Előszó

A 2002-es évet a nagyvilág Bolyai-évként fogja számon tartani. Számunkra a két Bolyai főként matematikai eredményeivel „a semmiből egy új világot teremtve” híressé tette az erdélyi gondolkodást.

Bolyai János kódolt írását Dr. Kiss Elemér, a csíkszeredai Márton Áron Gimnázium egykori diákja fejtette meg. Angol és magyar nyelven megjelent könyveiben olvashatók, közkinccsé téve az első nem euklideszi geometria megteremtőjének kevésbé ismert eredményei is.

Az 1910-11-es tanévben Szőkefalvi-Nagy Gyula matematikus az algebrai függvények problémáinak megoldása mellett a csíkszeredai Gimnázium tanára is volt.

Nehéz történelmi időkben is töretlen volt e vidéken a matematika tanítása. Egykori csíkszeredai diákok ma már elismert egyetemi és középiskolai tanárok, matematikusok.

1992-ben Csíkszereda rendezte meg az I. Márton Áron Emlékversenyt, az Erdélyi Magyar Matematikaverseny egyik szakaszát. Azóta is a csíkszeredai diákok rendszeresen szerepelnek a Nemzetközi Magyar Matematikaverseny díjazottjai közt. 2002-ben a Márton Áron Gimnázium vállalta fel az Erdélyi Magyar Matematikaverseny záró szakaszának, a X. Székely Mikó Emlékversenynek a megrendezését. Merész újításnak és egyben korszakváltásnak számít az, hogy a mostani Versenybizottság nagy része az Erdélyi és Nemzetközi Magyar Matematikaversenyek egykori díjazott tanulóiból áll.

Köszönet minden matematikatanárnak, aki még mindig a nemzet napszámosaként e versenyre felkészítette Erdély számos iskolájából idesereglett 200 diákot. Köszönet a rendezőknek, szervezőknek, a támogatóknak, hogy létrejöhetett e verseny.

A versenybizottság

IX. OSZTÁLY

1. Igazold, hogy

$$2^{n-1}\left(1+a_1\cdot a_2\cdot\ \dots\ \cdot a_n\right)\geq\left(1+a_1\right)\cdot\left(1+a_2\right)\cdot\ \dots\ \cdot\left(1+a_n\right),$$

ahol $n\in\mathbb{N}^*$ és $a_k\geq 1$, $k=\overline{1,n}$. ***

2. Igazold, hogy ha az $a_i,\ b_j\in\mathbb{R}$ $\left(i=1,\ 2,\ \dots,\ n;\ j=1,\ 2,\ \dots,\ m\right)$ valós számokra teljesül a

$$\left[k\cdot a_1\right]+\left[k\cdot a_2\right]+\dots+\left[k\cdot a_n\right]=\left[k\cdot b_1\right]+\left[k\cdot b_2\right]+\dots+\left[k\cdot b_m\right],$$

egyenlőség, bármely $k\in\mathbb{N}$ esetén, akkor $a_1+a_2+\dots+a_n=b_1+b_2+\dots+b_m$. Igaz-e a fordított állítás? ($\left[a\right]$ az a szám egész részét jelöli).

Bencze Mihály, Brassó

3. Az ABC háromszög AB és CA oldalán mozog egy M és egy P pont A-tól B felé illetve C-től A felé. Mindkét pont állandó sebességgel halad, egyszerre indulnak és egyszerre érkeznek az oldal végpontjába. A BC oldalon velük egy időben indul egy N pont a B-ből a C-be és úgy mozog, hogy minden pillanatban teljesüljön az $\frac{CN}{BC}=\left(\frac{BM}{AB}\right)^2$ egyenlőség. Határozd meg az MNP háromszög súlypontjának mértani helyét.

SzMMV

4. Egy konvex 2002 oldalú sokszög minden csúcsát pirosra vagy kékre színezzük úgy, hogy mindkét szín legalább egyszer előforduljon. A csúcsok által meghatározott minden háromszöglapot pirosra színezünk (a csúcsok színe nem változik meg) ha legalább két csúcsa piros (előfordulhat, hogy egy-egy síkrészt többször is kiszínezünk). Miután minden színezhető háromszöglapot kiszíneztünk, ugyanezt megismételjük a kék színnel. Határozd meg a csúcsok színezését, ha a sokszög belsejének minden pontját pirossal is és kékkel is kiszíneztük.

SzMMV

X. OSZTÁLY

1. Igazold, hogy ha $a,b,c>1$, akkor

$$\log_{bc}\left(a^2bc\right)\log_{ac}\left(ab^2c\right)\log_{ab}\left(abc^2\right)\geq 8.$$

Bencze Mihály, Brassó

2. Bizonyítsd be, hogy a $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pozitív tagú valós számsorozat akkor és csakis akkor mértani haladvány, ha bármely $n\geq 3$ természetes szám esetén fennáll a következő egyenlőség:

$$\sqrt{\left(b_1+b_2\right)^2+\left(b_2+b_3\right)^2+\dots+\left(b_{n-1}+b_n\right)^2}=\sqrt{b_1^2+\dots+b_{n-1}^2}+\sqrt{b_2^2+\dots+b_n^2}.$$

Bencze Mihály, Brassó

3. Az OAB és OCD azonos körbejárású, egyenlő oldalú háromszögek AO, OB, OC, CD oldalainak felezőpontjait jelöljük rendre M-mel, N-nel,

P -vel és Q -val. Bizonyítsd be, hogy ha R az MQ felezőpontja, akkor az NPR háromszög R -ben derékszögű.

SzMMV

4. Egy n oldalú konvex sokszög minden csúcsát kiszínezzük pirosra vagy feketére és a csúcsok által meghatározott szakaszokra (oldalakra és átlókra) 1-est írunk ha a két végpontja azonos színű, ellenkező esetben –1-est írunk. Határozd meg a szakaszokra írt számok összegének lehető legkisebb értékét.

SzMMV

XI. OSZTÁLY

1. Egy bolha ugrálni kezd a síkon. A k -adik ugrásának hossza $\frac{1}{k}$, bármely $k \in N^*$ esetén. n ugrás után eszébe jut, hogy valamit a kiindulási pontban felejtett. Visszajuthat-e a kiindulási pontba?

SzMMV

2. Az $M = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix} \middle| \, u, v \in \mathbb{R} \right\}$ halmazban oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} X + Y + Z = 2I_2 \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 6I_2 \\ X^3 + Y^3 + Z^3 = 8I_2 \end{cases}.$$

Bencze Mihály, Brassó

3. Tekintsük a $d_j: \ y = \alpha_j x$ páronként különböző egyeneseket, ahol $j = \overline{1, n}$ és $n \in \mathbb{N}^*$ rögzített. Az $A_1 \in d_1$ pontból kiindulva megszerkesztjük az $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ pontsorozatot, a következő szabályok szerint:

1. Ha $A_i \in d_j$, akkor $A_{i+1} \in \begin{cases} d_{j+1}, \text{ ha } j \le n-1 \\ d_1, \quad \text{ ha } j = n \end{cases}$.
2. $A_i A_{i+1}$ párhuzamos az Ox tengellyel, ha i páratlan és párhuzamos az Oy tengellyel, ha i páros.

Jelöljük x_k -val az A_{2k-1} pont abszcisszáját, minden $k \in \mathbb{N}^*$ esetén. Vizsgáljuk az $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sorozat konvergenciáját.

SzMMV

4. Tekintsük egy $3 \times n$-es négyzetháló rácspontjait (összesen $4 \cdot (n+1)$ rácspont). Hány olyan rombusz létezik, amelynek minden csúcspontja ilyen rácspont. (Nemcsak a rombusz mérete, hanem a helyzete is számít)?

SzMMV

X. Székely Mikó Matematikaverseny

XII. OSZTÁLY

1. Adott az $M = \left\{ \begin{pmatrix} ax+1 & 0 & ax \\ 0 & 0 & 0 \\ ax & 0 & ax+1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2a} \right\} \right\}$ halmaz, ahol $a \neq 0$ tetszőlegesen rögzített valós szám. Bizonyítsd be, hogy $(M, \cdot)$ Abel-féle csoport és $(M, \cdot) \cong (G, *)$, ahol $G = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2a} \right\}$ és $\forall\, x, y \in G$ esetén $x * y = x + y + 2axy$.

Bencze Mihály, Brassó

2. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény egy $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ primitívje teljesíti az

$$\left(1 + (\alpha + 1)\sin^2 x\right) f(x) F^{\alpha}(x) \leq \sin 2x$$

egyenlőtlenséget $\forall\, x \in \mathbb{R}$ esetén, ahol $\alpha > 0$ rögzített valós szám. Bizonyítsd be, hogy nem létezik a $\lim\limits_{x \to \infty} F(x)$ határérték!

Bencze Mihály, Brassó

3. Legyen $a > 0$ egy valós szám és $f : [0, a] \to \mathbb{R}_+$ egy integrálható függvény.

a) Bizonyítsd be, hogy bármely $x_0 \in [0, a] \setminus \left\{ \frac{a}{2} \right\}$ esetén az $(x_0, f(x_0))$ ponton át húzható olyan d_{x_0} egyenes, amelyre a grafikus kép, a d_{x_0} egyenes, az $x = a$ egyenletű egyenes és az Oy tengely által határolt síkrésznek ugyanakkora területű darabja van a d_{x_0} alatt, mint fölött.

b) Bizonyítsd be, hogy a d_{x_0} egyenesek összefutók ha x_0 a $[0, a] \setminus \left\{ \frac{a}{2} \right\}$ halmazban változik és határozd meg az összefutási pont koordinátáit.

SzMMV

4. Bizonyítsuk be, hogy

a) ha $n = 4k + 2$ és $k \geq 1$, akkor a $(\mathbb{Z}_n, +)$-nak létezik három halmazból álló partíciója, amelyre nem választható ki a partíció három halmazából egy-egy elem, amelyek számtani haladványt alkotnak;

b) a $(\mathbb{Z}_7, +)$ csoport tetszőleges, három halmazból álló partíciója esetén kiválasztható a partíció halmazaiból egy-egy elem, amelyek számtani haladványt alkotnak.

(egy X halmaz partíciója olyan páronként diszjunkt részhalmaz rendszerét jelenti, amelyek egyesítése az X)

SzMMV

MEGOLDÁSOK

IX. OSZTÁLY

1. Igazold, hogy

$$2^{n-1}\left(1+a_1\cdot a_2\cdot\ ...\ \cdot a_n\right)\geq\left(1+a_1\right)\cdot\left(1+a_2\right)\cdot\ ...\ \cdot\left(1+a_n\right),$$

ha $n\in\mathbb{N}^*$ és $a_k\geq 1$, bármely $k\in\mathbb{N}^*$.

Megoldás. Matematikai indukcióval igazoljuk az egyenlőtlenséget.
$n=1$ esetén $1+a_1\geq 1+a_1$, ami igaz.
$n=2$ esetén a $2\cdot\left(1+a_1\cdot a_2\right)\geq\left(1+a_1\right)\cdot\left(1+a_2\right)$ egyenlőtlenség ekvivalens az $\left(a_1-1\right)\cdot\left(a_2-1\right)\geq 0$ egyenlőtlenséggel, amely igaz a feladat feltételei alapján.
Tételezzük fel, hogy az egyenlőtlenség igaz n esetén.
Igazoljuk, hogy $n+1$ esetén is igaz. Az indukciós feltétel alapján:

$$\left(1+a_1\right)\cdot\left(1+a_2\right)\cdot\ ...\ \cdot\left(1+a_n\right)\cdot\left(1+a_{n+1}\right)\leq 2^{n-1}\cdot\left(1+a_1\cdot a_2\cdot\ ...\ \cdot a_n\right)\cdot\left(1+a_{n+1}\right)$$

Még igazolni kellene, hogy

$$2^{n-1}\cdot\left(1+a_1\cdot a_2\cdot\ ...\ \cdot a_n\right)\cdot\left(1+a_{n+1}\right)\leq 2^n\cdot\left(1+a_1\cdot a_2\cdot\ ...\ \cdot a_n\cdot a_{n+1}\right).$$

Egyszerűsítés után az $x=a_1\cdot a_2\cdot...\cdot a_n$ és $y=a_{n+1}$ jelölések segítségével az előbbi egyenlőtlenség $2\cdot\left(1+x\cdot y\right)\geq\left(1+x\right)\cdot\left(1+y\right)$ alakba írható. Mivel egynél nem kisebb számok szorzata nem lehet egynél kisebb, az x sem kisebb mint 1, tehát az előbbi egyenlőtlenség az $n=2$ eset alapján igaz.

2. Igazoljuk, hogy ha az $a_i,\ b_j\in\mathbb{R}$ $\left(i=1,\ 2,\ ...\ ,\ n\ ;\ j=1,\ 2,\ ...\ ,\ m\right)$ valós számokra teljesül a

$$\left[k\cdot a_1\right]+\left[k\cdot a_2\right]+...+\left[k\cdot a_n\right]=\left[k\cdot b_1\right]+\left[k\cdot b_2\right]+...+\left[k\cdot b_m\right]$$

egyenlőség, bármely $k\in\mathbb{N}$ esetén, akkor

$$a_1+a_2+...+a_n=b_1+b_2+...+b_m.$$

Igaz-e a fordított állítás? ($\left[a\right]$ az a szám egész részét jelöli).

Megoldás. Először kimutatjuk, hogy ha $x,\ y\in\mathbb{R}$ és $\left|x-y\right|\leq\frac{1}{n}$, bármely $n\in\mathbb{N}^*$ esetén, akkor $x=y$.

Tételezzük fel, hogy $x\neq y$. Mivel $\left|x-y\right|>0$, következik, hogy $n\leq\frac{1}{\left|x-y\right|}$, bármely $n\in\mathbb{N}^*$ esetén. Ha $p=\left[\frac{1}{\left|x-y\right|}\right]+1$, akkor $n\leq\frac{1}{\left|x-y\right|}<p$, bármely $n\in\mathbb{N}^*$ és így $p+1<p+1$ hamis, tehát $x=y$.

Mivel $\left[k\cdot x\right]\leq k\cdot x<\left[k\cdot x\right]+1$, ezért $0\leq x-\frac{\left[k\cdot x\right]}{k}<\frac{1}{k}$, azaz $\left|x-\frac{\left[k\cdot x\right]}{k}\right|<\frac{1}{k}$.

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} \frac{[k \cdot a_i]}{k} + \sum_{j=1}^{m} \frac{[k \cdot b_j]}{k}\right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \left|a_i - \frac{[ka_i]}{k}\right| + \sum_{j=1}^{m} \left|b_j - \frac{[kb_j]}{k}\right| \le \frac{n+m}{k}.$$

Tehát $\left|\dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j}{n+m}\right| < \dfrac{1}{k}$, bármely $k \in \mathbb{N}^*$ esetén, ezért az előbbi észrevétel miatt $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j\right| = 0$, ami azt jelenti, hogy $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$.

A fordított állítás hamis, ez belátható a következő példa alapján:
$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{31}{30}$ és legyen $k = 30 \cdot t + 17$ $(t \in \mathbb{N})$, ekkor $\left[\frac{k}{2}\right] + \left[\frac{k}{3}\right] + \left[\frac{k}{5}\right] \neq \left[\frac{31 \cdot k}{30}\right]$, mert $15 \cdot t + 8 + 10 \cdot t + 5 + 6 \cdot t + 3 \neq 31 \cdot t + 17$.

3. Az ABC háromszög AB és CA oldalán mozog egy M és egy P pont A-tól B felé illetve C-től A felé. Mindkét pont állandó sebességgel halad, egyszerre indulnak és egyszerre érkeznek az oldal végpontjába. A BC oldalon velük egy időben indul egy N pont a B-ből a C-be és úgy mozog, hogy minden pillanatban teljesüljön az $\dfrac{CN}{BC} = \left(\dfrac{BM}{AB}\right)^2$ egyenlőség. Határozd meg az MNP háromszög súlypontjának mértani helyét.

Megoldás. Az N pont ugyanannyi idő alatt futja be a BC oldalt, mint a másik két pont az AB illetve CA oldalt (mert a $\dfrac{CN}{BC}$ arány pontosan akkor egyenlő 0-val, amikor az $\dfrac{BM}{AB}$ arány egyenlő 0-val). Ha 1 időegységnek tekintjük az oldalak végigjárásához szükséges időt, akkor az M, N és P pontok helyzetvektorainak egyenlete

$$\vec{m} = t \cdot \vec{a} + (1-t) \cdot \vec{b},\ \vec{p} = t \cdot \vec{c} + (1-t) \cdot \vec{a} \text{ és } \vec{n} = t^2 \cdot \vec{b} + \left(1-t^2\right) \cdot \vec{c}.$$

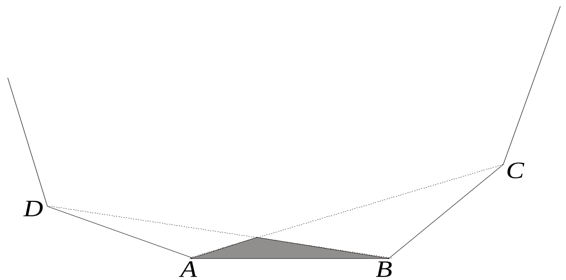
(Itt a t paraméter az $\dfrac{BM}{AB}$ arányt jelenti, ez egyenletesen változik 0-tól 1-ig a mozgás ideje alatt.) Így a súlypont helyzetvektora

$$\vec{g} = \frac{1}{3}\left(\vec{m} + \vec{n} + \vec{p}\right) = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) + \frac{1}{3} \cdot t \cdot (1-t) \cdot \left(\vec{c} - \vec{b}\right),$$

tehát a mértani hely az ABC háromszög G súlypontján át a BC-hez húzott párhuzamos egyenesen a G végpontú $\frac{BC}{12}$ hosszúságú szakasz, amely az A-hoz tartozó oldalfelező ugyanazon oldalán van, mint a C (a $t(1-t)$ kifejezés a $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ intervallumban veszi fel az értékeit, ha $t\in[0,1]$).

4. Egy konvex 2002 oldalú sokszög minden csúcsát pirosra vagy kékre színezzük úgy, hogy mindkét szín legalább egyszer előforduljon. A csúcsok által meghatározott minden háromszöglapot pirosra színezünk (a csúcsok színe nem változik meg) ha legalább két csúcsa piros (előfordulhat, hogy egy-egy síkrészt többször is kiszínezünk). Miután minden színezhető háromszöglapot kiszíneztünk, ugyanezt megismételjük a kék színnel. Határozd meg a csúcsok színezését, ha a sokszög belsejének minden pontját pirossal is és kékkel is kiszíneztük.

Megoldás. Ha van két egymás melletti pirossal színezett csúcs (A és B), akkor a mellettük fekvő két csúcs és az általuk meghatározott két átló valamint az AB oldal által közrezárt síkrész csak piros színnel színezhető. Hasonló tulajdonság igaz két egymás melletti kék színnel színezett csúcsra is. Így a sokszög teljes belső tartománya nem színezhető egyik színnel sem, ha van két azonos színnel színezett egymás melletti csúcs. Eszerint ahhoz, hogy a teljes belső tartomány színezhető legyen mindkét színnel szükséges, hogy a csúcsokat a két színnel felváltva színezzük (egy piros, egy kék stb.).
Azonnal belátható, hogy ez elégséges is. (Ha minden második csúcs által meghatározott 1001 oldalú sokszöget vizsgáljuk, akkor ennek minden csúcsa ugyanolyan színnel van színezve, tehát a belseje is színezhető ezzel a színnel teljes egészében és rajta kívül csak olyan háromszögek vannak, amelyeknek két csúcsuk ehhez az 1001 oldalú sokszöghöz tartozik, tehát ezek is mind színezhetők ezzel a színnel. Mivel ez érvényes mindkét színre a megoldás teljes.)



X. OSZTÁLY

1. Igazold, hogy ha $a,b,c>1$, akkor

$$\log_{bc}\left(a^2bc\right)\log_{ac}\left(ab^2c\right)\log_{ab}\left(abc^2\right)\geq 8 .$$

Megoldás. $\frac{1}{8}\prod \log_{bc} a^2bc = \frac{1}{8}\prod\left(1+2\log_{bc} a\right) = \prod\left(\frac{1}{2}+\log_{bc} a\right) =$

$$= \prod\left(\frac{\lg b+\lg c+2\lg a}{2\left(\lg b+\lg c\right)}\right) = \prod\frac{\left(\lg a+\lg b\right)+\left(\lg a+\lg c\right)}{2\left(\lg b+\lg c\right)} \geq$$

$$\geq \prod\frac{2\sqrt{\left(\lg a+\lg b\right)\left(\lg a+\lg c\right)}}{2\left(\lg b+\lg c\right)} = \prod\frac{\lg a+\lg b}{\lg a+\lg b} = 1,$$

tehát $\prod \log_{bc}\left(a^2bc\right) \geq 8$, és egyenlőség csak $a=b=c$ esetén áll fenn.

2. Bizonyítsd be, hogy a $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pozitív tagú valós számsorozat akkor és csakis akkor mértani haladvány, ha bármely $n\geq 3$ természetes szám esetén fennáll a következő egyenlőség:

$$\sqrt{\left(b_1+b_2\right)^2+\left(b_2+b_3\right)^2+\ldots+\left(b_{n-1}+b_n\right)^2} = \sqrt{b_1^2+\ldots+b_{n-1}^2}+\sqrt{b_2^2+\ldots+b_n^2}.$$

1. megoldás. Adott n esetén legyenek $a_1=b_2,\, a_2=b_3,\, \ldots,\, a_{n-1}=b_n$. A feltétel szerint írhatjuk, hogy $\sqrt{\sum_{k=1}^{n-1}\left(a_k+b_k\right)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n-1}b_k^2}$. A Minkowski-féle egyenlőtlenség értelmében ez az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$, vagyis $\frac{b_2}{b_1}=\frac{b_3}{b_2}=\ldots=\frac{b_n}{b_{n-1}}=q$. Innen $b_2=b_1q,\ b_3=b_2q,\ \ldots,\ b_n=b_{n-1}q$, s mivel n tetszőleges volt, $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots$ mértani haladvány. A fordított állítás igazolása azonnali.

2. megoldás. Az állítást a matematikai indukció módszerével igazoljuk.

I. Ha $n=3$, akkor $\sqrt{\left(b_1+b_2\right)^2+\left(b_2+b_3\right)^2} = \sqrt{b_1^2+b_2^2}+\sqrt{b_2^2+b_3^2}$, ahonnan négyzetre emeléssel kapjuk, hogy $b_1b_2+b_2b_3 = \sqrt{\left(b_1^2+b_2^2\right)\left(b_2^2+b_3^2\right)}$. Újabb négyzetre emelés és átrendezés után következik, hogy $\left(b_2^2-b_1b_3\right)^2=0$, vagyis $b_2^2=b_1b_3$, ami azt jelenti, hogy $n=3$ esetén a b_1,b_2,b_3 számok mértani haladványban vannak.

II. Vezessük be az $x=b_1^2+b_2^2+\ldots+b_{n-1}^2$ és $y=b_2^2+b_3^2+\ldots+b_n^2$ jelölést, ekkor $y=q^2x$, ahol q a $b_1,b_2,\ldots,b_n$ mértani haladványban levő számok állandó hányadosa. A feltétel szerint

$$\sqrt{\left(b_1+b_2\right)^2+\ldots+\left(b_{n-1}+b_n\right)^2+\left(b_n+b_{n+1}\right)^2} = \sqrt{b_1^2+\ldots+b_n^2}+\sqrt{b_2^2+\ldots+b_{n+1}^2},$$

ezt négyzetre emelve, kapjuk, hogy

$$\left[\left(b_1+b_2\right)^2+\ldots+\left(b_{n-1}+b_n\right)^2\right]+\left(b_n+b_{n+1}\right)^2 =$$

$$= x+b_n^2+y+b_{n+1}^2+2\sqrt{\left(x+b_n^2\right)\left(y+b_{n+1}^2\right)}.$$

A szögletes zárójelre felírva az indukciós feltételt, következik, hogy

$$x+y+2\sqrt{xy}+\left(b_n+b_{n+1}\right)^2=x+y+b_n^2+b_{n+1}^2+2\sqrt{\left(x+b_n^2\right)\left(y+b_{n+1}^2\right)}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{xy}+b_nb_{n+1}=\sqrt{\left(x+b_n^2\right)\left(y+b_{n+1}^2\right)}\Leftrightarrow\left(x\cdot b_{n+1}^2-y\cdot b_n^2\right)^2=0\Leftrightarrow$$

$$x\cdot b_{n+1}^2-y\cdot b_n^2=0\Leftrightarrow x\left(b_{n+1}^2-q^2b_n^2\right)=0\Leftrightarrow b_{n+1}=q\cdot b_n\,.$$

3. Az OAB és OCD azonos körbejárási irányú, egyenlő oldalú háromszögek AO, OB, OC, CD oldalainak felezőpontjait jelöljük rendre M -mel, N -nel, P -vel és Q -val. Bizonyítsd be, hogy ha R az MQ felezőpontja, akkor az NPR háromszög R -ben derékszögű.

1. megoldás. Az *BMO* és *OQC* háromszögek azonos körüljárási irányú hasonló háromszögek és szögeik mértéke rendre $30°$, $90°$ és $60°$. Jelöljük *x*, *y* és *z*-vel egy ilyen háromszög csúcspontjainak affixumait, továbbá az ábra egy pontjához tartozó affixumot ugyanazzal a kis betűvel, mint a pontot. A háromszögek hasonlóságának komplex számokkal adott jellemzése alapján:

$$o(x-y)+q(y-z)+c(z-x)=0 \text{ és}$$

$$b(x-y)+m(y-z)+o(z-x)=0\,.$$

Az előbbi két egyenlőség megfelelő oldalait összeadva és elosztva mindkét oldalt kettővel következik, hogy:

$$\frac{b+o}{2}(x-y)+\frac{m+q}{2}(y-z)+\frac{o+c}{2}(z-x)=0\,.$$

Ez éppen annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az *NRP* háromszög hasonló legyen a *BMO* és *OQC* háromszögekkel. A hasonlóságból következik, hogy $m\left(\widehat{NRP}\right)=90°$.

2. megoldás. Az előbbi jelölések alapján $b=\varepsilon\cdot a$ és $d=\varepsilon\cdot c$, ahol $\varepsilon^2-\varepsilon+1=0$ (vagyis $\varepsilon^3=-1$) Válasszuk az origót az *O* pontba. Így rendre a következő egyenlőségekhez jutunk:

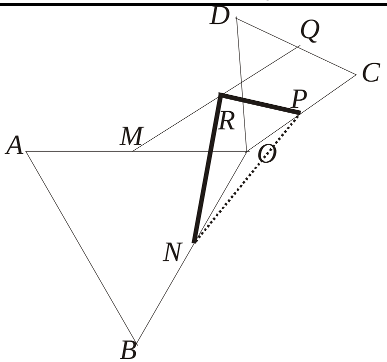
$$m=\frac{a}{2},\ n=\frac{b}{2}=\frac{\varepsilon\cdot a}{2},\ p=\frac{c}{2},\ q=\frac{c+d}{2}=\frac{c\cdot(1+\varepsilon)}{2} \text{ és}$$

$$r=\frac{m+q}{2}=\frac{a+c\cdot\left(1+\varepsilon\right)}{4}\,.$$

Ha *X* az *NP* felezőpontja, akkor $x=\frac{n+p}{2}=\frac{b+c}{4}$, tehát

$$r-x=\frac{a\cdot(1-\varepsilon)+c\cdot\varepsilon}{4} \text{ és } r-p=\frac{c\cdot\varepsilon+a-c}{4}\,.$$

De $\varepsilon\cdot(r-x)=\frac{c\cdot\varepsilon^2+a\cdot\left(\varepsilon-\varepsilon^2\right)}{4}=\frac{c\cdot\varepsilon^2+a}{4}=r-p$, tehát az *RXP* háromszög egyenlő oldalú. Így az $NX=XP=XR$ egyenlőségek alapján az *NRP* háromszög *R*-ben derékszögű.



3. megoldás. Vektoriálisan dolgozunk, az O pontot kezdőpontnak választjuk és a további pontok helyzetvektorát az illető pontot jelölő betűnek megfelelő kis betűvel jelöljük.

$$m=\frac{a}{2},\ n=\frac{b}{2},\ p=\frac{c}{2},\ q=\frac{c+d}{2} \text{ és } r=\frac{m+q}{2}=\frac{a+c+d}{4}$$

Így $\overrightarrow{RN}=n-r=\frac{1}{2}b-r$ és $\overrightarrow{RP}=p-r=\frac{1}{2}c-r$, tehát

$$\overrightarrow{RN}\cdot\overrightarrow{RP}=\frac{1}{4}bc+r^2-\frac{1}{8}(b+c)(a+c+d)=$$

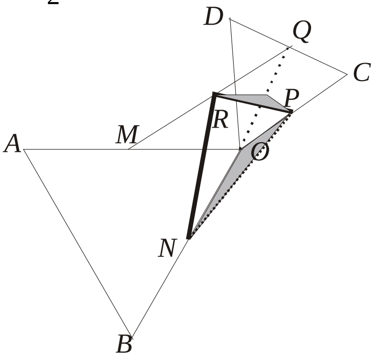
$$=\frac{1}{4}bc+r^2-\frac{1}{8}ab-\frac{1}{8}bc-\frac{1}{8}bd-\frac{1}{8}ac-\frac{1}{8}c^2-\frac{1}{8}cd=$$

$$=\frac{1}{8}xy\cos\alpha+r^2-\frac{1}{16}x^2-2\cdot\frac{1}{8}xy\cos\left(60^\circ+\alpha\right)-\frac{1}{8}y^2-\frac{1}{16}y^2=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}xy\sin\alpha-\frac{1}{16}x^2-\frac{3}{16}y^2+r^2.$$

ahol x és y az OB és OC szakaszok hosszát jelöli, illetve α a BOC irányított szög mértéke. De $r^2=\frac{x^2}{8}+\frac{3y^2}{8}-\frac{MQ^2}{4}$ és így az OMQ háromszögben a koszinusz tétel alapján következik, hogy $\overrightarrow{RN}\cdot\overrightarrow{RP}=0$, tehát az NRP háromszög R-ben derékszögű.

4. megoldás. Vegyük fel az OQ szakasz X felezőpontját. RX középvonal az MOQ háromszögben és XP az OQC háromszögben, tehát $RX=\frac{1}{2}OM=\frac{1}{4}OA$ és $XP=\frac{1}{2}CQ=\frac{1}{4}OC$. Ugyanakkor $RX\parallel OA$ és $XP\parallel CD$, tehát az RXP szög egyenlő az AO és CD egyenesek szögével, vagyis a BOC szöggel. Az előbbiek alapján az NOP és RXP háromszögek hasonlók és a megfelelő oldalak egymással $60°$-os szöget zárnak be. Így $m\left(\widehat{RPN}\right)=60°$ és $RP=\frac{1}{2}NP$, tehát az *RNP* háromszög derékszögű *R*-ben.



4. Egy *n* oldalú konvex sokszög minden csúcsát kiszínezzük pirosra vagy feketére és a csúcsok által meghatározott szakaszokra (oldalakra és átlókra) 1-est írunk ha a két végpontja azonos színű, ellenkező esetben –1-est írunk. Határozd meg a szakaszokra írt számok összegének lehető legkisebb értékét.

Megoldás. Jelöljük *p*-vel a pirosra színezett csúcsok számát és *f*-fel a feketére színezett csúcsok számát. A két fekete végponttal rendelkező szakaszok száma $\frac{f\cdot(f-1)}{2}$, a két piros végponttal rendelkezők száma $\frac{p\cdot(p-1)}{2}$ és a vegyes színezésű szakaszok száma $f\cdot p$. Így a szakaszokra írt számok összege

$$\frac{f\cdot(f-1)}{2}+\frac{p\cdot(p-1)}{2}-fp=\frac{\left(f-p\right)^2-f-p}{2}=\frac{\left(f-p\right)^2-n}{2}.$$

Ez akkor minimális, ha az $\left(f-p\right)^2$ kifejezés minimális. Páros *n* esetén tehát a minimum $-\frac{n}{2}$ és ez akkor érhető el, ha a csúcsok fele pirossal és fele feketével van színezve. Páratlan *n* esetén a minimum $\frac{1-n}{2}$ és ez akkor érhető el, ha a pirossal színezett csúcsok száma 1-gyel több vagy kevesebb, mint a feketével színezett csúcsok száma.

XI. OSZTÁLY

1. Egy bolha ugrálni kezd a síkon. A k-adik ugrásának hossza $\frac{1}{k}$, bármely $k\in\mathbb{N}^*$ esetén. n ugrás után eszébe jut, hogy valamit a kiindulási pontban felejtett. Visszajuthat-e a kiindulási pontba?

Megoldás. Az n-edik ugrás után jelöljük d-vel a bolha távolságát az O kiindulóponttól. Nyilvánvaló, hogy d akkor a legnagyobb, ha a bolha egy egyenesen mozgott, egyfolytában távolodva az O ponttól, tehát:

$$d \le 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}. \qquad (1)$$

Megadunk egy algoritmust, amelyet követve a bolha mindig visszaérhet az O pontba. Tudjuk, hogy az $a_k = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}^*$ sorozat határértéke $\lim_{k \to +\infty} a_k = +\infty$, és ebből következik, hogy a $k \ge n+1$, $k \in N$,

$$b_k = a_k - a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{k}$$

képlettel értelmezett sorozat is a végtelenhez tart, tehát $\lim_{k \to +\infty} b_k = +\infty$ (2) (n rögzített természetes szám).

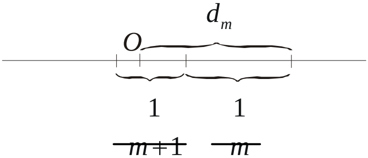
(1) és (2) alapján, ha a bolha az n-edik lépése után visszafordul és végig az O pont felé halad $\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ldots$ hosszúságú ugrásokkal, egy m-edik ugrással biztosan olyan közel kerül az O ponthoz, hogy az $m+1$-edik ugrása vagy az O pontba ér, vagy túlhaladja azt. Ha az O pontba érkezik az $m+1$-edik ugrással, akkor készen vagyunk, ellenkező esetben az utolsó két lépését megváltoztatjuk: Az 1. ábra szerint felírhatjuk a következő egyenlőtlenségeket:

$\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} > d_m$ (a bolha az utolsó két lépésével túlhaladta az O pontot);

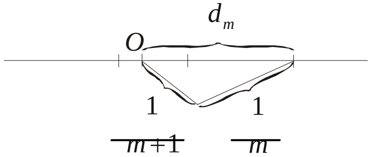
$d_m + \frac{1}{m+1} > \frac{1}{m}$ (az utolsó előtti lépéssel még nem éri el az O pontot);

$d_m + \frac{1}{m} > \frac{1}{m+1}$ (az ugrások hossza egyre kisebb).

Ebből következik, hogy az $\frac{1}{m}, \frac{1}{m+1}$ és d_m hosszúságú szakaszokkal szerkeszthető háromszög, vagyis a bolha megválaszthatja az utolsó két ugrásának irányát úgy, hogy pontosan az O pontba érkezzen (lásd a 2. ábrát).



1. ábra



2. ábra

2. Az $M=\left\{\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix} \middle| u,v\in\mathbb{R}\right\}$ halmazban oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} X+Y+Z=2I_2 \\ X^2+Y^2+Z^2=6I_2 \\ X^3+Y^3+Z^3=8I_2 \end{cases}.$$

1. megoldás. Azonnal igazolható, hogy az $f:\mathbb{C}\longrightarrow \mathrm{M}$ függvény esetén, ahol $f(w)=\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$, bármely $w=u+i\cdot v\in\mathbb{C}$ esetén érvényesek az alábbi kijelentések:

1. $f\left((u_1+i\cdot v_1)+(u_2+i\cdot v_2)\right)=f(u_1+i\cdot v_1)+f(u_2+i\cdot v_2)$, bármely u_1, v_1, u_2, $v_2\in\mathbb{R}$.
2. $f\left((u_1+i\cdot v_1)\cdot(u_2+i\cdot v_2)\right)=f(u_1+i\cdot v_1)\cdot f(u_2+i\cdot v_2)$, bármely u_1, v_1, u_2, $v_2\in\mathbb{R}$.
3. f bijektív.

Ezek szerint, ha $X, Y, Z\in\mathrm{M}$ akkor létezik egy és csakis egy $w_1, w_2, w_3\in\mathbb{C}$ úgy, hogy $f(w_1)=X$, $f(w_2)=Y$, $f(w_2)=Z$. Így az

$$X+Y+Z=2\cdot I_2,\ X^2+Y^2+Z^2=6\cdot I_2,\ X^3+Y^3+Z^3=8\cdot I_2$$

egyenletrendszer ekvivalens a következővel:

$$f^{-1}(X+Y+Z)=f^{-1}(2\cdot I_2),$$
$$f^{-1}(X^2+Y^2+Z^2)=f^{-1}(6\cdot I_2),$$
$$f^{-1}(X^3+Y^3+Z^3)=f^{-1}(8\cdot I_2),$$

vagy tovább

$$f^{-1}(X)+f^{-1}(Y)+f^{-1}(Z)=f^{-1}(2\cdot I_2),$$
$$f^{-1}(X^2)+f^{-1}(Y^2)+f^{-1}(Z^2)=f^{-1}(6\cdot I_2),$$
$$f^{-1}(X^3)+f^{-1}(Y^3)+f^{-1}(Z^3)=f^{-1}(8\cdot I_2).$$

Tehát
$$\begin{cases} w_1+w_2+w_3=2 \\ w_1^2+w_2^2+w_3^2=6 \\ w_1^3+w_2^3+w_3^3=8 \end{cases},$$

de $(w_1+w_2+w_3)^2=w_1^2+w_2^2+w_3^2+2\cdot(w_1w_2+w_2w_3+w_3w_1)$, így

$$w_1w_2+w_2w_3+w_3w_1=-1.$$
$$w_1^3+w_2^3+w_3^3-3w_1w_2w_3=$$

$$=\left(w_1+w_2+w_3\right)\cdot\left(w_1^2+w_2^2+w_3^2-w_1w_2-w_2w_3-w_3w_1\right),$$

innen kapjuk, hogy $w_1w_2w_3=-2$. Tehát

$$\begin{cases} w_1+w_2+w_3=2 \\ w_1w_2+w_2w_3+w_3w_1=-1 \\ w_1w_2w_3=-2 \end{cases}.$$

A Viéte-féle összefüggések alapján az egyenletrendszer megoldásai a $t^3-2t-t+2=0$ egyenlet gyökei, azaz $\{t_1,\, t_2,\, t_3\}=\{-1,\, 1,\, 2\}$, tehát $\{w_1,\, w_2,\, w_3\}=\{-1,\, 1,\, 2\}$, $\left\{f^{-1}(X),\ f^{-1}(Y),\ f^{-1}(Z)\right\}=\{-1,\, 1,\, 2\}$, így $\{X,\, Y,\, Z\}=\{-I_2,\, I_2,\, 2I_2\}$. Tehát

$$(X,\, Y,\, Z)\in\{(-I_2,\, I_2,\, 2I_2),\, (-I_2,\, 2I_2,\, I_2),(I_2,-I_2,2I_2),$$
$$(I_2,\, 2I_2,\, -I_2),\, (2I_2,\, -I_2,\, I_2),\, (2I_2,\, I_2,\, -I_2)\}.$$

2. megoldás

Legyenek $X=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Y}=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Z}=\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ -b_3 & a_3 \end{pmatrix}$, akkor

$X+Y+Z=2I_2$ - ből $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=2 & (1) \\ b_1+b_2+b_3=0 & (2) \end{cases}$,

$X^2+Y^2+Z^2=6I_2$ - ből $\begin{cases} a_1^2-b_1^2+a_2^2-b_2^2+a_3^2-b_3^2=6 & (3) \\ 2a_1b_1+2a_2b_2+2a_3b_3=0 & (4) \end{cases}$,

$X^3+Y^3+Z^3=8I_2$ - ből $\begin{cases} a_1^3-3a_1b_1^2+a_2^3-3a_2b_2^2+a_3^3-3a_3b_3^2=8 & (5) \\ 3a_1^2b_1-b_1^3+3a_2^2b_2-b_2^3+3a_3^2b_3-b_3^3=0 & (6) \end{cases}$.

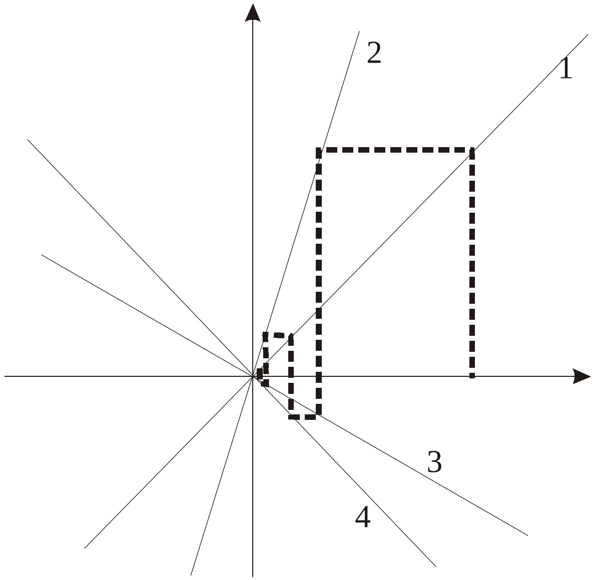
Tekintsük a $z_k=a_k+i\cdot b_k$, $k=1,2,3$ komplex számokat. A (2) egyenlőséget beszorozva i-vel és (1)-gyel összeadva, kapjuk, hogy $z_1+z_2+z_3=2$. Hasonlóan adódik, hogy $z_1^2+z_2^2+z_3^2=6$ és $z_1^3+z_2^3+z_3^3=8$. Így ugyanahhoz az egyenletrendszerhez jutunk, mint az 1. megoldásban.

3. Tekintsük a $d_j:\ y=\alpha_j x$ páronként különböző egyeneseket, ahol $j=\overline{1,\ n}$ és $n\in\mathbb{N}^*$ rögzített. Az $A_1\in d_1$ pontból kiindulva megszerkesztjük az $(A_i)_{i\in N^*}$ pontsorozatot, a következő szabályok szerint:

1. Ha $A_i\in d_j$, akkor $A_{i+1}\in\begin{cases} d_{j+1}, & \text{ha } j\le n-1 \\ d_1, & \text{ha } j=n \end{cases}$.
2. A_iA_{i+1} párhuzamos az Ox tengellyel, ha i páratlan és párhuzamos az Oy tengellyel, ha i páros.

Jelöljük x_k -val az A_{2k-1} pont abszcisszáját, minden $k \in N^*$ esetén. Vizsgáljuk az $\left(x_k\right)_{k\in N^*}$ sorozat konvergenciáját.

Megoldás.



Értelmezzük α_m -et tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ -re a következő módon:
$\alpha_m = \alpha_k$, ahol k az m n-nel való osztási maradéka. A pontsorozat értelmezése alapján az A_{2k-1} pontból az Ox-szel húzunk párhuzamost amíg metszi a d_{2k} -t és az A_{2k} pontból az Oy -nal amíg metszi a d_{2k+1}-et A_{2k+1}-ben. Ekkor az A_{2k-1} és A_{2k+1} pontok abszcisszái x_k illetve x_{k+1} . A_{2k-1} ordinátája $y_k = \alpha_{2k-1}x_k$, így az A_{2k} ordinátája szintén $\alpha_{2k-1}x_k$, tehát az abszcisszája $\dfrac{\alpha_{2k-1}}{\alpha_{2k}}x_k$, ami megegyezik az A_{2k+1} abszcisszájával. Tehát $x_{k+1} = \dfrac{\alpha_{2k-1}}{\alpha_{2k}}x_k$. Innen $x_m = \dfrac{\alpha_1\alpha_3\cdots\alpha_{2m-3}}{\alpha_2\alpha_4\cdots\alpha_{2m-2}}x_1$ az $\left(x_k\right)_{k\geq 1}$ sorozat általános tagja. Vizsgáljuk meg, hogy mi történik, ha n páratlan. Ekkor $x_{n+1} = \dfrac{\alpha_1\alpha_3\cdots\alpha_{2n-1}}{\alpha_2\alpha_4\cdots\alpha_{2n}}x_1$, de mivel $\alpha_{n+k} = \alpha_k$,

$$x_{n+1} = \frac{\alpha_1\alpha_3\cdots\alpha_n\alpha_2\alpha_4\cdots\alpha_{n-1}}{\alpha_2\alpha_4\cdots\alpha_{n-1}\alpha_1\alpha_3\cdots\alpha_n}x_1 = x_1 \text{. Tehát } x_{n+1} = x_1 \text{.}$$

Hasonlóan igazolható, hogy $x_{n+k} = x_k$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. Következésképpen a sorozat periodikus, így nem konvergens (feltéve ha nem állandó, ez pedig akkor történne meg, ha A egybeesne az origóval).
Vizsgáljuk az n páros esetet. Ekkor

$$x_m = \frac{\alpha_1\alpha_3\cdots\alpha_{n-1}\alpha_{n+1}\cdots\alpha_{2n-1}\alpha_{2n}\cdots\alpha_{2m-3}}{\alpha_2\alpha_4\cdots\alpha_n\alpha_{n+2}\cdots\alpha_{2n}\alpha_{2n+1}\cdots\alpha_{2m-2}} =$$

$= \dfrac{(\alpha_1\alpha_3\cdots\alpha_{n-1})\cdots(\alpha_1\alpha_3\cdots\alpha_{n-1})\alpha_1\cdots\alpha_{2k-3}}{(\alpha_2\alpha_4\cdots\alpha_n)\cdots(\alpha_2\alpha_4\cdots\alpha_n)\alpha_2\cdots\alpha_{2k-2}} x_1$, ahol k az m-nek n-nel való osztási maradéka. Tehát $x_m = \left(\dfrac{\alpha_1\alpha_3\cdots\alpha_{n-1}}{\alpha_2\alpha_4\cdots\alpha_n}\right)^{\left[\frac{m}{n}\right]} \cdot \dfrac{\alpha_1\alpha_3\cdots\alpha_{2k-3}}{\alpha_2\alpha_4\cdots\alpha_{2k-2}} x_1$.

Legyen $\alpha = \dfrac{\alpha_1\alpha_3\cdots\alpha_{n-1}}{\alpha_2\alpha_4\cdots\alpha_n}$. Mivel n rögzített, következik, hogy ha $m \to \infty$, akkor $\left[\dfrac{m}{n}\right] \to \infty$. Tudjuk, hogy az $\left(\alpha^{\left[\frac{m}{n}\right]}\right)$ konvergens, ha $|\alpha| < 1$ és ebben az esetben zéróhoz tart. Tehát ha $|\alpha| < 1$, akkor $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = 0$. Ha $|\alpha| > 1$, akkor a sorozat divergens ($\alpha^{\left[\frac{m}{n}\right]} \to \infty$, $\alpha > 1$ esetén és ha $\alpha < -1$, akkor $\alpha^{\left[\frac{m}{n}\right]} \to +\infty$ azon $\left(x_{m_p}\right)$ részsorozat esetén, amelyre $\left[\dfrac{m_p}{n}\right]$ páros, valamint $\alpha^{\left[\frac{m}{n}\right]} \to -\infty$, azon részsorozat esetén, amelyre $\left[\dfrac{m_p}{n}\right]$ páratlan. Ez utóbbi esetben egy valamilyen végtelenhez tartó sorozatot egy korlátos $\left(\dfrac{\alpha_1\alpha_3\cdots\alpha_{2k-1}}{\alpha_2\alpha_4\cdots\alpha_{2k}} x_1\right)$ sorozattal szorozzuk össze, tehát divergens.)

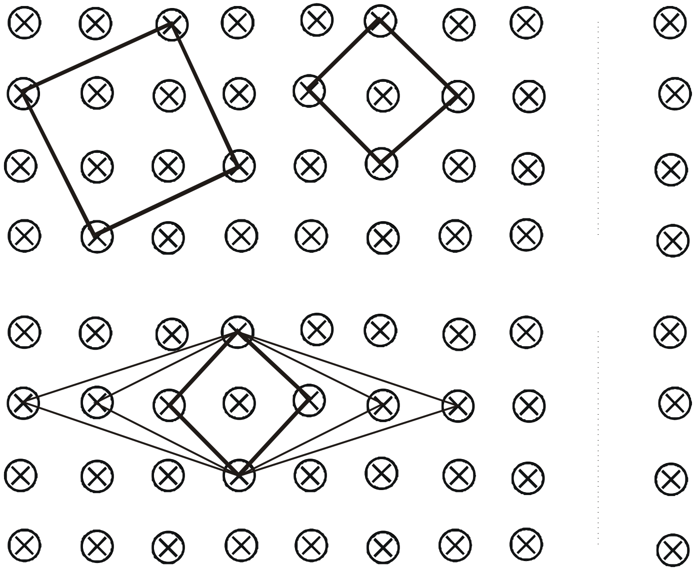
Ha $\alpha = 1$, akkor abban az esetben konvergens a sorozat, ha $\left(\dfrac{\alpha_1\alpha_3\cdots\alpha_{2k-3}}{\alpha_2\alpha_4\cdots\alpha_{2k-2}}\right)_{k\geq 2}$ állandó, azaz $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_3 = \alpha_4$, ..., $\alpha_{n-1} = \alpha_n$. Viszont az egyenesek páronként különböznek így ez az eset nem lehetséges.

Ha $\alpha = -1$, akkor az (x_{2nk}) részsorozat 1-hez tart, az $\left(x_{(2k-1)n}\right)$ részsorozat pedig –1-hez, tehát ekkor sem konvergens.

Következésképpen a konvergencia csak az $|\alpha_1\alpha_3\cdots\alpha_{n-1}| < |\alpha_2\alpha_4\cdots\alpha_n|$ esetben áll fenn.

4. Tekintsük egy $3\times n$-es négyzetháló rácspontjait (összesen $4\times(n+1)$ rácspont). Hány olyan rombusz létezik, amelynek minden csúcspontja ilyen rácspont? (nemcsak a rombusz mérete, hanem a helyzete is számít)

Megoldás. Azokon a négyzeteken kívül, amelyeknek oldalai párhuzamosak a négyzetrács éleivel csak a mellékelt ábrán látható rombuszok jöhetnek létre.



A rácspontok közt fellépő nem egész távolságok közt a két legkisebb a $\sqrt{2}$ és a $\sqrt{5}$, ha a rombusz oldalának hossza nagyobb mint $\sqrt{5}$, akkor ez a rombusz az alsó ábrán látható kategóriába tartozik, tehát az egyik átlója párhuzamos a rács rövidebb oldalával, hossza 2 és a középpontja rácspont. Ha a rombusz oldala $\sqrt{2}$ vagy $\sqrt{5}$, akkor a rombusz tartozhat az előzőekben értelmezett kategóriába, de lehet az első ábrán látható négyzet is. Így a következő számláláshoz jutunk:

- az 1×1-es négyzetek száma $3\cdot n$;
- a 2×2-es négyzetek száma $2\cdot(n-1)$;
- a 3×3-as négyzetek száma $n-2$;
- az olyan $\sqrt{5}\times\sqrt{5}$-ös négyzetek száma, amelyeknek középpontja nem rácspont $2\cdot(n-2)$;
- az alsó ábrán látható típusú rombuszok száma (a középpontok szerint számolva)

$$2\cdot\left(1+2+\ldots+\frac{n-2}{2}+\frac{n}{2}+\frac{n-2}{2}+\ldots+2+1\right)=\frac{n^2}{2}$$ ha n páros és

$$2\cdot 2\cdot\left(1+2+\ldots+\frac{n-1}{2}\right)=\frac{n^2-1}{2},$$ ha n páratlan.

Így a rombuszok száma $\frac{n^2+16n-14}{2}$, ha n páros és $\frac{n^2+16n-15}{2}$, ha n páratlan.

XII OSZTÁLY

1. Adott az $M=\left\{\begin{pmatrix} ax+1 & 0 & ax \\ 0 & 0 & 0 \\ ax & 0 & ax+1 \end{pmatrix} \middle| x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2a}\right\}\right\}$ halmaz, ahol $a\neq 0$ tetszőlegesen rögzített valós szám. Bizonyítsd be, hogy $(M,\cdot)$ Abel-féle csoport és $(M,\cdot)\cong(G,*)$, ahol $G=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2a}\right\}$ és $\forall\, x,y\in G$ esetén $x*y=x+y+2axy$.

Megoldás. Bármely $A(x),\ A(y)\in M$ esetén

$$A(x)A(y)=\begin{pmatrix} ax+1 & 0 & ax \\ 0 & 0 & 0 \\ ax & 0 & ax+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ay+1 & 0 & ay \\ 0 & 0 & 0 \\ ay & 0 & ay+1 \end{pmatrix}=A(x+y+2axy)\in M,$$

tehát M zárt halmaz, kommutatív, asszociatív, $A(0)\in M$ semleges elem és bármely $A(x)\in M$ esetén $A(x')=A\left(-\frac{x}{1+2ax}\right)\in M$ az $A(x)$ szimmetrikus eleme, tehát $(M,\cdot)$ Abel- féle csoport.

Legyen $f:M\to G$, $f\left(A(x)\right)=x$. Ekkor f bijektív és $f\left(A(x)A(y)\right)=f\left(A(x)\right)*f\left(A(y)\right)$ kompatibilis és így $(M,\cdot)\cong(G,*)$.

Hasonlóan kimutatjuk, hogy $(G,*)$ is Abel- féle csoport.

2. Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény egy $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ primitívje teljesíti az

$$\left(1+(\alpha+1)\sin^2 x\right)f(x)F^{\alpha}(x)\leq\sin 2x$$

egyenlőtlenséget $\forall\, x\in\mathbb{R}$ esetén, ahol $\alpha>0$ rögzített valós szám. Bizonyítsd be, hogy nem létezik a $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$ határérték!

Megoldás

$$\left(1+(\alpha+1)\sin^2 x\right)f(x)F^{\alpha}(x)\leq\sin 2x\Leftrightarrow f(x)F^{\alpha}(x)\leq\frac{\sin 2x}{1+(\alpha+1)\sin^2 x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha+1)\, f(x)F^{\alpha}(x) \le \frac{(\alpha+1)\sin 2x}{1+(\alpha+1)\sin^2 x}.$$

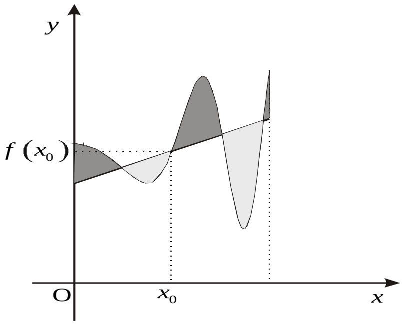
Az előbbi egyenlőtlenség alapján a $G(x) = F^{\alpha+1}(x) - \ln\left(1+(\alpha+1)\sin^2 x\right)$ függvény csökkenő (mert a deriváltja negatív), tehát létezik a $\lim\limits_{x\to\infty} G(x)$ határérték. Mivel a $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ határérték nem létezik, ezért a $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$ határérték sem létezik.

3. Legyen $a > 0$ egy valós szám és $f:[0,a] \to \mathbb{R}_+$ egy integrálható függvény.

a) Bizonyítsd be, hogy bármely $x_0 \in [0,a] \setminus \left\{\frac{a}{2}\right\}$ esetén az $\left(x_0, f(x_0)\right)$ ponton át húzható olyan d_{x_0} egyenes, amelyre a grafikus kép, a d_{x_0} egyenes, az $x = a$ egyenletű egyenes és az *Oy* tengely által határolt síkrésznek ugyanakkora területű darabja van a d_{x_0} alatt, mint fölött.

b) Bizonyítsd be, hogy a d_{x_0} egyenesek összefutók ha x_0 a $[0,a] \setminus \left\{\frac{a}{2}\right\}$ halmazban változik és határozd meg az összefutási pont koordinátáit.

Megoldás. a) A d_{x_0} egyenes alatti és fölötti részek területe pontosan akkor egyenlő egymással, ha $\int_0^a \left(c_1 \cdot x + c_2 - f(x)\right) dx = 0$, ahol $y = c_1 \cdot x + c_2$ a d_{x_0} egyenes egyenlete.



Így $c_1 \cdot \frac{a^2}{2} + c_2 \cdot a = \int_0^a f(x)dx$.

Ugyanakkor a d_{x_0} egyenes áthalad az $\left(x_0, f(x_0)\right)$ ponton, tehát $f(x_0) = c_1 \cdot x_0 + c_2$. Ebből a két egyenlőségből

$$c_1 = \frac{2}{a} \cdot \frac{\int_0^a f(x)dx - a \cdot f(x_0)}{a - 2x_0} \text{ és } c_2 = \frac{1}{a} \cdot \frac{a^2 \cdot f(x_0) - 2x_0 \cdot \int_0^a f(x)dx}{a - 2x_0}.$$

Mivel ez a két szám létezik bármely $x_0 \in [0,a] \setminus \left\{\frac{a}{2}\right\}$ esetén, a kért egyenes is létezik.

b) Az előbbi egyenesek egyenlete a következő alakban is felírható:

$$x_0 \cdot \left(2\int_0^a f(x)dx - 2ay_v \right) + f\left(x_0\right)\left(2ax_v - a^2\right) = 2x_v \cdot \int_0^a f(x)dx - a^2 y_v ,$$

ahol $\left(x_v, y_v\right)$ a keresett összefutási pont koordinátái. Az x_0 és az $f\left(x_0\right)$ együtthatói nullával egyenlők, ha $x_v = \frac{a}{2}$ és $y_v = \frac{\int_0^a f(x)dx}{a}$. Ezekre az értékekre az előbbi egyenlőség jobb oldalán is nulla áll, tehát az $\left(\frac{a}{2}, \frac{\int_0^a f(x)dx}{a} \right)$ ponton áthalad az összes ilyen egyenes.

4. Bizonyítsuk be, hogy

a) ha $n = 4k + 2$ és $k \geq 1$, akkor a $\mathbb{Z}_n$-nek létezik három halmazból álló partíciója, amelyre nem választható ki a partíció három halmazából egy-egy elem, amelyek számtani haladványt alkotnak;

b) $\mathbb{Z}_7$ tetszőleges három halmazból álló partíciója esetén kiválasztható a partíció halmazaiból egy-egy elem, amelyek számtani haladványt alkotnak.

(egy *X* halmaz partíciója olyan páronként diszjunkt részhalmaz rendszerét jelenti, amelyek egyesítése az *X*).

Megoldás. a) Ha $n = 4k + 2$, akkor vizsgáljuk az $A_1 = \{0\}$, $A_2 = \{2k+1\}$ és $A_3 = \mathbb{Z}_n \setminus \{0, 2k+1\}$ halmazokból alkotott partíciót. Az első két halmazból csak a 0-t és a $2k+1$-et választhatjuk és látható, hogy a harmadik halmazban nincs egyetlen olyan elem sem, amelyre számtani haladványt alkotna a három szám.

b) Feltételezzük az ellenkezőjét. Jelöljük A_1-gyel azt a halmazt, amelynek eleme a 0. Feltételezhetjük, hogy 1 nem eleme ennek a halmaznak mert létezik két egymás utáni elem (0 a 6 után következik), amelyek nem ugyanahhoz a részhalmazhoz tartoznak és a kisebb számot a partíció minden eleméhez hozzáadva egy újabb partícióhoz jutunk, amelyből pontosan akkor tudunk kiválasztani számtani haladványt, ha az eredetiből ki lehet választani számtani haladványt. Így a 6, a 2 és a 4 nem lehet az A_3 halmazban. De az A_3 nem üres, tehát 3 vagy 5 eleme A_3-nak.

Ha $5 \in A_3$, akkor $4, 6 \in A_1$ (ellenkező esetben a 6-0-1 vagy 5-6-0 vagy 1-4-0 vagy 4-5-6 számtani haladvány teljesítené a kért feltételt). Így viszont az 5-1-4 számtani haladvány elemei vannak különböző részhalmazokban.

Ha $3 \in A_3$, akkor $4, 6 \in A_2$ (ellenkező esetben a 0-1-2 vagy 1-2-3 vagy 2-3-4 vagy 1-4-0 számtani haladvány teljesítené a kért feltételt). Így viszont a 4-0-3 számtani haladvány elemei vannak különböző részhalmazokban.

Megjegyzés. A feladat ekvivalens a következővel: Színezzük egy szabályos n szög csúcsait három színnel úgy, hogy mindhárom szín előforduljon legalább egyszer.

a) Bizonyítsd be, hogy ha $n = 4k + 2$ és $k \geq 1$, akkor létezik olyan színezés, amelyre nincs három különböző színű csúccsal rendelkező egyenlő szárú háromszög;

b) Bizonyítsd be, hogy ha $n = 7$, akkor létezik három különböző színű csúccsal rendelkező egyenlő szárú háromszög.

Az SzMMV rövidítés a „Szokatlanul Meggyötört Matekes Válogatott" rövidítése. Az SzMMV tagjai: András Szilárd, Csapó Hajnalka, Demeter Albert, Lukács Andor, Szilágyi Géza Zsolt, Zsombori Gabriella

A résztvevő diákok névsora

Condorescu Tibor	IX	A.E.L.	Hammas Enikő	XII	Á.L.L.
Nagy Tünde	IX	A.E.L.	Mikes Attila	XII	Á.L.L.
Csapó Levente	X	A.E.L.	Varga Izabella	XII	Á.L.L.
Sipos Tamás	X	A.E.L.	Marosi Lóránd	IX	B.B.L.
Bódi István	XI	A.E.L.	Török Edwin	X	B.B.L.
Leopold András	XI	A.E.L.	Szabó Attila	XI	B.B.L.
Lőrincz Zoltán	XII	A.E.L.	Szász Endre	XII	B.B.L.
Sipos István	XII	A.E.L.	Baranyi Botond	IX	B.F.L.
Derzsi Alpár	IX	Á.L.L.	Boros Árpád	IX	B.F.L.
Kovács Gábor	IX	Á.L.L.	Hideg Borbála	IX	B.F.L.
Orbán Levente	IX	Á.L.L.	Kónya Zsuzsanna	IX	B.F.L.
Sváb István	IX	Á.L.L.	Korodi Gál Andor Csaba	IX	B.F.L.
Bánfi Enikő	X	Á.L.L.	Szabó Anikó	IX	B.F.L.
Gócza Izabella	X	Á.L.L.	Szabó Edit	IX	B.F.L.
Mihály Anikó	X	Á.L.L.	Antal Szilárd	X	B.F.L.
Borzási Dávid	XI	Á.L.L.	Crăciun Lehel	X	B.F.L.
Kozma Szilamér	XI	Á.L.L.	Horvát Ágnes Emőke	X	B.F.L.
Türkösi Csaba	XI	Á.L.L.	Keresztes István	X	B.F.L.
Petz Erika	X	B.F.L.	Buksa Szilárd	XII	B. Sz. D. L.
Demeter Zoltán	XI	B.F.L.	Német Tamás	XII	Sz. M. K.
Kovács Tünde	XI	B.F.L.	Farkas Róbert	IX	Sz. M. K.
Stan Johann	XI	B.F.L.	Tóth Anita	IX	Sz. M. K.

X. Székely Mikó Matematikaverseny

Vita Szabolcs	XI	B.F.L.	Doba Victor	X	Sz. M. K.
Albert László Róbert	XII	B.F.L.	Fischer Kinga	X	Sz. M. K.
Máthé Zsolt	XII	B.F.L.	Király Zsolt	X	Sz. M. K.
Nagy István	XII	B.F.L.	Fónagy Éva	XI	Sz. M. K.
Trella Várhelyi Tamás	XII	B.F.L.	Bartha Zsolt	XII	Sz. M. K.
Rănoiu Anna	X	B.G.L.	Koncz Róbert	XII	Sz. M. K.
Simon Anna	X	B.G.L.	Longáver Rudolf	XII	Sz. M. K.
Mezei Botond	IX	B.I.L	Csengeri Erika	IX	Sz. M. K.
Sebestyén Ágnes	IX	B.I.L	Günthner Timea	IX	Sz. M. K.
Kalló Ildikó	X	B.I.L	Rákos Dániel	IX	Sz. M. K.
Lőrincz Ágnes	X	B.I.L	Szatmári Balázs	IX	Sz. M. K.
Lovász Alíz	X	B.I.L	Bócsi Botond	X	Sz. M. K.
Szeredai Lóránd	X	B.I.L	Bodor Rita	X	Sz. M. K.
Petz Erika	X	B.F.L.	Gábor Enikő	X	B. Sz. D. L.
Demeter Zoltán	XI	B.F.L.	Ilonczai Anett	X	Sz. M. K.
Kovács Tünde	XI	B.F.L.	Lusca Orsolya	XI	Sz. M. K.
Stan Johann	XI	B.F.L.	Maskulik Zita	XI	Sz. M. K.
Vita Szabolcs	XI	B.F.L.	Reiz Beáta	XI	Sz. M. K.
Albert László Róbert	XII	B.F.L.	Nagy Kálmán	XII	Sz. M. K.
Máthé Zsolt	XII	B.F.L.	Preg Annamária	XII	Sz. M. K.
Orbán György	XI	B.I.L	Varga Andrea	XII	Sz. M. K.
Sebe Attila	XI	B.I.L	Barok Botond	IX	Sz. M. K.
Szilágyi Márta	XI	B.I.L	Burján László	IX	Sz. M. K.
Bedő Dávid	IX	B.SZ.D.L.	Csukás Barna	IX	Sz. M. K.
Megyes Boglárka	IX	B.SZ.D.L.	Miklós Gábor	IX	Sz. M. K.
Darvas Tamás	X	B.SZ.D.L.	Buksa Szilárd	XII	Sz. M. K.
Nyikó Zoltán	X	B.SZ.D.L.	Németh Tamás	XII	Sz. M. K.
Szabó Gabriella	X	B.SZ.D.L.	Farkas Róbert	IX	Sz. M. K.
Dobai András	XI	B.SZ.D.L.	Tóth Anita	IX	Sz. M. K.
Ghinea Andrea	XI	B.SZ.D.L.	Doba Victor	X	Sz. M. K.
Lőrincz Raul	XI	B.SZ.D.L.	Fischer Kinga	X	B. Sz. D. L.
Negru Petra	IX	M.Á.G.	Balázs Attila	X	O.B.L.
Roth Róbert	IX	M.Á.G.	Derzsi Zoltán	XI	O.B.L.
Széles Ádám	IX	M.Á.G.	András Gyöngyi	IX	O.G.L.
Biró Emőke	X	M.Á.G.	Tatu Andrea	IX	O.G.L.

Fazakas Réka	X	M.Á.G.	Aldea Anita	X	O.G.L.
Karácsony Kinga	X	M.Á.G.	Serbán Mária	XI	O.G.L.
Kovács Noémi	X	M.Á.G.	Hobaj Ottilia	IX	S.E.L.
Szőcs Csongor	X	M.Á.G.	Pál Annamária	IX	S.E.L.
Brtalis István	XI	M.Á.G.	Bereczki Orsolya	X	S.E.L.
Erőss Zsuzsanna	XI	M.Á.G.	Vilikó Réka	X	S.E.L.
Lukács László	XI	M.Á.G.	Komsa Csongor	XI	S.E.L.
Pálfi Zoltán	XI	M.Á.G.	Laczkó Árpád	XI	S.E.L.
Szőcs Emese	XII	M.Á.G.	Bernád Emőke	XII	S.E.L.
Kolcza Mátyás	IX	M.K.L.	Szász Márton	XII	S.E.L.
Varga Melinda	IX	M.K.L.	Fata Emőke	IX	Sz.M.L.
Andrei Róbert	X	M.K.L.	Földes Zsolt	IX	Sz.M.L.
Kádár Géza	X	M.K.L.	Márton Imola	IX	Sz.M.L.
Barabás Melinda	XI	M.K.L.	Bíró Bíborka	X	Sz.M.L.
Fülöp Andrea	XI	M.K.L.	Gazdag Lehel	X	Sz.M.L.
Czompó János	XII	M.K.L.	Köllő Hanna	X	Sz.M.L.
Gagyi Zsófia	XI	N.I.L.	Tasi Eszter	X	Sz.M.L.
Orbók Sándor	XI	N.I.L.	Bíró Zoltán	XI	Sz.M.L.
Májercsik György	IX	N.L.L.	Gábos István	XI	Sz.M.L.
Papp Teodóra	X	N.L.L.	Sipos Kinga	XI	Sz.M.L.
Rettegi Mónika	X	N.L.L.	Szilágyi Zoltán	XI	Sz.M.L.
Vincze István	X	N.L.L.	Vajda István	XI	Sz.M.L.
Varga Melinda	XI	N.L.L.	Henning Péter	XII	Sz.M.L.
Vincze Andrea	XI	N.L.L.	Németh Attila	XII	Sz.M.L.
Papp Olga	XII	N.L.L.	Spanyol Ádám	XII	Sz.M.L.
Farczali Sándor	IX	N.M.L.	Székely Sipos Sándor Zoltán	XII	Sz.M.L.
Régeni Ágnes	IX	N.M.L.	Bálint Erika	IX	T.Á.G.
Bartha Zsolt	XI	N.M.L.	Bálint Levente	IX	T.Á.G.
Márton Szabolcs	XI	N.M.L.	Bolyai Csaba	IX	T.Á.G.
Szabó Zoltán	XI	N.M.L.	Gyöngyösi Csaba	IX	T.Á.G.
Bartha Ágnes	XII	N.M.L.	Lukácsi Csaba	IX	T.Á.G.
Albert Csaba	IX	O.B.L.	Bóni Dalma	X	T.Á.G.
Albert László	X	O.B.L.	Balázs Attila	X	O.B.L.
Lörinczi Attila	X	T.Á.G.	Szabó Ágnes	XI	
Némethi Ágnes Csilla	X	T.Á.G.	Majó Zoltán	XII	
Birtalan Boróka	XI	T.Á.G.	Víg Endre	XII	

X. Székely Mikó Matematikaverseny

Kiss Zsuzsa	XI	T.Á.G.	Lörinczi Attila	X	T.Á.G.
Kovács Károly	XI	T.Á.G.	Némethi Ágnes Csilla	X	T.Á.G.
Scridon Lóránt	XI	T.Á.G.	Birtalan Boróka	XI	T.Á.G.
Szakács Paál István	XI	T.Á.G.	Kiss Zsuzsa	XI	T.Á.G.
Gyöngyösi Éva	XII	T.Á.G.	Kovács Károly	XI	T.Á.G.
László Tamás	XII	T.Á.G.	Scridon Lóránt	XI	T.Á.G.
Szász Zoltán	XII	T.Á.G.	Szakács Paál István	XI	T.Á.G.
Magyari Hajni	IX		Szabó Ágnes	XI	

A résztvevő tanárok névsora

András Szilárd	BBTE	Kovács Lajos	T. Á. G.
Balogh Attila	M. K. L.	Laczkó József	M. Á. G.
Bencze Mihály	Á. L. L.	Lukács Andor	BBTE
Bíró Judit	Sz. M. K.	Nagy Ildikó	A. E. L.
Bíró Zoltán	S. E. E. L.	Páll Csaba	N. I. L.
Bögözi Mihály	M. Á. G.	Păcurar Maria	B. B. L
Csapó Hajnalka	M. Á. G.	Péter András	Cs. G. L.
Csata Lili	N. I. L.	Sebestyén József	O. B. G.
Darvas Anna Mária	B. Sz. D. I.	Simon János	B. G. K.
Deák Éva	Sz. M. K.	Szász Róbert	B. F. L.
Deák Zsuzsa	T. Á. G.	Szatmári Mária	M. Á. G.
Demeter Albert	BBTE	Székely Alíz	Á. L. L.
Egyed Géza	N. M. L	Szilágyi Jutka	B. I. L.
György Gabriella	B. F. L.	Szilágyi Zsolt	BBTE
Keresztes Kálmán	O. G. K.	Tamási Csaba	M. Á. G.
Kovács Béla	K. F. L.	Ványi Emese	K. F. L.
Kovács Katalin	M. Á. G	Vass Csilla	B. Sz. D. I.

A versenybizottság tagjai

Bencze Mihály–elnök

András Szilárd — Csapó Hajnalka
Demeter Albert — Lukács Andor
Szilágyi Géza Zsolt — Zsombori Gabriella