# V. RADÓ FERENC EMLÉKVERSENY

**Kolozsvár, 2001. május 19.**

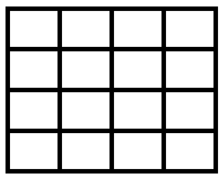
# V. osztály

**1.** Határozd meg $\frac{\overline{a5b}}{\overline{7cd}}$ alakú ($a \neq 0$), 18-cal egyszerűsíthető legkisebb és legnagyobb törtet!

**2.** Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 és 16 számokat oszd két csoportba úgy, hogy ha az egyik csoportban kiszámítjuk az összes lehetséges különböző számokból álló számpárban a számok összegét, akkor ugyanazokat a számokat kapjuk, mintha a másik csoportban végeztük volna ugyanezt! (Az ismétlődő összegeknek mindkét esetben ugyanannyiszor kell szerepelniük.)

**3.** A bagdadi kalifa megjutalmazott három bölcset tíz pénztárcával, amelyekben rendre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 és 9 dínár volt. Az első bölcs, Husszein, két pénztárcát választott ki. Abdurrakhmán és bátyja Omár úgy osztották el a többit, hogy Omár több pénzt kapjon, mint Abdurrakhmán. Az osztozkodás után Abdurrakhmántól elloptak négy pénztárcát, és így csak 10 dínárja maradt. Hány dínár van Husszein pénztárcáiban?

**4.** Egy 4x4-es házicsoki-táblát fel szeretnénk egyenes vágások segítségével darabolni 1x1-es darabokra. Legalább hány vágásra van szükség, ha a vágások után a darabokat újrarendezhetjük (egymás mellé, vagy egymásra tehetjük)?



# V. RADÓ FERENC EMLÉKVERSENY

**Kolozsvár, 2001. május 19.**

# VI. osztály

**1.** Határozd meg az $a$, $b$ és $c$ racionális számokat, ha egyenesen arányosak a 3, 4 és 5 számokkal és $a^2c^2 = \frac{2}{15}b$.

**2.** Egy dobókocka oldalai az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 számokkal vannak megjelölve. A dobókockát kétszer feldobjuk, és a két eredményt összeadjuk. Ha ezt nagyon sokszor elvégezzük, melyik összeg fog a leggyakrabban megjelenni?

**3.** Az $\{1,2,3,...,100\}$ halmaznak kiválasztottuk egy részhalmazát úgy, hogy a kiválasztott részhalmazban egyik elem se legyen valamely más elem 5-szöröse. Legfeljebb hány eleme lehet a kiválasztott részhalmaznak?

**4.** Bizonyítsuk be, hogy egy konvex hatszög belsejében el lehet helyezni 4 pontot úgy, hogy a hatszög bármely három csúcsa által meghatározott háromszög belsejébe pontosan egy pont kerüljön! El lehet-e helyezni 5 pontot ugyanígy?

# V. RADÓ FERENC EMLÉKVERSENY

**Kolozsvár, 2001. május 19.**

# VII. osztály

**1.** Bizonyítsd be, hogy a $\left\{\sqrt{24n+1}\,\middle|\, n \in N^*\right\}$ halmaz tartalmazza az összes háromnál nagyobb prímszámot!

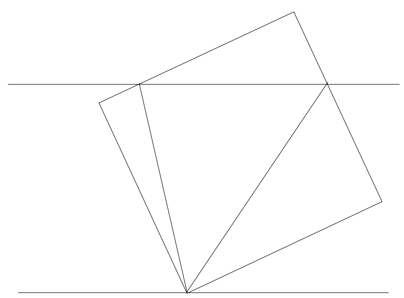
**2.** Egy dobókocka oldalai az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 számokkal vannak megjelölve. A dobókockát háromszor feldobjuk, és a három eredményt összeadjuk. Ha ezt nagyon sokszor elvégezzük, melyik összeg fog a leggyakrabban megjelenni?

**3.** Bizonyítsd be, hogy ha $a$ és $b$ pozitív valós számok, akkor

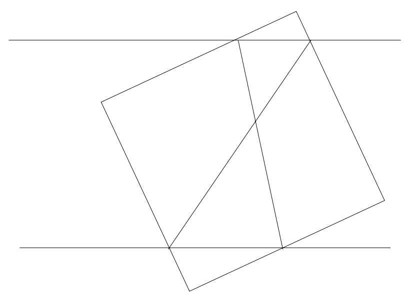
$$a+b+\frac{1}{ab} \geq \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right).$$

**4.** a) Az $a$ oldalhosszúságú négyzet oldalai az $a$ szélességű sáv határegyeneseit három pontban metszik úgy, hogy a négyzet egyik csúcsa a sáv egyik határegyenesén legyen (lásd a mellékelt 1. ábrát). Mekkora szöget zár be a metszéspontokat összekötő két szakasz?

b) Mekkora a metszéspontokat összekötő szakaszok által bezárt szög, ha a négyzet oldalai a sáv határegyeneseit négy pontban metszik? (lásd a 2. ábrát)



1. ábra



2. ábra

**5.** Valamely bizottság 40-szer ülésezett. Mindegyik alkalommal 10-en voltak jelen az ülésen, közülük semelyik két bizottsági tag nem volt együtt egynél többször gyűlésen. Igazoljuk, hogy a bizottságban legalább 61 tag van!

# V. RADÓ FERENC EMLÉKVERSENY

**Kolozsvár, 2001. május 19.**

# VIII. osztály

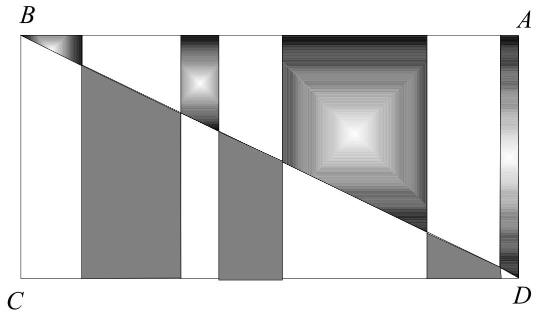
**1.** a) Bizonyítsd be, hogy ha $m,n \in N^*$ és $10^n - 1$ osztható $m$-mel, akkor $10^{3n} - 1$ osztható $3m$-mel!

b) Bizonyítsd be, hogy végtelen sok olyan természetes szám létezik, amelynek egyetlen számjegye sem nulla, és a szám osztható számjegyeinek összegével!

**2.** Bizonyítsd be, hogy ha az $a$ és $b$ pozitív valós számok összege 4, akkor

$$a^2 + b^2 + \frac{32}{ab} \geq \frac{32}{\sqrt{ab}}.$$

**3.** Az $ABCD$ téglalap $AB$ oldalát felosztjuk $n$ (nem feltétlenül egyenlő) részre, és a szakaszokat megszámozzuk 1-től $n$-ig. Az osztópontokon át a párhuzamosokat húzunk a $BC$ oldallal és meghúzzuk a $BD$ átlót. Bizonyítsuk be, hogy ha a páros sorszámú szakaszok hosszának összege egyenlő a páratlan sorszámú szakaszok hosszának összegével, akkor az átló feletti páratlan sorszámú darabok területének összege egyenlő az átló alatti páros sorszámú darabok területének összegével.




**4.** Az $ABCDA'B'C'D'$ kockának az $AB$, $B'C'$ és $D'D$ élén egy-egy pont mozog ugyanazzal a sebességgel ($A$-tól $B$, $B'$-től $C'$ illetve $D'$-től $D$-felé).

**a)** Szerkeszd meg a pontok által meghatározott síkmetszetet!

**b)** Bizonyítsd be, hogy a síkmetszet szembefekvő oldalainak felezőpontjait összekötő szakaszok összefutóak!

**5.** Egy 3×3×3-as kockát 27 darab azonos méretű kiskockából ragasztottunk össze. Minden egységkockát kiszínezünk pirosra, fehérre, vagy kékre úgy, hogy tetszőleges három egymásmelletti kocka közt ne legyen két azonos színű (egymásmellettinek mondunk három kockát, ha a középpontjaik egy olyan egyenesen vannak, amely párhuzamos a kocka valamelyik oldalélével).

a) Adjál meg egy ilyen színezést!

b) Hány különböző színezés létezik?

c) Az összes lehetséges színezéseket osszuk csoportokba úgy, hogy két színezés pontosan akkor kerüljön egy csoportba, ha a kocka mozgatásával (forgatásával) a két színezés egymásba vihető. Hány csoportunk lesz?

# V. RADÓ FERENC EMLÉKVERSENY

**Kolozsvár, 2001. május 19.**

# IX. osztály

**1.** Bizonyítsd be, hogy az

$$\begin{aligned} a_1x^2 + 2a_2x + a_3 &= 0\\ a_2x^2 + 2a_3x + a_4 &= 0\\ a_3x^2 + 2a_4x + a_5 &= 0\\ &\dots\dots\dots\\ a_{n-1}x^2 + 2a_nx + a_1 &= 0\\ a_nx^2 + 2a_1x + a_2 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletek közül legalább az egyiknek van valós gyöke, ha $a_k \in R$, bármely $k = \overline{1,n}$ esetén! Adjál példát olyan $a_1, a_2, ..., a_n$ számokra, amelyekre az előbbi egyenletek közül pontosan egynek van valós gyöke!

**2.** Bizonyítsd be, hogy $n$ darab, $n$-nel nem osztható természetes szám közül kiválasztható néhány, amelyek összege osztható $n$-nel!

**3.** Az $ABC$ háromszög köré írt körön felvesszük az $A' \in (\overset{\frown}{BC})$, $B' \in (\overset{\frown}{AC})$ és $C' \in (\overset{\frown}{BA})$ pontokat úgy, hogy az $ABC$ és $A'B'C'$ háromszögek kongruensek legyenek. Bizonyítsd be, hogy az $A'$, $B'$ és $C'$ pontokon át $BC$-vel, $CA$-val illetve $AB$-vel húzott párhuzamosoknak ugyanezen pontokon át egy tetszőleges $d$ egyenessel húzott párhuzamosokra vonatkozó szimmetrikusai összefutó egyenesek és az összefutási pont a háromszög köré írt körön van.

**4.** A $C(O_1, R)$ és $C(O_2, R)$ körök közös belső érintői merőlegesek és az $O \in (O_1O_2)$ pontban metszik egymást. Határozd meg az $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ kötött vektor végpontjának a mértani helyét, ha $M_1 \in C(O_1, R)$ és $M_2 \in C(O_2, R)$ változó pontok.

**5.** Legalább hány lépés szükséges ahhoz, hogy egy $10 \times 10$-es tábla bal alsó sarkából a jobb felső sarkába jussunk lólépésben?

# V. RADÓ FERENC EMLÉKVERSENY
**Kolozsvár, 2001. május 19.**

# X. osztály

**1.** a) Bizonyítsd be, hogy $\sin x \cdot \operatorname{tg} x \geq x^2$, ha $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$!

b) Oldd meg a $2^{\sin x} + 2^{\operatorname{tg} x} = 2^{x+1}$ egyenletet, ha $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$!

**2.** a) Számítsd ki a $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot C_{2n}^{n-k}$ összeget!

b) Bizonyítsd be, hogy $2\left(C_{3n}^n\right)^2 \leq C_{2n}^n \cdot \left(C_{4n}^{2n} + \left(C_{2n}^n\right)^2\right)$, ha $n \geq 1$.

**3.** Bizonyítsd be, hogy az $f:[0,1] \to [0,1]$ csökkenő függvény grafikus képe lefedhető $n$ darab téglalappal, amelyek területének összege nem nagyobb mint $\frac{1}{n}$.

**4.** Egy körön felveszünk hat pontot. Válasszunk ki hármat és vegyük fel a kiválasztottak által meghatározott háromszög $H_i$ ortocentrumát, és a megmaradt csúcsok által meghatározott háromszög $E_i$ Euler pontját (a súlypont és az ortocentrum által meghatározott szakasz felezőpontja). Bizonyítsd be, hogy az összes lehetséges választásnak megfelelő $H_iE_i$ egyenesnek van egy közös pontja.

**5.** $m \cdot n \cdot p$ darab egységkockából összerakunk egy $m \times n \times p$ méretű téglatestet. A téglatest egyik sarokkockájának középpontjából egy rágcsáló a testátlósan ellentétes sarokkockáig utat váj magának úgy, hogy minden egységkockából csak vele közös oldallappal rendelkező egységkockába mehet (középponttól középpontig) és a legrövidebb utak valamelyikén kell haladnia.

**a)** Hány lehetséges útvonal létezik?

**b)** Ha a lehetséges útvonalak száma $U(m,n,p)$, akkor számítsd ki az összes $U(m,n,p)$ szám összegét, amikor $m+n+p$ állandó!

# V. RADÓ FERENC EMLÉKVERSENY

**Kolozsvár, 2001. május 19.**

# XI. osztály

**1.** Az $(x_n)_{n\in \mathrm{N}^*}$ sorozat tagjai teljesítik a $4x_n x_{n+1} - 2(n-1)x_{n-1} = 3n-2$ összefüggést minden $n \geq 2$-re és $x_1 = 0$ valamint $x_2 = \frac{3}{4}$.

**a)** Határozd meg a sorozat általános tagjának képletét!

**b)** Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{x_2 x_3 ... x_n}}{n}$ határértéket!

**2.** Tekintsük a $d_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & n \end{vmatrix}$ sorozatot.

a) Vezessünk le egy rekurziót $d_n$-re és bizonyítsuk be, hogy $d_n \in N$, $\forall n \geq 1$

b) Milyen $n$ értékekre lesz $d_n$ osztható 3-mal?

**3.** Az $A_1A_2A_3A_4$ konvex négyszög csúcsainak koordinátái $A_i(x_i, y_i)$, ahol $i \in \{1,2,3,4\}$. Mi a geometriai jelentése a $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ determinánsnak?

**4.** Adott az $f: R \to R$, $f(x) = (x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot ... \cdot(x-a_n)$ függvény, ahol $a_1$, $a_2$, …, $a_n$ páronként különböző valós számok.

a) Bizonyítsuk be, hogy minden $[a_{n-2k}, a_{n-2k+1}]$ alakú intervallumban az $f'(x) + mf(x) = 0$ egyenletnek van legalább egy valós gyöke, tetszőleges $m \geq 1$ esetén!

b) Ha rögzített $k$ esetén az előbbi egyenlet legnagyobb $[a_{n-2k}, a_{n-2k+1}]$ intervallumba eső gyökét $c_m$-mel jelöljük, tanulmányozd a $(c_m)_{m\geq 1}$ sorozat konvergenciáját és számítsd ki a határértékét!

**5.** Határozd meg azokat az $n \in N^* \setminus \{1,2\}$ számokat, amelyekre egy tetszőleges $n$ oldalú konvex sokszöget fel lehet bontani, egymást nem metsző átlók segítségével, háromszögekre úgy, hogy minden csúcsból páros számú átló induljon ki!

# V. RADÓ FERENC EMLÉKVERSENY

**Kolozsvár, 2001. május 19.**

# XII. osztály

**1.** Határozd meg azokat az $f:R\to R$ függvényeket, amelyeknek létezik olyan $F:R\to R$ primitívje, hogy teljesüljön a

$$2F(x)=x\bigl(f(x)-x\bigr)$$

összefüggés bármely $x\in R$ esetén.

**2.** A $(G,\cdot)$ csoportban $(xy)^n=y^n x^n$, $(xy)^{n+1}=y^{n+1}x^{n+1}$ és $(xy)^{2n}=y^{2n}x^{2n}$ bármely $x,y\in G$ esetén. Bizonyítsd be, hogy a $(G,\cdot)$ csoport kommutatív!

**3.** Az $f:[0,1]\to[0,1]$ függvény szigorúan növekvő és folytonos 1-ben. Bizonyítsd be, hogy

**a)** $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f^n(x)dx=0$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_0^1 f^n(x)dx}=f(1)$.

**4.** Egy háromszög minden oldalát osszuk fel $p$ egyenlő részre és az osztópontokat kössük össze a szembefekvő csúccsal. Ha $p$ prímszám, határozd meg a háromszög belsejében keletkező diszjunkt síkrészek maximális számát!

**5.** a) Bizonyítsd be, hogy a $P\in R[X]$ polinomhoz rendelt polinomfüggvény pontosan akkor páros, ha $P$-ben a páratlan kitevőjű tagok együtthatója 0.

b) Képezzük az összes $\sum\limits_{k=1}^{n}\varepsilon_k\sqrt{k^2+1}$ alakú számot, ahol $\varepsilon_k\in\{-1,1\}$ minden $k\in\{1,2,...,n\}$ esetén. Bizonyítsd be, hogy az így kapott $2^n$ szám szorzata természetes szám!

# V. RADÓ FERENC EMLÉKVERSENY

**Kolozsvár, 2001. május 19.**

# MEGOLDÁSOK

## V. osztály

**1.** Határozd meg $\dfrac{\overline{a5b}}{\overline{7cd}}$ alakú ($a \neq 0$), 18-cal egyszerűsíthető legkisebb és legnagyobb törtet!

**Megoldás.** Akkor kapjuk a legnagyobb törtet, ha a számláló a lehető legnagyobb és a nevező a lehető legkisebb. Egy szám akkor osztható 18-cal, ha osztható 2-vel és 9-cel, tehát, ha utolsó számjegye páros és a számjegyeinek összege osztható 9-cel. Az $a$ legnagyobb lehetséges értéke 9 és erre az értékre $b = 4$ esetén az $\overline{a5b}$ szám osztható 18-cal. A nevezőben a $c$ legkisebb lehetséges értéke 0 és a 702 szám osztható 18-cal, tehát a vizsgált törtek közül a legnagyobb $\dfrac{954}{702} = \dfrac{53}{39}$.

A legkisebb törtet akkor kapjuk, ha a számláló a lehető legkisebb és a nevező a lehető legnagyobb és ez akkor teljesül, ha $a = 2$, $b = 2$, $c = 9$ és $d = 2$. (Az $a = 1$ esetben a $b$ csak 1 lehet és így az $\overline{a5b}$ szám nem osztható 18-cal.) Tehát a legkisebb tört $\dfrac{252}{792} = \dfrac{14}{44}$.

**2.** Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 és 16 számokat oszd két csoportba úgy, hogy ha az egyik csoportban kiszámítjuk az összes lehetséges különböző számokból álló számpárban a számok összegét, akkor ugyanazokat a számokat kapjuk, mintha a másik csoportban végeztük volna ugyanezt! (Az ismétlődő összegeknek mindkét esetben ugyanannyiszor kell szerepelniük.)

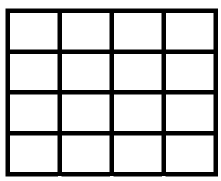
**Megoldás.** A 16 és a 15 nem lehet ugyanabban a csoportban, mert a $16 + 15 = 31$ összeget nem kaphatjuk meg másképpen. Jelöljük 1-gyes csoporttal azt, amelyikben a 16 van és 2-essel azt, amelyikben a 15-ös van. Az 1-gyes csoportban nem lehet a 14-es sem, mert a $16 + 14 = 30$ összeget nem lehet felírni két különböző 2-es csoportbeli szám összegeként. Tehát 14 a kettes csoportban van. Így viszont 13 csak az 1-gyes csoportban lehet, mert a $14 + 15 = 29$ összeget az 1-gyes csoportban csak a $13 + 16 = 29$ összegből kaphatjuk. Hasonlóan okoskodva az 1-gyes csoportba a 11 és a 10, míg a 2-es csoportba a 12 és 9 kerül. Az elejéről indulva az 1 a 4-gyel, a 6-tal és a 7-tel, míg a 2 a 3-mal, az 5-tel és a 8-cal kerül egy csoportba. Az alábbi táblázatban megvastagítottuk az 1-gyes csoport elemeit.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | 2 | 3 | **4** |
| 5 | **6** | **7** | 8 |
| 9 | **10** | **11** | 12 |
| **13** | 14 | 15 | **16** |

**3.** A bagdadi kalifa megjutalmazott három bölcset tíz pénztárcával, amelyekben rendre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 és 9 dínár volt. Az első bölcs, Husszein, két pénztárcát választott ki. Abdurrakhmán és bátyja Omár úgy osztották el a többit, hogy Omár több pénzt kapjon, mint Abdurrakhmán. Az osztozkodás után Abdurrakhmántól elloptak négy pénztárcát, és így csak 10 dínárja maradt. Hány dínár van Husszein pénztárcáiban?

**Megoldás.** 10 dínár nem lehet egy pénztárcában, tehát Abdurrakhmánnak legalább 6 pénztárcája volt. Így Omárnak legtöbb 2 pénztárcája lehetett, ami legtöbb 17 dínárt jelent. Ha Abdurrakhmánnak legalább hét pénztárcája lett volna, akkor Omárnak csak egy jutott volna és így nem lehetett volna több pénze, mint Abdurrakhmánnak. Eszerint Abdurrakhmánnak hat pénztárcája és Omárnak két pénztárcája volt. A feltételek szerint az Abdurrakhmán hat pénztárcáiban nem lehet 16 dínárnál több és van két olyan pénztárcája, amelyekben összesen 10 dínár van. Másrészt mivel $0+1+2+3+4+5=15$, Abdurrakhmán pénztárcáiban legalább 15 dinár van. De 15 dínár csak akkor lehetne, ha az előbbi összegek lennének a pénztárcáiban, és ez nem felel meg, mert nincs kettő, amelyben 10 dínár volna. Így Abdurrakhmán pénztárcáiban 0, 1, 2, 3, 4 és 6 dínár van, Omár pénztárcáiban 8 és 9 dínár, tehát Husszein tárcáiban $12=5+7$ dínár van.

**4.** Egy 4x4-es házicsoki-táblát fel szeretnénk egyenes vágások segítségével darabolni 1x1-es darabokra. Legalább hány vágásra van szükség, ha a vágások után a darabokat újrarendezhetjük (egymás mellé, vagy egymásra tehetjük)?



**Megoldás.** Előbb belátjuk, hogy négy vágás elégséges. Minden vágásnál két egyenlő darabra vágjuk a csokit és a darabokat egymásra helyezzük. Így négy vágás után 16 darab 1x1-es darabot kapunk. Másrészt 4-nél kevesebb vágással nem lehet felvágni, mert a belső 4 darabka valamelyikének a négy oldalánál négy különböző vágásra van szükség. (Más gondolatmenet is lehetséges. Például egy vágással a darabok száma legfeljebb kétszeresére növekedhet, tehát 3 vágás után legfeljebb 8 darabkánk lesz)

# V. RADÓ FERENC EMLÉKVERSENY

**Kolozsvár, 2001. május 19.**

## VI. osztály

**1.** Határozd meg az *a*, *b* és *c* racionális számokat, ha egyenesen arányosak a 3, 4 és 5 számokkal és $a^2c^2 = \frac{2}{15}b$.

**Megoldás.** A feltételek alapján $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$, tehát, ha *k*-val jelöljük az arányok közös értékét, akkor $a = 3k$, $b = 4k$ és $c = 5k$. Így az $a^2c^2 = \frac{2}{15}b$ egyenlőségből következik, hogy $k^3 = \frac{2^3}{3^3 5^3} = \left(\frac{2}{15}\right)^3$, azaz $k = \frac{2}{15}$. Ebből következik, hogy $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{8}{15}$ és $c = \frac{2}{3}$.

**2.** Egy dobókocka oldalai az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 számokkal vannak megjelölve. A dobókockát kétszer feldobjuk, és a két eredményt összeadjuk. Ha ezt nagyon sokszor elvégezzük, melyik összeg fog a leggyakrabban megjelenni?

**Megoldás.** A legkisebb lehetséges összeg 2 és a legnagyobb 12. Egy tetszőleges $2 \le s \le 12$ összeg pontosan annyiféleképpen állhat elő, mint a $14 - s$ összeg, mert ha az $s$ összeget adó *a* és *b* eredmények helyett $7 - a$ és $7 - b$ jelenik meg, akkor az összeg $14 - s$. Eszerint elégséges megvizsgálni, hogy a 2, 3, 4, 5, 6, és 7 összegek hány lehetséges módon állhatnak elő. A lehetséges előállításokat az alábbi táblázatba foglaltuk:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2= | 1+1 | | | | | |
| 3= | 1+2= | 2+1 | | | | |
| 4= | 1+3= | 2+2= | 3+1 | | | |
| 5= | 1+4= | 2+3= | 3+2= | 4+1 | | |
| 6= | 1+5= | 2+4= | 3+3= | 4+2= | 5+1 | |
| 7= | 1+6= | 2+5= | 3+4= | 4+3= | 5+2= | 6+1 |

A táblázat alapján a leggyakrabban a 7-es összeg jelenik meg.

**Megjegyzés.** Ha a dobások sorrendjét nem különböztetjük meg, akkor a 6, a7 és a 8 ugyanolyan gyakran kellene megjelenjen.

**3.** Az $\{1,2,3,...,100\}$ halmaznak kiválasztottuk egy részhalmazát úgy, hogy a kiválasztott részhalmazban egyik elem se legyen valamely más elem 5-szöröse. Legfeljebb hány eleme lehet a kiválasztott részhalmaznak?

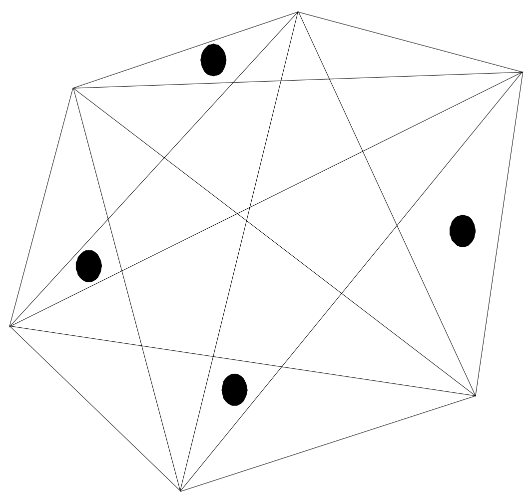
**Megoldás.** Ha egy ilyen $H$ részhalmazban van 5-tel osztható, de 25-tel nem osztható szám, akkor ezt kivehetjük és helyette betehetjük az egy ötödét és esetleg az ötszörösét (ha ez nem haladja meg a 100-at). Így az új halmaz teljesíti a megadott feltételt és vagy ugyanannyi eleme van mint $H$-nak, vagy eggyel több elem van benne. Tehát feltételezhetjük, hogy az

$$\{5, 10, 15, 20, 30, 35, 40, 45, 55, 60, 65, 70, 80, 85, 90, 95\}$$

számok a legtöbb elemet tartalmazó halmazban nincsenek benne. Másrészt, ha éppen ezeket a számokat hagyjuk el az adott halmazból, akkor a megmaradt számok közt biztos nincs kettő olyan, hogy az egyik ötszöröse legyen a másodiknak. Így a kiválasztott halmaznak legtöbb 84 eleme lehet.

**4.** Bizonyítsuk be, hogy egy konvex hatszög belsejében el lehet helyezni 4 pontot úgy, hogy a hatszög bármely három csúcsa által meghatározott háromszög belsejébe pontosan egy pont kerüljön és egyetlen átlóra se kerüljön pont! El lehet-e helyezni 5 pontot ugyanígy?

**Megoldás.** A hatszög egyik átlójából kiinduló 3 átló a hatszöget 4 háromszögre bontja. Ha 5 pontot helyezünk el a hatszög belsejében, akkor az így kapott 4 háromszög valamelyikében kettő lesz, tehát 5 pont már nem helyezhető el.
Négy pont elhelyezését a mellékelt ábra mutatja.



## VII. osztály

**1.** Bizonyítsd be, hogy a $\left\{\sqrt{24n+1} \,\middle|\, n \in N^*\right\}$ halmaz tartalmazza az összes háromnál nagyobb prímszámot!

**Megoldás.** Azt kell bizonyítani, hogy bármely háromnál nagyobb prímszám esetén $p^2 - 1$ osztható 24-gyel. Minden természetes szám $6k + r$ alakú, ahol $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Ha $r \in \{0, 2, 3, 4\}$, akkor $6k + r$ nem prímszám, tehát minden háromnál nagyobb prímszám $6k + 1$ vagy $6k + 5$ alakú. Ha $p = 6k + 1$, akkor $p^2 - 1 = 6k(6k + 2) = 12k(3k + 1)$ és ez osztható 24-gyel, mert a $k(3k + 1)$ szorzat két ellentétes paritású tényezőt tartalmaz.

Ha $p = 6k + 5$, akkor $p^2 - 1 = 6(k+1)(6k+4) = 12(k+1)(3k+2)$ és ez is osztható 24-gyel, mert a $(k+1)(3k+2)$ $k(3k+1)$ szorzat is két ellentétes paritású tényezőt tartalmaz.

**2.** Egy dobókocka oldalai az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 számokkal vannak megjelölve. A dobókockát háromszor feldobjuk, és a három eredményt összeadjuk. Ha ezt nagyon sokszor elvégezzük, melyik összeg fog a leggyakrabban megjelenni?

**Megoldás.** A legkisebb lehetséges összeg 3 és a legnagyobb 18. Egy tetszőleges $3 \le s \le 21$ összeg pontosan annyiféleképpen állhat elő, mint a $21 - s$ összeg, mert ha az $s$ összeget adó $a$, $b$ és $c$ eredmények helyett $7-a$, $7-b$ és $7-c$ jelenik meg, akkor az összeg $21-s$. Eszerint elégséges megvizsgálni, hogy a 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 és 10 összegek hány lehetséges módon állhatnak elő. A lehetséges előállításokat az alábbi táblázatba foglaltuk:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3= | 1+1+1 | | | | | |
| 4= | 1+1+2=<br>2+1+1=<br>1+2+1= | | | | | |
| 5= | 1+2+2=<br>2+1+2=<br>2+2+1= | 1+1+3=<br>1+3+1=<br>3+1+1 | | | | |
| 6= | 1+1+4=<br>1+4+1=<br>4+1+1= | 1+2+3=1+3+2=<br>2+1+3=2+3+1=<br>3+1+2=3+2+1= | 2+2+2 | | | |
| 7= | 1+1+5=<br>1+5+1=<br>5+1+1= | 1+2+4=1+4+2=<br>2+4+1=2+1+4=<br>4+1+2=4+2+1= | 1+3+3=<br>3+1+3=<br>3+3+1= | | | |
| 8= | 1+1+6=<br>1+6+1=<br>6+1+1= | 1+2+5=1+5+2=<br>2+1+5=2+5+1=<br>5+1+2=5+2+1= | 1+3+4=1+4+3=<br>3+1+4=3+4+1=<br>4+1+3=4+3+1= | 2+2+4=<br>2+4+2=<br>4+2+2= | 2+3+3=<br>3+2+3=<br>3+3+2= | |
| 9= | 1+4+4=<br>4+1+4=<br>4+4+1= | 1+2+6=1+6+2=<br>2+1+6=2+6+1=<br>6+1+2=6+2+1= | 1+3+5=1+5+3=<br>3+1+5=3+5+1=<br>5+1+3=5+3+1= | 2+2+5=<br>2+5+2=<br>5+2+2= | 2+3+4=<br>2+4+3=<br>3+4+2=<br>3+2+4=<br>4+2+3=<br>4+3+2= | |
| 10= | 2+4+4=<br>4+2+4=<br>4+4+2= | 1+3+6=1+6+3=<br>3+1+6=3+6+1=<br>6+1+3=6+3+1= | 1+4+5=1+5+4=<br>4+5+1=4+1+5=<br>5+1+4=5+4+1= | 2+2+6=<br>2+6+2=<br>6+2+2= | 2+3+5=<br>2+5+3=<br>3+2+5=<br>3+5+2=<br>5+2+3=<br>5+3+2= | 3+3+4=<br>3+4+3=<br>4+3+3= |

A táblázat alapján a leggyakrabban a 10-es összeg jelenik meg és ennek a társa a 11.

**Megjegyzés.** Ha a dobások sorrendjét nem különböztetjük meg, akkor is a 10 és a 11 lesz a leggyakoribb összeg.

**3.** Bizonyítsd be, hogy ha $a$ és $b$ pozitív valós számok, akkor

$$a+b+\frac{1}{ab}\geq\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right).$$

**Megoldás.** A számtani-mértani közepek közti egyenlőtlenséget alkalmazzuk a következőképpen:

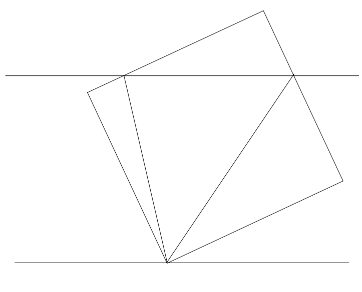
$$a+\frac{1}{2ab}\geq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{2ab}} \quad \text{és}$$

$$b+\frac{1}{2ab}\geq 2\sqrt{b\cdot\frac{1}{2ab}}$$

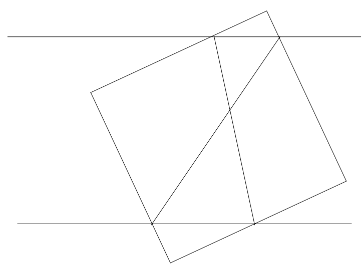
Ha az előbbi két egyenlőséget összeadjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséghez jutunk.

**Megjegyzés.** Az egyenlőtlenség $\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{2ab}}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\frac{1}{\sqrt{2ab}}\right)^2\geq 0$ alakban is írható.

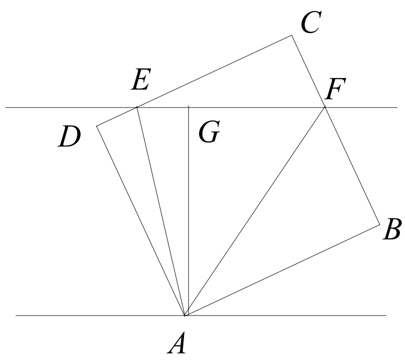
**4.** a) Az $a$ oldalhosszúságú négyzet oldalai az $a$ szélességű sáv határegyeneseit három pontban metszik úgy, hogy a négyzet egyik csúcsa a sáv egyik határegyenesén legyen (lásd a mellékelt 1. ábrát). Mekkora szöget zár be a metszéspontokat összekötő két szakasz?



1. ábra



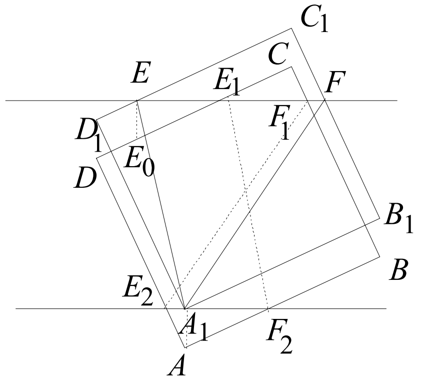
2. ábra




b) Mekkora a metszéspontokat összekötő szakaszok által bezárt szög, ha a négyzet oldalai a sáv határegyeneseit négy pontban metszik? (lásd a 2. ábrát)

**Megoldás.** a) Jelöljük a négyzet csúcsait $A$-val, $B$-vel, $C$-vel és $D$-vel és legyen $G$ az $A$ vetülete a sáv másik határegyenesére (lásd a mellékelt ábrát). A feltételek alapján az $AEG$ és $AED$ háromszögek kongruensek és az $AGF$

és $ABF$ (derékszögű háromszögek és van két-két kongruens oldaluk). Így a $AE$ és $AF$ a $DAG$ és $BAG$ szögek szögfelezői, tehát az általuk bezárt szög mértéke $45°$.
b) Visszavezetjük az általános esetet az a) pontra. Jelöljük $A_1$-gyel az $A$ pont vetületét a közelebbi határegyenesre és a négyzetet eltoljuk az $AA_1$ szakasszal, tehát $BB_1 \equiv AA_1$, $CC_1 \equiv AA_1$ és $DD_1 \equiv AA_1$. Ha $E_1, F_1, E_2$ és $F_2$ az $A_1B_1C_1D_1$ négyzetnek a sáv határvonalaival való metszéspontjai (lásd a mellékelt ábrát), akkor az $E_0EE_1$ háromszög kongruens az $AA_1F_2$ háromszöggel, mert $AA_1 \equiv EE_0$ és a két háromszög megfelelő szögei kongruensek. Így az $EE_1$ és $A_1F_2$ szakaszok kongruensek, tehát az $EE_1F_2A_1$ négyszög paralelogramma, és $EA_1 \parallel E_1F_2$. Hasonlóan belátható, hogy $FA_1 \parallel F_1E_2$, tehát az $E_1F_2$ és $E_2F_1$ szakaszok is $45°$-os szöget zárnak be.




**5.** Valamely bizottság 40-szer ülésezett. Mindegyik alkalommal 10-en voltak jelen az ülésen, közülük semelyik két bizottsági tag nem volt együtt egynél többször gyűlésen. Igazoljuk, hogy a bizottságban legalább 61 tag van!

**Megoldás.** Egy gyűlésen 10 résztvevő van, tehát $\frac{10\cdot 9}{2}=45$ pár képezhető. Mivel egyetlen pár sem vesz részt két gyűlésen, a 40 ülés alatt $40\cdot 45=1800$ pár számolható össze. Ha a bizottságban legfeljebb 60 tag volna, akkor a lehetséges párok száma $\frac{60\cdot 59}{2}=1770$ volna és ez ellentmondás. Tehát a bizottságban legalább 61 tag van.

# VIII. osztály

**1.** a) Bizonyítsd be, hogy ha $m, n \in N^*$ és $10^n - 1$ osztható $m$-mel, akkor $10^{3n} - 1$ osztható $3m$-mel!
b) Bizonyítsd be, hogy végtelen sok olyan természetes szám létezik, amelynek egyetlen számjegye sem nulla, és a szám osztható számjegyeinek összegével!

**Megoldás.** a) Az $x^3 - y^3 = (x-y)\left(x^2 + xy + y^2\right)$ azonosság alapján

$$10^{3n} - 1 = (10^n - 1)\left(10^{2n} + 10^n + 1\right)$$

De a $10^{2n}+10^{n}+1$ szám számjegyeinek összege 3, tehát ez a szám osztható 3-mal. Tehát ha $10^{n}-1$ osztható $m$-mel, akkor $10^{3n}-1$ osztható $3m$-mel.
b) Tekintsük az $a_1=10^3-1=999$ számot. Ez a szám osztható 27-tel, tehát osztható a számjegyeinek összegével. Az első pont alapján az $a_2=10^9-1=999999999$ szám osztható $3\cdot 27=9\cdot 9=81$-gyel, tehát a számjegyeinek összegével. A gondolatmenet megismételhető, az $a_3=10^{27}-1=\underbrace{9999...99999}_{27}$ szám osztható $3\cdot 81=9\cdot 27=243$-mal, vagyis a számjegyek összegével. Látható, hogy a gondolatmenet a végtelenségig folytatható, tehát az $a_n=10^{3^n}-1=\underbrace{9999...99999}_{3^n}$ szám osztható $3^{n+2}$-nel, vagyis számjegyeinek összegével.

**2.** Bizonyítsd be, hogy ha az $a$ és $b$ pozitív valós számok összege 4, akkor

$$a^2+b^2+\frac{32}{ab}\geq\frac{32}{\sqrt{ab}}.$$

**Megoldás.** A számtani-mértani közepek közti egyenlőtlenséget alkalmazzuk a következőképpen:

$$a^2+\frac{16}{ab}\geq 2\sqrt{a^2\cdot\frac{16}{ab}} \text{ és}$$

$$b^2+\frac{16}{ab}\geq 2\sqrt{b^2\cdot\frac{16}{ab}}$$

Ha az előbbi két egyenlőséget összeadjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséghez jutunk.

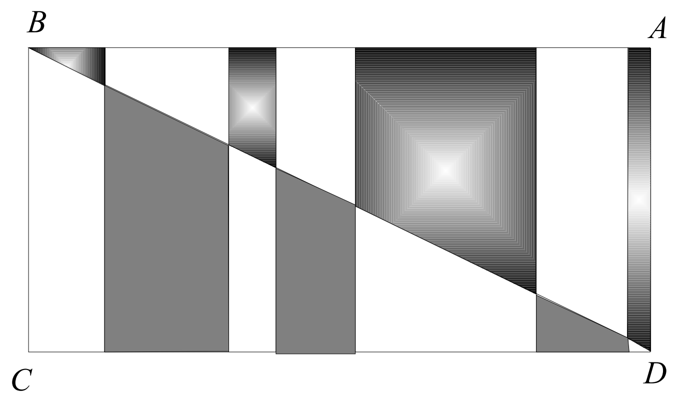
**Megjegyzés.** Az egyenlőtlenség $\left(a-\frac{4}{\sqrt{ab}}\right)^2+\left(b-\frac{4}{\sqrt{ab}}\right)^2\geq 0$ alakban is írható.

**3.** Az $ABCD$ téglalap $AB$ oldalát felosztjuk $n$ (nem feltétlenül egyenlő) részre, és a szakaszokat megszámozzuk 1-től $n$-ig. Az osztópontokon át a párhuzamosokat húzunk a $BC$ oldallal és meghúzzuk a $BD$ átlót. Bizonyítsuk be, hogy ha a páros sorszámú szakaszok hosszának összege egyenlő a páratlan sorszámú szakaszok hosszának összegével, akkor az átló feletti páratlan sorszámú darabok területének összege egyenlő az átló alatti páros sorszámú darabok területének összegével.

**Megoldás.** Jelöljük az átló feletti páros sorszámú szakaszokhoz tartozó területek összegét $t_1$-gyel, a páratlan sorszámú szakaszokhoz tartozó területek összegét $T_1$-vel, míg az átló alatti páros illetve páratlan sorszámú szakaszokhoz tartozó területek összegét $T_2$-vel és $t_2$-vel. Az átló két kongruens háromszögre bontja a téglalapot, tehát $T_1+t_1=\frac{1}{2}T$. A feltétel alapján $T_2+t_1=\frac{1}{2}T$, tehát $T_1=T_2$.

# V. RADÓ FERENC EMLÉKVERSENY

**Kolozsvár, 2001. május 19.**

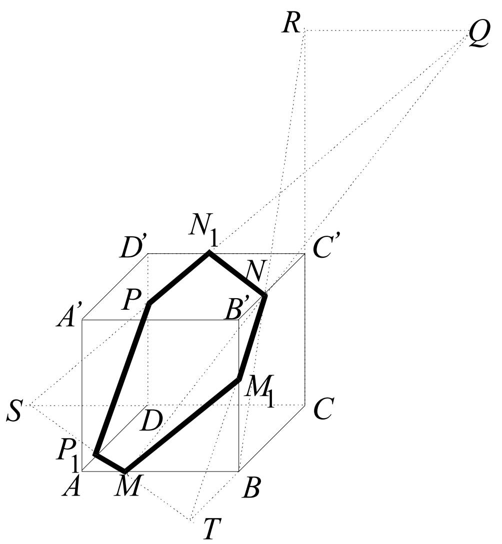



**4.** Az $ABCDA'B'C'D'$ kockának az $AB$, $B'C'$ és $D'D$ élén egy-egy pont mozog ugyanazzal a sebességgel ($A$-tól $B$, $B'$-től $C'$ illetve $D'$-től $D$-felé).

**c)** Szerkeszd meg a pontok által meghatározott síkmetszetet!

**d)** Bizonyítsd be, hogy a síkmetszet szembefekvő oldalinak felezőpontjait összekötő szakaszok összefutóak!

**Megoldás.** a) A feltételek alapján $AM \equiv B'N \equiv D'P$. Az ábrának megfelelően a következő szerkesztéseket végezzük:




$BN \cap CC' = \{R\}$, $MN \cap d = \{Q\}$, ahol $d$ az $R$-en át az $AB$-hez húzott párhuzamos egyenes,

$$QP \cap DC = \{S\},\ QP \cap C'D' = \{N_1\},$$
$$SM \cap BC = \{T\},\ SM \cap AD = \{P_1\},$$
$$TN \cap BB' = \{M_1\}.$$

A keresett síkmetszet az $MM_1NN_1PP_1$ hatszög, amelyben a szembefekvő oldalak párhuzamosak (mert az ($MNP$) síknak két párhuzamos síkkal való metszéséből származnak). Az is igazolható, hogy a szembefekvő oldalak aránya állandó.

b) Ha az $MM_1NN_1PP_1$ hatszög $MM_1$, $NN_1$ és $PP_1$ oldalait meghosszabbítjuk egy $XYZ$ háromszöghöz jutunk. A hatszög szembefekvő oldalainak felezőpontjait összekötő szakaszok tartóegyenesei az $XYZ$ háromszögben oldalfelezők, tehát összefutók.

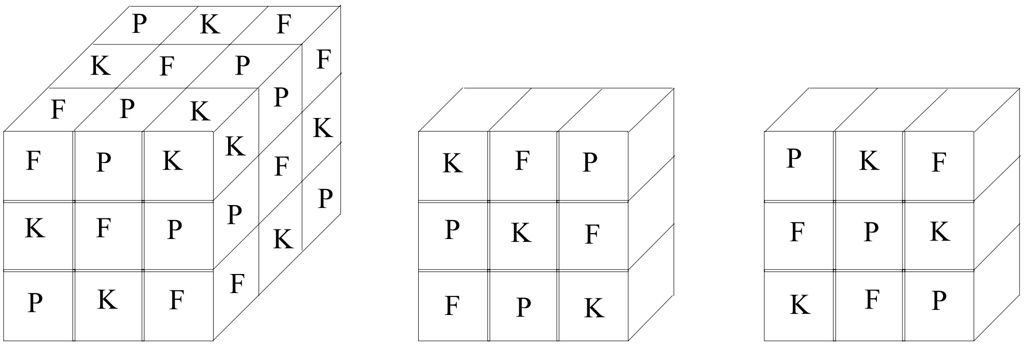
**5.** Egy 3×3×3-as kockát 27 darab azonos méretű kiskockából ragasztottunk össze. Minden egységkockát kiszínezünk pirosra, fehérre, vagy kékre úgy, hogy tetszőleges három egymásmelletti kocka közt ne legyen két azonos színű (egymásmellettinek mondunk három kockát, ha a középpontjaik egy olyan egyenesen vannak, amely párhuzamos a kocka valamelyik oldalélével).

d) Adjál meg egy ilyen színezést!

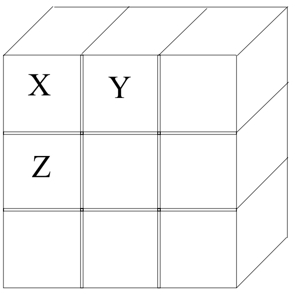
e) Hány különböző színezés létezik?

f) Az összes lehetséges színezéseket osszuk csoportokba úgy, hogy két színezés pontosan akkor kerüljön egy csoportba, ha a kocka mozgatásával (forgatásával) a két színezés egymásba vihető. Hány csoportunk lesz?

**Megoldás.** a) Egy lehetséges színezést láthatunk a mellékelt ábrán. (a kocka mellé kirajzoltunk két metszetet, a középső és a hátsó réteg színezését)




b) Észrevehető, hogy egy négyzet színezését egyértelműen meghatározza az ábrán megjelölt három mező színezése. E három mező színezésére $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ lehetőség van (a sarokmezőt 3 szín bármelyikével színezhetjük, míg a másik két mező színezésére csak két-két lehetőség van, mivel ezeknek a színe nem egyezhet a sarokmező színével). Továbbá valamelyik másik lapon még egy kocka színét megválaszthatjuk, a többi már egyértelműen meg van határozva a színezési feltételek alapján, tehát összesen 24 lehetséges színezés létezik.




c) Az előbbi gondolatmenet alapján látható, hogy egy oldallap színezésére 12 lehetőség van és mindegyik színezés esetén valamelyik átló mentén ugyanolyan színű kockák lesznek. A megadott színezésben a színeket egymás közt megcserélve adhatunk olyan színezést, amelyben a középső kocka piros, illetve fehér. Mivel minden mozgás során a középső kocka középső marad és a minden oldallapon a középső kocka színétől különböző színű átló van, ezért összesen három olyan színezés van, amelyek nem kaphatók meg egymásból a kocka elforgatásával.

# V. RADÓ FERENC EMLÉKVERSENY
**Kolozsvár, 2001. május 19.**

# IX. osztály

***1.*** *Bizonyítsd be, hogy az*

$$a_1x^2+2a_2x+a_3=0$$
$$a_2x^2+2a_3x+a_4=0$$
$$a_3x^2+2a_4x+a_5=0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{n-1}x^2+2a_nx+a_1=0$$
$$a_nx^2+2a_1x+a_2=0$$

*egyenletek közül legalább az egyiknek van valós gyöke, ha* $a_k\in R$*, bármely* $k=\overline{1,n}$ *esetén! Adjál példát olyan* $a_1,a_2,\dots,a_n$ *számokra, amelyekre az előbbi egyenletek közül pontosan egynek van valós gyöke!*

**Megoldás**

Feltételezzük, hogy egyik egyenletnek sincs valós gyöke. Következik, hogy $\frac{\Delta_k}{4}=a_{k+1}^2-a_ka_{k+2}<0$, bármely $k\in\{1,2,\dots,n\}$ esetén, ahol $a_{n+1}=a_1$ és $a_{n+2}=a_2$.

Összeadjuk a diszkriminánsokra kapott egyenlőtlenségeket:

$$a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2-a_1a_3-a_2a_4-\dots-a_{n-2}a_n-a_{n-1}a_1-a_na_2<0\quad/\cdot 2$$
$$\Updownarrow$$
$$\left(a_1^2-2a_1a_3+a_3^2\right)+\left(a_2^2-2a_2a_4+a_4^2\right)+\dots+\left(a_{n-1}^2-2a_{n-1}a_1+a_1^2\right)+\left(a_n^2-2a_na_2+a_2^2\right)<0$$
$$\Updownarrow$$
$$(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2+\dots+(a_{n-1}-a_1)^2+(a_n-a_2)^2<0.$$

Az utóbbi egyenlőtlenség ellentmondás, tehát van olyan egyenlet amelynek a diszkriminánsa pozitív, és így ennek az egyenletnek van valós gyöke.
A továbbiakban megadunk egy szerkesztést, amellyel elérhető, hogy pontosan egy egyenletnek legyen valós gyöke.

Legyen $a_1=a_2=1$ és $a_3=2$. Belátható, hogy így az első egyenletnek nincs valós gyöke. A második egyenletben legyen $a_4\in\boldsymbol{N}$, és $a_4>\frac{a_3^2}{a_2}$. Ezzel a választással a második egyenletnek sincs valós gyöke. Általában $a_k$-t úgy választjuk meg, hogy teljesüljön az $a_k>\frac{a_{k-1}^2}{a_{k-2}}$ egyenlőtlenség, ha $k=\overline{3,n}$. Így $a_n>a_{n-1}>\dots>a_3>a_2=a_1=1$, és csak az $a_{n-1}x^2+2a_nx+a_1=0$ egyenlet diszkriminánsa lesz pozitív, tehát az $n-1$-edik egyenletnek van valós gyöke. Az utolsó egyenlet diszkriminánsa negatív, mert $a_1^2 - a_n a_2 = 1 - a_n < 0$.

Tehát csak az $n-1$-edik egyenletnek van valós gyöke.

**2.** *Bizonyítsd be, hogy n darab n-nel nem osztható természetes szám közül kiválasztható néhány, amelyek összege osztható n-nel!*

**Megoldás**

Legyenek a számok $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$. Képezzük az

$$
\begin{aligned}
&s_1 = a_1,\\
&s_2 = a_1 + a_2,\\
&s_3 = a_1 + a_2 + a_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n
\end{aligned}
$$

összegeket. Ha az $s_i$, $i = \overline{1,n}$ összegek közül az egyik osztható *n*-nel, akkor készen vagyunk. Ellenkező esetben az *n*-nel való osztási maradékaik az $\{1, 2, ..., n-1\}$ halmazban kell legyenek. Mivel pontosan *n* összeg van, és a halmazban $n-1$ elem van, következik, hogy az összegek között szerepel kettő, $s_k$ és $s_l$, $k < l$, amelyeknek az *n*-nel való osztási maradéka megegyezik. Innen következik, hogy $s_l - s_k$ osztható *n*-nel. $s_l - s_k = a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_l$ és a feltételek alapján $l - k \geq 2$, tehát az $a_{k+1}$, $a_{k+2}$, ..., $a_l$ számok összege osztható *n*-nel.

**3.** *Az ABC háromszög köré írt körön felvesszük az $A' \in (\overset{\frown}{BC})$, $B' \in (\overset{\frown}{AC})$ és $C' \in (\overset{\frown}{BA})$ pontokat úgy, hogy az ABC és $A'B'C'$ háromszögek kongruensek legyenek. Bizonyítsd be, hogy az $A'$, $B'$ és $C'$ pontokon át BC-vel, CA-val illetve AB-vel húzott párhuzamosoknak ugyanezen pontokon át egy tetszőleges d egyenessel húzott párhuzamosokra vonatkozó szimmetrikusai összefutó egyenesek és az összefutási pont a háromszög köré írt körön van.*

**Megoldás.** Legyen *M* az $A'$ és $C'$ pontokból induló egyenesek metszéspontja. A *M* akkor és csak akkor van rajta a körön, ha az $MA'C'B'$ négyszög körbeírható. Ez pontosan akkor teljesül, ha $m\left(M\hat{A}'B'\right) = m\left(M\hat{C}'B'\right)$.

$$
\begin{aligned}
m\left(M\hat{A}'B'\right) &= m\left(B'\hat{A}'A_1\right) - m\left(M\hat{A}'A_1\right) = m\left(B'\hat{A}'A_1\right) - m\left(A_1\hat{A}'G\right) = m\left(B_1\hat{B}'A'\right) - m\left(A_1\hat{A}'G\right) = \\
&= \left(m\left(C'\hat{B}'A'\right) - m\left(B_1\hat{B}'C'\right)\right) - m\left(A_1\hat{A}'G\right) = \left(m\left(C'\hat{B}'A'\right) - m\left(B'\hat{C}'C_1\right)\right) - m\left(A_1\hat{A}'G\right) = \\
&= \left(m\left(C'\hat{B}'A'\right) - m\left(A_1\hat{A}'G\right)\right) - m\left(B'\hat{C}'C_1\right).
\end{aligned}
$$

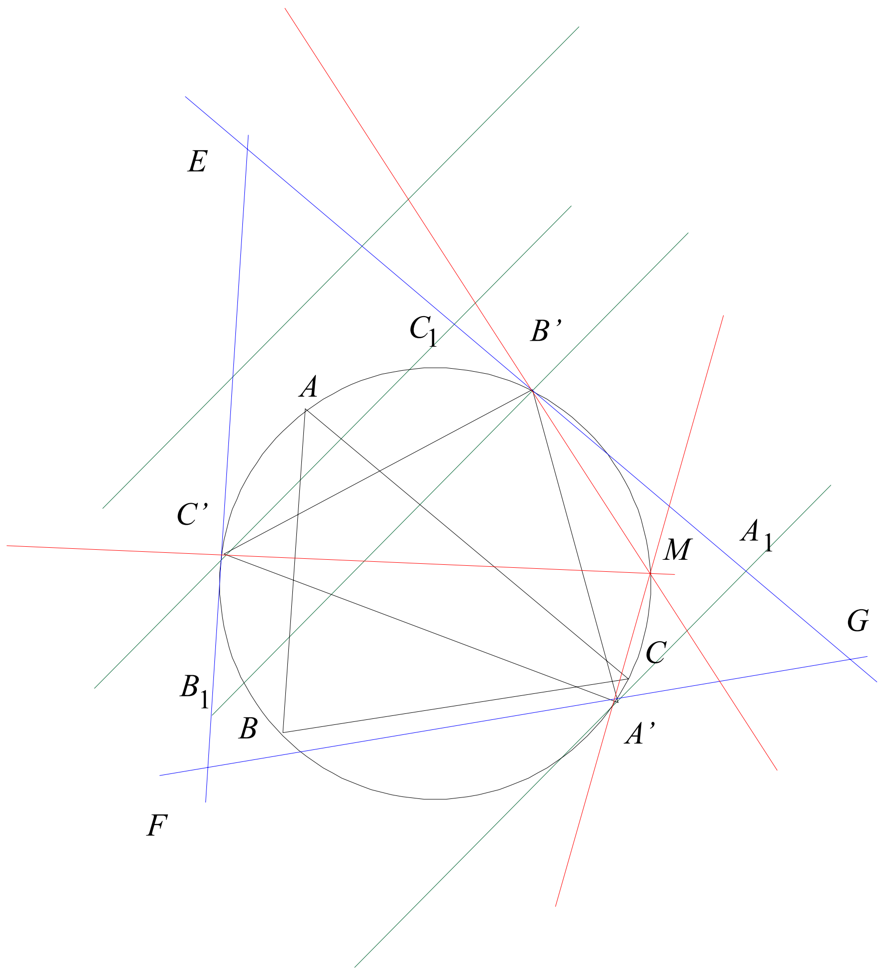
Felhasználjuk, hogy $m\left(A'\hat{B}'C'\right) = m\left(A\hat{B}C\right) = m\left(E\hat{F}G\right)$ (párhuzamos szárú szögek), és $m\left(E\hat{C}'C_1\right) + m\left(A_1\hat{A}'G\right) = m\left(E\hat{F}G\right)$.

Az eddigi összefüggések alapján

$$m\left(E\hat{C}'C_1\right)=m\left(E\hat{F}G\right)-m\left(A_1\hat{A}'G\right)=m\left(C'\hat{B}'A'\right)-m\left(A_1\hat{A}'G\right).$$

Tehát $m\left(M\hat{A}'B'\right)=m\left(E\hat{C}'C_1\right)-m\left(B'\hat{C}'C_1\right)=m\left(C_1\hat{C}'M\right)-m\left(B'\hat{C}'C_1\right)=m\left(M\hat{C}'B'\right).$

Következik, hogy $M$ a körön van. Hasonlóképpen, ha $N$ a $B'$ és $C'$ pontokból induló egyenesek metszéspontja, igazolható, hogy $N$ rajta van a körülírt körön. Viszont a $B'$-ből induló egyenes az $M$, $N$, $B'$ pontokban metszené a kört, és $M \neq B'$, valamint $N \neq B'$, tehát csak az $M = N$ eset lehetséges, ami azt jelenti, hogy a három egyenes összefut és a metszéspont a körülírt körön van.



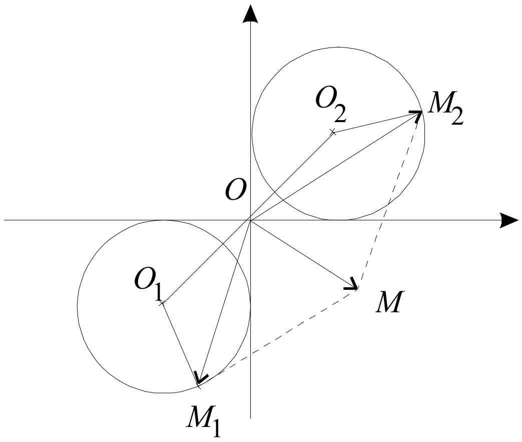

**4.** *A $C(O_1,R)$ és $C(O_2,R)$ körök közös belső érintői merőlegesek és az $O\in(O_1O_2)$ pontban metszik egymást. Határozd meg az $\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$ kötött vektor végpontjának a mértani helyét, ha $M_1\in C(O_1,R)$ és $M_2\in C(O_2,R)$ változó pontok.*

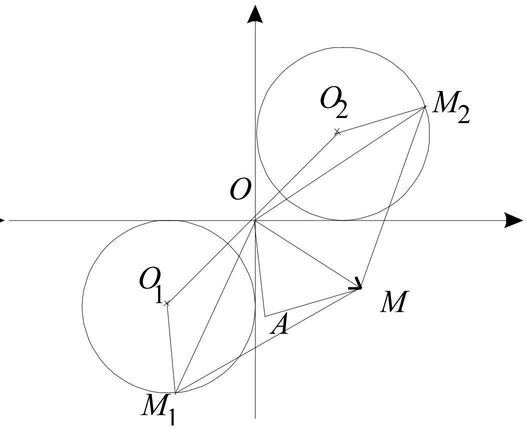
**Megoldás**

Legyen $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M_1} + \overrightarrow{OO_2} + \overrightarrow{O_2M_2} =$$
$$= \left(\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{OO_2}\right) + \overrightarrow{O_1M_1} + \overrightarrow{O_2M_2} = \overrightarrow{O_1M_1} + \overrightarrow{O_2M_2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{OM}\right| = \left|\overrightarrow{O_1M_1} + \overrightarrow{O_2M_2}\right| \le \left|\overrightarrow{O_1M_1}\right| + \left|\overrightarrow{O_2M_2}\right| = 2R,$$

tehát az $M$ pont a $C(O,2R)$ körlapon helyezkedik el.




Igazoljuk, hogy a keresett mértani hely a $C(O,2R)$ körlap. Legyen $M$ egy tetszőleges pont a körlapról. Mivel $OM \le 2R$, létezik egy $A$ pont úgy, hogy $OA = AM = R$. Szerkesszük meg az $OO_2M_2A$ és a $MAO_1M_1$ paralelogrammákat! Ekkor $\overrightarrow{O_2M_2} = \overrightarrow{OA}$, $\left|\overrightarrow{O_2M_2}\right| = R \Rightarrow M_2 \in C(O_2,R)$ és $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{O_1M_1}$, $M_1 \in C(O,R)$. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{O_2M_2} + \overrightarrow{O_1M_1} = \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_1}$, tehát létezik $M_1$ és $M_2$ úgy, hogy $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$.

Ezzel igazoltuk, hogy minden ilyen $M$ pont a körlapon van (beleértve a határát is), és minden pont a körlapról a mértani helyhez tartozik.

**5.** *Legalább hány lépés szükséges ahhoz, hogy egy $10 \times 10$-es tábla bal alsó sarkából a jobb felső sarkába jussunk lólépésben?*

**Megoldás.** Megvizsgáljuk, hogy melyik mezőkre juthatunk el 1, 2, … lépésben.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | 1 | | | | | | | | |
| | | 1 | | | | | | | |
| 0 | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| 2 | | 2 | | | | | | | |
| | 2 | | 2 | | | | | | |
| 2 | 1 | | | 2 | | | | | |
| | | 1 | 2 | | | | | | |
| 0 | | 2 | | 2 | | | | | |

# V. RADÓ FERENC EMLÉKVERSENY

**Kolozsvár, 2001. május 19.**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 6 | 5 | 6 | 5 | 6 | 5 | 6 | 7 | 6 |
| 4 | 5 | 4 | 5 | 4 | 5 | 6 | 5 | 6 | 7 |
| 5 | 4 | 5 | 4 | 5 | 4 | 5 | 6 | 5 | 6 |
| 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 5 | 4 | 5 | 6 | 5 |
| 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 5 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 4 | 3 | 4 | 5 | 4 | 5 |
| 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 4 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 1 | 4 | 3 | 2 | 3 | 4 | 5 | 4 | 5 |
| 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 0 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 4 | 5 | 4 | 5 |

# X. osztály

**1.** a) *Bizonyítsd be, hogy* $\sin x \cdot tgx \geq x^2$*, ha* $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$*!*

*c) Oldd meg a* $2^{\sin x} + 2^{\operatorname{tg} x} = 2^{x+1}$ *egyenletet, ha* $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$*!*

**Megoldás**

*a)* Mivel $\sin x$ és $\operatorname{tg} x$ pozitívak minden $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ esetén, a mértani és harmonikus középértékek közti egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$\sqrt{\sin x \cdot \operatorname{tg} x} \geq \frac{2}{\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x}} \quad (1).$$

Viszont $\dfrac{2}{\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x}} = \dfrac{2\sin x \frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x + \frac{\sin x}{\cos x}} = \dfrac{2\sin x}{\cos x + 1} = 2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. Továbbá $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} \geq \dfrac{x}{2}$ $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ (2).

(1) és (2) alapján $\sqrt{\sin x \operatorname{tg} x} \geq x$ $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, tehát $\sin x \operatorname{tg} x \geq x^2$ $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Észrevehető, hogy $x = 0$ megoldás. Igazoljuk, hogy több megoldás nincs. Mivel $2^{\sin x}$ és $2^{\operatorname{tg} x}$ pozitívak, alkalmazhatjuk a számtani-mértani közepek közti egyenlőtlenséget.

$$\frac{2^{\sin x}+2^{\operatorname{tg} x}}{2}\geq 2^{\frac{\sin x+\operatorname{tg} x}{2}}\geq 2^{\sqrt{\sin x\operatorname{tg} x}}\quad \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Az a) pont alapján $\sqrt{\sin x\operatorname{tg} x}\geq x\quad \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, tehát az exponenciális függvény monotonitása szerint

$$\frac{2^{\sin x}+2^{\operatorname{tg} x}}{2}\geq 2^{\frac{\sin x+\operatorname{tg} x}{2}}\geq 2^{\sqrt{\sin x\operatorname{tg} x}}\geq 2^{x}\quad \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\Downarrow$$

$$2^{\sin x}+2^{\operatorname{tg} x}\geq 2^{x+1}\quad \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Egyenlőség a számtani-mértani közepek közti egyenlőtlenségben csak akkor állhat fenn, ha a számok egyenlőek, tehát $\sin x = tgx \Rightarrow x=0$.

**2.** *a) Számítsd ki a* $\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot C_{2n}^{n-k}$ *összeget!*

*b) Bizonyítsd be, hogy* $2\left(C_{3n}^n\right)^2\leq C_{2n}^n\cdot\left(C_{4n}^{2n}+\left(C_{2n}^n\right)^2\right)$, *ha* $n\geq 1$.

**Megoldás**

a) A $\sum_{k=0}^{n}C_a^kC_b^{n-k}=C_{a+b}^n$ Vandermonde azonosságban $a=n$ és $b=2n$ esetén $\sum_{k=0}^{n}C_n^kC_{2n}^{n-k}=C_{3n}^n$.

b) A Cauchy - Buniakovski egyenlőtlenség alapján

$$2\left(C_{3n}^n\right)^2=2\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^kC_{2n}^{n-k}\right)^2\leq 2\left(\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}\left(C_{2n}^{n-k}\right)^2\right)=C_{2n}^n\cdot\left(C_{4n}^{2n}+\left(C_{2n}^n\right)^2\right).$$

**3.** *Bizonyítsd be, hogy az* $f:[0,1]\to[0,1]$ *csökkenő függvény grafikus képe lefedhető n darab téglalappal, amelyek területének összege nem nagyobb mint* $\frac{1}{n}$.

**Megoldás**

Tekintjük azokat a téglalapokat, amelyek két szemközti csúcsának koordinátái $\left(\frac{i-1}{n},f\left(\frac{i-1}{n}\right)\right)$ és $\left(\frac{i}{n},f\left(\frac{i}{n}\right)\right)$ $(0<i\leq n)$, valamint oldalai párhuzamosak a tengelyekkel. Az $i$-edik ilyen téglalap területe

$$T_i=\left|\left(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}\right)\left(f\left(\frac{i}{n}\right)-f\left(\frac{i-1}{n}\right)\right)\right|=\frac{1}{n}\cdot\left(f\left(\frac{i-1}{n}\right)-f\left(\frac{i}{n}\right)\right)$$

(mert *f* csökkenő).

A téglalapok összterülete:

$$T=\sum_{i=1}^{n}T_i=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(\frac{i-1}{n}\right)-f\left(\frac{i}{n}\right)\right)=\frac{1}{n}\cdot\left(f(0)-f(1)\right)\le\frac{1}{n}(1-0)=\frac{1}{n}.$$

**4.** *Egy körön felveszünk hat pontot. Válasszunk ki hármat és vegyük fel a kiválasztottak által meghatározott háromszög $H_i$ ortocentrumát, és a megmaradt csúcsok által meghatározott háromszög $E_i$ Euler pontját (a súlypont és az ortocentrum által meghatározott szakasz felezőpontja). Bizonyítsd be, hogy az összes lehetséges választásnak megfelelő $H_iE_i$ egyenesnek van egy közös pontja.*

**Megoldás**

Tekintsünk egy $O$ kezdőpontú derékszögű koordinátarendszert, ahol $O$ a kör középpontja. Legyenek a pontok affixumai $a$, $b$, $c$ $d$, $e$, $f$. Az $ABC$ háromszög ortocentrumának affixuma $h_1=a+b+c$, a súlypontjának affixuma $g_1=\frac{a+b+c}{3}$ és az Euler pontjának ($E_1$) az affixuma $e_1=\frac{2}{3}(a+b+c)$. A $DEF$ háromszög ortocentruma ($H_2$) $h_2=d+e+f$.

Ebben az esetben az $E_1H_2$ egyenes egyenlete $\frac{2}{3}(1-\lambda)(a+b+c)+\lambda(d+e+f)$, ahol $\lambda\in R$. Az egyenesek akkor lesznek összefutóak, ha van egy olyan pont amely az $E_iH_{i+1}$ egyenesek mindegyikén rajta van. Ennek affixuma független kell legyen a ponthármasok megválasztásától, ami csak akkor lehetséges, ha az $a,b,c,d,e,f$ együtthatói megegyeznek, vagyis

$$\frac{2}{3}(1-\lambda)=\lambda\ \Rightarrow\ \lambda=\frac{2}{5}.$$

Tehát az $m=\frac{2}{5}(a+b+c+d+e+f)$ pont rajta van mindegyik egyenesen.

**5.** $(m+1)\cdot(n+1)\cdot(p+1)$ *darab egységkockából összerakunk egy* $(m+1)\times(n+1)\times(p+1)$ *méretű téglatestet. A téglatest egyik sarokkockájának középpontjából egy rágcsáló a testátlósan ellentétes sarokkockáig utat váj magának úgy, hogy minden egységkockából csak vele közös oldallappal rendelkező egységkockába mehet (középponttól középpontig) és a legrövidebb utak valamelyikén kell haladnia.*

**c)** *Hány lehetséges útvonal létezik?*

**d)** *Ha a lehetséges útvonalak száma $U(m,n,p)$, akkor számítsd ki az összes $U(m,n,p)$ szám összegét, amikor $m+n+p$ állandó!*

**Megoldás**

a) A három lehetséges irányt jelöljük *e*-vel, *f*-fel és *j*-vel. Minden lehetséges útvonal *m* darab *e* irányú, *n* darab *f* irányú és *p* darab *j* irányú lépést jelent. Másrészt az összes olyan út, amely $m$ darab $e$ irányú, $n$ darab $f$ irányú és $p$ darab $j$ irányú lépésből áll megfelel.

Minden ilyen út $m+n+p$ lépésből áll, és így az $m+n+p$ lépésből ki kell választani $m$ darabot (ezek lesznek az $e$ irányú lépések), és a maradék $n+p$ lépésből pedig $n$ darabot (ezek lesznek az $f$ irányú lépések). Ez $C_{m+n+p}^{m} C_{n+p}^{m} = \frac{(m+n+p)!}{m!\,n!\,p!}$ módon tehető meg.

b) Jelöljük $A$-val az $m+n+p$ értékét. Ki kell számítanunk a $d = \sum_{m+n+p=A} C_A^m C_{A-m}^n$ összeget. Ez a következőképpen írható:

$$d = \sum_{m=0}^{A} C_A^m \left( \sum_{n=0}^{A-m} C_{A-m}^n \right) = \sum_{m=0}^{A} 2^{A-m} C_A^m = (2+1)^A = 3^A .$$

# XI. osztály

**1.** *Az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sorozat tagjai teljesítik a* $4x_n x_{n+1} - 2(n-1)x_{n-1} = 3n-2$ *összefüggést minden* $n \geq 2$*-re és* $x_1 = 0$ *valamint* $x_2 = \frac{3}{4}$.

**c)** *Határozd meg a sorozat általános tagjának képletét!*

**d)** *Számítsd ki a* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{x_2 x_3 \ldots x_n}}{n}$ *határértéket!*

**Megoldás**

**a)** $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{4}$, $x_3 = \frac{8}{6}$, $x_4 = \frac{15}{8}$, $x_5 = \frac{24}{10}$. Matematikai indukcióval igazolható, hogy $x_n = \frac{n^2-1}{2n}$.

**b)** A D'Alembert kritérium alapján

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{x_2 x_3 \ldots x_n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x_2 x_3 \ldots x_n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_2 x_3 \ldots x_{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{x_2 x_3 \ldots x_n},$$

ha ez utóbbi határérték létezik. Viszont

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_2 x_3 \ldots x_{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{x_2 x_3 \ldots x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{(n+1)\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2-1}{2(n+1)(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{2e}.$$

**2.** *Tekintsük a* $d_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}$ *sorozatot.*

*c) Vezessünk le egy rekurziót* $d_n$*-re és bizonyítsuk be, hogy* $d_n \in N$, $\forall n \geq 1$

*d) Milyen n értékekre lesz* $d_n$ *osztható 3-mal?*

**Megoldás**

a) Kifejtve a determinánst az utolsó sora szerint, kapjuk, hogy

$$d_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n-1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & n \end{vmatrix} = n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n-2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & n-1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

A második determinánst kifejtve az utolsó oszlopa szerint $d_{n-2}$-t kapunk. Tehát a rekurzió: $d_n = n\,d_{n-1} - d_{n-2}$ $(n \geq 4)$.

b) Az egyszerűbb írásmód kedvéért a következő jelölést használjuk:

$$x \equiv y \pmod 3 \Leftrightarrow (x-y) \vdots 3 .$$

$d_1 = 1$ $d_2 = 1$ $d_3 = 2$ .

$$\begin{aligned}
d_2 &\equiv 1 \pmod 3 \\
d_3 &\equiv -1 \pmod 3 \\
d_4 &\equiv 1 \pmod 3 \\
d_5 &\equiv 0 \pmod 3 \\
d_6 &\equiv -1 \pmod 3 \\
d_7 &\equiv -1 \pmod 3 \\
d_8 &\equiv -1 \pmod 3 \\
d_9 &\equiv 1 \pmod 3 \\
d_{10} &\equiv -1 \pmod 3 \\
d_{11} &\equiv 0 \pmod 3 \\
d_{12} &\equiv 1 \pmod 3 \\
d_{13} &\equiv 1 \pmod 3 \\
d_{14} &\equiv 1 \pmod 3 \\
d_{15} &\equiv -1 \pmod 3 \\
d_{16} &\equiv 1 \pmod 3 \\
d_{17} &\equiv 0 \pmod 3
\end{aligned}$$

Mivel $d_3 \equiv d_{15}$, $d_4 \equiv d_{16}$ és $17 \equiv 2$ (mod 3), a sorozat periodikus lesz, periódusa 12.

$$d_{k+12l} \equiv d_k \pmod 3 \quad (k \geq 3)$$
$$d_{5+12l} \equiv d_5 \pmod 3 \equiv 0 \pmod 3$$
$$d_{11+12l} \equiv d_{11} \pmod 3 \equiv 0 \pmod 3$$

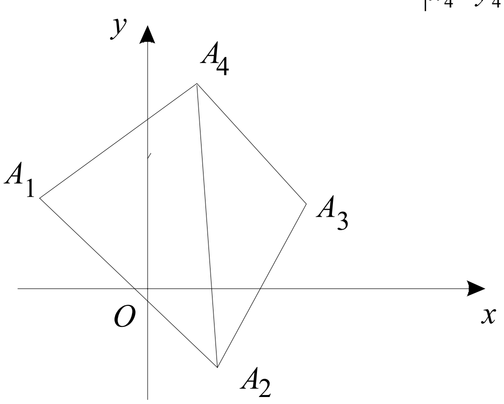
Összefoglalva $d_{5+6l} \equiv 0$ (mod3).

**3.** *Az $A_1A_2A_3A_4$ konvex négyszög csúcsainak koordinátái $A_i(x_i, y_i)$, ahol $i \in \{1,2,3,4\}$.*

*Mi a geometriai jelentése a* $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ *determinánsnak?*

**Megoldás.** Kifejtve a determinánst az utolsó oszlop szerint, kapjuk, hogy

$$\Delta = -\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = -\Delta_1 - \Delta_2 .$$




Viszont a $\Delta_1$ és a $\Delta_2$ pontosan megegyezik az $A_2A_3A_4$ és $A_1A_2A_4$ háromszögek területének kétszeresével (vagy azok ellentettjével egyszerre), mert a körüljárási irány megegyezik mindkét háromszögre a determinánsban szereplő koordináták sorrendjével.

Tehát a területek additivitása alapján $\Delta = \pm 2T_{A_1A_2A_3A_4}$.

**4.** *Adott az $f : R \to R$, $f(x) = (x - a_1)\cdot(x - a_2)\cdot \ldots \cdot(x - a_n)$ függvény, ahol $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ páronként különböző valós számok.*

*c) Bizonyítsuk be, hogy minden $[a_{n-2k}, a_{n-2k+1}]$ alakú intervallumban az $f'(x) + mf(x) = 0$ egyenletnek van legalább egy valós gyöke, tetszőleges $m \geq 1$ esetén!*

*d) Ha rögzített k esetén az előbbi egyenlet legnagyobb $[a_{n-2k}, a_{n-2k+1}]$ intervallumba eső gyökét $c_m$-mel jelöljük, tanulmányozd a $(c_m)_{m\geq 1}$ sorozat konvergenciáját és számítsd ki a határértékét!*

**Megoldás**

a) A $g_m(x) = e^{mx} f(x)$ függvény teljesíti a Rolle tétel feltételeit az $[a_{n-2k}, a_{n-2k+1}]$ intervallumon, tehát létezik $x_m \in [a_{n-2k}, a_{n-2k+1}]$, úgy, hogy $g'_m(x_m) = 0$. De $g'_m(x) = e^{mx}(f'(x) + mf(x))$, tehát $x_m$ a keresett megoldás.

b) $f(c_m) = (c_m - a_1)\cdot\ldots\cdot(c_m - a_{n-2k})\cdot(c_m - a_{n-2k+1})\cdot\ldots\cdot(c_m - a_n) > 0$.
$g_m(x)$ a $(c_m, a_{n-2k+1}]$ intervallumon előjeltartó, mivel nincs zérushelye. $g_m(a_{n-2k+1}) = f'(a_{n-2k+1}) + m\cdot f(a_{n-2k+1}) = f'(a_{n-2k+1}) < 0$, következik, hogy $g_m(x) < 0 \ \forall x \in (c_m, a_{n-2k+1}]$.
Feltételezük, hogy

$$c_m \geq c_{m+1} \Rightarrow g_{m+1}(c_m) \leq 0, \text{ de } g_{m+1}(c_m) = g_m(c_m) + f(c_m) = f(c_m) > 0,$$

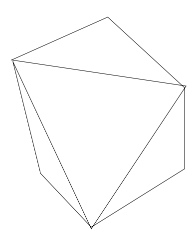
ellentmondás. Tehát $c_m < c_{m+1} \quad \forall m \geq 1$. A $(c_m)_{m\geq 1}$ sorozat szigorúan növekvő és korlátos $(c_m < c_{n-2k+1})$, következik, hogy konvergens. $f'(x)$ korlátos a $[a_{n-2k}, a_{n-2k+1}]$ intervallumon, tehát $\lim\limits_{m\to+\infty} f(c_m) = \lim\limits_{m\to+\infty} -\dfrac{f'(c_m)}{m} = 0$.

$f(x)$ folytonosságából következik, hogy $\lim\limits_{m\to+\infty} f(c_m) = f(\lim\limits_{m\to+\infty} c_m) = 0$. Továbbá $\lim\limits_{m\to+\infty} c_m \in [c_1, a_{n-2k+1}]$, *f*-nek nincs zérushelye a $(c_1, a_{n-2k+1})$ intervallumon $\Rightarrow \lim\limits_{m\to+\infty} c_m = a_{n-2k+1}$.

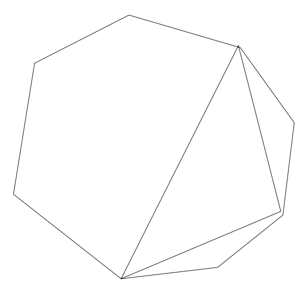
**5.** *Határozd meg azokat az $n \in N^* \setminus \{1,2\}$ számokat, amelyekre egy tetszőleges n oldalú konvex sokszöget fel lehet bontani, egymást nem metsző átlók segítségével, háromszögekre úgy, hogy minden csúcsból páros számú átló induljon ki!*

**Megoldás.** Igazoljuk, hogy $n = 3k$-ra, $k \in \boldsymbol{N}^*$ elvégezhető a felbontás:
$n = 3$-ra a megoldás triviális, összesen nulla átlóra van szükségünk minden csúcsból.
$n = 6$-ra az 1. ábrán látható egy megoldás.

*1. ábra*



*2.ábra*

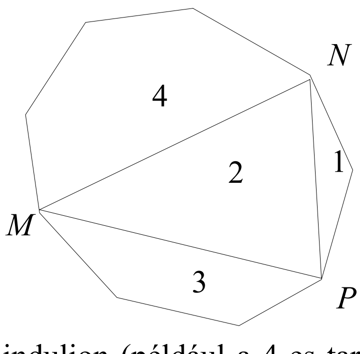


Általában, $n = 3k$-ra a 2. ábra alapján a probléma visszavezetődik egy $3(k-1)$ oldalú sokszög felbontására a kért módon. Tehát ezzel a feladatot megoldottuk.

Igazoljuk, hogy $n = 3k \pm 1$ esetén a feladat nem oldható meg.
Ha létezne megoldás, akkor a sokszögben biztosan lenne az ábrán látható *MNP* háromszög (ellenkező esetben, ha csak olyan háromszög létezne, amely minden oldalának végpontjai közt legalább két csúcs helyezkedik el, és az így elhatárolt síkrészeket még tovább kellene bontsuk háromszögekre. Véges sok lépésben elérnénk egy olyan háromszöghöz, amelynek egyik oldala egy csúcsot határol el).

# V. RADÓ FERENC EMLÉKVERSENY

**Kolozsvár, 2001. május 19.**




Mivel az 1-es és a 2-es síkrészeket már nem lehet tovább bontani, őket kivághatjuk. A megmaradt, 3-mas és 4-es síkrészek felbontását kell elvégeznünk. Ez kétféleképpen lehetséges:

1. Ha a 3-mas síkrészben az $M$ csúcsból páratlan sok átló indul ki, akkor a 4-es részben is páratlan sok átló kell kiinduljon az $M$ csúcsból, a többi csúcsokból pedig feltétlenül páros. Így $M$-ből legalább egy átló el kell induljon (például a 4-es tartományban). Ennek az $M$-től különböző végpontjából ismét kiindul legalább egy átló, mert páros sok átló indul az eredeti sokszög minden csúcsából. Így végtelen sok átló létezne, ez pedig lehetetlen.

2. Ha a 3-mas síkrészben az $M$ csúcsból páros sok átló indul ki, akkor a 4-es síkrész $M$ csúcsából is páros sok átló kell induljon, tehát a feladat visszavezetődik két kisebb sokszög felbontására az eredeti feltételekkel.

Legyen az egyik sokszög csúcsainak a száma $v$. Ekkor a másik sokszögnek $u=(n-1)-v+1=n-v$ csúcsa van. Tehát ha $n=3k\pm 1$, akkor biztosan az $u$ vagy a $v$ nem lesz osztható hárommal, tehát az egyik kisebb sokszög biztosan $3l\pm 1$ csúcsú lesz, $l<k$. Ezzel a gondolatmenettel a feladat visszavezetődik egy 4 vagy egy 5 oldalú sokszög felbontására a kért módon, ami lehetetlen.

# XII. osztály

**1.** *Határozd meg azokat az $f:R\to R$ függvényeket, amelyeknek létezik olyan $F:R\to R$ primitívje, hogy teljesüljön a*

$$2F(x)=x\big(f(x)-x\big)$$

*összefüggés bármely $x\in R$ esetén.*

**Megoldás.** Az egyenletből kifejezve $f(x)=2\dfrac{F(x)}{x}+x$. Következik, hogy *f(x)* deriválható a $(-\infty,0)$ és $(0,+\infty)$ intervallumon. Átrendezve az egyenletet, kapjuk, hogy $\dfrac{xf(x)-2F(x)}{x}=x$. Elosztva az egyenlőséget $x^2$-tel és bővítve a törtet $x$-szel adódik,hogy $\dfrac{f(x)x^2-F(x)2x}{x^4}=\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \left(\dfrac{F(x)}{x^2}\right)'=(\ln|x|)'$. A Lagrange tétel következményéből

$$\frac{F(x)}{x^2}=\ln|x|+c \Leftrightarrow F(x)=x^2\cdot\ln|x|+c\cdot x^2 .$$

Ha $x\in(-\infty,0)$, akkor deriválva az egyenlet mindkét oldalát kapjuk, hogy

$$f(x)=2x\cdot\ln(-x)+x+2c'x=2x\cdot\ln(-x)+c_1\cdot x .$$

Ha $x \in (0,+\infty)$, akkor deriválva az egyenlet mindkét oldalát kapjuk, hogy

$$f(x) = 2x \cdot \ln x + x + 2c''x = 2x \cdot \ln x + c_2 \cdot x .$$

Vizsgálva $f$ folytonosságát észrevesszük, hogy $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0$, mert $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 2x \cdot \ln x + c_1 \cdot x = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2x \cdot \ln x + c_2 \cdot x = 0$. Mivel *f* Darboux tulajdonságú, és léteznek a bal- és joboldali határértékek, következik, hogy *f*-nek nem lehet szakadási pontja a 0-ban, tehát *f* folytonos 0-ban és *f*(0)=0.

Összefoglalva, $f(x) = \begin{cases} 2x \cdot \ln(-x) + c_1 x \ , & ha \quad x \in (-\infty,0) \\ 0 \ , & ha \quad x = 0 \\ 2x \cdot \ln(x) + c_2 x \ , & ha \quad x \in (0,+\infty) \end{cases}$.

**2.** *A* $(G,\cdot)$ *csoportban* (1) $(xy)^n = y^n x^n$, (2) $(xy)^{n+1} = y^{n+1} x^{n+1}$ *és* (3) $(xy)^{2n} = y^{2n} x^{2n}$ *bármely* $x, y \in G$ *esetén. Bizonyítsd be, hogy a* $(G,\cdot)$ *csoport kommutatív!*

**Megoldás.** (1)-ből és (2)-ből következik, hogy $y^{n+1}x^{n+1} = (xy)^{n+1} = (xy)^n xy = y^n x^n xy$ $\forall x, y \in G$. Egyszerűsítve balról $y^n$-nel, kapjuk, hogy $yx^{n+1} = x^{n+1} y \quad \forall x, y \in G$ (*) ( $x^{n+1}$ kommutál minden elemmel).

Továbbá (1)-ből és (3)-ból következik, hogy

$$y^{2n}x^{2n} = (xy)^{2n} = (xy)^n (xy)^n = y^n x^n y^n x^n \quad \forall x, y \in G .$$

Egyszerűsítve, kapjuk, hogy $y^n x^n = x^n y^n \quad \forall x, y \in G$. Ez utóbbi egyenlőséget balról beszorozva az $x$-szel, kapjuk, hogy $xy^n x^n = x^{n+1} y^n \quad \forall x, y \in G$. A (*) egyenlőség alapján következik, hogy $xy^n x^n = y^n x^{n+1} \quad \forall x, y \in G$. Innen $xy^n = y^n x \quad \forall x, y \in G$. Ez azt jelenti, hogy $y^n$ is kommutál minden elemmel, ezt felhasználva a (*) egyenlőségben pedig

$$x^{n+1} y = yx^{n+1} = yx^n x = x^n yxy \;\Rightarrow\; yx = xy \quad \forall x, y \in G .$$

**3.** *Az* $f:[0,1] \to [0,1]$ *függvény szigorúan növekvő és folytonos 1-ben. Bizonyítsd be, hogy*

***a)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f^n(x)dx = 0$ ***b)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_0^1 f^n(x)dx} = f(1)$

**Megoldás**

a) $\int_0^1 f^n(x)dx = \int_0^{1-\varepsilon} f^n(x)dx + \int_{1-\varepsilon}^1 f^n(x)dx \le (1-\varepsilon) f^n(1-\varepsilon) + \varepsilon$. Tehát

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f^n(x)dx \le \varepsilon$ bármely $\varepsilon > 0$-ra, következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f^n(x)dx = 0$.

b) Legyen $\varepsilon \in (0,1)$. Ekkor

$$\int_0^1 f^n(x)dx = \int_0^{1-\varepsilon} f^n(x)dx + \int_{1-\varepsilon}^1 f^n(x)dx \geq 0 + \int_{1-\varepsilon}^1 f^n(x)dx = \varepsilon f^n(c),$$

ahol $c \in (1-\varepsilon, 1)$ (felhasználtuk a középértéktételt).

Legyen $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$. Ekkor $\sqrt[n]{\int_0^1 f^n(x)dx} \geq \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}} f(c)$, ahol $c \in \left(1-\dfrac{1}{n}, 1\right)$. Felhasználva az $f$ folytonosságát az 1-ben, és határértékre térve $n$ szerint, kapjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_0^1 f^n(x)dx} \geq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}} f(c) = f(1)$ (1). Viszont, mivel $f$ növekvő, igaz a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_0^1 f^n(x)dx} \leq f(1)$ (2) egyenlőtlenség is.

(1) és (2) alapján $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_0^1 f^n(x)dx} = f(1)$.

**4.** *Egy háromszög minden oldalát osszuk fel p egyenlő részre és az osztópontokat kössük össze a szembefekvő csúccsal. Ha p prímszám, határozd meg a háromszög belsejében keletkező diszjunkt síkrészek maximális számát!*

**Megoldás**

Feltételezzük, hogy létezik három egyenes, amelyek összefutnak: $AE \cap BF \cap CG \neq \emptyset$.

Legyenek $\dfrac{AG}{GB} = \dfrac{k}{p-k}$; $\dfrac{BE}{EC} = \dfrac{l}{p-l}$; $\dfrac{CF}{FA} = \dfrac{m}{p-m}$. Ceva tételét felírva a háromszögre,

$$\frac{AG}{GB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA} = 1 \Leftrightarrow \frac{k}{p-k}\cdot\frac{l}{p-l}\cdot\frac{m}{p-m} = 1 \Leftrightarrow mkl=(p-k)(p-l)(p-m) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m(kl+(p-k)(p-l))=p(p-k)(p-l) \Leftrightarrow m(2kl+p(p-k-l))=p(p-k)(p-l).$$

Az utolsó egyenlőségben a jobb oldal osztható p-vel, tehát a bal is. Következik, hogy $2mkl \vdots p$, $m,k,l, \in \{1,2,\ldots,p-1\} \Rightarrow 2 \vdots p$, $p$ prím $\Rightarrow p=2$. Tehát csak $p$=2-re fut össze három egyenes.Ekkor a tartományok száma 6.

Tovább feltételezzük, hogy $p > 2$. Ha először meghúzuk az $A$-ból induló osztóegyeneseket, azok a háromszöget $p$ részre osztják. A $B$-ből induló osztóegyenesek a meglévő tartományok mindegyikét $p$ részre osztják, ez összesen $p^2$ rész. A $C$-ből induló egyenesek annyival növelik tartományok számát ahány egyenest metszenek. Mindegyik 2($p$-1)+1 egyenest metsz, így a tartományok száma $p^2 + (p-1)\cdot(2p-1) = 3p^2 - 3p + 1$.

**5.** *a) Bizonyítsd be, hogy a $P \in R[X]$ polinomhoz rendelt polinomfüggvény pontosan akkor páros, ha P-ben a páratlan kitevőjű tagok együtthatója 0.*

*b) Képezzük az összes* $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \sqrt{k^2+1}$ *alakú számot, ahol* $\varepsilon_k \in \{-1, 1\}$ *minden* $k \in \{1, 2, ..., n\}$ *esetén. Bizonyítsd be, hogy az így kapott* $2^n$ *szám szorzata természetes szám!*

**Megoldás**

a) Legyen $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} ... + a_1 X + a_0$. A P-hez rendelt polinomfüggvény akkor és csak akkor páros, ha $P(x) - P(-x) = 0 \ \ \forall x \in R$. Viszont a $P(x) - P(-x) = a_n\left(x^n - (-x)^n\right) + a_{n-1}\left(x^{n-1} - (-x)^{n-1}\right) + ... + a_1(x - (-x)) + a_0 - a_0 = 0$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesülhet minden $x$-re, ha $a_1 = 0$, $a_3 = 0$, ..., $a_{2k+1} = 0$ minden $k$-ra.

b) Jelöljük a szorzatot $\Pi$-vel.

$$\Pi = \left(\varepsilon_{11}\sqrt{1^2+1} + \varepsilon_{21}\sqrt{2^2+1} + ... + \varepsilon_{n1}\sqrt{n^2+1}\right) \cdot ... \cdot \left(\varepsilon_{12^n}\sqrt{1^2+1} + \varepsilon_{22^n}\sqrt{2^2+1} + ... + \varepsilon_{n2^n}\sqrt{n^2+1}\right).$$

Tekintjük a

$$P(X_1, X_2, ..., X_n) = (\varepsilon_{11}X_1 + \varepsilon_{21}X_2 + ... + \varepsilon_{n1}X_n)...(\varepsilon_{12^n}X_1 + \varepsilon_{22^n}X_2 + ... + \varepsilon_{n2^n}X_n)$$

$n$ változós polinomot. A polinomhoz rendelt függvény, ha $x_k$ a változó és a többi $x_i$ rögzitett, páros minden $k$-ra, mert $P(x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_n) = P(x_1, x_2, ..., -x_k, ..., x_n)$ bármely $k \in \{1, 2, ..., n\}$ és $x \in R$. Tehát az a) pont alapján minden $k$-ra, ha $x_k$-t tekintjük változónak, a páratlan fokú tagok együtthatói nullával egyenlőek. Tehát csak páros fokú tagok maradnak a polinomban, minden $x_k$ változóra. Behelyettesítve $x_k$-ba $\sqrt{k^2+1}$-et, állításunkat igazoltuk.