SZÉKELY MIKÓ MATEMATIKAVERSENY

2000. február 26.

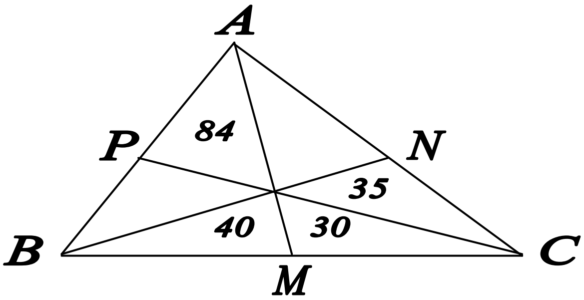
IX. osztály

1. **a)** Oldjátok meg az $x^2 + y^2 = xy + 2000$ egyenletet az egész számok halmazában!

b) Az a, b és c, nullától különböző valós számok összege nulla. Bizonyítsátok be, hogy:

$$\frac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \frac{b^2}{b^2 - c^2 - a^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2 - b^2} = \frac{3}{2}.$$

2. Az ABC háromszöglapot az ábrán látható három összefutó egyenes hat kisebb háromszögre bontja. Közülük négy háromszög területének mérőszámát az ábrán feltüntettük. Határozzátok meg az ABC háromszög területét!

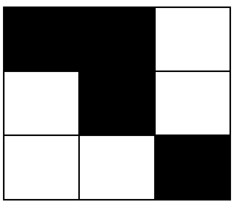


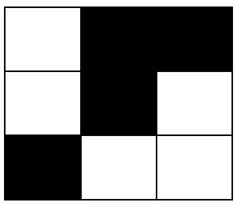
3. Az $ABCD$ négyzet oldalain mozog az M és a P pont. Ha O a négyzet középpontja, határozzátok meg az $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP}$ összegvektor végpontjának mértani helyét, az alábbi esetekben:

a) az M pont az $[AB]$, a P pont pedig a $[CD]$ szakaszon mozog, egymástól függetlenül;

b) a két pont a négyzet oldalain mozog, tetszőlegesen, egymástól füügetlenül (egymásra is kerülhetnek).

4. Egy 3 × 3-as négyzetháló néhány 1 × 1-es mezőjét feketére festjük oly módon, hogy minden sorban és minden oszlopban legyen legalább egy befestett mező. Hány különböző ilyen színezés lehetséges? A szimmetrikus és egymásba forgatással átvihető eseteket is különbözőeknek tekintjük, pl. az alábbi színezések különbözőek.





X. osztály

1. **a)** Oldjátok meg a

$$4^x + 15^x = 10^x + 9^x$$

egyenletet a valós számok halmazában.

b) Bizonyítsátok be, hogy ha a, b és c egynél nagyobb valós számok, akkor:

$$\log_b\left(b - a + \frac{a^2}{b}\right) \cdot \log_c\left(c - b + \frac{b^2}{c}\right) \cdot \log_a\left(a - c + \frac{c^2}{a}\right) \geq 1.$$

2. Az $f : R \to R$ függvény teljesíti az $f\left(f(x)\right) = x^{2n+1} + \alpha x$ egyenlőséget bármely $x \in R$ esetén, ahol $n \in N^*$ és $\alpha \in (0{,}1)$ rögzített számok. Igazoljátok, hogy léteznek olyan a, b és c, páronként különböző valós számok, amelyekre

$$f(a) + f(b) + f(c) = 0.$$

3. Az $ABCD$ téglalap oldalain léteznek olyan M és N pontok, amelyekre az AMN háromszög egyenlő oldalú.

a) Határozzátok meg a $\dfrac{BC}{AB}$ arány minimális és maximális értékét!

b) Igazoljátok, hogy $T(ABM) + T(ADN) = T(MCN)$.

4. Egy szabályos tízszög csúcsaiba elhelyezzük az 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25 és 28 számokat, valamilyen sorrendben. Tételezzük fel, hogy lerajzoltuk az összes lehetséges sorrendnek megfelelő tízszöget (a számokkal együtt). Minden ilyen tízszög belsejébe beírjuk a legnagyobb olyan összeg értékét, amelyet három szomszédos csúcsába írt szám összeadásával nyerhetünk. Határozzátok meg a tízszögek belsejében található számok közül a legkisebbet!

XI. osztály

1. Az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozatot a következőképpen értelmezzük:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+1} = \left[\frac{a_{n-1} + 2a_n}{3}\right] + 1,\ \text{ ha } n \geq 2.$$

(az $[x]$ szimbólum az x valós szám egész részét jelöli)
Számítsátok ki a következő határértéket:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i}}{n}.$$

2. **a)** Bizonyítsátok be, hogy ha $X \in M_2(C)$ és $n \in N^*$, akkor léteznek olyan $a_n \in C$ és $b_n \in C$ számok, amelyre $X^n = a_n X + b_n I_2$.

b) Oldjátok meg az $X^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ egyenletet az $M_2(C)$ halmazban!

3. Nevezzük "jó ***n***-összeg"-nek azokat az összegeket, amelyek teljesítik a következő feltételeket:

a) az összeg minden tagja kettőhatvány
b) egyetlen kettőhatvány sem szerepel több mint háromszor
c) az összeg értéke ***n***
d) az összeg tagjai növekvő sorrendben vannak

Jelöljük *f(n)*-el az összes jó ***n***-összegek számát.
Pl: *f*(9)=5 mivel $9 = 1+4+4 = 1+2+2+4 = 1+1+1+2+4 = 1+1+1+2+2+2$
Határozzátok meg *f(n)* értékét minden nullától különböző természetes számra!

4. Egy $n \times k$ méretű négyzetháló minden 1×1 méretű mezőjén egy-egy szöcske áll. Egy adott pillanatban minden szöcske átugrik egy csúcsosan szomszédos mezőre. (Két mező csúcsosan szomszédos, ha van közös csúcsuk, de nincs közös oldaluk.) Lehetséges-e az, hogy az ugrások után is minden mezőn pontosan egy szöcske álljon? Ha igen, hány különböző módon?

XII. osztály

1. Adottak az $f : R \to R$ és $g : R \to R$ primitiválható függvények. Jelöljük *F*-fel és *G*-vel az *f* illetve *g* azon primitívjeit, amelyekre $F(0) = 1$ és $G(0) = 0$. Bizonyítsátok be, hogy ha bármely valós *x* esetén igaz, hogy $F(x) = g'(x)$ és $G(x) = f'(x)$, valamint $f(0) = 0$, akkor az is igaz, hogy:

$$f(x) \cdot g(x) \geq -\frac{1}{2}, \quad \forall x \in R.$$

2. A $(G, \cdot)$ csoportot $g(n)$ típusúnak nevezzük, ha elemeinek száma legalább $n+1$, továbbá bármely $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G \setminus \{e\}$ esetén létezik olyan $x_{n+1} \in G$, amelyre:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = x_{n+1}^n.$$

(*e* a csoport semleges elemét jelöli, $n \geq 1$ természetes szám)

a) Igazoljátok, hogy ha $(G, \cdot)$ egy $g(n)$ típusú csoport, akkor bármely $x \in G$ esetén létezik olyan $y \in G$, amelyre teljesül, hogy:

$$x = y^n.$$

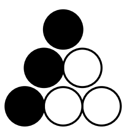
b) Igazoljátok, hogy az $\left(R_+^*, \cdot\right)$ csoport $g(n)$ típusú csoport.

c) Igazoljátok, hogy az $\left(R_+^*, \cdot\right)$ csoport nem izomorf az $\left(R^*, \cdot\right)$ csoporttal.

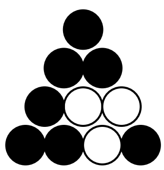
3. Bizonyítsátok be, hogy bármely $n \in N^*$ esetén a $\sqrt{n(n+1)}$ szám tízes alapú felírásában, a tizedesvessző után 4-es számjegy következik.

4. Elhelyeztünk *n* sorban $\frac{n(n+1)}{2}$ darab pénzérmét, háromszög alakban, írást tartalmazó oldalával felfele, az ábra szerint:

$n = 3$



$n = 4$



Egyszerre megfordíthatunk három kölcsönösen szomszédos érmét (pl. a fenti ábrán a világos érméket).
Ha $n = 2000$, elérhető-e, hogy minden érme az írást tartalmazó oldalával lefele legyen?