XIII. Székely Mikó Matematikaverseny

Sepsiszentgyörgy, 2005. február 19.

IX. osztály

1. Bizonyítsd be, hogy ha $a, b > 0$ és $n \in \mathbb{N}^*$, akkor

a) $(a+b)^n \leq 2^{n-1} \cdot (a^n + b^n)$;

b) $\dfrac{3^2}{4+5} + \dfrac{3^4}{4^2+5^2} + \dfrac{3^6}{4^3+5^3} + \ldots + \dfrac{3^{2n}}{4^n+5^n} \leq 2^n - 1.$

2. a) Az $A \subset [1, \infty)$ legalább háromelemű véges halmaz bármely $a \geq b$ elemeire $a \cdot b \in A$ vagy $\dfrac{a}{b} \in A$. Bizonyítsd be, hogy A elemei mértani haladványt alkotnak.

b) Szerkesszél olyan $A \subset [1, \infty)$ halmazt, amelynek végtelen sok eleme van és bármely $a, b \in A$, $a \geq b$ esetén $a \cdot b \in A$ vagy $\dfrac{a}{b} \in A$.

3. Az $A_1A_2A_3A_4$ négyzet oldalain felvesszük az $F_i \in [A_iA_{i+1}]$ felezőpontokat és a $H_i \in [A_iA_{i+1}]$ pontokat úgy, hogy $\dfrac{A_iH_i}{H_iA_{i+1}} = 2$, minden $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ esetén. Bizonyítsd be, hogy a $H_iA_{i+1}F_{i+1}$ háromszögek G_i $(i \in \{1, 2, 3, 4\})$ súlypontjai egy négyzet csúcsai! $(A_5 = A_1,\ F_5 = F_1)$

4. Egy bizottság rangsorolja az A, B, C és D versenyzőket (holtverseny nincs). A többség az A és B közül $A-$nak, B és C közül $B-$nek, illetve C és D közül $C-$nek adott jobb helyezést.

a) Ha a bizottság 3 tagból áll, lehetséges-e, hogy a többség a D és A közül $D-$nek adott jobb helyezést?

b) Lehetséges-e, hogy legalább a bizottság fele a D és A közül $D-$nek adott jobb helyezést, ha a bizottság tagjainak száma $n > 3$?

Megjegyzés. Munkaidő 3 óra. Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér. Lényeges általánosításért vagy az elsőtől különböző megoldásért feladatonként legfeljebb 5 pont szerezhető.

XIII. Székely Mikó Matematikaverseny

Sepsiszentgyörgy, 2005. február 19.

X. osztály

1. Az $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ komplex számokból álló számsorozatban S_n-nel jelöljük az első n tag összegét.

a) Alkothatnak-e az S_{n-k}, S_n, S_{n+k} összegek számtani haladványt, ha k rögzített és $(a_n)_{n\geq 1}$ számtani haladvány?

b) Alkothatnak-e az S_{n-k}, S_n, S_{n+k} összegek mértani haladványt, ha k rögzített és $(a_n)_{n\geq 1}$ mértani haladvány?

2. Az ABCDEF egységnyi oldalú szabályos hatszög CD és ED oldalán felvesszük az M, illetve N pontokat úgy, hogy az MDN háromszög kerülete 2 egység legyen. Számítsd ki az $\widehat{MAN}$ szög mértékét!

3. **a)** Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén jelöljük S_k-val a

$$k \leq \log_3(n+1) < k+1$$

egyenlőtlenségrendszer $\mathbb{N}-$beli megoldásainak számát.
Lehet-e racionális a $\dfrac{\log_3 S_{k+1}}{\log_3 S_k}$ tört értéke?

b) Számítsd ki az $x_0 = 1$,

$$x_{k+1} = 2x_k + 1, \ \ \forall k \geq 0$$

összefüggésekkel értelmezett sorozat esetén a

$$\sum_{k=1}^{2^n} x_{[\log_2 k]}$$

összeget n függvényében! ($[x]$ az x szám egészrészét jelöli)

4. Felírhatunk-e egy kör kerületére $n+1$ páros és $2n$ páratlan számot úgy, hogy az óramutatók járásával ellentétesen haladva, minden szám osztója legyen a következő két szám összegének? Hát n darab páros és $2n+1$ páratlan számot?

Megjegyzés. Munkaidő 3 óra. Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér. Lényeges általánosításért vagy az elsőtől különböző megoldásért feladatonként legfeljebb 5 pont szerezhető.

XIII. Székely Mikó Matematikaverseny

Sepsiszentgyörgy, 2005. február 19.

XI. osztály

1. Az $(a_n)_{n\geq 0}$ és $(b_n)_{n\geq 0}$ sorozatok tagjai teljesítik az $a_0 > 0,\ b_0 > 0,$

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}} \quad \text{és} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

összefüggéseket, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Bizonyítsd be, hogy mindkét sorozat konvergens és a határértékük egymással egyenlő!

2. **a)** Bizonyítsd be, hogy ha $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, akkor $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$ esetén

$$\det(xA+yB) = x^2 \det A + xy(\det(A+B) - \det A - \det B) + y^2 \det B;$$

b) Bizonyítsd be, hogy ha $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, $\det A \neq 0$ és

$$(\det(A+B))^2 + (\det A - \det B)^2 < 2\det(A+B)(\det A + \det B),$$

akkor $\det(xA + yB) \neq 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$ esetén.

3. A $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^*$ függvényre teljesülnek a $g(0) = 0$,

$$g(n+1) = 2(n+1) - g(g(n))$$

összefüggések, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.

a) Bizonyítsd be, hogy g növekvő;

b) Bizonyítsd be, hogy ha $G(n) = \left(\frac{g(n+1)}{g(n)}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, akkor

$$|G(n) - G(m)| < 7,\ \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$

4. Egy 2005 oldalú szabályos sokszög minden csúcsába írtunk egy-egy egész számot úgy, hogy a számok összege 1. A V csúcsból az óramutatók járásával ellentétesen kiindulva, az első k csúcsba írt szám összegét jelölje $S_k(V)$. Találunk-e olyan V csúcsot, amelyre $S_k(V)$ pozitív, minden $k \in \{1, 2, ..., 2004\}$ esetén?

Megjegyzés. Munkaidő 3 óra. Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér. Lényeges általánosításért vagy az elsőtől különböző megoldásért feladatonként legfeljebb 5 pont szerezhető.

XIII. Székely Mikó Matematikaverseny

Sepsiszentgyörgy, 2005. február 19.

XII. osztály

1. Az $f : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ deriválható függvényre $|f'(x)| \leq 2$, $\forall x \in [0, 1]$ és $f(0) = 0$.

a) Bizonyítsd be, hogy $\int\limits_0^1 f(x)dx \leq 1$.

b) Bizonyítsd be, hogy ha $f(1) = 0$ is teljesül, akkor $\int\limits_0^1 f(x)dx \leq \frac{1}{2}$.

2. Adottak a

$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \{-1, 1\} \right\}, G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} \middle| x, y \in \{-1, 1\} \right\}$

és $G = G_1 \cup G_2$ halmazok. Igazold, hogy ha " $\cdot$ " a mátrixok szorzása, akkor

a) bármely $X, Y \in G_2$ esetén $X \cdot Y,\ Y \cdot X \in G_1$;

b) bármely $X \in G_1$ és bármely $Y \in G_2$ esetén $X \cdot Y,\ Y \cdot X \in G_2$;

c) $(G_1, \cdot)$ Abel-féle csoport és $(G, \cdot)$ csoport;

d) Határozd meg a $(G, \cdot)$ csoport összes részcsoportját!

3. Minden $n \geq 3$ esetén tekintjük az $n-$ed fokú polinomok halmazának a következő részhalmazát:
$\mathcal{P}_n = \{P \in \mathbb{R}[X] | \, \exists x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} : P'(x_i) = 0,\ i = \overline{1, n-1}\}$.

a) Igazold, hogy bármely $P \in \mathcal{P}_3$ esetén létezik $c \in \mathbb{R}$, amelyre a $P(x) = c$ egyenletnek 3 különböző valós gyöke van.

b) Melyik az a legkisebb n, amelyre létezik $P \in \mathcal{P}_n$ úgy, hogy bármely $c \in \mathbb{R}$ esetén a $P(x) = c$ egyenletnek $n-$nél kevesebb valós gyöke van?

4. Bizonyítsd be, hogy ha egy sakktáblára elhelyezünk 25 bábut (egy mezőbe legfeljebb egy bábut), akkor létezik legalább egy téglalap, amelynek minden sarkában van bábu és az oldalai párhuzamosak a tábla széleivel.

Megjegyzés. Munkaidő 3 óra. Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér. Lényeges általánosításért vagy az elsőtől különböző megoldásért feladatonként legfeljebb 5 pont szerezhető.