XII. Székely Mikó Matematikaverseny

Sepsiszentgyörgy, 2004. február 21.

IX. osztály

1. Bizonyítsuk be, hogy ha $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-2, -1\}$, akkor a

$$(3m+2)x^2 - 2mx - 1 = 0$$

egyenletnek nincs racionális gyöke!

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

2. Az $ABCD$ négyszögben jelölje G_A, G_B, G_C és G_D a BCD, ACD, ABD, illetve ABC háromszög súlypontját. Igazoljuk, hogy az AG_A, BG_B, CG_C és DG_D egyenesek összefutóak!

***

3. Igazoljuk, hogy ha a, b és c szigorúan pozitív valós számok, akkor

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{c}}+\sqrt[3]{\frac{c}{a}}\right)^3 \geq 9.$$

Bencze Mihály, Brassó

4. Jelölje M és N az adott O középpontú, egységnyi sugarú kör két változó pontját, és legyen A egy rögzített pont a körön.

a) Határozzuk meg az $|MN| \geq 1$ feltételt teljesítő húrok felezőpontjai által alkotott síkidom területét!

b) Színezzük azúrkékre az összes olyan AMN háromszöglapot, amelynek nincs egynél hosszabb oldala. Határozzuk meg az összes kiszínezett pont által meghatározott alakzatot!

Zsombori Gabriella, Csíkszereda

Megjegyzés. Munkaidő 3 óra. Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér. Lényeges általánosításért vagy az elsőtől különböző megoldásért feladatonként legfeljebb 5 pont szerezhető.

XII. Székely Mikó Matematikaverseny

Sepsiszentgyörgy, 2004. február 21.

X. osztály

1. Az ABC háromszög oldalait a beírt kör az $M \in (BC)$, $N \in (CA)$ és $P \in (AB)$ pontokban érinti. Bizonyítsuk be, hogy ha az ANP, BMP és CMN háromszögek területei egyenlőek, akkor az ABC háromszög egyenlő oldalú!

Biró Béla, Sepsiszentgyörgy

2. Határozzuk meg az

$$\sqrt[5]{8^x + 3 \cdot 2^{x+2}} = \sqrt[3]{32^x - 3 \cdot 2^{x+2}}$$

egyenlet valós megoldásait!

Kovács Béla, Szatmárnémeti

3. Az $M \subset \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ véges halmaz rendelkezik a következő tulajdonsággal: bármely $z \in M$ esetén létezik $a, b \in M$ úgy, hogy $a \neq b$ és

$$|z - a| = |z - b| = 1.$$

Bizonyítsuk be, hogy M elemeinek száma osztható 6-tal!

András Szilárd, Kolozsvár

4. Ha S egy véges sorozat, amelynek minden tagja az $\{\mathrm{X}, \mathrm{O}\}$ halmazból van, akkor $\Delta(S)$ az $S-$ben szereplő X-ek és O$-$k számának különbsége (például, ha $S = \mathrm{XOXOOXO}$, akkor $\Delta(S) = 3 - 4 = -1$). A T sorozatot az S *rész-szekvenciájának* nevezzük, ha T az S valahány egymásután következő eleméből áll (például az előbbi S sorozat néhány rész-szekvenciája XOX, XOOX, OXOOX, stb.). Határozzuk meg azoknak az n hosszúságú S sorozatoknak a számát, amelyeknek **minden** T rész-szekvenciája esetén

$$-1 \leq \Delta(T) \leq 2.$$

Bege Antal, Kolozsvár

Megjegyzés. Munkaidő 3 óra. Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér. Lényeges általánosításért vagy az elsőtől különböző megoldásért feladatonként legfeljebb 5 pont szerezhető.

XII. Székely Mikó Matematikaverseny

Sepsiszentgyörgy, 2004. február 21.

XI. osztály

1. Az $(x_n)_{n\geq 1}$ valós számsorozat teljesíti az

$$x_n^2 + n^2 \leq 1 + 2nx_n, \quad \forall\, n \geq 1$$

feltételeket. Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n}$ határértéket.

***

2. **a)** Adjunk példát olyan $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\setminus\{O_2, I_2\}$ mátrixra, amelyre

$$A^n = A, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

b) Oldjuk meg az

$$X^n = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ n \in \mathbb{N}^*$$

mátrixegyenletet.

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

3. Az $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b^{kx}$$

függvény ($a_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1, n}, b > 1$) teljesíti az $|f(x)| \leq |\operatorname{tg} x|$ egyenlőtlenséget bármely $x \in (-1, 1)$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy

$$\left| \left(\sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k \right) \ln b \right| \leq 1.$$

Bencze Mihály, Brassó

4. Határozzuk meg azt a legkisebb n természetes számot, amelyre az $\{1, 2, 3, \ldots, 2004\}$ halmaz tetszőleges n elemű részhalmazában létezik $x < y$ úgy, hogy y osztható $(y - x)$−szel.

Jakab Tibor, Sepsiszentgyörgy

Megjegyzés. Munkaidő 3 óra. Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér. Lényeges általánosításért vagy az elsőtől különböző megoldásért feladatonként legfeljebb 5 pont szerezhető.

XII. Székely Mikó Matematikaverseny

Sepsiszentgyörgy, 2004. február 21.

XII. osztály

1. Az $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény teljesíti az $f(x) + f(a - x) \neq 0$ összefüggést, bármely $x \in [0, a]$ esetén. Számítsuk ki az

$$I = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a - x)} dx$$

integrált!

***

2. Az $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ kétszer folytonosan deriválható függvényre $f(0) = f(1) = 0$ és

$$f''(x) + 2f'(x) + f(x) \geq 0, \quad \forall x \in (0, 1).$$

Igazoljuk, hogy $f(x) \leq 0, \forall x \in [0, 1]$.

***

3. Bizonyítsuk be, hogy a

$$G_1 = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^x \end{array} \right) \middle| x \in \mathbb{R} \right\} \text{ és } G_2 = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & \log_b x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{array} \right) \middle| x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$$

halmazok a mátrixok szorzásával izomorf Ábel-féle csoportokat alkotnak, ha $a, b \in (1, \infty)$.

Bencze Mihály, Brassó

4. Az $A_0 = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$ mátrixból kiindulva a következő lépést ismételjük: kiválasztunk egy elemet, és az illető elem sorában és oszlopában minden elem előjelét megváltoztatjuk (a kiválasztott elem előjelét egy lépés során egyszer változtatjuk). Legfeljebb mekkora lehet a lépések során kapott mátrixok determinánsa?

András Szilárd, Kolozsvár

Megjegyzés. Munkaidő 3 óra. Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér. Lényeges általánosításért vagy az elsőtől különböző megoldásért feladatonként legfeljebb 5 pont szerezhető.

Megoldások
IX. osztály

1. Ha az egyenletnek lenne racionális gyöke, akkor a $\sqrt{\Delta}$ is racionális lenne. Így elégséges igazolni, hogy Δ nem teljes négyzet (mert $\Delta \in \mathbb{Z}$). Az egyenlet diszkriminánsa $\Delta = 4\left(m^2+3m+2\right) = 4(m+1)(m+2)$. Mivel $m \in \mathbb{Z}\backslash\{-2,-1\}$, következik, hogy $\Delta \neq 0$. Igazoljuk, hogy Δ nem lehet teljes négyzet. Ha $m \geq 0$, akkor

$$m^2+2m+1 < m^2+3m+2 < m^2+4m+4,$$

azaz

$$(m+1)^2 < m^2+3m+2 < (m+2)^2.$$

Ha $m \leq -3$, akkor

$$m^2+4m+4 < m^2+3m+2 < m^2+2m+1,$$

azaz

$$(m+2)^2 < m^2+3m+2 < (m+1)^2.$$

Tehát m^2+3m+2 nem lehet teljes négyzet, és így az egyenlet gyökei nem lehetnek racionálisak.

2. Egy tetszőleges O ponthoz viszonyítva minden X ponthoz hozzárendeljük az $\vec{r} = \overline{OX}$ helyzetvektort.
A G_D és G_B helyzetvektora

$$\begin{aligned} \vec{r}_{G_D} &= \frac{\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C}{3}, \\ \vec{r}_{G_B} &= \frac{\vec{r}_A+\vec{r}_D+\vec{r}_C}{3}. \end{aligned}$$

Így a BG_B és DG_D szakaszok G_B illetve G_D-hez közelebb eső negyedelő pontjainak helyzetvektora

$$\begin{aligned} \frac{3\vec{r}_{GB}+\vec{r}_B}{4} &= \frac{\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C+\vec{r}_D}{4} \\ \frac{3\vec{r}_{GD}+\vec{r}_D}{4} &= \frac{\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C+\vec{r}_D}{4} \end{aligned}$$

Hasonlóan az AG_A és CG_C szakaszok G_A-hoz, illetve G_C-hez közelebb eső negyedelő pontjainak a helyzetvektora is

$$\frac{\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C+\vec{r}_D}{4},$$

tehát az $\dfrac{\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D}{4}$ helyzetvektorú pont közös pontja az AG_A, BG_B, CG_C és DG_D szakaszoknak.

3. A számolások elvégzése és átrendezés után az egyenlőtlenség

$$1 + \frac{2}{3}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right) \geq$$

$$\geq \sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} + \sqrt[3]{\frac{b^2}{ac}} + \sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}} + \sqrt[3]{\frac{ab}{c^2}} + \sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}} + \sqrt[3]{\frac{ca}{b^2}}.$$

A számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget használjuk három számra (hétszer):

$$\tfrac{a}{c} + \tfrac{b}{c} + 1 \geq 3\sqrt[3]{\tfrac{ab}{c^2}},\ \tfrac{a}{b} + \tfrac{c}{b} + 1 \geq 3\sqrt[3]{\tfrac{ac}{b^2}},\ \tfrac{b}{a} + \tfrac{c}{a} + 1 \geq 3\sqrt[3]{\tfrac{bc}{a^2}},$$
$$\tfrac{a}{b} + \tfrac{a}{c} + 1 \geq 3\sqrt[3]{\tfrac{a^2}{bc}},\ \tfrac{b}{a} + \tfrac{b}{c} + 1 \geq 3\sqrt[3]{\tfrac{b^2}{ac}},\ \tfrac{c}{a} + \tfrac{c}{b} + 1 \geq 3\sqrt[3]{\tfrac{c^2}{ab}}.$$
$$\tfrac{b}{a} + \tfrac{a}{c} + \tfrac{c}{b} \geq 3$$

Az előbbi egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összeadva a bizonyítandó egyenlőtlenséghez jutunk.

4. **a)** Legyen P az MN szakasz felezőpontja. Ha $|MN| = 1$, akkor az OMN háromszög egyenlő oldalú és $|OP| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tehát az 1 hosszúságú húrok felezőpontjainak mértani helye a $\mathcal{C} = \mathcal{C}(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ kör. Rögzítsünk tetszőlegesen egy $|AB| = 1$ húrt, és jelöljük a felezőpontját Q-val. Ekkor minden $|MN| > 1$, $MN \parallel AB$ húr esetén $P \in (QQ')$, ahol QQ' átmérője a $\mathcal{C}$ körnek. Így a mértani hely a $\mathcal{C}$ körlap.

b) Az AMN háromszögnek nincs 1-nél hosszabb oldala, tehát a feladat visszavezethető a következő feladatra: keressük azon $|MN| = 1$ szakaszok felezőpontjainak mértani helyét, ahol M, N rajta van a kisebbik $A'AA''$ köríven ($|AA'| = |AA''| = 1$). Az a) alpont alapján a mértani hely az $A'P'P''A''$ görbevonal, ahol $A'P' = A''P'' = \frac{1}{2}$ és $P', P'' \in \mathcal{C}$, $m(\widehat{P'OP''} = 60°)$. Tehát a keresett alakzat az ábrán látható bevonalkázott rész. A bizonyítás teljességéhez hozzátartozik, hogy e tartomány minden Q pontjához szerkesszünk egy olyan háromszöget, amely eleget tesz a feladat feltételeinek. Ez elvégezhető, ha a Q pontból érintőt húzunk a $P'P''$ körívhez.

Megoldások
X. osztály

1. A szokásos jelöléseket használjuk. Igazolható, hogy
$|AP| = |AN| = p - a$, $|BP| = |BM| = p - b$ és $|CM| = |CN| = p - c$.
Ez alapján
$$\frac{\sigma[ANP]}{\sigma[ABC]} = \frac{AP \cdot AN}{AC \cdot AB} = \frac{(p-a)^2}{bc}.$$
Hasonlóan
$$\frac{\sigma[BPM]}{\sigma[ABC]} = \frac{BP \cdot BM}{BC \cdot BA} = \frac{(p-b)^2}{ac}.$$
A $\sigma[APN] = \sigma[BPM]$ egyenlőség alapján $a(p-a)^2 = b(p-b)^2$. Ez rendre ekvivalens a következő egyenlőségekkel:
$$(a-b)\left[p^2 - 2p(a+b) + a^2 + ab + b^2\right] = 0$$
$$(a-b)\left[(p-a-b)^2 - ab\right] = 0$$
$$(a-b)\left[a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc\right] = 0.$$
A második zárójel nem lehet 0, mert a szerint csoportosítva és megoldva mint másodfokú egyenletet, az $a = b + c - 2\sqrt{bc}$ összefüggéshez jutunk. Ez ellentmond az $a > |b - c|$ egyenlőtlenségnek.

2. Jelöljük az egyenlőség két oldalának közös értékét y-nal. A $2^x = u$ jelöléssel az $u^3 + 12u = y^5$ és $u^5 - 12u = y^3$ egyenlőségekhez jutunk. Ez alapján $u^3 + u^5 = y^3 + y^5$. Ezt az egyenlőséget a következő módon alakíthatjuk:
$$(u-y)\left(u^2 + uy + y^2 + u^4 + u^3y + u^2y^2 + uy^3 + y^4\right) = 0.$$
Mivel $u > 0$ és $y > 0$ (az egyenlet bal oldala pozitív) következik, hogy $u = y$. Ezt visszahelyettesítve, az $u\left(u^4 - u^2 - 12\right) = 0$ egyenlethez jutunk és ennek az egyetlen megfelelő megoldása $u = 2$. Ebből következik, hogy $x = 1$ az eredeti egyenlet egyetlen megoldása.

3. Ha ábrázoljuk az M-beli számok komplex-síkbeli képét, az origó középpontú egységsugarú kör egy részhalmazát kapjuk. Ha z képe az X pont, akkor a feladat feltételei alapján a z-hez tartozó a és b pontok képe a $\mathcal{C}(X, 1)$ körnek a $\mathcal{C}(0, 1)$ körrel való A és B metszéspontjai. Így a feladat feltételeit használva, az XAA_1YB_1B szabályos hatszög csúcsaihoz tartozó komplex számok is M-ben vannak. Tehát M elemei 6-os csoportokba oszthatók. Ez alapján M elemeinek száma osztható 6-tal.

4. Ha $-1 \leq \Delta(T) \leq 1$, akkor S-ben nem fordulhat elő XX vagy OO, azaz X-et O kell kövessen és fordítva (hacsak nem utolsó tagról van szó). Így csak az $\underbrace{\text{OXOXOX...}}_{n\, tag}$ és $\underbrace{\text{XOXOXO...}}_{n\, tag}$ sorozatok tesznek eleget a $-1 \leq \Delta(T) \leq 1$, feltételnek. Ha $-1 \leq \Delta(T) \leq 2$, akkor O-t mindig X kell kövessen és két X-nél több nem fordulhat elő egymás után. De a sorozatban nem lehet egynél több helyen két egymásutáni X (valóban $\Delta(\text{XX}\underbrace{\text{OXOX}\ldots\text{XOX}}_{\Delta(T)=0}X) = 3$).

Tehát a feltételeknek eleget tevő S sorozatok:

$$\begin{array}{c}
\text{XXOXOXOX}\ldots \\
\text{OXXOXOXO}\ldots \\
\text{XOXXOXOX}\ \ldots \\
\vdots \\
\ldots\text{XOXOXOXX}
\end{array}$$

vagyis összesen $(n-1)$ darab. Tehát azon S sorozatok száma, amelyekre $-1 \leq \Delta(T) \leq 2$, $(n-1) + 2 = n + 1$.

Megoldások
XI. osztály

1. A feltételek alapján:

$$(x_n - n)^2 \quad \leq \quad 1, \quad n \geq 1$$

$$n - 1 \leq x_n \leq n + 1, \quad n \geq 1$$

$$1 - \frac{1}{n} \leq \frac{x_n}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}, \quad n \geq 1 \tag{1}$$

(**??**)-ben határértékre térve a fogó tétel alapján:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} \leq \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

azaz

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} = 1.$$

2. a) Elégséges olyan $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\backslash\{O_2, I_2\}$ mátrixot szerkeszteni, amelyre $A^2 = A$, mert ez alapján $A^3 = A^2 = A$, $A^4 = A^2 = A$ stb. következik. Ha $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, akkor $A^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{bmatrix}$, tehát az

$$\begin{cases} a^2 + bc = a \\ b(a+d) = b \\ c(a+d) = c \\ d^2 + bc = d \end{cases}$$

egyenletrendszer egy megoldását kell megszerkeszteni. Ha $a + d = 1$, akkor az első és az utolsó egyenlet ekvivalens és a középső kettő teljesül, tehát a $bc = a(1-a)$ összefüggés elégséges. Így az $A = \begin{bmatrix} a & 1-a \\ a & 1-a \end{bmatrix}$ alakú mátrixokra $A^n = A$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Megjegyzés. Felírható a feltételt teljesítő összes mátrix paraméteres alakja is.
b) Ha $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, akkor $X^2 - (a+d)X + detX \cdot I_2 = 0$. Másrészt az adott egyenlőségből következik, hogy $0 = detX^n = (detX)^n$, tehát

$detX = 0$. Az előbbi egyenlőségek alapján $X^2 = (a+d)X$, tehát $X^n = (a+d)^{n-1}X$, $\forall n \geq 2$. Az

$$\begin{cases} a(a+d)^{n-1} = 3 \\ b(a+d)^{n-1} = -2 \\ c(a+d)^{n-1} = -1 \\ d(a+d)^{n-1} = 6 \end{cases}$$

rendszer első két egyenlete alapján $(a+d)^n = 1$. Ha n páratlan, akkor $a, b \in \mathbb{R}$ alapján $X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ az egyetlen megoldás, míg páros n esetén a megoldások $X_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ és $X_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Ha $x = 0$, akkor $|f(0)| \leq 0$, azaz $f(0) = 0$ vagyis $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 0$. A megadott feltétel alapján írhatjuk, hogy:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \left(b^{kx} - 1\right)}{x} \right| \leq \left| \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right|.$$

Határértékre térve a

$$\lim_{n \to \infty} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \left(b^{kx} - 1\right)}{x} \right| \leq \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right|$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Ez éppen a kért egyenlőtlenség.

4. Ha kiválasztunk egy legalább 1003 elemű részhalmazt, akkor ebben van két egymásutáni szám, és így ezek közül a nagyobbik osztható a különbségükkel (vagyis 1-gyel). Másrészt, ha csak a páratlanokat választjuk ki (1002 darab), akkor ezek közt a különbségek párosak, tehát nem létezik $x < y$ úgy, hogy y osztható $(y - x)-$szel. Tehát a keresett n érték 1003.

Megoldások
XII. osztály

1. Ha $J = \int\limits_0^a \frac{f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}dx$, akkor $I + J = a$. Másrészt az I integrálban az $y = a - x$ helyettesítéssel az $I = J$ egyenlőséghez jutunk. Tehát $I = \frac{a}{2}$.

2. Az adott feltételek alapján írhatjuk, hogy $(f(x) \cdot e^x)'' \geq 0$, tehát a $g(x) = f(x) \cdot e^x$, $\forall x \in [-1, 1]$ függvény konvex a $[0, 1]$ intervallumon. Mivel $g(0) = g(1) = 0$, következik, hogy $g(x) \leq 0$, $\forall x \in [0, 1]$. Ebből következik a kért egyenlőtlenség.

3. Az $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^x \end{pmatrix}$ és $B(x) = \begin{pmatrix} 1 & \log_b x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ jelöléssel értelmezhetjük a következő függvényeket:

$$f_1 : \mathbb{R} \to G_1,\ f_1(x) = A(x),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

$$f_2 : \mathbb{R}_+^* \to G_2,\ f_2(x) = B(x),\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Mindkét függvény bijektív és

$$f_1(x + y) = f_1(x) \cdot f_1(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

illetve

$$f_2(x)f_2(y) = f_2(xy),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Ebből következik, hogy

$$(\mathbb{R}, +) \simeq (G_1, \cdot) \text{ és } (\mathbb{R}_+^*, \cdot) \simeq (G_2, \cdot).$$

Másrészt $(\mathbb{R}, +) \simeq (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ (egy izomorfizmus az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = e^x$ függvény), tehát $(G_1, \cdot)$ és $(G_2, \cdot)$ izomorf Ábel-féle csoportok.
Megjegyzés. Az előbbi gondolatmenet a következő két tételen alapul:

1) Ha $(G, \circ)$ csoport és az $f : (G, \circ) \to (H, \diamond)$ függvény bijektív és kompatibilis a műveletekre, akkor $(H, \diamond)$ is csoport és $(G, \circ) \simeq (H, \diamond)$.
2) Ha $(G_1, \circ) \simeq (H_1, \diamond)$, $(G_2, \oplus) \simeq (H_2, \otimes)$ és $(G_1, \circ) \simeq (G_2, \oplus)$, akkor $(H_1, \diamond) \simeq (H_2, \otimes)$.

4. Tetszőleges lépésszám után a mátrix minden eleme 1 vagy -1 lehet. Így a determináns kifejtése hat tagot tartalmaz, mindegyik abszolút értéke 1. Ebből következik, hogy a determináns nem lehet nagyobb, mint 6. Ahhoz, hogy a determináns 6 legyen, olyan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

mátrixhoz kellene eljutni, amelyben az $a_{13}a_{22}a_{31}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$ és $a_{32}a_{23}a_{11}$ szorzatok -1-gyel egyenlőek, és az $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$ illetve $a_{32}a_{21}a_{13}$ szorzatok 1-gyel. Ez nem lehetséges, mert az első három szorzat szorzata egyenlő az utolsó három szorzat szorzatával. Másrészt, ha a kifejtés egy tagjában megváltozik az előjel, akkor a determináns páros számmal változik, tehát a determináns értéke mindvégig páros. Ebből következik, hogy a determináns nem lehet nagyobb, mint 4. Az alábbi lépések mutatják, hogy 4 elérhető.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(rendre a főátló elemeit választottuk). Az utolsó mátrix determinánsa 4, tehát a determináns lehető legnagyobb értéke 4.