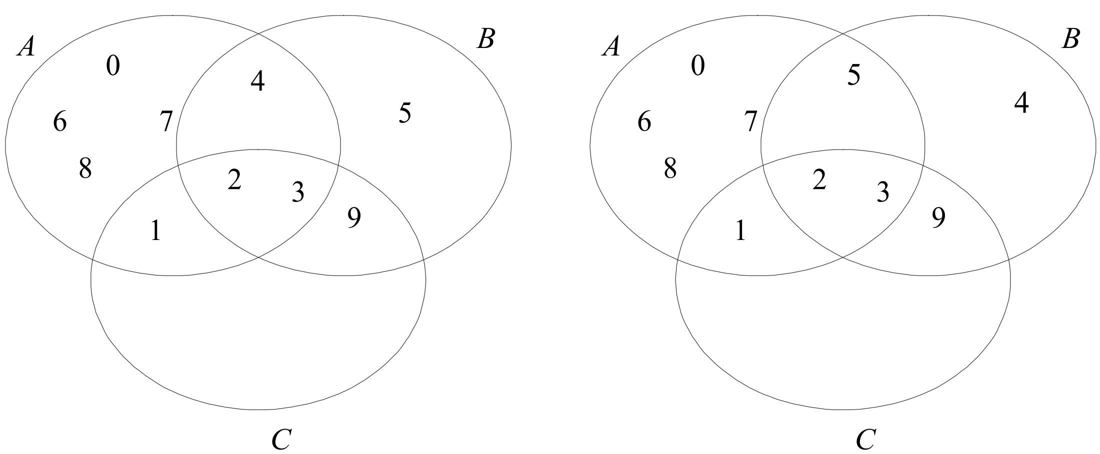
Ha a halmazok nem egyértelműen meghatározottak, adjál legalább két példát olyan A, B és C halmazra, amelyek teljesítik az előbbi feltételeket. Hány ilyen megoldás létezik?

Megoldás. A következő Venn-Euler diagramon azt láthatjuk, hogy melyik részbe mennyi elemet kell elhelyeznünk. Mivel összesen 10 elem van, az 5. és 7. feltétel alapján a 9-es szám a $(B \cap C) \setminus A$ részbe kerül. Így a 4-es és az 5-ös kerül a $B \setminus C$ két bejelölt részhalmazába úgy, hogy a 4-es az egyik részbe és az 5-ös a másik részbe (az utolsó feltétel alapján). Ez két lehetőség, tehát a megoldás nincs egyértelműen meghatározva. Két lehetséges megoldás a második ábrán látható. Az előbbi két elem helyének megválasztásán kívül az $A \cap C$ -ben három elemet kell elhelyezni úgy, hogy az $A \cap B \cap C$ részhalmazba kettő kerüljön. Ezt három különböző módon tehetjük meg, tehát összesen $2 \cdot 3 = 6$ megoldása van a feladatnak.

1. ábra



2. ábra



3. Babonás Julcsa néninek két gyufás skatulyája van, mindegyikben 17 gyufaszál. Minden nap a tűz meggyújtására egyetlen gyufaszálat használ el. Ha a gyufaszál kivétele után valamelyik dobozban a maradt gyufák száma osztható 3-mal, akkor a másik skatulyából áttesz 2 szálat ebbe a dobozba és addig ismétli ezt a műveletet, amíg a gyufák száma egyik skatulyában sem lesz hárommal osztható. Elérheti-e Julcsa néni, hogy 32 nap után mindkét skatulyában egy-egy szál gyufa legyen? (Ha Julcsa néni olyan skatulyából kell 2 gyufaszálat áthelyezzen, amelyben 2-nél kevesebb van, akkor a szabályokat nem tarthatja be, tehát ebben az esetben nem érhető el a kívánt állapot.)

Megoldás. Arra kell vigyázzon Julcsa néni, hogy amikor az egyik dobozban hárommal osztható a megmaradt gyufák száma, akkor a másik dobozban ne legyen $3k+2$ alakú a gyufák száma, mert ebben az esetben egy végtelen ciklushoz jutna, ugyanis a két gyufaszál áttevése után vissza is kellene őket tennie és ezt kellene ismételnie a végtelenségig (vagy legalábbis addig, amíg a babonásságáról leszokik). Ugyanakkor arra is vigyáznia kell, hogy lehetőleg ne ürítse ki az egyik dobozt se, mert ebben az esetben nem tudná betartani a szabályokat. Az alábbi ábrán látható, hogyan tudja csökkenteni mindkét skatulyában a gyufák számát 14-re.

I. 16 16 16 14 14 13 12 14

II. 17 16 15 17 16 16 16 14

Ha Julcsa néni az előbbi lépéseket ismétli (I., II., II., **I.**, II., I., I., **II.** –itt a kiemelt betűk jelentik a kötelező lépéseket, amikor át kell helyezni 2 gyufaszálat az egyik skatulyából a másikba), akkor rendre elérheti, hogy a skatulyákban $11-11$, $8-8$, $5-5$ és $2-2$ gyufaszál legyen. Ezután mindkét skatulyából egy-egy gyufaszálat elvesz és így $1-1$ gyufaszál marad.

4. Egy 3×3-as tábla középső mezején egy baktérium áll. Minden másodpercben a létező baktériumok mindegyike vagy átköltözik egy szomszédos mezőre, vagy helyben marad, és kettéosztódik. Legalább hány másodperc szükséges ahhoz, hogy a tábla minden mezején legyen legalább egy baktérium? (Két mezőt akkor nevezünk szomszédosnak, ha van egy közös oldaluk.)

Megoldás. Az alábbi ábrákon látható a tábla betöltésének egy lehetséges módja (nem ez az egyetlen lehetőség) 5 másodperc alatt.

	1	

	2	

	4	

1	4	1

2	8	2

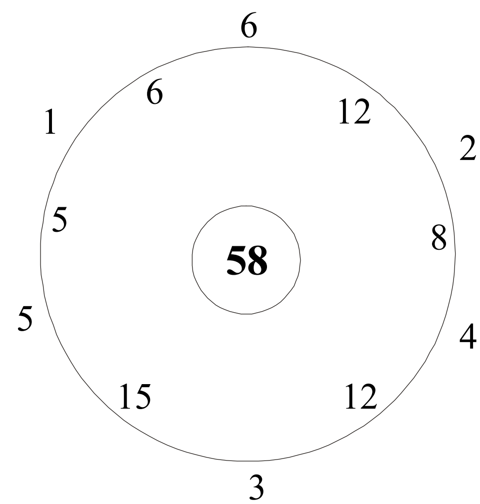
1	1	1
1	8	1
1	1	1

A továbbiakban igazoljuk, hogy 4 másodperc alatt nem lehet elérni a kívánt állapotot. Az első másodpercben muszáj szaporodnia a baktériumnak. Ha 4 másodperc alatt minden mezőn lenne legalább egy baktérium, akkor a sarokmezőkön is kellene legyen baktérium. Mivel a sarokmezőbe csak két költözés után juthat baktérium, ha a második másodpercben is szaporodik minden baktérium, a harmadik másodpercben mind a négynek költöznie kellene, akárcsak a negyedik másodpercben. Így viszont csak négyen maradnának és csak a sarkakat foglalnák el. Ha viszont a második másodpercben már költözik valamelyik baktérium, akkor 3 baktérium lesz és a harmadik lépésben még legalább 2 baktériumnak költöznie kell, tehát így legfeljebb 4 baktérium marad és ezekből az utolsó lépésben nem lehet 9 baktérium.

VII. osztály

1. Írd fel egy kör kerületére az $1,2,3,4,5,6$ számokat úgy, hogy az egymásmelletti számok szorzatainak az összege a lehető legkisebb legyen. Mennyi ebben az esetben ez az összeg?

Megoldás. A 6-os mellé a lehető legkisebb számok kell kerüljenek. Így az egyik oldalán az 1-es és a másik oldalán a 2-es kell álljon. Viszont az 5-ös mellett is a lehető legkisebb számok kell szerepeljenek, tehát az 1-es mellé az 5-öst és a 2-es mellé a négyest kell írjuk. Így az alábbi ábrán szereplő elrendezéshez jutunk (a körön kívül a számok szerepelnek, a belsejében az egymásmelletti számok szorzatai és a belső köröcskében ezeknek a szorzatoknak az összege):



Megjegyzés. Az $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ összefüggés alapján a vizsgált összeg pontosan akkor minimális, amikor az egymásmelletti számok különbségének négyzetösszege maximális.

2. Határozd meg a $12 + xy + yz + zx - 4(x + y + z)$ kifejezés minimális értékét, ha $x, y, z \in \{0,1,2,3,\ 4\}$.

Megoldás. Hajtsunk végre olyan változócseréket, amelyek segítségével a megengedett értékek halmaza 0-ra nézve szimmetrikus lesz. A megengedett értékek halmaza szimmetrikus a 2-re nézve, ezért az $x - 2 = a$, $y - 2 = b$ és $z - 2 = c$ jelöléseket használjuk. Így $x = 2 + a$, $y = 2 + b$ és $z = 2 + c$, tehát

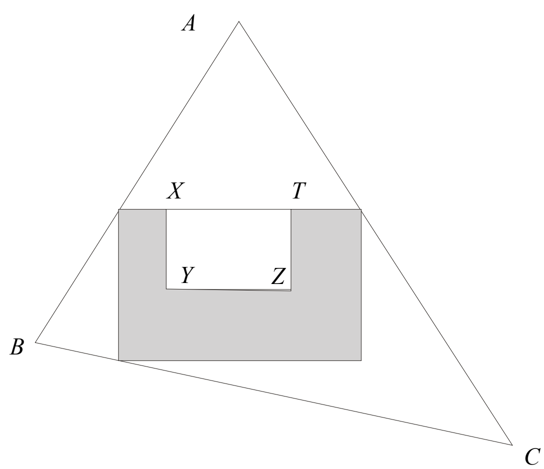
$$12 + xy + yz + zx - 4(x + y + z) = ab + bc + ca,$$

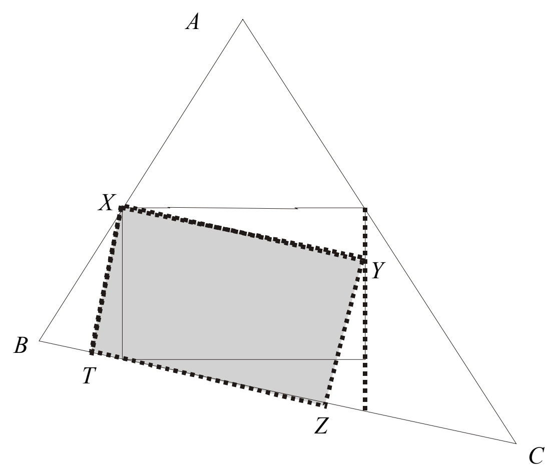
és $a, b, c \in \{\pm 2, \pm 1, 0\}$. Ha mindhárom szám azonos előjelű, akkor az összeg nem minimális (mert pozitív). Esetleg a számok előjelének megváltoztatásával elérhetjük, hogy egy szám legyen negatív (az a) és kettő pozitív. Rögzített b-re és c-re az $a(b + c) + bc$ akkor minimális, ha $a = -2$, tehát elégséges a $bc - 2(b + c)$ kifejezés minimumát meghatározni. Ez $b(c - 2) - 2c$ alakban írható, tehát a legkisebb értékét $b = 2$ esetén veszi fel (mert $c - 2$ negatív). Ebben az esetben a kifejezés értéke -4 és ez c-től független. Tehát a vizsgált kifejezés minimális értéke -4.

Megjegyzés. A változócserék elvégzése nélkül is használhatjuk az előbbi ötletet.

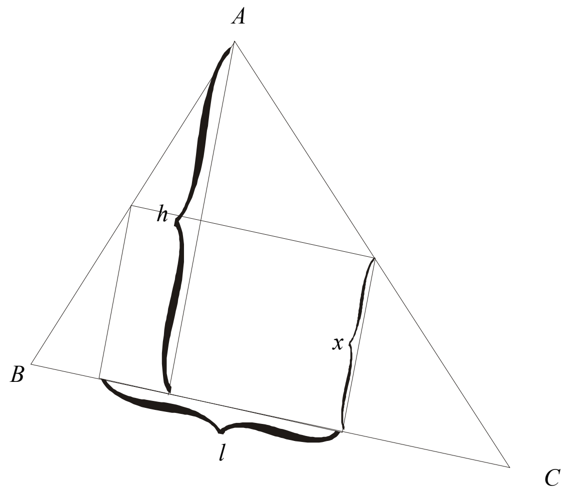
3. Egy hegyesszögű háromszög alakú tükörből téglalap alakú tükröt kellene kivágni. Legfeljebb mekkora lesz az így készített tükör felülete (az eredeti tükördarab felületének függvényében)?

Megoldás. Az alábbi ábrán látható, hogy ha az $XYZT$ téglalap csúcsai nincsenek a háromszög oldalain, akkor a területe nem lehet maximális. A második ábrán az is látható, hogy feltételezhetjük, hogy a maximális területű téglalap minden csúcsa a háromszög oldalain van (mert két oldal párhuzamos elmozdítása során a terület nem változik és ezután ismét növelhető a terület).





Tehát a probléma a következő egyszerűbb formában is megfogalmazható:
Határozzuk meg a legnagyobb területű téglalapot, amelynek mind a négy csúcsa egy adott háromszög oldalain helyezkedik el. Így viszont a téglalap egyik oldala a háromszög egyik oldalán van, tehát két oldala párhuzamos az ehhez tartozó magassággal. Ha x-szel jelöljük a magassággal párhuzamos oldal hosszát, l-el a téglalap másik oldalának hosszát és h-val a magasság hosszát, akkor a hasonlóság alaptételből írhatjuk, hogy $\frac{h-x}{h}=\frac{l}{a}$, ahol a a BC oldal hossza. Így a téglalap területe $T=\frac{a}{h}\cdot x(h-x)$. Másrészt a számtani mértani közepek közti egyenlőtlenség (vagy átrendezés) alapján $x(h-x)\le\left(\frac{h}{2}\right)^2$ és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x=\frac{h}{2}$. Ebben az esetben $T=\frac{ah}{4}=\frac{T[ABC]}{2}$, (és ez független attól, hogy melyik oldalon van a téglalap), tehát a téglalap alakú tükör maximális területe az eredeti háromszög területének a fele.



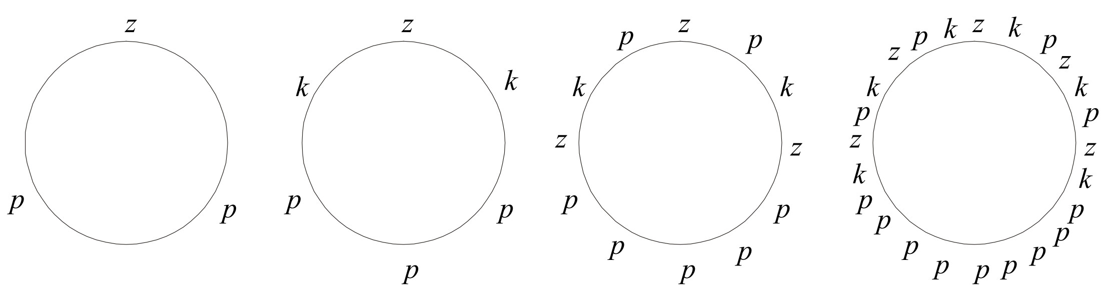
4. Van három színes ceruzánk, egy kék, egy piros és egy zöld. Egy egyenlő oldalú háromszög egyik csúcsát zöldre és a másik kettőt pirosra színezzük. Egy lépésben felvesszük a meglevő pontok által a köré írt körön meghatározott üres (további kijelölt pontot nem tartalmazó) ívek felezőpontjait és a következő szabály szerint színezzük ki:

ha az ív két végpontja azonos színű, akkor a felezőpont színe megegyezik a végpontok színével;

ha az ív két végpontja nem azonos színű, akkor a középpontot a harmadik színnel színezzük.

Határozd meg, hogy $2n$ lépés után hány pont van kiszínezve az egyes színekkel!

Megoldás. Mivel egy lépés után duplázódik a pontok száma, és kezdetben 3 pont volt, a $2n$-edik lépésben $3\cdot 2^{2n}$ pont lesz. A következő lépésekben az alsó íven (lásd a mellékelt ábrát) minden pont piros színű lesz, tehát $2n$ lépés után ezen az íven $2^{2n}-1$ piros pont lesz (a háromszög csúcsait nem számoltuk bele). A két szélső íven ugyanaz történik, tehát elég csak az egyiket vizsgálni. Az első lépésben egy kék pont keletkezik. A következő lépésben egy piros és egy zöld pont lesz (lásd az ábrákat).

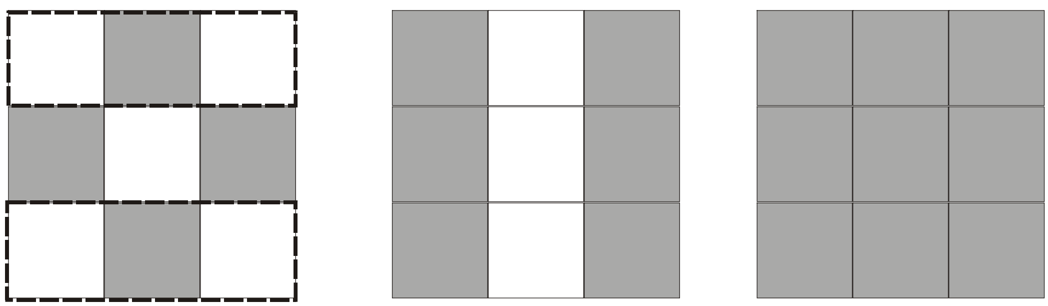


Észrevesszük, hogy a végpontokat nem beszámolva, minden páratlanadik lépés után egyel több kék pont lesz, mint piros és zöld, és minden páros lépés után a színek kiegyenlítődnek. Tehát a $2n$-edik lépésben ezen az íven $\frac{2^{2n}-1}{3}$ pont lesz kék színnel festve és ugyanennyi a másik két színnel is. Tehát a színek eloszlása $2n$ lépés után:

Piros pontok száma: $\left(2^{2n}-1\right)+2\cdot\frac{2^{2n}-1}{3}+2$, zöld pontok száma $2\cdot\frac{2^{2n}-1}{3}+1$ és kék pontok száma $2\cdot\frac{2^{2n}-1}{3}$.

5. Egy 2001×2001 méretű, sakktáblaszerűen színezett táblán (a sarokmezők fehérre vannak színezve), egyszerre három egymásmelletti (a középpontjaik egy egyenesre illeszkednek) mező színét megváltoztathatjuk (világosról sötétre és sötétről világosra, ugyanannak a mezőnek a színét többször is megcserélhetjük). Ilyen lépés ismétlésével elérhetjük-e, hogy a tábla minden mezeje fekete legyen? Mi a válasz ugyanerre a kérdésre, ha 2003×2003-as táblával indulunk?

Megoldás. A 2001×2001-es táblán a kívánt állapot elérhető. Ha felosztjuk a táblát 3×3-as darabokra és minden ilyen darabon az alábbi ábrának megfelelő változtatásokat hajtjuk végre:



A továbbiakban igazoljuk, hogy a 2003×2003-as tábla esetén a kívánt állapot nem érhető el. A fekete és fehér mezők számának különbsége minden lépésben hárommal vagy hattal változik. Kezdetben ez a különbség -1 és a végső állapotban 2003^2 kellene legyen. De 2003^2+1 nem osztható 3-mal (egy teljes négyzet 3-mal való osztási maradéka 0 vagy 1), tehát a kért állapot nem érhető el.

VIII. osztály

1. Számítsd ki az $\left[\frac{5\cdot 1}{6}\right]+\left[\frac{5\cdot 2}{6}\right]+\left[\frac{5\cdot 3}{6}\right]+\left[\frac{5\cdot 4}{6}\right]+...+\left[\frac{5\cdot 2002}{6}\right]$ összeget, ahol $[x]$ az x valós szám egész részét jelenti $\left([x]=k \Leftrightarrow k\in\mathbb{Z}, k\le x<k+1\right)$.

Megoldás. Jelöljük r-rel az n szám 6-tal való osztási maradékát. Így $n=6k+r$, tehát

$$\left[\frac{5n}{6}\right]=\left[5k+\frac{5r}{6}\right]=5k+\left[\frac{5r}{6}\right].$$

Eszerint elégséges $r\in\left\{0,1,2,3,4,5\right\}$ esetén kiszámítani az $\left[\frac{5r}{6}\right]$ értékét. Ezeket az értékeket az alábbi táblázatba foglaltuk:

r	0 1 2 3 4 5
$\left[\frac{5r}{6}\right]$	0 0 1 2 3 4

Az $\left[\frac{5(6k+1)}{6}\right]+\left[\frac{5(6k+2)}{6}\right]+...+\left[\frac{5(6k+6)}{6}\right]$ összeg (hat egymásutáni tag összege) tehát

$$6\cdot 5k+0+0+1+2+3+4=30k+10\,.$$

A kiszámítandó összeg 333 darab ilyen 6-os összegre bontható $\left(k\in\left\{0,1,2,...,332\right\}\right)$ és ezen kívül megmarad az utolsó 4 tag. Tehát

$$S=30\cdot(0+1+2+...+332)+3330+\left[\frac{5\cdot 1999}{6}\right]+\left[\frac{5\cdot 2000}{6}\right]+\left[\frac{5\cdot 2001}{6}\right]+\left[\frac{5\cdot 2002}{6}\right]=$$

$$=30\cdot\frac{332\cdot 333}{2}+3330+4\cdot 5\cdot 333+0+1+2+3=1668336\,.$$

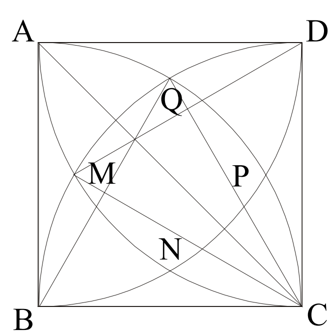
2. Az $1,2,3,...,2n$ számokat osszuk két, egyenként n elemet tartalmazó csoportba. Kikeressük a számok közül a legnagyobbat és az őt nem tartalmazó csoportból a legkisebbet, feljegyezzük a különbségüket majd ezt a két számot töröljük és ismételjük az egészet (a megmaradt számok közül kikeressük a legnagyobbat és az őt nem tartalmazó csoportból a legkisebbet, feljegyezzük a különbségüket és kitöröljük őket stb.) Milyen értékeket vehet fel a feljegyzett n szám összege?

Megoldás. Az első lépésben a legnagyobb elem a $2n$. A másik csoport legkisebb eleme nem lehet n -nél nagyobb, mert a másik csoportban $n-1$ nála nagyobb elem kell legyen. A második lépésben a legnagyobb elem $2n-1$ és az őt nem tartalmazó csoport legkisebb eleme ismét nem lehet nagyobb mint n. Így rendre az $2n,2n-1,2n-2,...,n+1$ számokból kell kivonnunk az $1,2,...,n$ számokat valamilyen sorrendben. Tehát a feljegyzett számok összege

$$S=\big((n+1)+(n+2)+...+2n\big)-(1+2+3+...+n)=\frac{n(3n+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}=n^2$$

3. Egy egység oldalú négyzet csúcspontjaiból húzzunk egységnyi sugarú köröket. (A mellékelt ábrán a négyzet belsejében keletkező síkrészek láthatók.) Számítsuk ki a négyzet belsejében a besatírozott síkrész területét!

Megoldás. Az ábra jelölése szerint az AMQ görbe vonalú háromszög területét kell kiszámítanunk.



Meghúzzuk az AC, BQ, QC, MC és MD szakaszokat. Mivel $|QC|=|BQ|=|BC|=1$, a BCQ háromszög egyenlő oldalú és $m\left(\widehat{BCQ}\right)=60^\circ$. Tehát $m\left(\widehat{QCD}\right)=30^\circ$ és hasonlóan az MCD háromszög is egyenlő oldalú és $m\left(\widehat{MCB}\right)=30^\circ$. Következik, hogy $m\left(\widehat{MCQ}\right)=30^\circ$. Legyen T_1 a CMQ körcikk területe. Mivel $m\left(\widehat{MCQ}\right)=30^\circ$, $T_1=\frac{\pi}{12}$. Legyen T_2 az MC szakasz és MC körív közötti rész területe. T_2-t úgy kaphatjuk meg, hogy a DMC körcikk területéből kivonjuk a DMC egyenlő oldalú háromszög területét. A DMC körcikk területe $\frac{\pi}{6}$ és a DMC háromszög területe $\frac{\sqrt{3}}{4}$, tehát $T_2=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$. Legyen továbbá az AMC és AQC körívek által határolt rész területe T_3 és az AC szakasz és AMC körív közötti rész területe T_4. Tehát $T_3=2\cdot T_4$ és T_4 az ACD körcikk és ACD háromszög területének különbsége, tehát $T_4=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$, $T_3=\frac{\pi}{2}-1$. Már kiszámíthatjuk a T_{AQM}-t: $T_{AQM}=T_3-T_1-2T_2=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$.

Megjegyzés. A többi síkidom területe is hasonlóan számolható ki (a szimmetria miatt csak további kettőt kell kiszámolni). $T_{MNPQ}=T_3-2\cdot T_{AMQ}=\frac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}$ és az AQD rész területét az AB, AD szakaszok és a BQD körív közötti rész területének (legyen ennek a résznek a területe T_5) segítségével számítjuk ki,

$$T_5=1-\frac{\pi}{4},\ T_{AQD}=\frac{1}{2}\cdot\left(T_5-T_{AMQ}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left[\left(1-\frac{\pi}{4}\right)-\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)\right]=1-\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

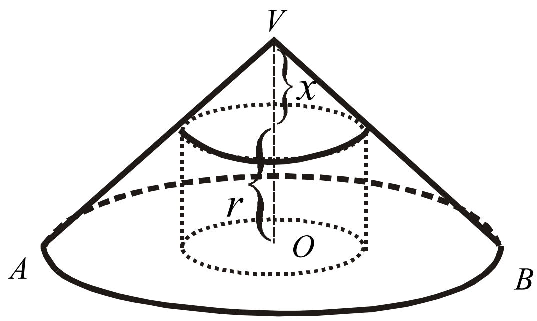
4. Egy henger alapköre és magassága egyaránt r. Mennyi annak az egyenes körkúpnak a magassága, amelynek alapsíkja megegyezik a henger alapsíkjával, a palástja tartalmazza a henger második alapkörét (a kúp a henger köré van írva) és az $\frac{S}{V}$ arány minimális, ahol S a kúp palástfelszíne és V a térfogata.

Megoldás. A mellékelt ábrán r a henger alapkörének sugara és a magassága, $x+r$ pedig a keresett kúp magassága. A hasonlóság alaptételéből $\frac{x}{x+r}=\frac{r}{R}$, ahol R a kúp alapkörének sugara. Így

$$S=\pi RG=\pi r\frac{x+r}{x}\sqrt{(x+r)^2+\left(\frac{x+r}{x}\right)^2r^2}=\pi r\left(\frac{x+r}{x}\right)^2\sqrt{x^2+r^2}\ \text{és}$$

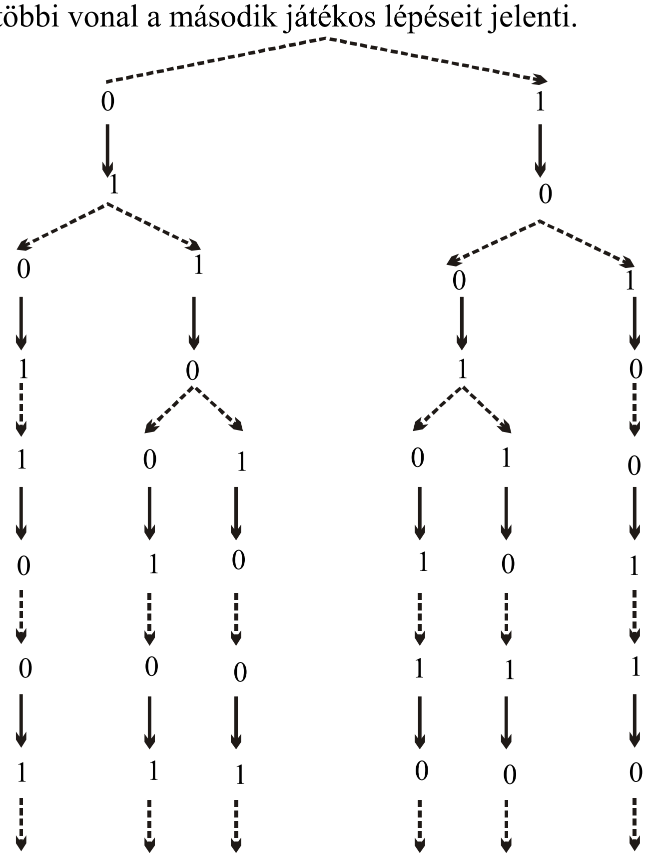
$$V=\frac{1}{3}\pi\frac{(x+r)^3}{x^2}r^2,\ \text{tehát}\ \frac{S}{V}=\frac{3}{r}\cdot\frac{\sqrt{x^2+r^2}}{x+r}.$$

De $\sqrt{\dfrac{x^2+r^2}{2}} \geq \dfrac{x+r}{2}$ és egyenlőség pontosan akkor van, ha $x=r$. Tehát a keresett kúp magassága a henger magasságának kétszerese.



5. A $\{0,1\}$ halmazból ketten felváltva választanak egy-egy elemet úgy, hogy minden lépés után az addigi választásaik sorozatából ne lehessen kivágni két azonos 3 hosszúságú szekvenciát (az összes választások sorozatát értve). Kinek van nyerő stratégiája, ha az veszít, aki nem tud lépni?

Megoldás. A második játékosnak van nyerő stratégiája. Mindig az előző lépésben (az első játékos által) kiválasztott számtól különböző számot kell választania. Így az első játékost majdnem mindig kényszerhelyzetbe hozza. Az alábbi ábra mutatja a lehetséges játszmákat (ha a második ezzel a stratégiával játszik). A szaggatott vonalak az első játékos lépéseit, a többi vonal a második játékos lépéseit jelenti.



IX. osztály

1. Határozzuk meg azokat az n természetes számokat, amelyekre

$$\left\{\frac{n^3+n-1}{6}\right\}=\left\{\frac{n^3-n}{4}\right\},$$

ahol $\{a\}$ az $a\in\mathbb{R}$ törtrészét jelenti.

Megoldás. $\frac{n^3+n-1}{6}$ törtrésze $0,\frac{1}{6},\ldots,\frac{5}{6}$ lehet, attól függően, hogy mennyi n^3+n-1-nek a 6-tal való osztási maradéka.

$n^3-n=(n-1)n(n+1)$ mindig páros, ezért $\left\{\frac{n^3-n}{4}\right\}$ csak 0 vagy $\frac{1}{2}$ lehet, attól függően, hogy n^3-n osztható-e 4-gyel, vagy sem. Ezért a törtrészek csak a következő két esetben lehetnek egyenlők:

I. eset: $\left\{\frac{n^3+n-1}{6}\right\}=\left\{\frac{n^3-n}{4}\right\}=0$.

Ebben az esetben n^3+n-1 osztható kell legyen 6-tal, ami csak akkor állhat fenn, ha n^3+n-1 páros. Mivel ez lehetetlen (mert n^3+n mindig páros), ez az eset nem fordulhat elő.

II. eset: $\left\{\frac{n^3+n-1}{6}\right\}=\left\{\frac{n^3-n}{4}\right\}=\frac{1}{2}$.

$\left\{\frac{n^3+n-1}{6}\right\}=\frac{1}{2}$ akkor áll fenn, ha n^3+n-1-nek 6-tal való osztási maradéka 3, vagyis ha n^3+n-nek 6-tal való osztási maradéka 4. Ez akkor teljesül, ha $n=6k+2$ vagy $n=6k+5$ alakú $(k\in\mathbb{N})$.

Ha $n=6k+2$, akkor

$$\frac{n^3-n}{4}=\frac{(n-1)n(n+1)}{4}=\frac{3\cdot(6k+1)(3k+1)(2k+1)}{2}.$$

Az előző szám törtrésze pontosan akkor $\frac{1}{2}$, ha k páros: $k=2m$, $m\in\mathbb{N}$, vagyis $n=12m+2$.

Ha $n=6k+5$, akkor

$$\frac{n^3-n}{4}=3(3k+2)(6k+5)(k+1),$$

ennek törtrésze 0, bármely $k\in\mathbb{N}$ esetén, tehát az ilyen alakú n szám nem ad megoldást.

Összefoglalva, az egyenlet megoldása:

$$n=12m+2\text{, ahol } m\in\mathbb{N} \text{ tetszőleges.}$$

2. Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$ függvényre teljesül az $|f(x)|\le 1$ egyenlőtlenség, ha $x\in\{-1,0,1\}$. Bizonyítsd be, hogy $|f(x)|\le 2x^2-1, \forall\, x\in\mathbb{Z}^*$.

Megoldás. Az $f(-1)=a-b+c$, $f(1)=a+b+c$ és $f(0)=c$ egyenlőségek alapján $c=f(0)$, $b=\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}$ és $a=\dfrac{f(1)+f(-1)-2f(0)}{2}$, tehát érvényesek a következő átalakítások:

$$\left|f(k)\right|=\left|\frac{f(1)+f(-1)-2f(0)}{2}k^2+\frac{f(1)-f(-1)}{2}k+f(0)\right|=$$
$$=\left|f(1)\left(\frac{k^2+k}{2}\right)+f(-1)\left(\frac{k^2-k}{2}\right)+f(0)\left(1-k^2\right)\right|\leq$$
$$\leq\left|f(1)\right|\frac{k^2+k}{2}+\left|f(-1)\right|\frac{k^2-k}{2}+\left|f(0)\right|\left(k^2-1\right)\leq$$
$$\leq\frac{k^2+k+k^2-k}{2}+k^2-1=2k^2-1,\ \forall\, k\in\mathbb{Z}^*.$$

3. Egy óra mechanizmusát gyártáskor elhibázták. Így az óra másodpercmutatója szabályosan jár (másodpercenként egyet ugrik), de a percmutató 90 másodpercenként ugrik egyet és ennek megfelelően a percmutató minden 12-ik ugrása után az óramutató is egyik beosztásról a következőre ugrik (a számlapon 60 beosztás van). 90 perc leforgása alatt hányszor fedi egymást a másodperc és a percmutató? 3 nap alatt hány olyan időpillanat létezik, amikor ezen az órán is és egy gyártási hiba nélküli órán is fedi egymást a három mutató?

Megoldás. A másodpercmutató minden körbejárása alatt pontosan egyszer fedi a percmutatót, tehát összesen 90 alkalommal. Megvizsgáljuk, hogy m óra, n perc és k másodperckor a mutatók milyen szöget zárnak be a 12 órát mutató mutatókkal. A másodpercmutató $k\cdot\dfrac{2\pi}{60}$ nagyságú szöget míg a percmutató $\left[\dfrac{60n+k}{90}\right]\cdot\dfrac{2\pi}{60}$ nagyságú szöget zár be a 12 órát mutató mutatókkal. Tehát a két mutató akkor fedi egymást, ha $\left[\dfrac{60n+k}{90}\right]=k$. A gyártási hiba nélküli órán, ha ez a két mutató fedi egymást, akkor $n=k$. Ebben az esetben a $\left[\dfrac{60n+k}{90}\right]=\left[\dfrac{61k}{90}\right]=k$ egyenlőség akkor és csakis akkor teljesülhet, ha $k=0$. Ez azt jelenti, hogy három nap alatt összesen 2-szer van a feltételeknek eleget tevő helyzet.

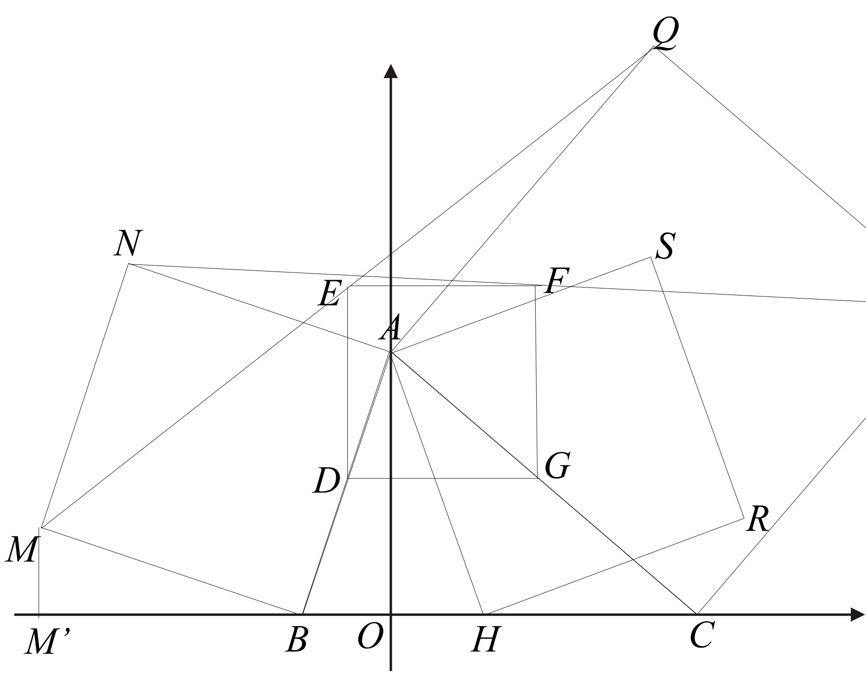
4. Az ABC háromszög AB és AC oldalára kifelé, valamint az AH oldalfelezőre szerkesszük meg az $ABMN$, $ACPQ$ és $AHRS$ négyzeteket és jelöljük rendre D, E, F és G-vel az AB, MQ, NP és AC szakasz felezőpontját. Bizonyítsd be, hogy $DEFG$ paralelogramma és az $AHRS$, $DEFG$ négyzetek területének összege az $ABMN$ és $ACPQ$ négyzetek területének számtani középarányosa.

Megoldás. Legyen az A-ból húzott magasság talppontja O, a koordinátarendszerünk origója, az OC egyenes az Ox tengely és az OA egyenes az Oy tengely. Legyenek ebben a koordinátarendszerben az A pont koordinátái $\left(0,\ a\right)$, a B pont koordinátái $\left(-b,\ 0\right)$ és a C pont koordinátái $\left(0,\ c\right)$. Legyen az M' pont az M pont vetülete az Ox

tengelyre. Az $MM'O$ háromszög kongruens a BOA háromszöggel, tehát $\left|M'B\right| = |OA|$ és $\left|MM'\right| = |OB|$. Az M pont koordinátái a következőképpen írhatók fel: $\left(-a-b,\ b\right)$.

Az $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{BA} = \left(-a,\ a+b\right)$, tehát az N pont koordinátái $\left(-a,\ a+b\right)$.Hasonlóképpen felírhatjuk a P és Q pontok koordinátáit: $\left(c+a,\ c\right)$, illetve $\left(a,\ a+c\right)$.

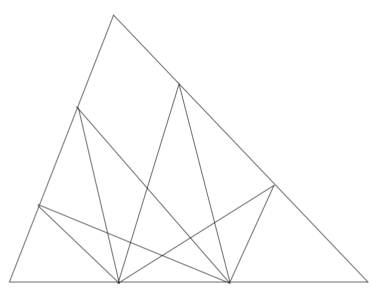
Az $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OQ}\right) = \frac{1}{2}\left(-b,\ a+b+c\right)$ és $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}\right) = \frac{1}{2}\left(c,\ a+b+c\right)$, tehát $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\left(b+c,\ 0\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{GD}$. Azt kaptuk, hogy a $DEFG$ négyszög EF és DG két szemben fekvő oldala egyenlő hosszú és párhuzamos, tehát $DEFG$ paralelogramma. $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EO} - \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{EO} - \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}\right) = \frac{1}{2}\left(0,\ b+c\right)$, tehát az ED oldal párhuzamos az Oy tengellyel, míg a DG oldal párhuzamos az Ox tengellyel, tehát ED merőleges a DG-re, ami azt jelenti, hogy a paralelogramma valójában téglalap. Továbbá az ED hossza megegyezik a DG hosszával, mindkettő $\frac{b+c}{2}$ hosszú (a BC hosszának fele). Tehát a téglalap négyzet és oldalhossza egyenlő a BC felével. Ugyanakkor $DG^2 + AH^2 = \frac{BC^2}{4} + m_a^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2}$ az oldalfelező tétel alapján.



5. Az ABC háromszög minden oldalán vegyünk fel n pontot. Az AB és AC oldalon felvett pontokat kössük össze a BC oldalon felvett pontokkal. Ha az így kapott szakaszok közt nincs három összefutó szakasz, akkor határozd meg a keletkező metszéspontok számát.

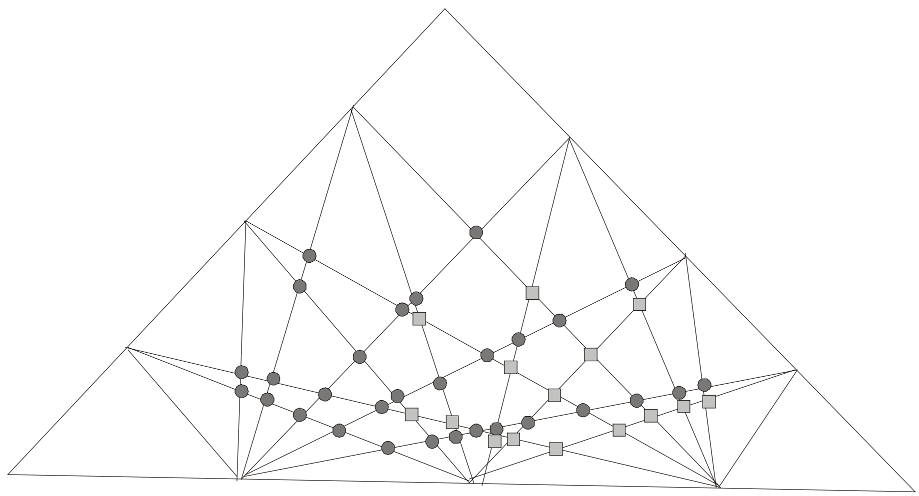
Megoldás. Az AB oldalon lévő pontokat (A-tól kezdve) C_1, C_2, … , C_n-el jelöljük, hasonlóan a BC oldalon lévő pontokat (B-től kezdve) B_1, B_2, … , -el és a CA oldalon lévőket (C-től kedve) A_1, A_2, … , A_n-el. Ha a B_1-et összekötjük a A_i és C_i $\left(i=\overline{1,\ n}\right)$ pontokkal akkor nem keletkezik metszéspont. Ezután meghúzzuk a B_2-ből kiinduló szakaszokat, a B_2C_i szakasz metszi a B_1C_j $\left(j=\overline{1,\ i-1}\right)$ szakaszokat (a $B_1B_2C_jC_i$ négyszög átlói a B_2C_i és B_1C_j), tehát ebben az esetben $i-1$ metszéspont keletkezik és a B_2C_i szakasz metszi az összes B_1A_j $\left(j=\overline{1,\ n}\right)$ szakaszt és $n+i-1$ metszéspont keletkezik. A B_2A_i $\left(i=\overline{1,\ n}\right)$ szakasz metszi a B_1A_j $j=\overline{1, i-1}$ szakaszokat $i-1$ pontban. Tehát ha meghúzzuk a B_2-ből kiinduló szakaszokat, akkor $1+2+\ ...\ +(n-1)+n+\ ...\ +(n+n-1)=n\cdot(2n-1)$ metszéspont keletkezik.

A B_k $(2\le k\le n)$ pontból kiinduló szakaszok a B_l $(l<k)$ pontból kiinduló szakaszokon ugyanannyi metszéspontot határoz meg mint a B_2-ből kiindulók a B_1 pontból kiinduló szakaszokon amit az előbb megszámoltunk, tehát $n\cdot(2n-1)$ új metszéspont keletkezik. Mivel a B_l $(l<k)$ pontokból $k-1$ darab van ezért $(k-1)\,n\,(2n-1)$ metszéspont keletkezik a B_k pontból kiinduló szakaszok behúzásával. Ha sorba behúzzuk az összes B_k $\left(k=\overline{1,\ n}\right)$ pontból kiinduló szakaszokat $\sum_{k=1}^{n}(k-1)\,n\,(2n-1)=\frac{n^2\,(n-1)(2n-1)}{2}$ metszéspont keletkezik.



Megjegyzés. A metszéspontok számát a következő módon is meghatározhatjuk:

$k\in\{1,2,\ldots,n-1\}$ esetén a BC oldalon (balról jobbra) a k-adik felvett pontból kiinduló egyeneseken megszámoljuk azokat a pontokat, amelyeket még nem számoltunk meg ($n=3$ esetén lásd a mellékelt ábrát). A k-adik csúcsból kiinduló egyeneseken rendre $(n-k)\cdot 1, (n-1)\cdot 2, (n-k)\cdot 3, (n-k)\cdot 4, \ldots, (n-k)\cdot(2n-1)$ metszéspont keletkezik.



Így a pontok száma

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\frac{2n\,(2n-1)}{2}=\frac{n(2n-1)}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)=\frac{n^2\,(n-1)(2n-1)}{2}.$$

X. osztály

1. a) Bizonyítsd be, hogy ha az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ függvény konvex, akkor a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$, $g(x)=f^n(x)\ \forall\, x\in\mathbb{R}$ függvény is konvex ($n\in\mathbb{N}^*$).

b) Oldd meg a valós számok halmazában a $\left(2x+\frac{4}{x}\right)^n+\left(4x+\frac{2}{x}\right)^n=3^n\left(2^n+3^n\right)$ egyenletet, ha $n\in\mathbb{N}^*$ rögzített szám.

Megoldás. a) Értelmezés alapján *f* pontosan akkor konvex, ha

$$f\left(tx_1+(1-t)x_2\right)\le tf(x_1)+(1-t)f(x_2),\ \forall\, x_1,x_2\in\mathbb{R},\forall\, t\in[0,1].$$ Így

$$\left(f^2\right)\left(tx_1+(1-t)x_2\right)\le$$

$$t^2\left(f^2\right)(x_1)+t\,(1-t)\left(f(x_1)f(x_2)+f(x_2)f(x_1)\right)+(1-t)^2\left(f^2\right)(x_2).$$

Kimutatjuk, hogy az egyenlőtlenség jobb oldala kisebb vagy egyenlő, mint a $t\cdot\left(f^2\right)(x_1)+(1-t)\left(f^2\right)(x_2)$ kifejezés. Ez ekvivalens a következő egyenlőtlenséggel:

$$t^2\left(f^2\right)(x_1)+t\,(1-t)\left(f(x_1)f(x_2)+f(x_2)f(x_1)\right)+(1-t)^2\left(f^2\right)(x_2)-$$
$$-\left(t\left(f^2\right)(x_1)+(1-t)\left(f^2\right)(x_2)\right)\le 0.$$

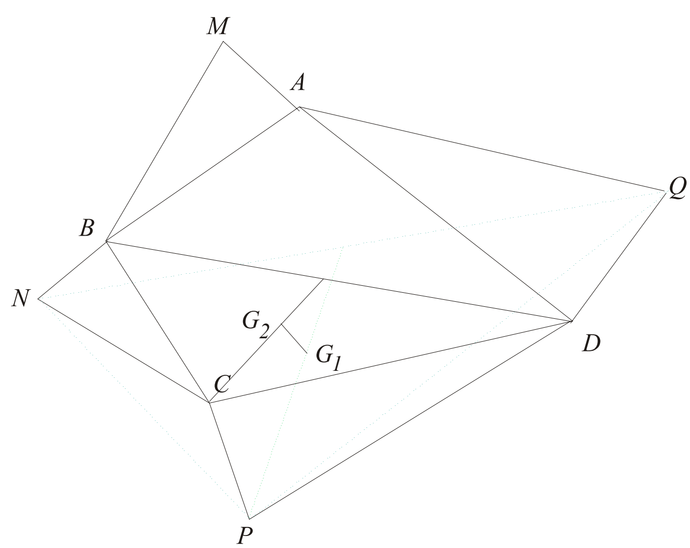
Átrendezés után a $t(1-t)\left[f(x_1)-f(x_2)\right]^2\ge 0$ egyenlőtlenséghez jutunk, amely igaz, $\forall x_1,\ x_2\in R$, $\forall t\in\left[0,\ 1\right]$. A továbbiakban matematikai indukciót használunk. Ha f^n és *f* konvexitását ismerjük, akkor f^{n+1} konvexitásának elégséges feltétele (akárcsak az előbb) a $t(1-t)\Big(f(x_1)-f(x_2)\Big)\cdot\Big(f^n(x_1)-f^n(x_2)\Big)\geq 0$ egyenlőtlenség teljesülése. Ez viszont igaz, mert *f* nem vesz fel negatív értékeket, tehát f^n konvex.

b) Ha *n* páratlan, akkor az egyenletnek csak pozitív megoldásai lehetnek, míg ha *n* páros, akkor a bal oldalon álló kifejezés egy páros függvényt származtat, tehát mindkét esetben elégséges az egyenlet pozitív megoldásait meghatározni. Másrészt az $f(x)=a\cdot x$ és $f(x)=\dfrac{a}{x}$ függvények az $\mathbb{R}_+$-on konvexek ($a>0$) és így a zárójelekben levő kifejezések $\mathbb{R}_+$-on pozitív értékű konvex függvények, tehát az egyenlet bal oldalán álló kifejezés konvex függvény $\mathbb{R}_+$-on. Így az egyenletnek legfeljebb 2 megoldása lehet (ráadásul, ha x_0 megoldás, akkor $\dfrac{1}{x_0}$ is megoldás). Észrevehető, hogy az $\dfrac{1}{2}$ és 2 megoldások, tehát a megoldáshalmaz

$$M=\begin{cases}\left\{2,\dfrac{1}{2}\right\}, \text{ ha } n=2k+1\\ \left\{\pm 2,\pm\dfrac{1}{2}\right\}, \text{ ha } n=2k\end{cases}.$$

2. Az $ABCD$ négyszög oldalaira kifelé szerkesszük meg az *MAB*, *NBC*, *PCD* és *QDA*, azonos körüljárási iránnyal rendelkező, hasonló háromszögeket. Jelöljük G_1-gyel és G_2-vel az *NPQ* és *BCD* háromszögek súlypontját. Bizonyítsd be, hogy $G_1G_2 \parallel AM$.

Megoldás



A komplex számok geometriai alkalmazásait használjuk. Jelöljük minden pont affixumát a megfelelő kisbetűvel. Az *ABC* és *XYZ* azonos körüljárási iránnyal rendelkező háromszögek pontosan akkor hasonlók, ha

$a(y-z)+b(z-x)+c(x-y)=0$. Egy tetszőleges, a szerkesztett háromszögekkel hasonló *XYZ* háromszöghöz viszonyítunk, tehát:

$$m(y-z)+a(z-x)+b(x-y)=0,$$
$$n(y-z)+b(z-x)+c(x-y)=0,$$
$$p(y-z)+c(z-x)+d(x-y)=0,$$
$$q(y-z)+d(z-x)+a(x-y)=0.$$

Innen:

$$g_1=\frac{q+n+p}{3}=\frac{(b+c+d)(x-z)+(c+d+a)(y-x)}{3(y-z)},$$

tehát

$$g_1-g_2=\frac{q+n+p-b-c-d}{3}=\frac{(b+c+d)(x-y)+(c+d+a)(y-x)}{3(y-z)}=\frac{(b-a)(x-y)}{3(y-z)}$$

.

Másrészt

$$m-a=\frac{a(x-z)+b(y-x)}{y-z}-a=\frac{(a-b)(x-y)}{y-z}.$$

Tehát $m-a=-3(g_1-g_2)$ és így $G_1G_2 \parallel AM$.

3. Határozd meg az összes nem konstans f polinom függvényt, amelyre

$$f\left(f(x)+y\right)=f\left(x^2-y\right)+4f(x)y,\quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}.$$

Megoldás. Feltételezzük, hogy f fokszáma n. $y=0$-ra az egyenletből következik, hogy $n^2=2n$, tehát $n=2$ és $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$. Az adott egyenlőségben $x=0$ esetén az $f(c+y)=f(-y)+4cy$ egyenlőséghez jutunk, tehát $ac+b=0$. Így $f(c)=c$ és $x=c$ esetén az eredeti egyenlőségből következik, hogy

$$f\left(c+y\right)=f(c^2-y)+4cy \text{, tehát}$$
$$f\left(-y\right)=f(c^2-y),\ \forall\, y\in\mathbb{R}.$$

Ez csak akkor lehetséges, ha $c=0$ és ebben az esetben $b=0$ (mert $a\neq 0$ és $ab+c=0$). Az $f(x)=x^2$ teljesíti az adott függvényegyenletet, tehát ez az egyetlen megoldás.

4. Egy háromszög csúcsait az $1,2,3$ számokkal számozzuk (minden csúcshoz egy számot írunk úgy, hogy minden szám előforduljon), és minden oldalát $2n+1$ egyenlő részre osztjuk. Minden osztópontot megszámozunk az őt tartalmazó oldal két végpontjában levő szám valamelyikével (tetszőlegesen), majd a különböző oldalakon elhelyezkedő, különbözően számozott osztópontokat összekötjük egy-egy szakasszal. Legkevesebb hány összekötő szakaszt kell így behúzni?

Megoldás. Jelöljük x,y és z-vel rendre az AB, AC és BC oldalon levő 1-es, 2-es illetve
3-assal számozott pontok számát. A meghúzandó szakaszok száma:

$$x(2n)+xz+(2n-x)(2n-y)+(2n-x)(2n)+y(2n)+(2n-y)(2n-z)=$$
$$=3(2n)^2+xy+yz+zx-(2n)(x+y+z)$$
Az x,y,z változók a $\{0,1,2,...,2n\}$ halmazban változhatnak. Az $x-n=a$, $y-n=b$ és $z-n=c$ változócserével a vizsgálandó kifejezés $9n^2+ab+bc+ca$ alakban írható, ahol az a,b és c változó a $\{\pm n, \pm(n-1),..., \pm 1, 0\}$ halmazból vehet fel értékeket. Az $ab+bc+ca$ kifejezés szimmetrikus és ha mindhárom szám előjelét megváltoztatjuk, nem változik meg az értéke. Így feltételezhetjük, hogy $a \le 0 \le b \le c$. Ezekkel a feltételezésekkel a következő egyenlőtlenségekhez jutunk:
$$ab+bc+ca=a(b+c)+bc \ge -n(b+c)+bc=b(c-n)-nc \ge n(c-n)-nc=-n^2$$

Mivel az előbbi egyenlőtlenségben $a=-n$ és $b=n$ esetén egyenlőség van, a metszéspontok minimális száma $8n^2$.

5. Bizonyítsd be, hogy ha $k^3<n$, akkor egy szabályos $3n$ oldalú sokszög csúcsait k színnel színezve találunk két azonosan színezett egyenlő oldalú háromszöget (melynek csúcsai a sokszögnek is csúcsai).

Megoldás. Kiválasztva a sokszög csúcsaira illeszkedő egyik egyenlő oldalú háromszöget (ilyen biztosan van $3n$ oldalú sokszög esetén), és annak csúcsait trigonometrikus irányban egyenként tologatva, n különböző egyenlő oldalú háromszöget kapunk, és ezeknek nincs közös csúcsuk. Igazoljuk, hogy ezek között biztosan lesz 2 azonos színezésű. Valóban, egy háromszög csúcsait k színnel színezve, összesen k^3 lehetséges színezést kapunk. Mivel n háromszögünk van és $k^3<n$, a skatulyaelv szerint van két azonos színezés.

XI. osztály

1. Bizonyítsd be, hogy végtelen sok olyan x_1 egész szám létezik, amelyből kiindulva az $x_{n+1}=2x_n \pm \sqrt{3x_n^2+1}$ rekurziót teljesítő összes (az előjeleket minden lépésben tetszőlegesen megválaszthatjuk) sorozat tagjai egész számok!

Megoldás. Keressünk olyan x természetes számot, amelyre a $3x^2+1$ teljes négyzet. Világos, hogy csak ilyenből indulhatunk ki. Az $x=0$ vagy $x=1$ megfelel. Vizsgáljuk meg előbb azt a sorozatot, amelyet úgy kapunk, hogy mindig a pozitív előjelt választjuk a rekurzióban és $x_1=1$. Így a sorozat minden tagja pozitív és a sorozat szigorúan növekvő. Az $(x_{n+1}-2x_n)^2=3x_n^2+1$ összefüggés $x_{n+1}^2+x_n^2-4x_nx_{n+1}=1$ alakban is írható, tehát $x_n=2x_{n+1} \pm \sqrt{3x_{n+1}^2+1}$. Ha az $(x_n)_{n\ge 0}$ sorozat növekvő, akkor ebben az egyenlőségben mindig a negatív előjelet kell választanunk, tehát ha ezt n helyett $n-1$-re írjuk fel és hozzáadjuk az adott rekurzióhoz (ahol a pozitív előjelt választjuk), akkor az $x_{n+1}+x_{n-1}=4x_n$ összefüggéshez jutunk. Mivel $x_1=1$ és $x_2=4$, a levezetett rekurzió alapján a sorozat minden tagja természetes szám. Ha minden esetben a negatív előjelet választjuk, akkor a 0 után ugyanennek a sorozatnak a tagjait kapjuk negatív előjellel. Ha az így kapott egész számok valamelyikéből indulunk ki, akkor pozitív előjel megválasztása esetén a következő számot kapjuk és negatív előjel megválasztása esetén az előtte állót. Így az összes sorozat minden tagja egész szám az előjelek tetszőleges megválasztása esetén.

2. Az $f_j(x) = a_j x^3 + b_j x^2 + c_j x + d_j$ $j = \overline{1,4}$ függvények együtthatói valós számok és létezik olyan $x_0 \in \mathbb{R}$, amelyre

$$f_1(x_0) = f_2(x_0) = f_3(x_0) = f_4(x_0) \neq 0.$$

Bizonyítsd be, hogy ha $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 1 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 1 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 1 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$ és $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 & d_1 \\ 1 & a_2 & b_2 & d_2 \\ 1 & a_3 & b_3 & d_3 \\ 1 & a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}$, akkor $\Delta_1 \Delta_3 \geq 0$.

Megoldás. Bevezetve az $\alpha = f_1(x_0)$ jelölést, a feltétel szerint az

$$\begin{cases} a_1 u_1 + b_1 u_2 + c_1 u_3 + d_1 u_4 = \alpha \\ a_2 u_1 + b_2 u_2 + c_2 u_3 + d_2 u_4 = \alpha \\ a_3 u_1 + b_3 u_2 + c_3 u_3 + d_3 u_4 = \alpha \\ a_4 u_1 + b_4 u_2 + c_4 u_3 + d_4 u_4 = \alpha \end{cases}$$

egyenletrendszernek $u_1 = x_0^3$, $u_2 = x_0^2$, $u_3 = x_0$ és $u_4 = 1$ megoldása. Két esetet tárgyalunk:

1. Ha a rendszer Cramer-rendszer, vagyis $\Delta \neq 0$, akkor írhatjuk, hogy $x_0^3 = u_1 = \dfrac{\alpha \Delta_1}{\Delta}$ és $x_0 = u_3 = \dfrac{\alpha \Delta_3}{\Delta}$, tehát $x_0^4 = \alpha^2 \dfrac{\Delta_1 \Delta_3}{\Delta^2}$. Tehát $\Delta_1 \Delta_3 = \dfrac{x_0^4 \Delta^2}{\alpha^2} \geq 0$.

2. Ha $\Delta = 0$, akkor a rendszer összeférhető kell legyen (mert van megoldása), ezért a rendszer $\overline{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & \alpha \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & \alpha \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & \alpha \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & \alpha \end{pmatrix}$ bővített mátrixának minden negyedrendű minoránsa 0 kell legyen (a rendszer rangja, ami legfeljebb 3, meg kell egyezzen a bővített mátrix rangjával), tehát $\alpha \Delta_1 = \alpha \Delta_3 = 0$. Ebből következik, hogy $\Delta_1 = \Delta_3 = 0$, tehát az egyenlőtlenség teljesül.

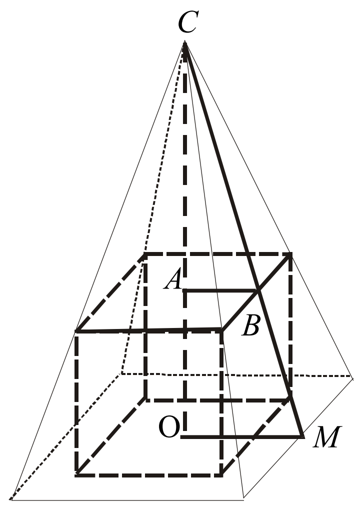
3. Az a oldalélű kocka köré írjál minimális térfogatú szabályos négyoldalú gúlát úgy, hogy az alapja a kocka egyik lapjának síkjában legyen és a kocka többi négy csúcsa a gúla oldalélein helyezkedjen el.

Megoldás. Mivel a gúla szabályos kell legyen, csak a $AC = h$ magasságot kell meghatároznunk (lásd az ábrát). Az ábra szerint $AB = \frac{a}{2}$, $AO = a$ és $\frac{OM}{\frac{a}{2}} = \frac{h+a}{h}$, tehát $OM = \frac{a(a+h)}{2h}$, és a gúla alapja $2OM$. Következik, hogy a gúla térfogata $V(h) = \frac{(2OM)^2(a+h)}{3} = \frac{a^2(a+h)^3}{3h^2}$. A térfogat minimális lesz, ha $V' = 0$. Az egyenlet:

$$V' = \frac{a^2}{3}\left(\frac{3(a+h)^2 h^2 - 2h(a+h)^3}{h^4}\right) = 0,$$

$$3h^2 - 2h(a+h) = 0,\ h^2 - 2ah = 0,$$

és mivel $h > 0$, kapjuk, hogy $h = 2a$.



4. a) Számítsd ki az $U : [a,b] \to \mathbb{R}$, $U(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & f_4(x) \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$ függvény deriváltját, ha $f_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ deriválható függvények és $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$ $i = \overline{1,4}$.

b) Az $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak és kétszer deriválhatók az (a,b) intervallumon. Bizonyítsd be, hogy $\forall\, x_1, x_2, x_3 \in [a,b]$ esetén létezik olyan $c \in (a,b)$, amelyre teljesül a következő egyenlőség:

$$f''(c)\begin{vmatrix} 1 & x_1 & g(x_1) \\ 1 & x_2 & g(x_2) \\ 1 & x_3 & g(x_3) \end{vmatrix} - g''(c)\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \\ 1 & x_3 & f(x_3) \end{vmatrix} = 0 . \qquad (1)$$

Megoldás. a) Ha a determinánst kifejtjük az első sora szerint és deriváljuk, akkor annak a determinánsnak a kifejtését kapjuk, amelyet úgy kapunk az U determinánsából, hogy az első sor elemeit deriváljuk.

b) Az (1) összefüggés írható az

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & f''(c) & g''(c) \\ 1 & x_1 & f(x_1) & g(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) & g(x_2) \\ 1 & x_3 & f(x_3) & g(x_3) \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

alakban is. Megszerkesztünk egy olyan $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ függvényt, amelynek második deriváltja a c pontban pontosan a (2) kifejezés bal oldala, és az $[a,b]$ intervallumon három helyen vesz fell nulla értéket. Ha sikerült megszerkeszteni egy ilyen függvényt, akkor a Rolle tétel következménye szerint lesz olyan c pont az $[a,b]$ intervallumban, amelyre $h''(c)=0$, és ez pontosan a (2) összefüggés.

A $h(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & f(x) & g(x) \\ 1 & x_1 & f(x_1) & g(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) & g(x_2) \\ 1 & x_3 & f(x_3) & g(x_3) \end{vmatrix}$, $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ függvény megfelelő, mert a determinánsnak csak az első sora tartalmaz változókat, ezért kétszer deriválva, kapjuk, hogy

$$h'(x)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & f'(x) & g'(x) \\ 1 & x_1 & f(x_1) & g(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) & g(x_2) \\ 1 & x_3 & f(x_3) & g(x_3) \end{vmatrix},\ h''(x)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & f''(x) & g''(x) \\ 1 & x_1 & f(x_1) & g(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) & g(x_2) \\ 1 & x_3 & f(x_3) & g(x_3) \end{vmatrix},$$

valamint $h(x_1)=h(x_2)=h(x_3)=0$. Tehát h eleget tesz a feltételeknek, ezért létezik $c\in(a,b)$ úgy, hogy $h''(c)=0$.

5. Egy $(2n-1)\times(2n-1)$-es tábla középső mezején egy baktérium áll. Minden másodpercben a létező baktériumok mindegyike vagy átköltözik egy szomszédos mezőre, vagy helyben marad, és kettéosztódik. Bizonyítsd be, hogy $n\geq 3$ esetén $2n+2$ másodperc alatt elérhető az, hogy a tábla minden mezején legyen legalább egy baktérium. (Két mezőt akkor nevezünk szomszédosnak, ha van egy közös oldaluk.)

Megoldás. A matematikai indukció módszerét alkalmazzuk. Hat másodperc alatt a 3×3-as táblára a következő kitöltést használjuk:

	2	

	4	

	8	

	16	

	2	
2	16	2
	2	

1	4	1
4	16	4
1	4	1

A továbbiakban igazoljuk, hogy $2n+2$ lépésbe elérhető, hogy a tábla közepében 16 álljon, a középső mezőt tartalmazó sor és oszlop többi mezején 4-es és a tábla többi mezején 1-es. Előbb megmutatjuk, hogyan érhetjük ezt el az 5×5-ös táblán. A 3×3-as tábla kitöltéséből 2 lépés alatt kell elérnünk a kívánt állapotot. Ezt a következő módon érhetjük el.

	1	4	1	
	1	4	1	
	4	16	4	
	1	4	1	
	1	4	1	

1	1	4	1	1
1	1	4	1	1
4	4	16	4	4
1	1	4	1	1
1	1	4	1	1

Látható, hogy ezt általában is hasonló módon tehetjük meg.

Az első lépésben a $(2n-1)\times(2n-1)$-es tábla középsőtől különböző soraiból minden baktériumot eggyel fennebb illetve eggyel lennebb költöztettünk, aszerint, hogy az illető sor a középsőhöz viszonyítva fent vagy lent van. A középső mezőről 4-gyet felfele és 4-gyet lefele és a középső sor többi mezejéről egyet fel és egyet lefele költöztetünk. Így a két szélső oszlop kivételével elértük a kívánt állapotot. Ha az előbbi lépést megismételjük oszlopokra, akkor elérjük az indukciós feltételben szereplő állapotot a $(2n+1)\times(2n+1)$-es mezőn is.