Megoldás

IV. RADÓ FERENC EMLÉKVERSENY

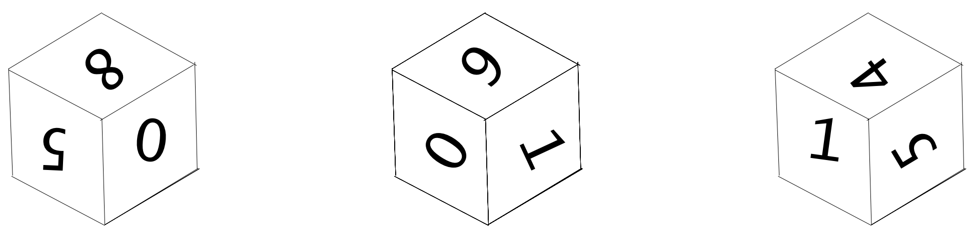
Kolozsvár, 2000. június 3.

V. osztály

1. Határozd meg az $1999 \cdot \underbrace{99.....9}_{1999 \text{ db } 9\text{-es}}$ szorzás eredményében a számjegyek összegét!

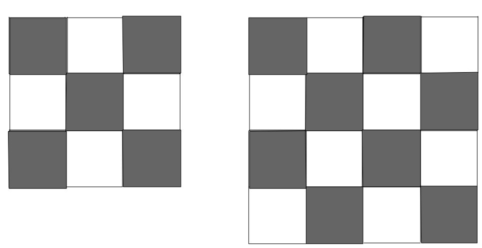
2. Egy kerek asztal köré 16 széket helyeztünk el. Számozd meg a székeket a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, és 16 számokkal úgy, hogy bármely két szomszédos székre írt szám összege teljes négyzet legyen!

3. Egy kocka lapjait a 0, 1, 4, 5, 6, és 8 számokkal jelöltük meg. A rajzon a kockát három különböző helyzetben látod.



Minden helyzet esetén határozd meg, hogy milyen szám áll az egyes lapokon külön-külön!

4. Egy 3m×3m és egy 4m×4m nagyságú sakktáblamintás szőnyeg (lásd a mellékelt ábrát) segítségével egy 5m×5m nagyságú négyzet alakú területet kell lefödni. Mindkét szőnyeget legfeljebb két darabra vághatjuk és a mintát alkotó mezőket nem szabad kettévágni. Tervezz egy ilyen szétvágást és lefödést!



Megoldás

IV. RADÓ FERENC EMLÉKVERSENY

Kolozsvár, 2000. június 3.

VI. osztály

1. Határozd meg a legnagyobb olyan n természetes számot, amelynek számjegyei páronként relatív prímek, minden számjegye a $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ halmazból van és minden számjegy osztója n-nek!

2. Jelöljük S-sel az $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{1999\cdot 2001}$ összeget. Számítsd ki $(2{,}001\cdot S)^{2001}$-t!

3. Egy hegyesszögű és nem egyenlő szárú háromszög alakú papír darabot szét lehet-e vágni

a) három egyenlő szárú háromszög alakú papírdarabra?
b) négy egyenlő szárú háromszög alakú papírdarabra?
c) 2000 darab egyenlő szárú háromszög alakú papírdarabra?

4. Egy sakkbajnokságra hat résztvevő jelentkezett (A, B, C, a, b, és c). A bajnokságon minden résztvevő kell játsszon minden más résztvevővel, és minden résztvevő egy nap csak egy játszmát játszhat. Szervezd meg a játszmákat úgy, hogy a bajnokság öt nap alatt véget érjen! Segítségképpen az első nap játszmáit bejelöltük az alábbi táblázatban:

	A	***B***	***C***	***a***	***b***	***c***
A				**I.**		
B					**I.**	
C						**I.**
a						
b						
c						

(az első nap A játszik a-val, B játszik b-vel és C játszik c-vel)

Megoldás

IV. RADÓ FERENC EMLÉKVERSENY

Kolozsvár, 2000. június 3.

VII. osztály

1. Az egész számok halmazában oldd meg a $\sqrt{x^2}+\sqrt{(y-2)^2}+\sqrt{(z-1)^2}=2$ egyenletet!

2. Az $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ és $B(n, 0)$ pontok közti távolság milyen $n \in \mathbb{N}$ értékekre racionális?

3. Az ABC derékszögű háromszög AB és AC befogóira (kifele) megszerkesztjük az $ABMN$ és $ACPQ$ négyzeteket. Az $AB \cap MC$, $AC \cap BP$, $DE \cap MB$ és $DE \cap CP$ metszéspontokat jelöljük rendre $D, E, F,$ és G-vel. Bizonyítsd be hogy:

a) $DE \parallel MP$;

b) $MP = FG + DE$;

c) az MC és BP egyenesek metszéspontja a háromszög A-hoz tartozó magasságán van.

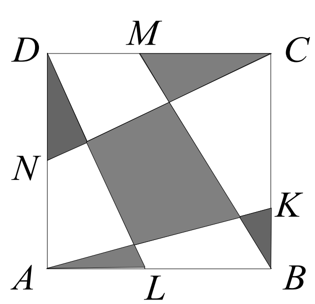
4. Az $ABCD$ egységnyi oldalú négyzetet felosztjuk az AK, BM, CN és DL szakaszokkal négy háromszögre és öt négyszögre úgy, hogy a befestett négyszög területe egyenlő legyen a befestett háromszögek területének összegével (lásd az 1. ábrát). Bizonyítsd be, hogy $AL + BK + CM + DN = 2$.

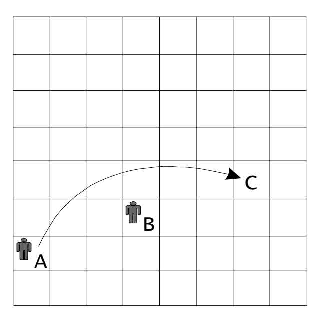
5. Régi ismerősöm, Münchausen báró, a következő sztorit mesélte: „Egy $n\times n$-es sakktábla bal alsó sarkában levő 2×2-es négyzet minden mezőjére egy-egy bábut állítottam. Ez után a bábukat azon szabály szerint mozgattam, hogy bármely A bábu átugorhat egy másik B bábut, és ekkor az A bábu új helyét a B szerinti szimmetriával kapjuk meg (a 2. ábrán egy 8x8-as táblán mutattunk egy ilyen lépést). Persze csak akkor léphet ide az A bábu, ha ez a mező még nem foglalt."

A báró büszkén újságolta: „Ilyen módon az összes bábut a jobb felső sarok 2×2-es négyzetébe vezettem." Okvetlenkedő kérdésemre: „S mi van akkor, ha a tábla $2n\times2n$-es és a bal alsó sarkában levő 3×3-as négyzet minden mezőjére állítunk egy-egy bábut?" azt válaszolta, hogy „Természetesen akkor is felvezethetjük a bábukat a jobb felső 3×3-as sarokba."

Igazat mondott-e a báró?

1. ábra





2. ábra

Megoldás

IV. RADÓ FERENC EMLÉKVERSENY

Kolozsvár, 2000. június 3.

VIII. osztály

1. Az $f_m: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = 3mx - 2m - 1$ függvény grafikonja az Ox tengelyt A_m-ben az Oy tengelyt B_m-ben metszi.

a) Határozd meg azokat az $m \in \mathbb{N}^*$ számokat, amelyekre az A_m pont abszcisszája természetes szám!

b) Bizonyítsd be, hogy $OA_m + OB_m \geq 4 \ \forall \ m \in \mathbb{N}^*$.

2. Bizonyítsd be, hogy ha az a, b és c szigorúan pozitív valós számok összege 1, akkor

$$\frac{a-b}{c+ab} + \frac{b-c}{a+bc} + \frac{c-a}{b+ca} = 0.$$

3. Bizonyítsd be, hogy ha a és b pozitív valós számok, akkor

$$\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a+b}{4} \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}.$$

4. Az $ABCD$ tetraéderben $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $BC = d$ és $AD = c$.

a) Határozd meg azt az $M_0 \in BC$ pontot, amelyre $AM + MD \geq AM_0 + M_0D$ bármely $M \in BC$ esetén!

b) Bizonyítsd be, hogy az (AM_0D) sík felezi az ABD és ACD háromszögek síkjai által meghatározott lapszöget!

c) Bizonyítsd be, hogy az AD és BC egyenesek távolsága $\dfrac{2a^2 + 2b^2 - c^2 - d^2}{4}$.

5. Egy 3×3×3-as kockát 27 darab azonos méretű kiskockából ragasztottunk össze. Egy rágcsáló az egyik kis sarokkocka középpontjából indul, és minden kiskockát pontosan egyszer érintve az ellentétes sarokkockába szeretne jutni (a rágcsáló a szomszédos kiskockák középpontjait összekötő szakaszok mentén haladhat).

a) Sikerülhet-e a rágcsáló terve?

b) Hát akkor, ha a középső kiskockát nem szabad érintenie, de az összes többit továbbra is pontosan egyszer kell érintenie?

Megoldás

IV. RADÓ FERENC EMLÉKVERSENY

Kolozsvár, 2000. június 3.

IX. osztály

1. Bizonyítsd be, hogy $4\sin 20^{\circ} \cdot \cos^2 10^{\circ} = \sqrt{3}\sin 50^{\circ}$.

2. Oldd meg és tárgyald a $\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} = m$, ($x \in \mathbb{R}$) egyenletet az m valós paraméter függvényében.

3. Az ABC háromszög (BC), (CA) és (AB) oldalain felvesszük az M, N és P pontokat úgy, hogy $\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB} = k$.

a) Bizonyítsd be, hogy az AM, BN és CP szakaszokkal szerkeszthető egy $\boldsymbol{H}$ háromszög!

b) Számítsd ki a $\boldsymbol{H}$ és az ABC háromszögek területének arányát k függvényében!

4. Bizonyítsd be, hogy ha az a és b szigorúan pozitív valós számok összege 1, akkor

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \geq 3\sqrt{2} .$$

5. Egy szigeten barna, zöld és szürke kaméleonok élnek. Ha két különböző színű kaméleon találkozik, mindkettő a harmadik színre változtatja a bőrét, míg egyéb körülmények között nem változtatják a színüket.

a) Valaki feljegyezte, hogy egy nap alatt x-szer találkozott barna kaméleon zölddel, y-szor zöld szürkével és z-szer szürke barnával. E találkozások után hány darab zöld, barna illetve szürke kaméleon van a szigeten ha a feljegyzések elkezdésének pillanatában 16 barna, 18 zöld és 20 szürke kaméleon volt?

b) Lehetséges-e, hogy egy idő után minden kaméleon ugyanolyan színű legyen?

Megoldás

IV. RADÓ FERENC EMLÉKVERSENY

Kolozsvár, 2000. június 3.

X. osztály

1. Oldd meg az $(x+2)^{x-2}=(x+2)^{x^2-2x}$ egyenletet a valós számok halmazában!

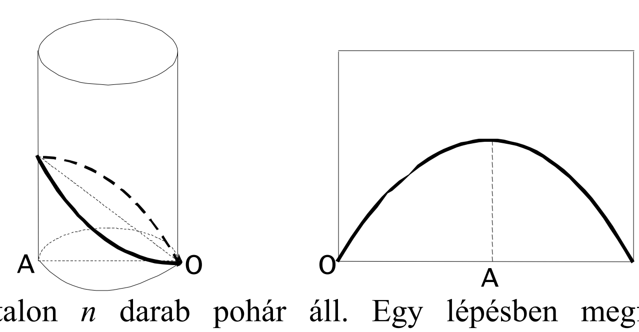
2. A P polinom együtthatói valós számok és fokszáma legfeljebb $2n-1$ ($n\in\mathbb{N}^*$). Bizonyítsd be, hogy ha $a\neq 0$, $\left(P(X)-a\right)\vdots\left(X+a\right)^n$ és $\left(P(X)+a\right)\vdots\left(X-a\right)^n$, akkor $P(X)\vdots X$.

3. Az ABC hegyesszögű háromszög oldalaira (kifele) megszerkesztjük az ACM és ABN egyenlő szárú háromszögeket úgy, hogy $[AM]\equiv[MC]$, $[AB]\equiv[NB]$, $m(\widehat{AMC})=60^\circ$ és $m(\widehat{ABN})=120^\circ$.

a) Határozd meg az M és N pontok affixumát az A, B és C pont affixumának függvényében.

b) Számítsd ki a $\widehat{BPC}$ mértékét, ha P az $[MN]$ szakasz felezőpontja és $m\left(\widehat{ABC}\right)<60^\circ$.

4. Egy egységnyi átmérőjű egyenes körhengert metszünk egy olyan α síkkal, amely a henger szimmetriatengelyével 45°-os szöget zár be, majd a henger palástját kiterítjük a síkra úgy, hogy az O pont az origóba és az OA körív az Ox tengelyre kerüljön (lásd a mellékelt ábrát). Ily módon a henger és az α sík metszetének a kiterítés után egy síkgörbe felel meg. Milyen függvény grafikonja ez a síkgörbe?



5. Egy asztalon n darab pohár áll. Egy lépésben megfordítunk $n-3$ poharat. Elérhetjük-e, hogy az eredeti helyzetéhez viszonyítva minden pohár fordítva álljon, ha $n\vdots 3$ és $n\geq 6$?

Megoldás

IV. RADÓ FERENC EMLÉKVERSENY

Kolozsvár, 2000. június 3.

XI. osztály

1. Az $(x_n)_{n\in\mathrm{N}^*}$ racionális számsorozat tagjai teljesítik a $\frac{2x_{n-1}}{x_{n+1}-x_n}=\frac{n(n+1)}{(n-1)^2}$.

összefüggést minden $n \geq 2$-re és $x_1=2$ valamint $x_2=2$.

a) Határozd meg a sorozat általános tagjának képletét!

b) Tanulmányozd az $(x_n)_{n\in\mathrm{N}^*}$ sorozat korlátosságát!

c) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{n+1}{2}}\cdot\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}}{x_{n+1}}$ határértéket!

2 Az $x^3-px+q=0$ ($p, q \in \mathbb{R}$) egyenlet gyökeit jelöljük x_1, x_2 és x_3-mal. Számítsd ki

a $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2\end{vmatrix}$ determináns értékét p és q függvényében!

3 Tekintsük az $x^n-n\cdot x^2+1=0$ egyenletet.

a) Bizonyítsd be, hogy ha $n \geq 4$, akkor a fenti egyenletnek pontosan egy gyöke van a (0, 1] intervallumban és pontosan egy gyöke az [1, 2) intervallumban. Jelöljük ezeket a gyököket x_n illetve y_n-el.

b) Bizonyítsd be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ és $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=1$.

c) Bizonyítsd be, hogy létezik olyan $n_0 \in \mathbf{N}^*$ szám, amelyre $y_n < 1 + x_n\ \forall\ n \geq n_0$.

4. Bizonyítsd be, hogy ha $x, y \in \mathrm{R}_+^*$ és $x \neq y$ valamint $[nx] \mid [ny]\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*$, akkor

$$x, y \in \mathbb{N} \text{ és } y \vdots x.$$

5. Egy kerek asztal körül n lovag ül ($n \geq 3$). Minden percben egy tetszőlegesen választott lovag két közvetlen szomszédja helyet cserélhet egymással. Lehetséges-e, hogy egy idő után minden lovag jobboldali szomszédja éppen az, aki eredetileg a baloldali szomszédja volt?