I. ERDÉLYI MAGYAR ÁLTALÁNOS ISKOLÁK MATEMATIKAVERSENYE

NAGYVÁRAD - 2013.

STÁTUS KIADÓ
CSÍKSZEREDA

A feladatokat összeállító bizottság:

dr. András Szilárd, BBTE, Kolozsvár

dr. Bencze Mihály, Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó

Csapó Hajnalka, Márton Áron Líceum, Csíkszereda

Dávid Géza, Tamási Áron Líceum, Székelyudvarhely

Kéry Hajnal, főtanfelügyelő helyettes, Nagyvárad

Kovács Béla, Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti

Nagy Enikő, Szent László Római Katolikus Líceum, Nagyvárad

Nagy Örs, Elektromaros Líceum, Marosvásárhely

Szabó Csilla, minisztériumi tanácsos, Bukarest

Szilágyi Judit, Báthory István Líceum, Kolozsvár

ISBN 978-606-8052-80-9

Készült a Státus nyomdában Madéfalván 2013-ban

Tiparul executat sub comanda nr. 3/2013, la Status Printers Siculeni

ANDRÁS SZILÁRD BENCZE MIHÁLY
CSAPÓ HAJNALKA DÁVID GÉZA KÉRY HAJNAL
KOVÁCS BÉLA NAGY ENIKŐ NAGY ÖRS
SZABÓ CSILLA SZILÁGYI JUDIT
ZSOMBORI GABRIELLA

I. ERDÉLYI MAGYAR ÁLTALÁNOS ISKOLÁK MATEMATIKAVERSENYE

Nagyvárad

Feladatok és megoldások

STÁTUS KIADÓ
CSÍKSZEREDA, 2013

Műszaki szerkesztés: András Szilárd, Csapó Hajnalka
Nagy Örs, Zsombori Gabriella

A kéziratot ellenőrizte és helyenként kiegészítette:
dr. Lukács Andor, dr. Róth Ágoston, Madaras Beáta, Ugron Szabolcs, Kocsis Zsuzsánna

Kiadja a Státus Könyvkiadó
Felelős kiadó Birtók József igazgató

Készült a Státus Nyomdában
http://www.status.com.ro
Email: office@status.com.ro

Concursul de Matematică al Gimnaziilor Maghiare,
ediţia I (lb. magh.)

Editura Status, Miercurea-Ciuc
Tiparul executat sub comanda nr. 3/2013
la Status Printers - Siculeni

Tartalomjegyzék

Előszó

A matematika csodálatos és különös valami, amit a művész hív életre a mindenség káoszából, lelki vívódások és gyötrelmek között. És nem adatott meg mindenkinek, hogy felismerje. Hogy megértse az ember, át kell élnie a művészet élményének isteni szikráját. A matematika rejtélyes szárnyain Bolyai Farkas a világhírű Gauss barátja elhozta Erdélybe ezt az isteni szikrát. Majd Farkas fiának Jánosnak adatott meg az a lehetőség, hogy a semmiből egy új világot teremtve Erdélyt a nemzetközi matematika élvonalába emelje.

Az Erdélyi Magyar Matematikaverseny (EMMV 9-12.) immár 23 éve rendezte, strukturálta a középiskolások matematikai versenyeit, és vele párhuzamosan kiépítette a tehetséggondozást is. Mindez beleilleszkedik a Kárpát-medencét átfogó Nemzetközi Magyar Matematikaverseny rendszerébe. Néhány éve a román tanügy minisztérium hivatalos versenye lett, ami sok szempontból megadta a finalitását. Évekig járva Erdély iskoláit, betekinthettem versenybizottsági tagként, elnökként a középiskola előtti matematika világába. A bennünk lévő gyermek az az énünk, amellyel kapcsolatunk létfontosságú, mert benne látjuk visszatükröződni lelkünk belső lényegének mély, gyönyörű és ártatlan voltát. Az élet felfedezés, ezért szabadítsuk fel magunkat és gondoljunk az életre úgy, mint egy felfedező útra. Néha hajlamosak vagyunk túl komolyan venni mindent, amit teszünk, és úgy érezzük, hogy minden lépésünkkel közelebb kell kerülnünk az áhított célhoz. Ha ehelyett úgy gondolunk az életre, mint egy felfedező útra, nyitottak leszünk arra, hogy mást is kipróbáljunk. Felfedezhetjük az előttünk álló lehetőségeket, feltárhatjuk lényünk sok-sok különböző rétegét. Ez a hozzáállás több lehetőséget teremt számunkra. Már az általános iskolában felfedezhetjük a matematika szépségeit. E felfedezés eredményességét a versenyeken elért pontszámok is meghatározzák, a dicsőség és kudarc érzése néha csak egy ponton múlik. De a matematika mélysége még évekig várat magára.

A 3-4. osztályos tanulókat országos szinten a Matematika Pontszerző Verseny rendezi családdá. Öt éve a marosvásárhelyi Bolyai Farkas Elméleti Líceum lett a házigazdája, immár a bukaresti tanügyminisztérium által is elismert országos döntőnek. Az 5-8. osztályosok részére sok import-verseny jelentette a tenni akarást, de értékesebbek voltak a hazai kezdeményezések, mint a Bolyai János verseny, a Kisokosok versenye, a Radó Ferenc emlékverseny, a Vályi Gyula emlékverseny és a Csillagszerző verseny. A meghívásos alapon működő versenyek átfedik egymást, és nem elérhetők minden tanár és tanuló számára. A szétforgácsolódás, valamint a saját tengelyük körül való forgás veszélye kimerítheti ezen versenyeket. Ezért volt szükséges egy lentről felfelé való demokratikus elv szerinti építkezésre, egy olyan verseny elindítására, ami a fenti versenyeket is szervesen bevonja. Bukarestben, valamint Erdély 17 megyéjében megszerveztük a megyei selejtező versenyeket. Ez minden tanár és tanuló számára elérhető volt. Minden megyében kialakult egy szervező bizottság, amire a következő évek versenyei támaszkodnak. Most is mondom, jó lenne e megyei versenyeket elnevezni az illető megye valamelyik kiemelkedő, híres matematikusáról. A megyei versenyeken továbbjutott majdnem kétszáz tanulónak ad otthont a nagyváradi Szacsvay Imre általános iskola, aki az I. Erdélyi Magyar Általános Iskolák Matematikaversenyét (EMMV 5-8.) szervezi az általános iskolák 5-8. osztályainak. Az itt résztvevő hatvan tanár számára pedig ez a verseny egy továbbképző szerepét is jelenti. Örvendetes, hogy az országos szakasz Szabó Csilla minisztériumi tanácsosnak köszönhetően, egyből a minisztérium hivatalos versenye lett. Reméljük, hogy ezen versennyel párhuzamosan a tehetséggondozást is elkezdhetjük. Folyamatosan építjük ezen verseny Kárpát-medencei kiterjesztését, létrehozva jövőre a Nemzetközi Magyar Matematikaversenyt (NMMV 5-8.) az általános iskolák 5-8. osztályainak. Ezzel az 5-8. osztályosok matematika-világát is strukturáljuk, megadva a finalitását.

Köszönjük Szabó Csilla minisztériumi tanácsosnak, Kéry Hajnal főtanfelügyelő helyettesnek, és Nagy Enikő tanárnőnek, hogy ezt az országos szakaszt Nagyváradon megszervezték.

Vagyok aki voltam, és leszek aki vagyok elv alapján, ha minden tanárnak és diáknak szívügye lesz ez a verseny, akkor Isten áldásával az erdélyi matematikának van jövője.

Dr. Bencze Mihály
a versenybizottság alelnöke

V. osztály

1. Feladat. Egy 63 elemű halmaz minden eleme természetes szám és elemeinek összege 2013. Mennyi az elemek szorzata?

Szilágyi Emőke, Marosvásárhely

2. Feladat. Öt egymást követő természetes szám esetén a páros és páratlan számok összege közötti különbség 86. Melyik ez az öt szám?

Nagy Jenő, Székelyudvarhely

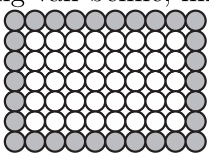
3. Feladat. Jancsi egy doboz golyót egy szekrény fiókjaiba tesz úgy, hogy az első fiókba egy golyót tesz és minden további fiókba pontosan kétszer annyit, mint az előző fiókba (tehát a második fiókba két golyót, a harmadik fiókba négy golyót, a negyedik fiókba nyolc golyót és így tovább).

a) Hány golyót tesz Jancsi a szekrénybe összesen, ha a szekrénynek 7 fiókja van?

b) Jancsi édesapja találomra kihúzott néhány fiókot és ezekben összesen 107 golyót talált. Melyik fiókokat húzta ki?

Pap Czier Levente, Nagykároly

4. Feladat. Valahány egyforma korongot az ábra szerint téglalap alakba rendeztünk el. A szegélyező korongokat szürkére festettük, a többit fehérre. Hány korongból állhat egy ilyen téglalap, ha ugyanannyi szürke korong van benne, mint amennyi fehér?



Róka Sándor, Nyíregyháza

5. Feladat. Egy régi típusú kenyérpirító egyszerre egy vagy két szelet kenyeret tud pirítani, de minden betett szeletnek csak az egyik oldalát. Egy oldal pirításához szükséges idő 50 másodperc, a szeleteket nem szabad túlsütni, egy szelet kivevéséhez, betevéséhez, megfordításához külön-külön $2-2$ másodperc szükséges és egyszerre egy művelet hajtható végre (mindkét kézre szükség van egy szelet betevésénél, megfordításánál vagy kivevésénél). Legkevesebb mennyi idő alatt lehet megpirítani ezen a pirítón 3 szelet kenyér mindkét oldalát?

SimpleX Egyesület, Csíkszereda

6. Feladat. Egy kis skandináv faluban három egymás melletti házban három különböző nemzetiségű ember lakik. Minden háztulajdonos más-más állatot tart, illetve más-más a kedvenc étele, és igazak az alábbi állítások:

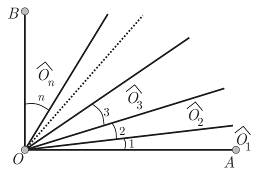
- A dán kedvenc étele a lazacsült.
- A középső házban kutyát tartanak.
- A zöld ház nem szomszédja a kék háznak.
- Aki tonhalat eszik, az első házban lakik.
- A zöld házzal szomszédos házban a finn lakik.
- Aki hörcsögöt tart, a kék házban lakik.
- A kék házban lakó embernek nem kedvenc étele a tonhal.
- A norvég szomszédjának kedvenc étele a rénszarvaspörkölt.

Ki tart macskát? Ki lakik a piros házban?

SimpleX Egyesület, Csíkszereda

VI. osztály

1. Feladat. A mellékelt ábrán $AO \perp OB$ és az $\widehat{AOB}$ szöget néhány, O-ból induló félegyenessel úgy osztottuk fel, hogy a keletkező $\widehat{O}_1$, $\widehat{O}_2$, $\widehat{O}_3, \ldots, \widehat{O}_n$ szögek mértékszámai (fokban kifejezve) egymás utáni páros számok legyenek. Legtöbb hány félegyenest húzhattunk be?



Gagyi Dénes, Székelykeresztúr

2. Feladat. A 2013 egy olyan természetes szám, amelyben az első és a harmadik számjegy összege egyenlő a második és a negyedik számjegy összegével. Hány ilyen évszám van a 3. évezredben?

Durugy Erika, Torda

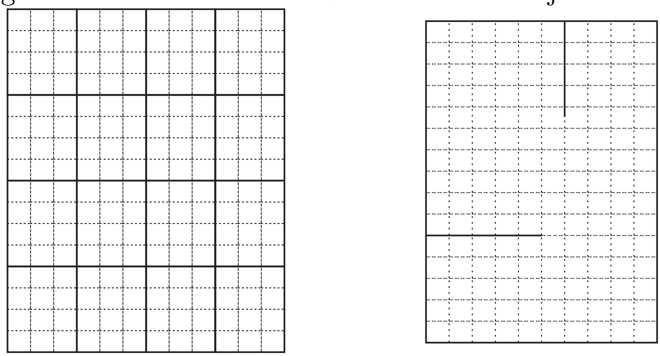
3. Feladat. Keress két olyan egymás utáni természetes számot, hogy mindkét szám számjegyeinek összege osztható legyen 5-tel! Melyek a legkisebb ilyen tulajdonsággal rendelkező számok? Hány ilyen számpár létezik 0 és 100000 között?

Róka Sándor, Nyíregyháza

4. Feladat. A $2, 3, 4, 5, 6, 8, 9$ számjegyek segítségével felírunk néhány olyan hétjegyű számot, amelyben minden felsorolt számjegy pontosan egyszer szerepel. Kiválaszthatunk-e ezek közül két olyan különböző számot, amelyek közül az egyik osztója a másiknak?

Bencze Mihály, Brassó

5. Feladat. A mellékelt ábra a) részén egy téglalaprács látható. Ez azt jelenti, hogy két rögzített m és n szám esetén egy téglalap szembenfekvő oldalpárjait m, illetve n egyenlő részre osztottuk fel és a megfelelő osztópontokat összekötöttük az oldalakkal párhuzamos szakaszok segítségével (ezek a rácsvonalak). Így egy $m \times n$-es téglalaprács keletkezik. Az a) ábrán egy 4×4-es téglalaprács látható, amelynek a mérete 12×16, mert a rács 3×4-es téglalapokból áll. A b) ábrán látható 10×15-ös téglalap és a benne látható vastag (nem szaggatott vonallal húzott) szakaszok valamilyen téglalaprács maradványai, a többi vonalat valaki kiradírozta. Milyen lehetett az a téglalaprács, amit kiradíroztak? Legalább hány vonallal kell kiegészíteni a b) ábrát ahhoz, hogy olyan téglalaprácsot kapjunk, amelyben a folytonos vonallal meghúzott szakaszok a rácsvonalakra illeszkedjenek?



a) b)

SimpleX Egyesület, Csíkszereda

6. Feladat. A Vuki nevű űrnép a Kashyyyk bolygóról költözik az Endor bolygóra egyszemélyes űrhajókban. Az út megtételéhez egy űrhajónak 1 egységnyi hajtóanyagra van szüksége. Ugyanakkor, ha csoportokban utaznak, akkor a fogyasztásuk csökken a következő szabályok szerint: 4-es csoportban a csoport fogyasztása

3, 10-es csoportokban 9, 100-as csoportokban 70 és 1000-es csoportokban 600 egység.

1. Határozd meg, hogy legalább mennyi üzemanyag szükséges az átköltözéshez, ha a létszám 35. Hát akkor, ha a létszám 258 vagy 3212?

2. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén határozd meg az n űrlény átköltöztetéséhez szükséges üzemanyag mennyiségét!

SimpleX Egyesület, Csíkszereda

VII. osztály

1. Feladat. Fel lehet-e írni az $1, 2, 3, \ldots, 9$ számokat egy kör kerületére úgy, hogy bármelyik két szomszédos szám összegét számolva olyan számot kapjunk, amelyik nem osztható sem 3-mal, sem 5-tel, sem 7-tel?

Nagy Olga, Nagyszalonta

2. Feladat. Egy 30-as létszámú osztályban a fiúk $\frac{2}{3}$-a és a lányok $\frac{1}{2}$-e együtt 90 perc alatt hámoz meg egy zsák almát. Ha a fiúk $\frac{1}{2}$-e és a lányok $\frac{2}{3}$-a venne részt a munkában, akkor 85 perc alatt végeznének. Feltételezzük, hogy mindenki ugyanolyan sebességgel dolgozik.

a) Hány fiú és hány lány van az osztályban?

b) Mennyi idő alatt hámoznák meg a zsák almát, ha az egész osztály dolgozna?

Simon József, Csíkszereda

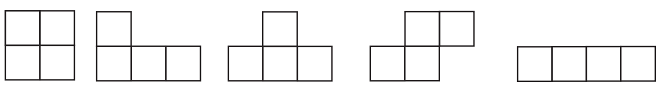
3. Feladat. Az $ABCD$ négyzetben jelöljük E-vel az AD oldal felezőpontját és F-fel az AB oldal A-hoz közelebb eső negyedelő pontját. Bizonyítsd be, hogy az E pontnak a CF-től mért távolsága egyenlő a négyzet oldalhosszának a felével!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

4. Feladat. Az $ABCD$ téglalap AB oldalán felvesszük az M_1, M_2, M_3 pontokat (A-tól B irányába ebben a sorrendben), a DC oldalán pedig az N_1, N_2, N_3 és N_4 pontokat (D-től C irányába ebben a sorrendben). Hasonlóan felvesszük a $P_1 \in (AD)$ és $Q_1, Q_2 \in (BC)$ pontokat (BC-n a sorrend $B - Q_1 - Q_2 - C$). Tekintjük az AN_1M_1, $M_1N_2M_2$, $M_2N_3M_3$, M_3N_4B, illetve a DQ_2P_1 és P_1Q_1A háromszögeket. Az első négyet elsőfajúnak, az utolsó kettőt másodfajúnak (vagy vízszintesnek, illetve függőlegesnek) nevezzük. Jelölje T_1 azon síkdarabkák területének összegét, amelyek egyaránt hozzátartoznak valamilyen első és másodfajú háromszöghöz, illetve T_2-vel azon síkdarabkák területének összegét, amelyek a téglalap belsejében vannak, de nem tartoznak sem elsőfajú, sem másodfajú háromszöghöz. Bizonyítsd be, hogy $T_1 = T_2$!

Simon József (feladata alapján), Csíkszereda

5. Feladat. A mellékelt ábrán látható darabokból össze lehet-e rakni egy téglalapot úgy, hogy mindenik darabot felhasználjuk és ne keletkezzen sem átfedés, sem üres rész a téglalapon?



SimpleX Egyesület, Csíkszereda

6. Feladat. Három biciklis egy túrán vesz részt, amely abból áll, hogy az A helységig vonattal utaznak, onnan a B helységig bicikliznek, majd B-ből vonattal térnek haza. Az A és B közti szakaszon egy C pontban az egyikük biciklije használhatatlanná (és javíthatatlanná) vált (becsúszott egy szakadékba). Gyalogosan a sebességük 4 km/h és biciklivel 16 km/h. A C és B távolsága (a vasútállomásig) 24 km, az A és C távolsága 60 km és B-ből 3 és fél óra múlva lenne vonatjuk hazafele. Elérhetik-e mindhárman ezt a vonatot, ha a megmaradt biciklik egyikére sem ülhetnek egyszerre ketten?

SimpleX Egyesület, Csíkszereda

VIII. osztály

1. Feladat. Hány olyan sík van, amely egy adott kocka csúcsai közül legalább háromra illeszkedik?

Róka Sándor, Nyíregyháza

2. Feladat. Az $ABCD$ négyzet (CD) oldalán vegyük fel az E pontot úgy, hogy az A középpontú AB sugarú kör felezze a (BE) szakaszt. Számítsd ki az $\widehat{EBC}$ szög mértékét!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

3. Feladat. A KEDVED szóban minden betű helyett valamilyen tízes számrendszerbeli számjegyet írtunk (azonos betűk helyére azonos számjegyeket). Milyen számjegyet helyettesítettünk az E betű helyére, ha a kapott szám négyzetszám, a V helyére 4-gyel nagyobb számot helyettesítettünk, mint a K helyére és a D helyére a 4-et helyettesítettük?

Bencze Mihály, Brassó

4. Feladat. A $VABC$ szabályos háromoldalú gúlában O az ABC alap középpontja, $A' \in (VA)$, $B' \in (VB)$ és $C' \in (VC)$. Jelöljük E, F és G-vel rendre az AB, BC, illetve CA oldal felezőpontját és tekintjük az $\{E'\} = VE \cap A'B'$, $\{F'\} = VF \cap B'C'$, valamint $\{G'\} = VG \cap C'A'$ metszeteket. Számítsuk ki az $E'F'G'$ és az $A'B'C'$ háromszögek területének arányát a $VA' = a$, $VB' = b$ és $VC' = c$ hosszúságok függvényében!

Simon József, Csíkszereda

5. Feladat. Egy régi típusú kenyérpirító egyszerre egy vagy két szelet kenyeret tud pirítani, de minden betett szeletnek csak az egyik oldalát. Egy oldal pirításához szükséges idő 50 másodperc, a szeleteket nem szabad túlsütni, egy szelet kivevéséhez vagy betevéséhez külön-külön $1,5$ másodperc és a megfordításához 2 másodperc szükséges. Minden művelet (betevés, kivevés, megfordítás) végrehajtásához mindkét kezünkre szükség van, tehát nem lehet két műveletet egyszerre végrehajtani. Legkevesebb mennyi idő alatt lehet megpirítani ezen a pirítón 3 szelet kenyér mindkét oldalát?

SimpleX Egyesület, Csíkszereda

6. Feladat. Három egybevágó, szabályos hatszög alakú papírlapot vágj szét darabokra úgy, hogy a keletkezett darabokból egy nagyobb szabályos hatszöget lehessen összerakni!

Nagy Örs, Marosvásárhely

Megoldások
V. osztály

1. Feladat. Egy 63 elemű halmaz minden eleme természetes szám és elemeinek összege 2013. Mennyi az elemek szorzata?

Szilágyi Emőke, Marosvásárhely

Első megoldás. Ha a 0 nem eleme a halmaznak, akkor az elemek összege legalább

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 63,$$

mivel a halmaz 63 természetes számot tartalmaz és a 0-n kívül az előbb felsorolt számok a legkisebbek. Másrészt az $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 63$ összeg esetén

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \ldots + 60 + 61 + 62 + 63 \\ S &= 63 + 62 + 61 + \ldots + 4 + 3 + 2 + 1, \end{aligned}$$

tehát $2S = 63 \cdot 64$ (az egymás alá írt számok összege 64 és 63 darab ilyen egymás alá írt pár van). Így $S = 2016$, tehát ha 0 nincs a számok közt, akkor a halmaz elemeinek összege nem lehet 2016-nál kisebb. A megadott halmaz tehát tartalmazza a 0-t és így az elemek szorzata 0. A teljes megoldáshoz az is hozzátartozik, hogy egy ilyen halmazra példát adunk. A 2016-hoz képest hárommal kell csökkenteni az összeget, ahhoz, hogy a 63 szám összege 2013 legyen. Ez lehetséges, ha a 3-ast kicseréljük 0-ra, tehát az

$$A = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7 \ldots, 63\}$$

halmaz teljesíti a feladat feltételeit. ⊛

Második megoldás. Ha a halmaz elemeit növekvő sorrendbe rendezzük ($x_1 < x_2 < \ldots < x_{63}$), akkor a másodikból kivonhatunk 1-et, a harmadikból 2-t, a negyedikből 3-at és így tovább az utolsóból 62-t. A kapott eredmények természetes számok, szintén növekvő sorrendben vannak (csak lehetnek köztük egyformák is) és az összegük $2013 - 1953 = 60$. Másrészt 63 darab, páronként nem föltétlenül különböző természetes szám összege csak akkor lehet 60, ha a legkisebb három szám 0. Így az eredeti halmaz három legkisebb eleme a 0, az 1 és a 2. Tehát a halmaz elemeinek szorzata 0. Az előbbiek alapján több olyan halmazt is szerkeszthetünk, amely teljesíti a feltételeket. ⊛

1. Megjegyzés. Érdemes azon elgondolkodni, hogy hány olyan halmaz létezik, amely teljesíti a feladat feltételeit, hogyan szerkeszthetők meg az ilyen halmazok. Ebben az esetben a lehetséges esetek száma viszonylag nagy (865), de a második megoldás ötletét használva egy kis kitartással kiszámolható.

2. Feladat. Öt egymást követő természetes szám esetén a páros és páratlan számok összege közötti különbség 86. Melyik ez az öt szám?

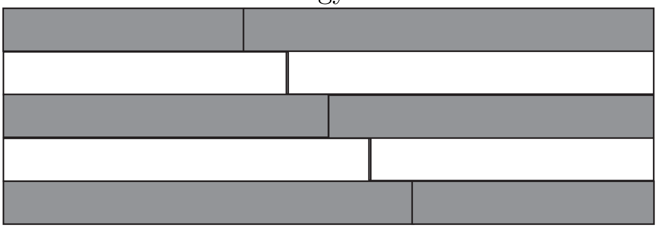
Nagy Jenő, Székelyudvarhely

Első megoldás. Két egymás utáni szám különbsége 1, tehát az utolsó négy számot nézve a párosok és páratlanok összegének különbsége 2. Az adott különbség ehhez viszonyítva pontosan az első számmal nagyobb, tehát az első szám 84 és így a keresett számok $84, 85, 86, 87, 88$. ⊛

Második megoldás. Az első és az utolsó szám összege a középső kétszerese. Ugyanakkor a második és a negyedik összege szintén a középső kétszerese, tehát a párosok összege és a páratlanok összege közti különbség éppen a középső szám. Tehát a keresett számok $84, 85, 86, 87, 88$. ⊛

Harmadik megoldás. Ha az öt szám közül az első szám páratlan, akkor három páratlan és két páros számról van szó, tehát a páratlanok összege páratlan (mert három páratlan számot adunk össze) és a párosok összege páros. Ebben az esetben a különbség nem lehet páros, tehát az öt szám közül az első páros. Így a párosok összege az első szám háromszorosánál $2+4=6$-tal több. A páratlanok összege az első szám kétszeresénél $1+3=4$-gyel nagyobb, tehát a két összeg közti különbség az első számnál 2-vel nagyobb. Ez alapján a keresett számok $84, 85, 86, 87, 88$. ⊛

2. Megjegyzés. Az előbbi megoldások mindegyike grafikusan is ábrázolható. A mellékelt ábra egy további érvelést mutat.



A különbség kétszerese a három satírozott sáv és a két fehér sáv különbsége. Ez épp egy sáv, tehát egyenlő a középső szám kétszeresével. Így a középső szám 86, vagyis a keresett számok $84, 85, 86, 87, 88$.

3. Feladat. Jancsi egy doboz golyót egy szekrény fiókjaiba tesz úgy, hogy az első fiókba egy golyót tesz és minden további fiókba pontosan kétszer annyit, mint az előző fiókba (tehát a második fiókba két golyót, a harmadik fiókba négy golyót, a negyedik fiókba nyolc golyót és így tovább).

a) Hány golyót tesz Jancsi a szekrénybe összesen, ha a szekrénynek 7 fiókja van?

b) Jancsi édesapja találomra kihúzott néhány fiókot és ezekben összesen 107 golyót talált. Melyik fiókokat húzta ki?

Pap Czier Levente, Nagykároly

Első megoldás. a) Jancsi a fiókokba rendre $1, 2, 4, 8, 16, 32$, illetve 64 golyót tesz, tehát összesen

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127$$

golyót tesz a szekrénybe.

b) Összesen 127 golyó van a szekrényben, tehát csak 20 golyót nem talált meg Jancsi édesapja. Megvizsgáljuk, hogy ez, hogyan lehetséges, tehát a 20-at, hogyan lehet összegként előállítani az $1, 2, 4, 8, 16$ számok segítségével (a többi túl nagy). Az 1-es nem szerepelhet az összegben, mert páratlan és az összes többi, valamint a 20 is páros. A $2, 4$ és 8 összege csak 14, tehát a 16 biztosan szerepel az előállításban. Így csak a $20 = 16 + 4$ előállítás lehetséges, tehát Jancsi édesapja csak a harmadik és az ötödik fiókot nem nyitotta ki. Ez azt jelenti, hogy kinyitotta az első, a második, a negyedik, a hatodik és a hetedik fiókot. $\otimes$

Második megoldás. a) Ha még egy golyót betennénk az első fiókba, akkor az első fiókban pontosan annyi lenne, mint a másodikban, tehát az első két fiókban pontosan annyi, mint a harmadikban. Így az első három fiókban pontosan annyi golyó lenne, mint a negyedikben, az első négyben pontosan annyi, mint az ötödikben, az első ötben pontosan annyi, mint a hatodikban, az első hatban pontosan annyi, mint a hetedikben. Összesen tehát 1-gyel kevesebb golyó van a fiókokban, mint az utolsó fiók kétszeresében. Az egyes fiókokban kerülő golyók száma kettőhatvány. A hetedik fiókban $2^6 = 64$ golyó van, tehát összesen $2 \cdot 64 - 1 = 127$ golyó van a fiókokban.

b) A 107-et elő kell állítanunk kettőhatványok összegeként. $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63 < 107$, tehát a Jancsi apukája a 64 golyót tartalmazó fiókot (a hetediket) biztosan kinyitotta. A többi kinyitott fiók még összesen 43 golyót tartalmazott. $1+2+4+8+16=31<43$, tehát a 32 golyót tartalmazó fiókot (a hatodikat) is ki kellett nyitnia. A hatodik és a hetedik fiókon kívül a kinyitott fiókok összesen 11 golyót tartalmaznak, tehát az ötödik fiókot nem nyithatta ki. $1+2+4=7<11$, tehát a negyedik fiókot (amelyben 8 golyó van) is ki kellett nyitnia. Végül a megmaradt három golyó csak az első két fiók kinyitásával jelenhet meg, tehát Jancsi édesapja az első, a második, a negyedik, a hatodik és a hetedik fiókot nyitotta ki. ⊛

Harmadik megoldás. a) A kettes számrendszerbeli felírást használjuk. Az egyes fiókokba kerülő golyók száma

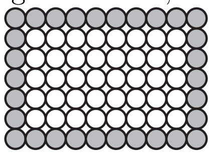
$$1, 10_{(2)}, 100_{(2)}, 1000_{(2)}, 10000_{(2)}, 100000_{(2)}, 1000000_{(2)},$$

tehát Jancsi összesen $1111111_{(2)} = 10000000_{(2)} - 1 = 127$ golyót tett a fiókokba.

b) A 107-et kettőhatványok összegeként kell előállítani. Ez valójában azt jelenti, hogy a 107-et átalakítjuk 2-es számrendszerbe. $107 = 2\cdot 53+1$, $53 = 2\cdot 26+1$, $26 = 2\cdot 13+0$, $13 = 2\cdot 6+1$, $6 = 2\cdot 3+0$, és $3 = 2\cdot 1+1$. A maradékokat hátulról összeolvasva a $107 = 1101011_{(2)}$, tehát Jancsi édesapja az első, a második, a negyedik, a hatodik és a hetedik fiókot nyitotta ki. ⊛

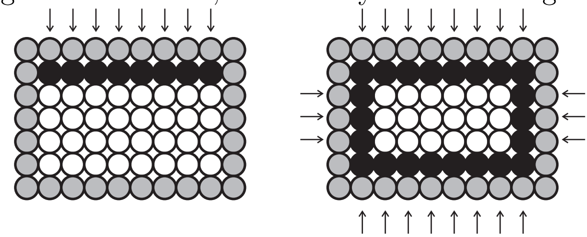
3. Megjegyzés. A $107 = 64+32+8+2+1$ felírás megtalálása nem elégséges, csak ha az egyértelműség is indokolva van (akár a felírás megtalálásának gondolatmenetével, akár számrendszerekkel). Érdemes megjegyezni, hogy a kettes számrendszerbeli felírás létezése és egyértelműsége alapján tetszőleges $1 \leq j \leq 127$ szám esetén egyértelműen meg lehet mondani, hogy Jancsi édesapja melyik fiókokat kellene kinyissa ahhoz, hogy azokban összesen pontosan j golyó legyen.

4. Feladat. Valahány egyforma korongot az ábra szerint téglalap alakba rendeztünk el. A szegélyező korongokat szürkére festettük, a többit fehérre. Hány korongból állhat egy ilyen téglalap, ha ugyanannyi szürke korong van benne, mint amennyi fehér?



Róka Sándor, Nyíregyháza

Első megoldás. A téglalap szélessége mentén nem lehet 3 vagy annál kevesebb korong, mert akkor a belsejében vagy nem lenne egyáltalán korong, vagy csak egy sor korong lenne és a szélén több, mint két ugyanolyan sor. Ha a szélesség mentén több, mint 3 korongot helyeztünk el, akkor vizsgálhatjuk azokat a korongokat, amelyek a külső szegélyt alkotnák, ha elvennénk a szürke korongokat. A mellékelt ábra alapján ebben a belső keretben pontosan 8 koronggal van kevesebb, mint ahány szürke korong van.



Ez azt jelenti, hogy a feladat feltételei csakis akkor teljesülhetnek, ha a fekete (belső keretet alkotó) korongok belsejében pontosan 8 korong található. Mivel a 8 korong csak $1 \cdot 8$ és $2 \cdot 4$ alakú elrendezésből kapható meg az eredeti téglalap $5 \cdot 12 = 60$ vagy $6 \cdot 8 = 48$ korongot tartalmazhat. ⊛

Második megoldás. Jelöljük a keresett téglalap alakú elrendezés két oldala mentén elhelyezett korongok számát a-val illetve b-vel.

Így a szürke korongok száma $2a + 2(b - 2)$ és a belső (fehér) korongok száma $(a - 2)(b - 2)$. Tehát meg kell határozni azokat az $a, b \in \mathbb{N}^*$ számokat, amelyekre

$$2a + 2(b - 2) = (a - 2)(b - 2).$$

Ez rendre a következőképpen alakítható:

$$(a - 2)(b - 2) - 2(b - 2) - 2a = 0$$

$$(a - 4)(b - 2) - 2a = 0$$

$$(a - 4)(b - 2) - 2a + 8 = 8$$

$$(a - 4)(b - 2) - 2(a - 4) = 8$$

$$(a - 4)(b - 4) = 8.$$

Másrészt $a \geq 4$ és $b \geq 4$, tehát a baloldalon megjelenő tényezők természetes számok. A 8-at csak $1 \cdot 8$, illetve $2 \cdot 4$ alakban lehet két tényező természetes szám szorzataként előállítani, tehát az eredeti téglalap $5 \cdot 12 = 60$ vagy $6 \cdot 8 = 48$ korongot tartalmazhat. ⊛

4. Megjegyzés. Az $ab - 4a - 4b + 8 = 0$ egyenlethez más gondolatmenettel is eljuthatunk és ezt más módszerrel is megoldhatjuk. Például ha kifejezzük a a-t, akkor az

$$a = \frac{4b - 8}{b - 4}$$

kifejezést kapjuk. A számlálóban a $4b$ miatt a $b - 4$ kifejezés négyszeresét jelenítjük meg:

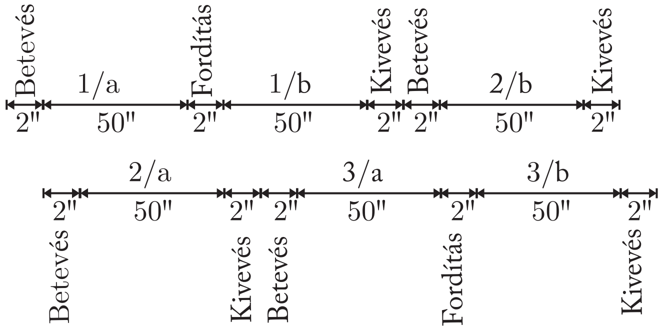
$$a = \frac{4b - 8}{b - 4} = \frac{4(b - 4) + 8}{b - 4} = 4 + \frac{8}{b - 4}.$$

Ez alapján $b - 4 \in \{1, 2, 4, 8\}$, tehát 4 esetet kell letárgyalni. A szimmetria miatt ugyanazokhoz a megoldásokhoz jutunk, mint az előbbi két megoldásban.

5. Feladat. Egy régi típusú kenyérpirító egyszerre egy vagy két szelet kenyeret tud pirítani, de minden betett szeletnek csak az egyik oldalát. Egy oldal pirításához szükséges idő 50 másodperc, a szeleteket nem szabad túlsütni, egy szelet kivevéséhez, betevéséhez, megfordításához külön-külön $2-2$ másodperc szükséges és egyszerre egy művelet hajtható végre (mindkét kézre szükség van egy szelet betevésénél, megfordításánál vagy kivevésénél). Legkevesebb mennyi idő alatt lehet megpirítani ezen a pirítón 3 szelet kenyér mindkét oldalát?

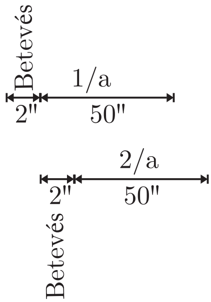
SimpleX Egyesület, Csíkszereda

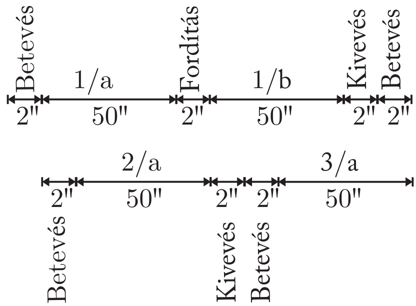
Első megoldás. A három szelet kenyérnek összesen 6 oldala van. Ha a 6 oldalból a pirító egyik oldalán legalább 4-et pirítunk, akkor az több, mint $200''$ (200 másodperc), tehát azt kell elérnünk, hogy a pirító mindkét oldalán a kenyerek oldalaiból $3-3$ piruljon meg (ennél kevesebb nem lehet). Ehhez az egyik szelet kenyér egyik oldalának megpirítása után a szelet kenyeret ki kell venni és be kell tenni egy másik szeletet. Ha a pirító egyik oldalát nézzük, akkor itt a 3 szelet megpirításához $150''$ szükséges. Ezen kívül a három oldal megsütése után legalább 2-szer ki kell venni a szeletet (azt, amelyiknek nem itt sül mindkét oldala és a másik szeletet, amelynek itt sül mindkét oldala) és legalább 3-szor betevés vagy csere történik (hisz mindhárom oldalnak valahogyan be kell kerülnie a sütőbe és ez csak a betevéssel, illetve az oldalcserével történhet meg). Ez azt mutatja, hogy a pirító egyik oldalának a használata legalább $150 + 5 \cdot 2 = 160$ másodpercbe telik. Másrészt mindkét oldalon nem kezdhetünk egyszerre, mert akkor a két betevést egyidőben kellene végrehajtani. Emiatt a pirító két oldalának a kihasználása közt legalább egy $2''$-es eltolódásnak kell lenni és így a teljes idő nem lehet kisebb, mint $162''$. A mellékelt ábra mutatja, hogy $162''$ alatt hogyan lehet kivitelezni a három szelet megsütését (a szeleteket megszámoztuk 1-től 3-ig és minden szelet két oldalát megjelöltük, az egyiket a-val, a másikat b-vel).



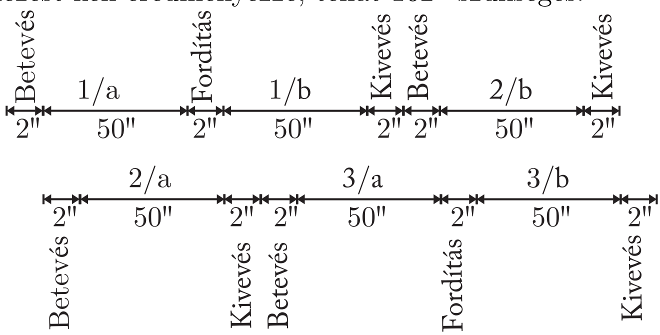
⊗

Második megoldás. Arra törekszünk, hogy a sütő mindkét oldalát (rekeszét) optimálisan használjuk ki, vagyis minimálisra csökkentsük azt az időt, amikor a sütő egyik oldala nem végez hasznos munkát. Amikor az első szeletet berakjuk és az utolsót kivesszük, a sütőnek csak az egyik oldalát használjuk. Ha sikerül a továbbiakban egy olyan kivitelezési tervet létrehozni, amelyben minden további időpillanatban mindkét oldalt használjuk (kivevésre, betevésre, cserére vagy sütésre), akkor az jó, mert minden művelet hossza rögzített. Az egyik oldalon berakunk egy szeletet és kezdjük sütni (1/a). A sütés közben berakjuk a sütő másik oldalára egy másik szelet egyik oldalát (2/a) sülni. A második szelet sütését később is kezdhetnénk, de ezt a késést nem lehet behozni később. Amikor az 1/a oldal megsült, akkor még 2 másodperc van a 2/a elkészüléséig, tehát ha az első szeletet kivennénk, hogy egy más szeletet rakjunk be, akkor a második szeletet vagy túlsütnénk, vagy ennek elkerülése érdekében 2 másodperccel később kellett volna elkezdjük a sütését és ez okozna még $2''$ eltolódást, ami az összidőben is megjelenne (hisz ez alatt a sütő egyik oldala nem volt kihasználva). Emiatt az első szeletet meg kell fordítanunk.





Ha a másodikat is megfordítjuk, akkor mivel a harmadik szelet két oldalát nem lehet egyszerre sütni, a sütő egyik oldala 50″-ig nem használódna ki, ezért a második szeletet ki kell venni és a helyére betenni a harmadik szelet egyik oldalát (3/a). Ugyanakkor az első szelet második oldalának megsülése után ezt a szeletet ki kell venni és helyette vissza kell tenni a második szelet még meg nem sült oldalát (2/b). Látható tehát, hogy az elvégzendő műveletek csak egyféleképpen párhuzamosíthatóak úgy, hogy a sütő egyik oldala se legyen kihasználatlanul. A mellékelt ábra tehát az egyetlen lehetőség, amelyben a sütő mindkét oldala a legtöbb ideig van egyidőben használatban. Ez a legrövidebb kivitelezést kell eredményezze, tehát 162″ szükséges.



⊗

5. Megjegyzés. Érdemes azon is elgondolkodni, hogy több szelet kenyér (pl. $4, 5, 11$ stb.) esetén, hogyan járnánk el.

6. Feladat. Egy kis skandináv faluban három egymás melletti házban három különböző nemzetiségű ember lakik. Minden háztulajdonos más-más állatot tart, illetve más-más a kedvenc étele, és igazak az alábbi állítások:

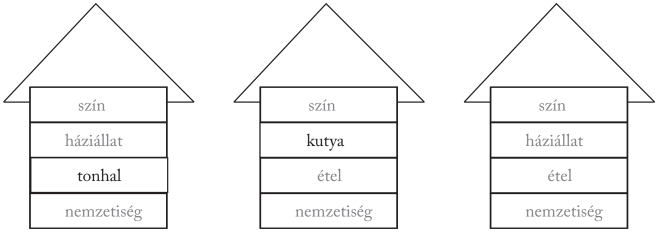
- A dán kedvenc étele a lazacsült.
- A középső házban kutyát tartanak.
- A zöld ház nem szomszédja a kék háznak.
- Aki tonhalat eszik, az első házban lakik.
- A zöld házzal szomszédos házban a finn lakik.
- Aki hörcsögöt tart, a kék házban lakik.
- A kék házban lakó embernek nem kedvenc étele a tonhal.
- A norvég szomszédjának kedvenc étele a rénszarvaspörkölt.

Ki tart macskát? Ki lakik a piros házban?

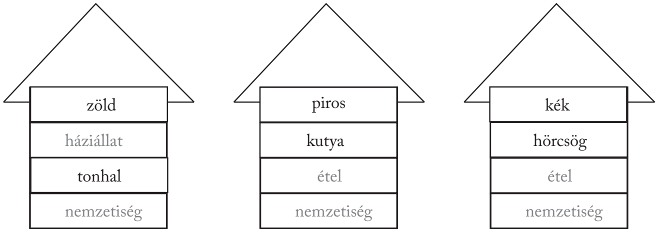
SimpleX Egyesület, Csíkszereda

Első megoldás. Elkészítjük a házakat, majd az állítások alapján kezdjük helyrerakni az állatokat, a nemzetiségeket, az ételeket és a színeket.

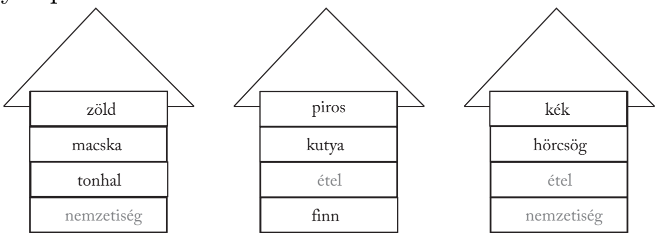
A kutya középre kerül, a tonhal az első házba.



Mivel a zöld és a kék ház nem szomszédos, a középső ház piros. Másrészt a zöld és a kék ház a két szélső. De a kék házban nem esznek tonhalat (és a tonhal az első házban van), tehát az első ház a zöld és az utolsó a kék. Ugyanakkor a kék házban lakik a hörcsög is, tehát a következő ábrát kapjuk:

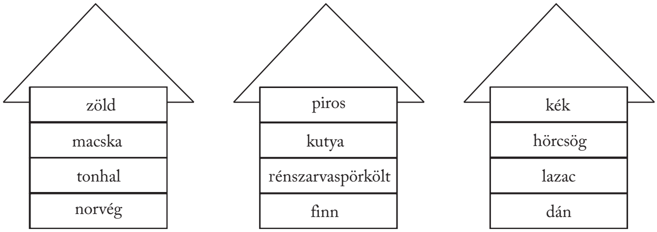


A zöld házzal szomszédos házban a finn lakik, tehát a finn a középső házban lakik. Ugyanakkor a második és a harmadik házban már megtaláltuk a kedvenc háziállatot, tehát a macska az első házban van. Ezzel válaszolni tudunk a második kérdésre, hisz így a piros házban a finn lakik.



Mivel a dán kedvenc ételе a lazacsült, ő csak az utolsó házban lakhat (az elsőben tonhalat esznek, a másodikban a finn lakik).

Így a rénszarvapörkölt csak a második házhoz kerülhet és az első házban a norvég lakik. Tehát a norvég tart macskát.

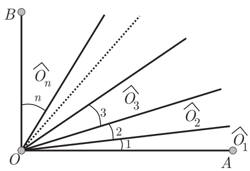


⊗

6. Megjegyzés. A megoldás során az információk felhasználásának sorrendjétől függően nagyon sok különböző gondolatmenet kialakulhat. Az is lehetséges, hogy eseteket tárgyaljunk. Az előbbi gondolatmenet egy példa arra, amikor nem szükséges esetek tárgyalása, tehát a gondolatmenetben minden lépés egyértelmű, ezért megtalált elrendezés az egyetlen lehetséges.

VI. osztály

1. Feladat. A mellékelt ábrán $AO \perp OB$ és az $\widehat{AOB}$ szöget néhány, O-ból induló félegyenessel úgy osztottuk fel, hogy a keletkező $\widehat{O}_1$, $\widehat{O}_2$, $\widehat{O}_3, \ldots, \widehat{O}_n$ szögek mértékszámai (fokban kifejezve) egymás utáni páros számok legyenek. Legtöbb hány félegyenest húzhattunk be?



Gagyi Dénes, Székelykeresztúr

Első megoldás. A legtöbb félegyenest akkor kapjuk, ha a szögek a lehető legkisebbek. A $2°$-os szögtől kezdődően megpróbáljuk összeadni a páros mérőszámmal rendelkező szögek mértékét addig, amíg elérjük, vagy esetleg túllépjük a 90°-ot.

$$2^\circ + 4^\circ + 6^\circ + \cdots + 18^\circ = 2(1^\circ + 2^\circ + 3^\circ + \cdots + 9^\circ) = 90^\circ,$$

tehát 8 félegyenessel 9 részre osztható a derékszög a feladat feltételeinek megfelelően és ennél több részre nem lehet felosztani a feltételeknek megfelelően. Ennek az érvnek egy formálisabb leírását is részletezzük. Ha több, mint 9 részre oszthatnánk az eredeti szöget, akkor $m(\widehat{O_1}) \geq 2^\circ$, $m(\widehat{O_2}) \geq 4^\circ$, $m(\widehat{O_3}) \geq 6^\circ$, és így tovább $m(\widehat{O_9}) \geq 18^\circ$, illetve $m(\widehat{O_{10}}) \geq 20^\circ$, tehát

$$m(\widehat{O_1}) + m(\widehat{O_2}) + \ldots + m(\widehat{O_{10}}) + \ldots + m(\widehat{O_n}) \geq 110^\circ > 90^\circ,$$

ami ellentmondás. Így legtöbb 8 félegyenest húzhatunk be. $\circledast$

Második megoldás. Ha $m(\widehat{O_1}) = 2k^\circ$, akkor $m(\widehat{O_2}) = (2k+2)^\circ$ és így tovább $m(\widehat{O_n}) = (2k + 2(n-1))^\circ$. Ez alapján a

$$2k + (2k+2) + (2k+4) + \cdots + (2k + 2(n-1)) = 90$$

egyenlethez jutunk. Ez

$$2nk + n(n-1) = 90$$

alakban is írható, tehát $n(2k+n-1) = 90$. Mivel $n < 2k+n-1$, a 90-et úgy kell felírni két természetes szám szorzataként, hogy a kisebbik szám a lehető legnagyobb legyen. Ez a felírás a $9 \cdot 10 = 90$, ahonnan $n = 9$ és $k = 1$, vagyis a szöget 9 részre osztjuk és a legkisebb szög mértéke 2°. Ezt 8 félegyenessel érhetjük el. $\circledast$

2. Feladat. A 2013 egy olyan természetes szám, amelyben az első és a harmadik számjegy összege egyenlő a második és a negyedik számjegy összegével. Hány ilyen évszám van a 3. évezredben?

Durugy Erika, Torda

Megoldás. A harmadik évezredben az első év a 2001, az utolsó a 3000. A 3000 nem rendelkezik a kért tulajdonsággal, így az összes keresett szám 2-essel kezdődő négyjegyű évszám. A harmadik helyen bármilyen számjegy állhat, így az első és harmadik számjegy összege 2-től 11-ig bármi lehet (2-t és 11-et is beleértve). Ha ez az összeg k, és $k \leq 9$, akkor a második és a negyedik számjegy megválasztása a következőképpen lehetséges:

$$0 + k, 1 + (k - 1), \ldots, k + 0.$$

Ha $k = 10$, akkor a lehetséges előállítások

$$1 + 9, 2 + 8, \ldots, 9 + 1,$$

míg ha $k = 11$, akkor

$$2 + 9, 3 + 8, \ldots, 9 + 2.$$

Tehát összesen $3 + 4 + \cdots + 10 + 9 + 8 = 69$ ilyen szám van. $\circledast$

7. Megjegyzés. Az esetek csoportosítása tetszőleges szempont szerint megtörténhet. Például ha a szám $\overline{2abc}$, akkor a $2+b = a+c$ egyenlőségben a tárgyalást elvégezhetjük az a lehetséges értékei alapján is. Ha $a = 0$, akkor $c = b + 2$, tehát 8 eset lehetséges, ha $a = 1$, akkor $c = b + 1$, tehát 9 esetünk van, ha $a = 2$, akkor 10 eset. Ha az a értéke rendre $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, akkor a megjelenő esetek száma rendre $9, 8, 7, 6, 5, 4, 3$ és így az összes lehetséges eset száma 69.

3. Feladat. Keress két olyan egymás utáni természetes számot, hogy mindkét szám számjegyeinek összege osztható legyen 5-tel! Melyek a legkisebb ilyen tulajdonsággal rendelkező számok? Hány ilyen számpár létezik 0 és 100000 között?

Róka Sándor, Nyíregyháza

Első megoldás. Ha a kisebbik szám utolsó számjegye nem 9, akkor 1-et hozzádva a számjegyek összege 1-gyel nő. Így nem lehet mindkét szám számjegyeinek összege 5 többszöröse. Ha a kisebbik szám utolsó számjegye 9 és utolsó előtti számjegye nem 9, akkor 1-et hozzádva a számjegyek összege 8-cal csökken (9-esből 0 lesz, és az utolsó előtti a-ból $a+1$ lesz). Így ebben az esetben sem lehet mindkét összeg 5-nek többszöröse. Ha a kisebbik szám utolsó és utolsó előtti számjegye 9-es és az az előtti számjegye nem 9-es, akkor számjegyeinek öszege 17-tel csökken, ami szintén nem megfelelő. Ha az utolsó három számjegy 9-es és hátulról a negyedik számjegy nem 9-es, akkor 26-tal csökken a számjegyek összege, tehát ez sem megfelelő. Ha az utolsó négy számjegy 9-es, és hátulról az ötödik nem az, akkor 35-tel csökken a számjegyek összege. Ebben az esetben ha a kisebbik szám számjegyeinek összege osztható 5-tel, akkor a nagyobbik szám számjegyeinek összege is osztható 5-tel. Ha az utolsó négy számjegy 9-es, akkor ahhoz, hogy az összeg 5-tel osztható legyen az első számjegy legkisebb lehetséges értéke 4. Így a legkisebb ilyen szám a 49999, tehát a kért tulajdonsággal rendelkező legkisebb számok a 49999 és az 50000.

Ha további olyan számpárokat keresünk, amelyek rendelkeznek az adott tulajdonsággal és nem nagyobbak, mint 100000, akkor azok közül a kisebb legfeljebb 5 jegyű lehet. Ugyanakkor az előbbi gondolatmenet alapján az utolsó négy számjegye 9-es, tehát csak az első számjegyét kell meghatároznunk úgy, hogy a számjegyek összege 5-tel osztható legyen. Erre csak az a lehetőség van, hogy az első számjegy is 9-es (mert a

36-hoz csak a 4-es vagy a 9-es számjegyet lehet úgy hozzáadni, hogy az összeg osztható legyen 5-tel). Ez viszont nem jó, mert ebben az esetben a következő szám a 100000 és ebben a számjegyek összege nem osztható 5-tel. Tehát 0 és 100000 között csak egy olyan számpár van, amely rendelkezik az adott tulajdonsággal. ⊛

Második megoldás. Keressük a 100000-nál kisebb x számokat, amelyekre x és $x+1$ rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy a számjegyeinek összege osztható 5-tel. Jelöljük $5k$-val az x számjegyeinek összegét és $5v$-vel az $x+1$ számjegyeinek összegét. Mivel minden természetes szám 9-cel való osztási maradéka megegyezik a számjegyei összegének 9-cel való osztási maradékával, ezért $5k+1-5v$ osztható 9-cel. Így $5(k-v)+1$ osztható 9-cel. Mivel x és $x+1$ számjegyeinek összege nem haladhatja meg az $5 \cdot 9 = 45$-öt (mert legfeljebb ötjegyűek lehetnek) ez csak úgy lehetséges (a 9-es szorzótábla alapján), ha $5(k-v)+1 = 36$, vagyis $5k = 5v + 35$. Mivel $v \neq 0$ az x számjegyeinek összege 40 vagy 45 lehet és ennek megfelelően $x+1$ számjegyeinek összege 5, illetve 10. Mindkét összeg csak úgy jelenhet meg, ha a szám tartalmaz legalább négy darab 9-es számjegyet és az ötödik számjegy 4 vagy 9. Az öt 9-es jegyből álló x szám esetén az $x+1$ jegyeinek összege nem 10. A négy 9-esből és egy négyesből felírható x számok közül csak az $x = 49999$-re lesz az $x+1$ számjegyeinek összege 5, tehát az egyetlen számpár, amely teljesíti a megadott tulajdonságot a 49999 és 50000. ⊛

4. Feladat. A $2, 3, 4, 5, 6, 8, 9$ számjegyek segítségével felírunk néhány olyan hétjegyű számot, amelyben minden felsorolt számjegy pontosan egyszer szerepel. Kiválaszthatunk-e ezek közül két olyan különböző számot, amelyek közül az egyik osztója a másiknak?

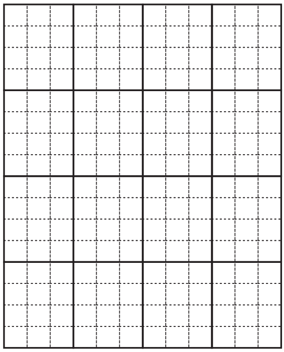
Bencze Mihály, Brassó

Első megoldás. Bármelyik ilyen két szám számjegyeinek összege 37, tehát mindkettő 9-cel való osztási maradéka 1 és különbségük osztható 9-cel. Ugyanakkor, ha a nagyobbik szám többszöröse a kisebbiknek, akkor a különbség is többszöröse a kisebbiknek. Mivel a különbség osztható kilenccel, és a kisebbik szám relatív prím 9-cel, a különbség legalább 9-szerese a kisebbik számnak, ami azt jelenti, hogy a nagyobbik szám legalább 10-szerese a kisebbik számnak és ez nem lehetséges, mert a számjegyeik száma megegyezik. Tehát nincs két ilyen szám. ⊛

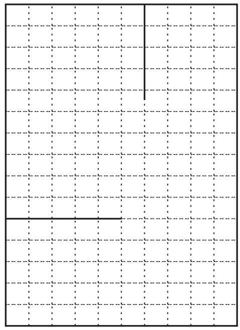
Második megoldás. A legkisebb felírható szám 2-sel kezdődik, a legnagyobb 9-essel és minden szám hétjegyű, tehát a szorzótényező nem lehet 4-nél nagyobb. Így csak azt kell megvizsgálni, hogy a szorzótényező lehet-e $2, 3$ vagy 4. A továbbiakban igazoljuk, hogy a szorzótényező nem lehet sem 2, sem 3, sem 4. Ha a szorzó 2 lenne, akkor a szorzás elvégzése során minden számjegyet kellene szorozni 2-vel és a tíznél nagyobb eredmények esetén a túlcsordulást tovább kellene adni. Ez a tulcsordulás legfeljebb 1 lehet. A felsorolt számjegyek kétszereseinek az utolsó számjegye rendre $4, 6, 8, 0, 2, 6, 8$. Mivel itt két 6-os jelenik meg, a túlcsordulás legfeljebb 1 és az eredményben nem lehet 7-es, a szorzó nem lehet 2-es. Hasonló a gondolatmenet akkor is, ha a szorzó 3 lenne. Ebben az esetben a számjegyek 3-szorosainak a végződése $6, 9, 2, 5, 8, 4, 7$. A túlcsordulás legfeljebb 2 lehet, tehát a 9-esnél nem adhatunk hozzá semmit (különben 0 vagy 1 is megjelenne). Emiatt a 8-ashoz sem adhatunk hozzá semmit és így megjelenne a 7-es, vagy lenne két 8-as, esetleg két 9-es számjegy az eredményben. Mivel ez nem megengedett, a szorzó nem lehet 3 sem. Ha a szorzó 4 lenne, akkor a számjegyek 4-szeresének utolsó számjegyéhez hozzáadva az esetleges túlcsordulásokat ugyanazokat a számjegyeket kellene kapjuk. De az adott számjegyek 4-szeresének az utolsó számjegye rendre $8, 2, 6, 0, 4, 8, 6$ és a túlcsordulás legtöbb 3. Így a két 6-osból és a két 8-asból az eredményben nem jelenhet meg pontosan egy 6-os, egy 8-as és egy 9-es. Az előbbiek alapján a szorzó nem lehet 4 sem, tehát a felírt számok közül nem választható kettő úgy, hogy az egyik a másiknak az osztója. $\circledast$

8. Megjegyzés. Mivel minden felírható szám 9-cel való osztási maradéka 1, ezért a szorzónak is 1 kellene legyen a 9-cel való osztási maradéka. Ez nem lehetséges mivel az összes felírható szám hétjegyű. Természetesen az előbbi ötletek összekombinálásából is adódhat a megoldás. Így például a második megoldásnál a 3-as szorzó kizárható a 3-mal való oszthatóság alapján is (hisz egyik szám sem osztható 3-mal).

5. Feladat. A mellékelt ábra a) részén egy téglalaprács látható. Ez azt jelenti, hogy két rögzített m és n szám esetén egy téglalap szembenfekvő oldalpárjait m, illetve n egyenlő részre osztottuk fel és a megfelelő osztópontokat összekötöttük az oldalakkal párhuzamos szakaszok segítségével (ezek a rácsvonalak). Így egy $m \times n$-es téglalaprács keletkezik. Az a) ábrán egy 4×4-es téglalaprács látható, amelynek a mérete 12×16, mert a rács 3×4-es téglalapokból áll. A b) ábrán látható 10×15-ös téglalap és a benne látható vastag (nem szaggatott vonallal húzott) szakaszok valamilyen téglalaprács maradványai, a többi vonalat valaki kiradírozta. Milyen lehetett az a téglalaprács, amit kiradíroztak? Legalább hány vonallal kell kiegészíteni a b) ábrát ahhoz, hogy olyan téglalaprácsot kapjunk, amelyben a folytonos vonallal meghúzott szakaszok a rácsvonalakra illeszkedjenek?



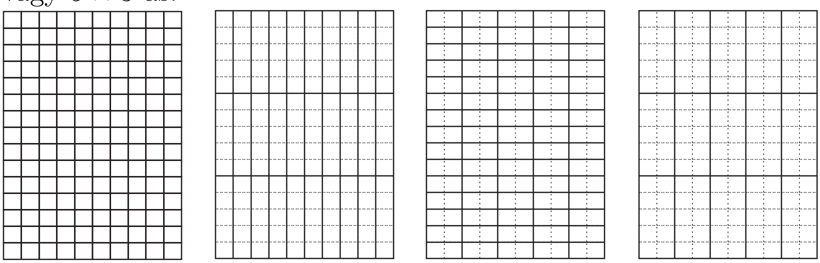
a)



b)

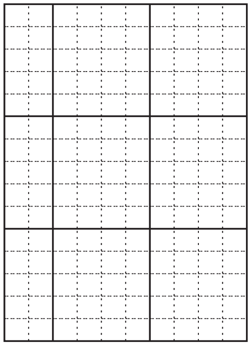
SimpleX Egyesület, Csíkszereda

Első megoldás. A téglalaprács kis téglalapjainak méretei osztói a nagy téglalap méreteinek (pl. az a) ábrán 2 osztója 10-nek és 3 osztója 15-nek). A b) ábrán behúzott vonalak alapján a kis téglalapok vízszintes mérete osztója 6-nak is és 4-nek is, a függőleges mérete pedig osztója 5-nek és 10-nek is. Így a keletkezett kis téglalapok 1×1-esek, 1×5-ösök, 2×1-esek vagy 2×5-ösök. Ezekben az esetekben a téglalaprács 10×15-ös, 10×3-as, 5×15-ös vagy 5×3-as.



Az 5×3-as téglalaprács esetén kell a legkevesebb vonallal kiegészíteni az ábrát, ez pedig 6 vonal. $\circledast$

Második megoldás. Első lépésben meghosszabbítjuk a meglévő belső szakaszokat. Ez két vonal. Vízszintesen be kell húzni alulról a tizedik sor felső határoló vonalát és jobbról balra számolva a nyolcadik oszlop bal oldali határoló vonalát. Ez további 2 vonal. Ezekre azért van szükség, mert egy téglalaprácson ha két rácsvonal közt d a távoldág, akkor tetszőleges rácsvonaltól d távolságra (az oldalak mentén számolva) szintén rácsvonalnak kell lennie. Így a mellékelt ábrán látható alakzatot kapjuk.



Ennek az ábrának a bal oldalán a két függőleges vonal közti távolság 2, ezért további két vonal behúzása szükséges. Így legalább 6 vonal behúzása szükséges és ugyanakkor 6 vonal segítségével elérhető az, hogy téglalaprács (5×3-as, amelyben az alaptéglalap mérete 2×4-es) keletkezzen. $\circledast$

9. Megjegyzés. Általában ha behúzunk néhány vonalat, akkor ahhoz, hogy téglalapráccsá kiegészíthetsük meg kell határozni külön az egyik irányú vonalak közt fellépő összes távolság legnagyobb közös osztóját és külön a másik irányú vonalak közt fellépő összes távolság legnagyobb közös osztóját. Ezek lesznek az alaptéglalap oldalhosszai.

6. Feladat. A Vuki nevű űrnép a Kashyyyk bolygóról költözik az Endor bolygóra egyszemélyes űrhajókban. Az út megtételéhez egy űrhajónak 1 egységnyi hajtóanyagra van szüksége. Ugyanakkor, ha csoportokban utaznak, akkor a fogyasztásuk csökken a következő szabályok szerint: 4-es csoportban a csoport fogyasztása 3, 10-es csoportokban 9, 100-as csoportokban 70 és 1000-es csoportokban 600 egység.

1. Határozd meg, hogy legalább mennyi üzemanyag szükséges az átköltözéshez, ha a létszám 35. Hát akkor, ha a létszám 258 vagy 3212?
2. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén határozd meg az n űrlény átköltöztetéséhez szükséges üzemanyag mennyiségét!

SimpleX Egyesület, Csíkszereda

Megoldás. 1) Észrevehető, hogy nem éri meg 10-es csoportokban utazni, mert egy 10-es csoport helyett 10-en utazhatnak két 4-es és két 1-es csoportban, így pedig csak 8 egységnyi üzemanyagra van szükségük (míg a 10-es csoportnak 9-re). Másrészt ha van legalább négy űrhajó, akkor érdemesebb 4-es csoportban utazni, mint külön-külön a 4-nek. Így 35 űrhajónak nyolc 4-es és három 1-es csoportban érdemes utazni, ezzel 27 egységnyi üzemanyagot fogyasztanak.

100 űrhajó kevesebbet fogyaszt egy 100-as csoportban, mint 25 darab 4-es csoportban, így 258 űrhajó abban az esetben fogyaszt a legkevesebbet, ha két 100-as csoportban, tizennégy 4-es csoportban és két 1-es csoportban utaznak, így 184 egységnyi üzemanyagot fogyasztanak.

1000 űrhajó kevesebbet fogyaszt, ha egy csoportban utazik, mint tíz 100-as csoportban, így 3212 űrhajó esetén előbb a legtöbb 1000-es csoportot érdemes kialakítani, majd a maradékból a legtöbb 100-as csoportot és utána a legtöbb 4-es csoportot. Ez azt jelenti, hogy három 1000-es csoportban, két 100-as csoportban és három 4-es csoportban utaznak, így 1949 egységnyi üzemanyagot fogyasztanak.

2) A minimális mennyiségű üzemanyag fogyasztásához a legtöbb lehetséges 1000-es csoportot, majd a maradákból a legtöbb lehetséges 100-as csoportot, a maradékból a legtöbb lehetséges 4-es csoportot kell kialakítani, a többiek pedig 1-esével utaznak. Így, ha az n-nek 1000-rel való osztási hányadosa n_1 és maradáka r_1, akkor n_1 darab 1000-es csoportot alakítanak, az r_1-et pedig 100-as csoportokba osztják. Ha az r_1-nek 100-zal való osztási hányadosa n_2 és maradéka r_2, akkor n_2 darab 100-as csoportot alakítanak és a maradékot 4-es csoportokra osztják. Ha az r_2-nek 4-gyel való osztási hányadosa n_3 és maradéka r_3, akkor n_3 4-es csoportot alakítanak, a többi r_3 pedig 1-esével utazik. Összesen tehát $600n_1 + 70n_2 + 3n_3 + r_3$ egységnyi üzemanyagra van szükség. $\otimes$

10. Megjegyzés. Ha $n = \overline{Xabc}$, ahol a, b, c számjegyek és X tetszőleges szám, akkor X darab 1000-es csoportot, a darab 100-as csoportot kell kialakítani. A maradék $\overline{bc}$-nek a 4-gyel való hányadosa (h) és maradéka (m) megadja, hogy hány 4-es csoport és hány egyedül utazó lesz. Összesen tehát a fogyasztás $F = 600X + 70a + 3h + r$. Mivel $4h + r = \overline{bc}$, ezért írhatjuk, hogy $F = 600X + 70a + \overline{bc} - r$.

VII. osztály

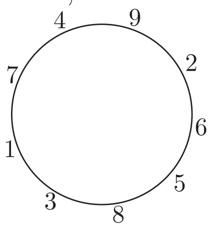
1. Feladat. Fel lehet-e írni az $1, 2, 3, \ldots, 9$ számokat egy kör kerületére úgy, hogy bármelyik két szomszédos szám összegét számolva olyan számot kapjunk, amelyik nem osztható sem 3-mal, sem 5-tel, sem 7-tel?

Nagy Olga, Nagyszalonta

Megoldás. A számokat egy kör kerületére írva mindeniknek két szomszédja lesz. A legkisebb összeg az $1 + 2 = 3$, a legnagyobb a $8 + 9 = 17$. Figyelembe véve, hogy két szomszédos szám összege nem szabad osztható legyen sem 3-mal, sem 5-tel, sem 7-tel, a lehetséges összegek: $4, 8, 11, 13, 16, 17$. Ekkor az egyes számok szomszédai a következők lehetnek:

szám	1	2	3	4	5
szomszéd	$3, 7$	$6, 9$	$1, 5, 8$	$7, 9$	$3, 6, 8$
szám	6	7	8	9	
szomszéd	$2, 5, 7$	$1, 4, 6, 9$	$3, 5, 9$	$2, 4, 7, 8$	

Mivel az 1-esnek, a 4-esnek és a 2-esnek csak a 3-7; 7-9; 9-6 lehetnek a szomszédai, ezért a 3-1-7-4-9-2-6 csak ilyen sorrendben követhetik egymást. A még fel nem használt számok közül a 6-ost csak az 5-ös, azt pedig csak a 8-as követheti, aminek a 3-as lesz a másik szomszédja. A kapott felírás teljesíti a feltételeket, és mivel minden lépés egyértelmű volt, csak ez az egy megoldás van.



$\otimes$

2. Feladat. Egy 30-as létszámú osztályban a fiúk $\frac{2}{3}$-a és a lányok $\frac{1}{2}$-e együtt 90 perc alatt hámoz meg egy zsák almát. Ha a fiúk $\frac{1}{2}$-e és a lányok $\frac{2}{3}$-a venne részt a munkában, akkor 85 perc alatt végeznének. Feltételezzük, hogy mindenki ugyanolyan sebességgel dolgozik.

a) Hány fiú és hány lány van az osztályban?

b) Mennyi idő alatt hámoznák meg a zsák almát, ha az egész osztály dolgozna?

Simon József, Csíkszereda

Első megoldás. a) Legyen f a fiúk és l a lányok száma. Ekkor $f+l=30$, és

$$\frac{2}{3}f+\frac{1}{2}l\dots 90 \text{ perc}$$
$$\frac{1}{2}f+\frac{2}{3}l\dots 85 \text{ perc.}$$

Mivel a tanulók száma és a munka elvégzéséhez szükséges idő fordítottan arányos mennyiségek, ezért

$$\left(\frac{2}{3}f+\frac{1}{2}l\right)\cdot 90=\left(\frac{1}{2}f+\frac{2}{3}l\right)\cdot 85.$$

Ebből átalakítások után kapjuk, hogy $f=\frac{2}{3}l$, amit behelyettesítve az $f+l=30$ összefüggésbe kapjuk, hogy 12 fiú és 18 lány van az osztályban.

b) Az első alpont alapján

$$\frac{2}{3}f+\frac{1}{2}l=\frac{2}{3}\cdot 12+\frac{1}{2}\cdot 18=17$$

tanuló 90 perc alatt hámozza meg a zsák almát, így 30 tanulónak $\frac{17\cdot 90}{30}=51$ percre van szüksége ugyanannyi alma meghámozásához.

$\circledast$

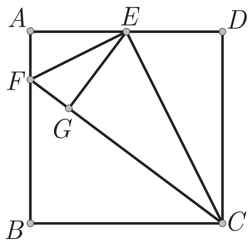
Második megoldás. a) Mivel egyszerre csak egész számú fiú illetve lány hámozhatja az almákat, következik, hogy a fiúk és a lányok száma is osztható 2-vel is és 3-mal is, azaz osztható 6-tal. Mivel a második esetben rövidebb idő alatt hámoznák meg az almát, következik, hogy több lány van, mint fiú. Így a következő lehetséges esetek fordulhatnak elő: 0 fiú és 30 lány, 6 fiú és 24 lány vagy 12 fiuú és 18 lány. Az első esetben 15 lány 90 perc alatt hámozná meg az összes almát, illetve 20 lány 85 perc alatt hámozná meg az összes almát, ez ellentmondás, mert $15\cdot 90\neq 20\cdot 85$, ami 1 gyereknek szükséges idő. A második esetben 4 fiú és 12 lány 90 perc alatt hámozná meg az összes almát, míg 3 fiú és 16 lány 85 perc alatt, ami szintén ellentmondás, mert $(4+12)\cdot 90 \neq (3+16)\cdot 85$. A harmadik esetben 8 fiú és 9 lány 90 perc alatt hámozná meg az összes almát, míg 6 fiú és 12 lány 85 perc alatt, ami megfelel, mert $(9+8)\cdot 90 = (6+12)\cdot 85 = 1530$. Tehát 12 fiú és 18 lány van az osztályban.

b) Az a) alpont alapján egy gyerek 1530 perc alatt hámozná meg az összes almát, tehát 30 gyerek $1530 : 30 = 51$ perc alatt hámozná meg az összes almát. ⊛

3. Feladat. Az $ABCD$ négyzetben jelöljük E-vel az AD oldal felezőpontját és F-fel az AB oldal A-hoz közelebb eső negyedelő pontját. Bizonyítsd be, hogy az E pontnak a CF-től mért távolsága egyenlő a négyzet oldalhosszának a felével!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

Első megoldás. Jelölje G az E-ből a CF-re húzott merőleges talppontját. Ha a a négyzet oldalhossza, igazolnunk kell, hogy $EG = \frac{a}{2}$.



Mivel az EDC és FAE derékszögű háromszögek befogóira igaz, hogy

$$\frac{ED}{FA} = \frac{DC}{AE} = 2,$$

ezért a két háromszög hasonló, és $\frac{EC}{FE} = 2$, valamint $m(\widehat{DCE}) = m(\widehat{AEF})$, $m(\widehat{CED}) = m(\widehat{EFA})$, ahonnan $m(\widehat{CEF}) = 90^\circ$.

Ugyanakkor, mivel $\frac{EC}{EF} = 2$ és $\frac{DC}{DE} = 2$, ezért az ECF és DCE derékszögű háromszögek is hasonlóak, így $m(\widehat{DCE}) = m(\widehat{ECF})$ és $m(\widehat{CED}) = m(\widehat{CFE})$. Mivel $m(\widehat{GEC}) = 90° - m(\widehat{ECG}) = 90° - m(\widehat{ECD}) = m(\widehat{CED})$, ezért az ECG és ECD derékszögű háromszögek egybevágóak, tehát $EG = ED = \frac{a}{2}$. ⊛

Második megoldás. Jelölje G az E-ből a CF-re húzott merőleges talppontját. Ha a a négyzet oldalhossza, igazolnunk kell, hogy $EG = \frac{a}{2}$.

Mivel az EAF, CDE és ABC háromszögek derékszögűek, ezért Pitagorasz tétele alapján

$$EF = \frac{a\sqrt{5}}{4}, \quad EC = \frac{a\sqrt{5}}{2}, \quad CF = \frac{5a}{4}.$$

A kapott értékek alapján $CF^2 = EC^2 + EF^2$, így Pitagorasz fordított tételéből következik, hogy az ECF háromszög derékszögű. Ekkor az EG magasságra igaz, hogy

$$EG = \frac{EF \cdot EC}{CF} = \frac{\frac{a\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}}{\frac{5a}{4}} = \frac{a}{2}.$$

⊛

11. Megjegyzés. A Pitagorasz-tétel alapján (esetleg területeket is használva) több különböző megoldás is adható, ezeknek a részletezésétől eltekintünk. Az ábrán látható, hogy az AFE és EDC háromszögeket az FE, illetve EC mentén behajtva a négyzet belsejébe A is és D is a G-be kerül. Erre az észrevételre is alapozható egy megoldás.

4. Feladat. Az $ABCD$ téglalap AB oldalán felvesszük az M_1, M_2, M_3 pontokat (A-tól B irányába ebben a sorrendben), a DC oldalán pedig az N_1, N_2, N_3 és N_4 pontokat (D-től C

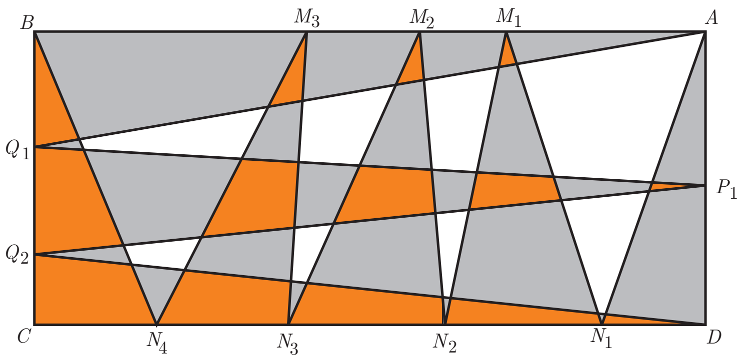
irányába ebben a sorrendben). Hasonlóan felvesszük a $P_1 \in (AD)$ és $Q_1, Q_2 \in (BC)$ pontokat (BC-n a sorrend $B - Q_1 - Q_2 - C$). Tekintjük az AN_1M_1, $M_1N_2M_2$, $M_2N_3M_3$, M_3N_4B, illetve a DQ_2P_1 és P_1Q_1A háromszögeket. Az első négyet elsőfajúnak, az utolsó kettőt másodfajúnak (vagy vízszintesnek, illetve függőlegesnek) nevezzük. Jelölje T_1 azon síkdarabkák területének összegét, amelyek egyaránt hozzátartoznak valamilyen első és másodfajú háromszöghöz, illetve T_2-vel azon síkdarabkák területének összegét, amelyek a téglalap belsejében vannak, de nem tartoznak sem elsőfajú, sem másodfajú háromszöghöz. Bizonyítsd be, hogy $T_1 = T_2$!

Simon József (feladata alapján), Csíkszereda

Megoldás. Látható, hogy az elsőfajú háromszögek területének összege ugyanannyi, mint a másodfajú háromszögek területének összege és mindkét összeg egyenlő a téglalap területének felével (mert a téglalap oldalaira illeszkedő oldalak összege épp az egyik oldal hosszával egyenlő és a magasság a másik oldal hosszával). A mellékelt ábrán azokat a darabokat, amelyek elsőfajú és másodfajú háromszögekhez is tartoznak fehéren hagytuk, azokat, amelyek egyik fajú háromszöghöz sem tartoznak sötétszürkére, a többit világos szürkére színeztük. Ha S-sel jelöljük világos szürke rész területét és T-vel a téglalap területét, akkor felírhatjuk, hogy

$$2T_1 + S = T \text{ és } 2T_2 + S = T,$$

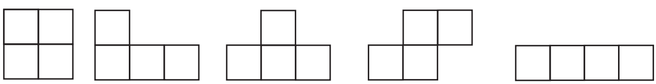
mert az első esetben a darabkák összesen kiadják az elsőfajú és a másodfajú háromszögek területét, a második esetben az ezeken kívüli, de a téglalaphoz tartozó darabok területét. Ebből következik, hogy $T_1 = T_2$.



⊛

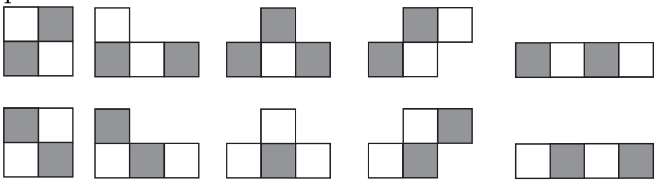
12. Megjegyzés. A tulajdonság természetesen számolással is ellenőrizhető, csak az oldalakon keletkező mindenik kis szakasz hosszára valamilyen jelölést kell alkalmazni, és ennek függvényében ki kell számolni a darabkák területét. Az előbbi megoldásból látható, hogy az első, illetve másodfajú háromszögek száma tetszőleges lehet.

5. Feladat. A mellékelt ábrán látható darabokból össze lehet-e rakni egy téglalapot úgy, hogy mindenik darabot felhasználjuk és ne keletkezzen sem átfedés, sem üres rész a téglalapon?



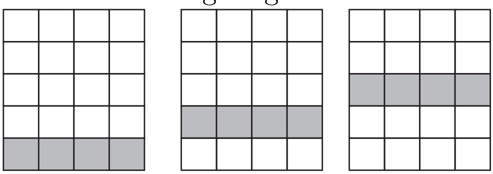
SimpleX Egyesület, Csíkszereda

Első megoldás. A darabok összesen 20 kis négyzetet tartalmaznak, tehát ha össze lehet rakni belőlük egy téglalapot, akkor annak a téglalapnak legalább az egyik oldala páros hosszúságú. Emiatt ha azt sakktáblaszerűen kiszínezzük, ugyanannyi világos mezőt kapunk, mint sötétet. Tehát a darabok összesen ugyanannyi világos mezőt kell lefödjenek, mint sötétet. Másrészt, ha a darabokat külön-külön színezzük ki sakktáblaszerű színezéssel (minden darabot kétféleképpen színezhetünk), akkor az egyik darab (a harmadik) az egyik színből több négyzetet tartalmaz, míg az összes többi mindkét színű négyzetből $2-2$ darabot tartalmaz. Ez azt mutatja, hogy az adott darabokból nem lehet téglalapot összerakni.

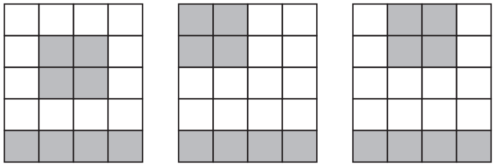


⊛

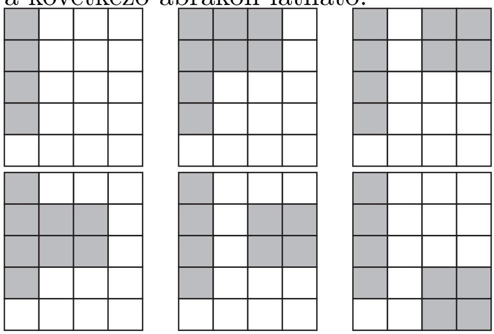
Második megoldás. A megadott darabok összesen 20 kis négyzetecskét tartalmaznak, tehát ha ki lehet rakni belőlük téglalapot, akkor annak a mérete csak 1×20, 2×10 vagy 4×5 lehet. Az első két méret nem lehetséges a darabok alakja miatt (az 1×20-as téglalapon az első darab nem fér el, a 2×10-esen az utolsó darab két középső négyzete mellett üres maradna), tehát csak a 4×5-ös téglalapot kell megvizsgálni. Ebben az esetben megvizsgáljuk, hogy hová kerülhet az utolsó 1×4-es darab. Ha a rövidebb oldallal párhuzamos, akkor a szimmetria miatt elégséges a következő három esetet megvizsgálni:



Az utolsó kettő nem lehetséges, mert a többi darabot nem lehet elhelyezni. Az első esetben a 2×2-es darabnak a 4×4-es részen való elhelyezésére vonatkozóan a szimmetria miatt a következő eseteket szükséges tovább vizsgálni:



Látható, hogy egyik esetben sem lehet a többi darabot elhelyezni. Ha az 1×4-es darab a hosszabb oldallal párhuzamos, akkor a szimmetria miatt elégséges itt is csak 3 esetet megvizsgálni és ezekből (akárcsak az előbb) csak azt kell tovább vizsgálni, amikor az 1×4-es darab a téglalap oldalára illeszkedik. Ez esetben a 2×2-es darab elhelyezésére 8 lehetőség van. Ebből 2-t eleve kizárhatunk, mert keletkezik olyan rész amit nem lehet lefödni. A többi eset a következő ábrákon látható:



Mindegyik esetben a további 1 vagy 2 darab elhelyezésére egyetlen lehetőség van (különben már egy lépésben ellentmondáshoz jutunk), és mindegyik esetben olyan rész keletkezik a téglalapon, amit nem tudunk lefedni. Tehát az adott darabokból, az adott feltételekkel nem lehet téglalapot összerakni. $\circledast$

6. Feladat. Három biciklis egy túrán vesz részt, amely abból áll, hogy az A helységig vonattal utaznak, onnan a B helységig bicikliznek, majd B-ből vonattal térnek haza. Az A és B közti szakaszon egy C pontban az egyikük biciklije használhatatlanná (és javíthatatlanná) vált (becsúszott egy szakadékba). Gyalogosan a sebességük 4 km/h és biciklivel 16 km/h. A C és B távolsága (a vasútállomásig) 24 km, az A és C távolsága 60 km és B-ből 3 és fél óra múlva lenne vonatjuk hazafele. Elérhetik-e mindhárman ezt a vonatot, ha a megmaradt biciklik egyikére sem ülhetnek egyszerre ketten?

SimpleX Egyesület, Csíkszereda

Megoldás. A megoldás alapötlete abból áll, hogy ketten elindulnak biciklin, a harmadik gyalog és az egyik biciklit út közben otthagyják valahol úgy, hogy a harmadik elvehesse, a másik biciklivel meg az a két gyerek ismétli meg ugyanezt, aki biciklin indult. Jelöljük a gyerekeket X, Y, Z-vel. Egy lehetőség a következő:

- X és Y elindul biciklivel, Z gyalog;
- X leteszi a biciklit 16 km után és gyalog megy tovább B-ig;
- Y leteszi a biciklit 8 km után, megy 8 km-t gyalog és utána elveszi azt a biciklit, amit X hagyott el az út mentén, majd ezzel megy B-ig;
- Z megy 8 km-t gyalog, majd elveszi azt a biciklit, amit Y letett és ezzel megy B-ig.

Így mindhárman 8 km-t tettek meg gyalog és 16 km-t biciklin, tehát 3 óra alatt mind elérnek B-be. A feladat megoldásához ez elégséges is, hisz a kérdés az volt, hogy elérhetik-e a vonatot, ami $3,5$ óra múlva indul.

A továbbiakban igazoljuk azt is, hogy az előbbi terv a legjobb, vagyis kevesebb, mint 3 óra alatt nem érhetnek el. Jelölje x_1, x_2 és x_3 a három gyerek által gyalogosan megtett út hosszát és y_1, y_2, valamint y_3 a biciklin megtett út hosszát. Ezekkel a jelölésekkel $x_i + y_i = 24$, ha $1 \leq i \leq 3$. Mivel a biciklit nem érdemes menetközben elhagyni (úgy, hogy a végén a bicikli ne érjen B-be) és nem érdemes a biciklivel visszafele menni, írhatjuk, hogy $y_1 + y_2 + y_3 = 48$, tehát $x_1 + x_2 + x_3 = 24$. Ha t_1, t_2 és t_3 a gyerekek menetideje, akkor

$$t_i = \frac{x_i}{4} + \frac{y_i}{16}, 1 \leq i \leq 3,$$

tehát ha $t = \max\{t_1, t_2, t_3\}$, akkor írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} t &\geq \frac{x_1}{4} + \frac{y_1}{16} \\ t &\geq \frac{x_2}{4} + \frac{y_2}{16} \\ t &\geq \frac{x_3}{4} + \frac{y_3}{16} \end{aligned}$$

Az előbbiek alapján

$$3t \geq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{4} + \frac{y_1 + y_2 + y_3}{16},$$

vagyis

$$t \geq 3.$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesülhet, ha $x_1 = x_2 = x_3 = 8$ és $y_1 = y_2 = y_3 = 16$. ⊛

13. Megjegyzés. Természetesen a vonat elérését végtelen sok más cserélgetéssel is el lehet érni, hisz a fél óra plussz idő miatt nem szükséges meghatározni a minimumot. Ugyanakkor az előbb vázolt kivitelezésen kívül is végtelen sok olyan kivitelezés van, ami biztosítja azt, hogy a gyerekek a legrövidebb idő alatt érnek oda. Egy ilyen lehetőség, ha előbb az út felét teszik meg az előbb leírt módon (ekkor a gyalog, illetve biciklivel megtett útak hossza 4 km illetve 8 km az első szakaszban és ugyanannyi a másodikban), majd a másik felét. Egy rokon feladat megoldása megtalálható a Matlap 2012/8-as számában (két gyerek és egy bicikli esetén) és a feladat általános tárgyalása megtalálható a http://simplexportal.ro/tananyag/primas/kivancsisagvezerelt-matematika-tanitas címen a PRIMAS projekt 2010-es kiadványának első fejezetében.

VIII. osztály

1. Feladat. Hány olyan sík van, amely egy adott kocka csúcsai közül legalább háromra illeszkedik?

Róka Sándor, Nyíregyháza

Első megoldás. Legyen a kocka $ABCDA'B'C'D'$. Számoljuk meg, hogy a kocka nyolc csúcsából hányféleképpen választhatunk ki hármat.
Az első csúcsot 8-féleképpen, a másodikat 7-féleképpen, a harmadikat pedig 6-féleképpen választhatjuk ki. Ez összesen $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ lehetőség. Viszont minden csúcshármast hatszor számoltunk meg (pl. (A, B, C), (A, C, B), (B, A, C), (B, C, A), (C, A, B), (C, B, A)). Tehát a nyolc csúcsból $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$-féleképpen választhatunk ki hármat.
Most számoljuk meg hogy hány sík illeszkedik éppen négy csúcsra. A kocka hat lapja meghatároz 6 ilyen síkot. Ezekhez még hozzá kell számoljuk azokat a síkokat, amelyeket két olyan él határoz meg, amelyek egymással párhuzamosak, de nincsenek ugyanazon a lapon. Ezekből is 6 van ($(ABC'D')$, $(BCD'A')$, $(CDA'B')$, $(DAB'C')$, $(ACC'A')$ és $(BDD'B')$).
Tehát 12 sík illeszkedik éppen négy csúcsra. Ez azt jelenti, hogy az 56 esetből 12 esetben négyszer számoltuk ugyanazt a síkot (pl. az (ABC), (ABD), (ACD) és (BCD) síkok ugyanazt az $(ABCD)$ síkot határozzák meg).
Tehát azon síkok száma, amelyek a kocka csúcsai közül legalább háromra illeszkednek: $56 - 12 \cdot 3 = 20$. $\circledast$

Második megoldás. Nevezzük az $(ABCD)$ síkot *lenti* síknak, az $(A'B'C'D')$ síkot pedig *fenti* síknak. Három kiválasztandó csúcsból vagy mindhárom fent van, vagy kettő van fent és egy lent, vagy egy van fent és kettő lent, vagy mindhárom lent van.

- Ha a lenti csúcsok száma 0, akkor mindhárom csúcs fent van és ezek a csúcsok meghatároznak egy síkot (ezt már többet nem számoljuk).

- Ha egy csúcs van lent (azaz kettő fent van), akkor az alábbi táblázatot gyorsan kitölthetjük. Az A sorával kezdjük, végighaladunk rajta balról jobbra, majd jön szerre a B, C, illetve D sora. Azt is megjelöljük, hogy ugyanabban az oszlopban egy lennebb található síkot melyik fennebbi miatt nem kell számoljuk.

	$A'B'$	$B'C'$	$C'D'$	$D'A'$	$A'C'$	$B'D'$
A	1	1	1	1	1	1
B	$0(A)$	1	$0(A)$	1	1	1
C	1	$0(B)$	1	$0(B)$	$0(A)$	1
D	$0(C)$	$0(A)$	$0(C)$	$0(A)$	1	$0(B)$

- Ha két csúcs van lent (azaz egy van fent), akkor már sokkal könnyebb dolgunk van, mivel az AB, BC, CD és DA szakaszokat nem kell társítsuk fent semmivel (pl. az AB szakasz esetében már az $(ABB'A')$ és az $(ABC'D')$ síkokat is számoltuk már előzőleg).

	A'	B'	C'	D'
AB	0	0	0	0
BC	0	0	0	0
CD	0	0	0	0
DA	0	0	0	0
AC	0	1	0	1
BD	1	0	1	0

- Ha mindhárom csúcs lent van, akkor ezek a csúcsok ismét egy síkot határoznak meg.

Írjuk külön táblázatba, amit az előzőekben megszámoltunk:

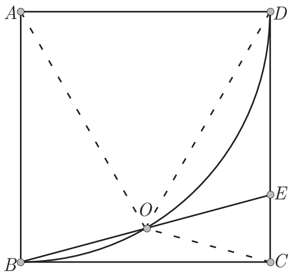
Lenti csúcsok száma	**Síkok száma**
0	1
1	14
2	4
3	1
Síkok száma összesen:	20

⊛

2. Feladat. Az $ABCD$ négyzet (CD) oldalán vegyük fel az E pontot úgy, hogy az A középpontú AB sugarú kör felezze a (BE) szakaszt. Számítsd ki az $\widehat{EBC}$ szög mértékét!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

Első megoldás. Jelölje a BE szakasz felezőpontját O és legyen $m\left(\widehat{EBC}\right) = \alpha$.



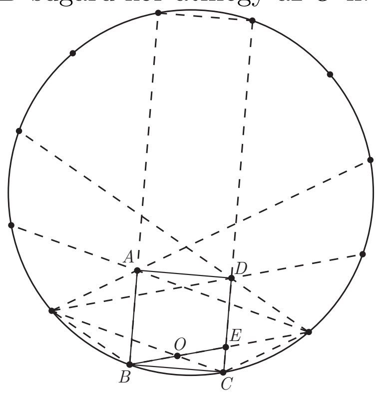
A BCE háromszög derékszögű, ezért köré írt körének középpontja éppen O, tehát $OB = OE = OC$. A BOC háromszög egyenlő szárú, tehát $m\left(\widehat{EBC}\right) = m\left(\widehat{BCO}\right) = \alpha$. A COE háromszög is egyenlő szárú, tehát $m\left(\widehat{BEC}\right) = m\left(\widehat{OCE}\right) = 90° - \alpha$. A BAO háromszög is egyenlő szárú, mivel $AB = AO$ (mindkettő az A középpontú és AB sugarú kör sugara), így $m\left(\widehat{ABO}\right) = m\left(\widehat{AOB}\right) = 90° - \alpha$. Ekkor a BAO háromszög kongruens a CDO háromszöggel ($AB = DC$, $m\left(\widehat{ABO}\right) = m\left(\widehat{OCE}\right) = 90° - \alpha$, illetve $OB = OC$), azaz $AO = DO$. Ebből viszont következik, hogy az AOD háromszög egyenlő oldalú, azaz $m\left(\widehat{AOD}\right) = 60°$. Az O pont körüli szögeket tekintve:

$$360° = m\left(\widehat{AOD}\right) + m\left(\widehat{DOC}\right) + m\left(\widehat{COB}\right) + m\left(\widehat{AOB}\right) =$$

$$60° + (90° - \alpha) + (180° - 2\alpha) + (90° - \alpha),$$

azaz $\alpha = 15°$. ⊛

Második megoldás. Tekintsünk egy szabályos 12-szöget a mellékelt ábra jelöléseivel. Ekkor $m\left(\widehat{EBC}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{12} = 15°$. Az $ABCD$ négyszögben $m\left(\widehat{ABC}\right) = m\left(\widehat{BCD}\right) = 6 \cdot 15° = 90°$. Az AB, illetve CD oldalakra az $ABCD$ négyszögön kívül az ábrán egyenlő oldalú háromszögek vannak szerkesztve, mivel ezek szögei $60°$-osak. Tehát az $ABCD$ négyszög négyzet. A BOC háromszög egyenlő szárú ($m\left(\widehat{EBC}\right) = m\left(\widehat{OCB}\right) = 15°$), azaz az O pontból a BC oldalra húzott merőleges a BC oldalt felezi és merőleges is rá. Következik, hogy ez a merőleges a BCE háromszögben középvonal, tehát $OB = OE$. Szimmetriai okok miatt $OA = OD$ és mindkettő egyforma a 12-szög oldalával, és így az A középpontú, AB sugarú kör átmegy az O-n.



$\otimes$

14. Megjegyzés. Az első megoldás jelöléseit és ábráját használva és feltételezve, hogy a négyzet oldala egységnyi, kiszámolható minden berajzolt szakasz hossza.

Mivel a BAO egyenlő szárú háromszög hasonló a COE egyenlő szárú háromszöggel (megfelelő szögeik kongruensek), ezért $\frac{AB}{OC} = \frac{OB}{EC}$, azaz $\frac{1}{\frac{BE}{2}} = \frac{\frac{BE}{2}}{EC}$, tehát $BE^2 = 4EC$.

A BCE derékszögű háromszögben Pitagorász tétele szerint: $BE^2 = BC^2 + EC^2$, azaz $4EC = 1 + EC^2$, ahonnan $EC = 2 - \sqrt{3}$. (Az $x^2 - 4x + 1 = 0$ másodfokú egyenletnek a gyökei: $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ és $x_2 = 2 + \sqrt{3}$, de ezek közül azt kell kiválasszuk, amelyik 1-nél kisebb, mivel $EC < 1$.)

Tehát szintén a BCE derékszögű háromszögben: $\tan\alpha = 2-\sqrt{3}$, azaz sikerült meghatározni a kért szögnek egy szögfüggvényét.

3. Feladat. A KEDVED szóban minden betű helyett valamilyen tízes számrendszerbeli számjegyet írtunk (azonos betűk helyére azonos számjegyeket). Milyen számjegyet helyettesítettünk az E betű helyére, ha a kapott szám négyzetszám, a V helyére 4-gyel nagyobb számot helyettesítettünk, mint a K helyére és a D helyére a 4-et helyettesítettük?

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. A megadott feltételek alapján létezik olyan x természetes szám, amelyre

$$x^2 = \overline{KEDVED} = 1001 \cdot \overline{KE4} + 400.$$

Ez alapján x páros és

$$(x-20)(x+20) = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{KE4}.$$

Ugyanakkor $300 < x < 1000$, tehát sem $x-20$, sem $x+20$ nem osztható 1001-gyel. Emiatt a következő eseteket szükséges tárgyalni:

- $(x-20) \vdots 7 \cdot 11$ és $(x+20) \vdots 13$. Ebben az esetben $x = 77k+20$ és $(77k+40) \vdots 13$. De $77k+40 = 78k+39-k+1$, tehát $(k-1) \vdots 13$ és így $k = 13v+1$, ahonnan a nagyságrendi becslés és az x paritása alapján ellentmondáshoz jutunk.

- $(x-20) \vdots 7 \cdot 13$ és $(x+20) \vdots 11$, tehát $x = 91k+20$ és $(91k+40) \vdots 11$. Ebből következik, hogy $k = 11v+5$ alakú és ismét ellentmondáshoz jutunk (mert k nem lehet 11-nél nagyobb és párosnak kell lennie ahhoz, hogy x is páros legyen).

- $(x-20)\,\vdots\,11\cdot13$ és $(x+20)\,\vdots\,7$, tehát $x = 143k+20$ és $143k+40$ osztható 7-tel. Ez csak akkor lehetséges, ha $3k+5$ osztható 7-tel, vagyis ha $k = 7v+3$. De k nem lehet nagyobb, mint 7, és k páros ezért ebben az esetben sincs megoldás.

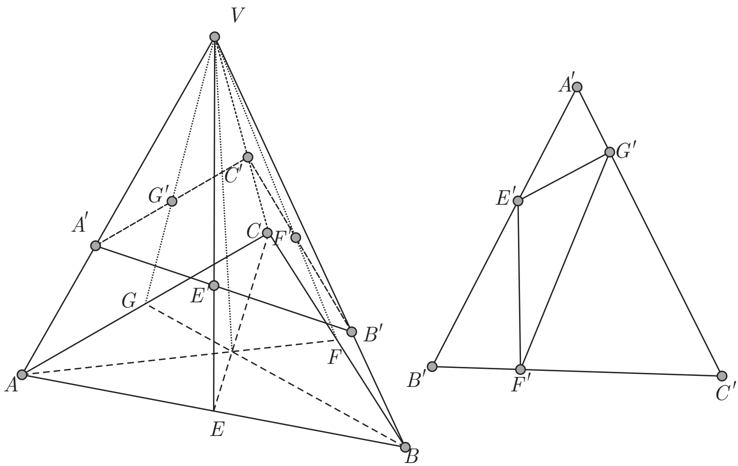
Hasonlóan meg kell vizsgálni a $(x-20)\,\vdots\,7$, $(x+20)\,\vdots\,11\cdot13$, az $(x-20)\,\vdots\,11$, $(x+20)\,\vdots\,7\cdot13$, illetve az $(x-20)\,\vdots\,13$, $(x+20)\,\vdots\,7\cdot11$ eseteket is. Ezekben az esetekben csak az $x = 552$ megoldás adódik, ahonnan $552^2 = 304704$, tehát az E helyére 0-t helyettesítettünk.

$\circledast$

4. Feladat. A $VABC$ szabályos háromoldalú gúlában O az ABC alap középpontja, $A' \in (VA)$, $B' \in (VB)$ és $C' \in (VC)$. Jelöljük E, F és G-vel rendre az AB, BC, illetve CA oldal felezőpontját és tekintjük az $\{E'\} = VE \cap A'B'$, $\{F'\} = VF \cap B'C'$, valamint $\{G'\} = VG \cap C'A'$ metszeteket. Számítsuk ki az $E'F'G'$ és az $A'B'C'$ háromszögek területének arányát a $VA' = a$, $VB' = b$ és $VC' = c$ hosszúságok függvényében!

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. a) $[VE]$, $[VF]$ és $[VG]$ a $VABC$ szabályos háromoldalú gúla apotémái, tehát a VAB, VBC és VAC egyenlő szárú háromszögek szögfelezői is. Így $[VE']$, $[VF']$ és $[VG']$ a $VA'B'$, $VB'C'$ és $VC'A'$ háromszögekben is szögfelezők. A szögfelező-tétel alapján írhatjuk, hogy $\dfrac{VA'}{VB'} = \dfrac{A'E'}{E'B'} = \dfrac{a}{b}$, $\dfrac{VB'}{VC'} = \dfrac{B'F'}{F'C'} = \dfrac{b}{c}$ és $\dfrac{VC'}{VA'} = \dfrac{C'G'}{G'A'} = \dfrac{c}{a}$. Származtatással a következő aránypárokat kapjuk: $\dfrac{A'E'}{A'B'} = \dfrac{a}{a+b}$, $\dfrac{B'F'}{B'C'} = \dfrac{b}{b+c}$ és $\dfrac{A'G'}{A'C'} = \dfrac{a}{a+c}$.



Ezeket felhasználva, írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\frac{T_{A'E'G'}}{T_{A'B'C'}} &= \frac{A'E' \cdot A'G' \cdot \sin(\widehat{E'A'G'}) \cdot \frac{1}{2}}{A'B' \cdot A'C' \cdot \sin(\widehat{B'A'C'}) \cdot \frac{1}{2}} \\
&= \frac{A'E'}{A'B'} \cdot \frac{A'G'}{A'C'} \\
&= \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{a+c} \\
&= \frac{a^2}{(a+b)(a+c)}
\end{aligned}$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\frac{T_{B'F'E'}}{T_{B'C'A'}} = \frac{b^2}{(b+c)(b+a)}$$

és

$$\frac{T_{C'F'G'}}{T_{C'A'B'}} = \frac{c^2}{(c+a)(c+b)}.$$

Az előbbi három egyenlőség alapján

$$\frac{T_{E'F'G'}}{T_{A'B'C'}} = \frac{T_{A'B'C'} - T_{A'E'G'} - T_{B'F'E'} - T_{C'F'G'}}{T_{A'B'C'}}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - \frac{T_{A'E'G'}}{T_{A'B'C'}} - \frac{T_{B'F'E'}}{T_{A'B'C'}} - \frac{T_{C'F'G'}}{T_{A'B'C'}} \\
&= 1 - \frac{a^2}{(a+b)(c+a)} - \frac{b^2}{(b+c)(a+b)} - \frac{c^2}{(b+c)(c+a)} \\
&= \frac{(a+b)(b+c)(c+a) - a^2(b+c) - b^2(c+a) - c^2(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\
&= \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.
\end{aligned}
$$

$\otimes$

15. Megjegyzés. Érvényes az következő általánosabb tulajdonság is (a bizonyítás gondolatmenete ugyanaz):

Ha $VABC$ egy tetszőleges háromoldalú gúla, $A' \in (VA)$, $B' \in (VB)$ és $C' \in (VC)$ úgy, hogy

$$\frac{VA'}{VA} = a,\ \frac{VB'}{VB} = b\ \frac{VC'}{VC} = c,$$

valamint $E \in (AB)$, $F \in (BC)$ és $G \in (CA)$ úgy, hogy

$$\frac{AE}{EB} = \frac{k_2}{k_1},\ \frac{BF}{FC} = \frac{k_3}{k_2},\ \frac{CG}{GA} = \frac{k_1}{k_3}$$

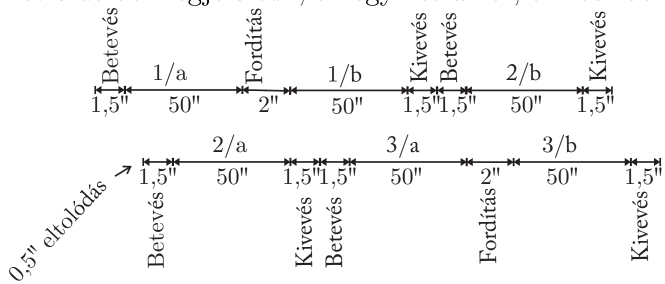
továbbá $\{E'\} = VE \cap A'B'$, $\{F'\} = VF \cap B'C'$ és $\{G'\} = VG \cap C'A'$, akkor

$$T = \frac{2abck_1k_2k_3}{(ak_2 + bk_1)(bk_3 + ck_2)(ck_1 + ak_3)}.$$

5. Feladat. Egy régi típusú kenyérpirító egyszerre egy vagy két szelet kenyeret tud pirítani, de minden betett szeletnek csak az egyik oldalát. Egy oldal pirításához szükséges idő 50 másodperc, a szeleteket nem szabad túlsütni, egy szelet kivevéséhez vagy betevéséhez külön-külön $1,5$ másodperc és a megfordításához 2 másodperc szükséges. Minden művelet (betevés, kivevés, megfordítás) végrehajtásához mindkét kezünkre szükség van, tehát nem lehet két műveletet egyszerre végrehajtani. Legkevesebb mennyi idő alatt lehet megpirítani ezen a pirítón 3 szelet kenyér mindkét oldalát?

SimpleX Egyesület, Csíkszereda

Első megoldás. A három szelet kenyérnek összesen 6 oldala van. Ha a 6 oldalból a pirító egyik oldalán legalább 4-et pirítunk, akkor az több, mint $200''$ (200 másodperc), tehát azt kell elérnünk, hogy a pirító mindkét oldalán a kenyerek oldalaiból $3-3$ piruljon meg (ennél kevesebb nem lehet). Ehhez az egyik szelet kenyér egyik oldalának megpirítása után a szelet kenyeret ki kell venni és be kell tenni egy másik szeletet. Ha a pirító egyik oldalát nézzük, akkor itt a 3 szelet megpirításához $150''$ szükséges. Ezen kívül a három oldal megsütése után legalább 2-szer ki kell venni a szeletet (azt, amelyiknek nem itt sül mindkét oldala és a másik szeletet, amelynek itt sül mindkét oldala), ezeket be is kell tenni és az egyiket meg is kell fordítani (hisz mindhárom oldalnak valahogyan be kell kerülnie a sütőbe és ez csak a betevéssel, illetve az oldalcserével történhet meg). Ez azt mutatja, hogy a pirító egyik oldalának a használata legalább $150 + 4 \cdot 1,5 + 2 = 158$ másodpercbe telik. Másrészt mindkét oldalon nem kezdhetünk egyszerre, mert akkor a két betevést egyidőben kellene végrehajtani. Emiatt a pirító két oldalának a kihasználása közt legalább egy $1,5''$-es eltolódásnak kell lenni és így a teljes idő nem lehet kisebb, mint $159,5''$. Másrészt ha az első szelet betevése után rögtön betesszük a második szeletet (ahhoz, hogy az eltolódás a sütő két oldalának kihasználása közt a legkisebb legyen), akkor az első szelet első oldalának elkészülése után a második szelet elkészüléséig $1,5''$ marad. Ha ezalatt ezt a szeletet megfordítjuk, akkor $0,5''$-cel túlsülne a második kenyér. Ezt úgy küszöbölhetjük ki, hogy ennyivel később tesszük be az elején. Így ebben az esetben az összidő legalább 160″ lesz. A mellékelt ábra mutatja, hogy ez lehetséges is. A szeleteket megszámoztuk 1-től 3-ig és minden szelet két oldalát megjelöltük, az egyiket a-val, a másikat b-vel.



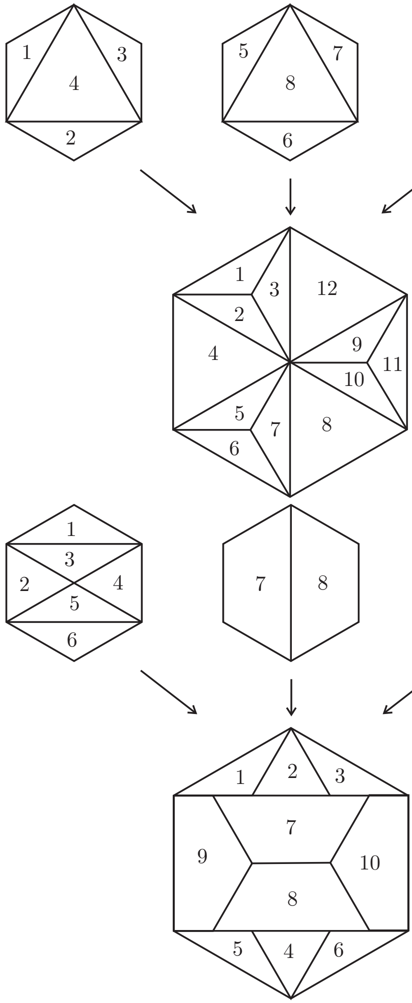
Ha az első szelet első oldalának elkészülése után ezt a szeletet kivesszük, akkor annak függvényében, hogy a második szelettel mit csinálunk (kivesszük vagy megfordítjuk), legalább $1,5''$-ig kihasználatlan marad a sütő első oldala. Emiatt az összidő legalább $161''$ lenne, tehát ezek az esetek több időt igényelnek, mint az ábrán látható. ⊛

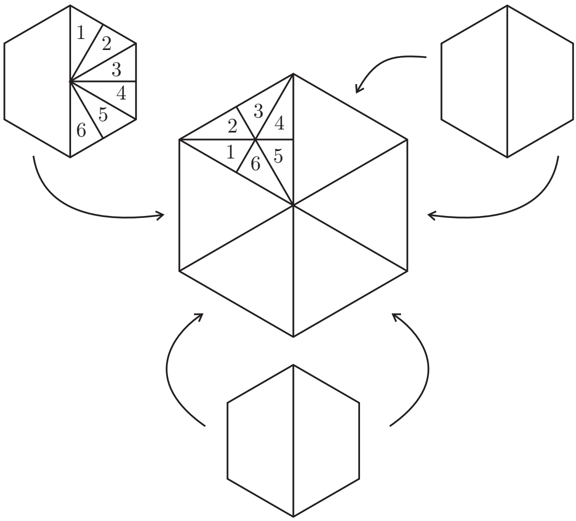
16. Megjegyzés. Érdemes elgondolkodni azon, hogy több szelet kenyér esetében hogy néz ki az optimális ütemezés, illetve hogyan indokolható az ütemezés optimalitása.

6. Feladat. Három egybevágó, szabályos hatszög alakú papírlapot vágj szét darabokra úgy, hogy a keletkezett darabokból egy nagyobb szabályos hatszöget lehessen összerakni!

Nagy Örs, Marosvásárhely

Megoldás. Ha T-vel jelöljük az adott hatszögek területét, akkor a három hatszög területe $3T$, tehát a nagy hatszög oldalhossza az adott hatszögek oldalának a $\sqrt{3}$-szorosa. Ez segíthet egyrészt rájönni egy lehetséges felvágásra, másrészt a felvágás helyességének ellenőrzésére. A mellékelt ábrák három lehetséges megoldást mutatnak. Természetesen mindhárom ábra esetén a teljes megoldáshoz az is hozzátartozik, hogy igazoljuk az átdarabolás helyességét.





A harmadik ábra esetén mindhárom hatszög felét 6 egybevágó háromszögre bontottuk. Ha az eredeti hatszögek oldalhossza l, akkor ezeknek a kis háromszögeknek az oldalai $l/2$, $l\sqrt{3}/2$ és l. Másrészt ha a nagy hatszög oldalhossza $l\sqrt{3}$ (azt már beláttuk, hogy ennyi kell legyen), akkor a belsejében keletkező kis háromszögek oldalhosszai $l\sqrt{3}/2$, $l/2$ és l. Ez alapján az eredeti hatszögek fele átdarabolható a nagy hatszög egyhatodnyi darabjába az ábrának megfelelő módon, tehát a három hatszögből valóban előállítható egy nagyobb, szintén szabályos hatszög. $\circledast$

17. Megjegyzés. A Bolyai-Gerwien tétel alapján bármely két azonos területű sokszög átdarabolható egymásba véges sok darab felhasználásával. Emiatt az átdarabolás végtelen sok különböző módon kivitelezhető.

A javító tanárok névsora

Dr. András Szilárd	BBTE, Kolozsvár
Dr. Bencze Mihály	Áprily Lajos főgimnázium, Brassó
Csapó Hajnalka	Márton Áron Elméleti Líceum, Csíkszereda
Dáni Zsuzsa	Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely
Dávid Géza	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Kéry Hajnal	Bihar megyei tanfelügyelőség, Nagyvárad
Mastan Eliza	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Mátéfi István	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Nagy Enikő	Szent László Római Katolikus Líceum, Nagyvárad
Nagy Gyöngyi	Szacsvay Imre Általános Iskola, Nagyvárad
Nagy Örs	Elektromaros Líceum, Marosvásárhely
Páll Rákhel Olga	Márton Áron Elméleti Líceum, Csíkszereda
Păcurar Mária	Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár
Simon József	Petőfi Sándor Általános Iskola, Csíkszereda
Spier Tünde	Csíky Gergely Nemzeti Kollégium, Arad
Szilágyi Judit	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Tomos Izabella	Áprily Lajos főgimnázium, Brassó
Ugron Szabolcs	Benedek Elek Gimnázium, Nagybacon
Zsombori Gabriella	Sapientia Tudományegyetem, Csíkszereda

A versenyen részt vevő diákok névsora

V. osztály

Ambrus Egyed Ágnes	János Zsigmond Elméleti Líceum, Kolozsvár
Anderlik Patrik	Téglás Gábor Elméleti Líceum, Déva
Bálint Tibor	Iuliu Maniu Általános Iskola, Zilah
Bartalis Dorottya	Nagy István Művészeti Líceum, Csíkszereda
Bíró Dániel	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Bogdán Ágnes	Wesselényi Református Gimnázium, Zilah
Boros Csaba	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti
Borsai Erwin	Téglás Gábor Elméleti Líceum, Déva
Bronţ Zsanett	Arany János Elméleti Líceum, Nagyszalonta
Csabai Anita	2. sz. Általános Iskola, Brassó
Csibi Alexandra	Nagy Imre Általános Iskola, Csíkszereda
Csiszér Bence	Nagy Imre Általános Iskola, Csíkszereda
Csutak Dávid	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Erdei Roland	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Fodor Orsolya Szilvia	Téglás Gábor Elméleti Líceum, Déva
Fodor Timea	Petőfi Sándor Általános Iskola, Csíkszereda
Gittinger András	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti
Havas Panna	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti
Hosszú Zsolt	2. sz. Általános Iskola, Brassó
Ilyés Anna Boróka	Apáczai Csere János Elméleti Líceum, Kolozsvár
Jakab Etele	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Jakab Lóránd	Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár
Józsa Kriszta	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Kelemen Attila Botond	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Kiss Andrea Tímea	Konsza Samu Általános Iskola, Nagybacon (Kovászna)
Kohán Zsófia	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Krecht Ábel	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Kristó Roland	Liviu Rebreanu Általános Iskola, Csíkszereda
Lőrincz Bálint Imre	16. sz. Általános Iskola, Nagyvárad
Lőrincz Róbert	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti

Ludász Norbert	11. sz. Általános Iskola, Nagyvárad
Magdó Lehel	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Mészáros Leticia	Csiky Gergely Főgimnázium, Arad
Miklós Csenge	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Miklós Dóra	Székely Mózes Általános Iskola, Lövéte (Hargita)
Mózsa Attila	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Nagy Zsolt	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti
Naschauer Kinga	Csiky Gergely Főgimnázium, Arad
Ördög Hunor	Florea Bogdan Általános Iskola, Szászrégen
Pallai Hunor	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti
Pásztor Kristóf	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Pop Kriszta	Nicolae Iorga Általános Iskola, Nagybánya
Posta Csanád	Palló Imre Művészeti Líceum, Székelyudvarhely
Pricop Annamária	Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár
Roth Apor	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Simon Katalin	Ady Endre Elméleti Líceum, Bukarest
Spir Rebeka Petra	Csiky Gergely Főgimnázium, Arad
Szabó Thalmeiner Bence	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti
Szász Zsolt	Gaál Mózes Általános Iskola, Barót
Szegedi Dóra	Ady Endre Elméleti Líceum, Bukarest
Tök Dietrich Norbert	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Trombitas Dorottya	Általános Iskola, Árpástó (Beszterce-Naszód)
Vásárhelyi Erik Krisztián	16. sz. Általános Iskola, Nagyvárad
Vinczi Márk Levente	Báthory István Általános Iskola, Medgyes
Zboray Dávid	Dimitrie Cantemir Általános Iskola, Nagyvárad
Zsebe Adél	11. sz. Általános Iskola, Nagyvárad

VI. osztály

Balázs-Bécsi Anna	Nagy István Művészeti Líceum, Csíkszereda
Bányai Csaba Roland	Általános Iskola, Csíkfalva (Maros)
Berkeczi Réka	Orbán Balázs Általános Iskola, Székelyudvarhely
Bonczidai Zenkő	2. sz. Általános Iskola, Brassó
Boris Diana	2. sz. Általános Iskola, Brassó
Daczó Dávid	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Darlaczi Zoltán	Általános Iskola, Szentmáté (Beszterce-Naszód)

Deák Gellért Gedeon	Kőrösi Csoma Sándor Gimnázium, Kovászna
Deák Izabella	Dani Gergely Általános Iskola, Gyimes (Bákó)
Erdei Csongor	Miskolczy Károly Általános Iskola, Micske (Bihar)
Fazakas Borbála	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Fazekas Dóra Adél	Arany János Elméleti Líceum, Nagyszalonta
Filep Lilla	Arany János Elméleti Líceum , Nagyszalonta
Füstös Ferenc	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Gál Krisztina	Fogarasy Mihály Általános Iskola, Gyergyószentmiklós
Garfield Adrienne	János Zsigmond Elméleti Líceum, Kolozsvár
Hölgyes Orsolya	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Kaszta Tamás	Nicolae Iorga Általános Iskola, Nagybánya
Kelemen Hunor	Miskolczy Károly Általános Iskola, Micske (Bihar)
Kovács Róbert Jenő	János Zsigmond Elméleti Líceum, Kolozsvár
Kozman Botond	Petőfi Sándor Általános Iskola, Kézdivásárhely
Kurunczi Viktória	Csiky Gergely Főgimnázium, Arad
Kutnik Andrea Virág	Általános Iskola, Zimándújfalu (Arad)
Lukács Márton Örs	Nagy István Művészeti Líceum, Csíkszereda
Márton Vazul	Petőfi Sándor Általános Iskola, Csíkszereda
Máté Dávid	Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár
Nagy Anita Enikő	Gaál Mózes Általános Iskola, Barót
Nagy Örs	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Péter Anna Fanni	S. Illyés Lajos Általános Iskola, Szováta
Péter István	Petőfi Sándor Általános Iskola, Csíkszereda
Popa-Müller Victor Dávid	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Portik Ábel	S. Illyés Lajos Általános Iskola, Szováta
Sallai Tamás Levente	Simion Bărnuţiu Általános Iskola, Zilah
Szabo Eszter	10. sz. Általános Iskola, Szatmárnémeti
Tamás Nándor Károly	Kelemen Didák Általános Iskola, Kézdialmás (Kovászna)
Tankó Tamás	Tivai Nagy Imre Szakközépiskola, Csíkszentmárton (Hargita)
Tempfli Levente	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti
Vajnay Dorottya	10. sz. Általános Iskola, Szatmárnémeti
Váradi Csaba Béla	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Varga Matild Katalin	Simion Bărnuţiu Általános Iskola, Zilah

Vass Annamária Réka	Nicolae Iorga Általános Iskola, Nagybánya
Vezsenyi Ákos	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Virág Thekla Mária	Dani Gergely Általános Iskola, Gyimes (Bákó)

VII. osztály

Agócs Henrietta	Horváth János Elméleti Líceum, Margitta
Bagi Nóra	Arany János Elméleti Líceum , Nagyszalonta
Bakó Bence	Váradi József Általános Iskola, Sepsiszentgyörgy
Bálint Hunor	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Baranyai István	10. sz. Általános Iskola, Szatmárnémeti
Bartis Zsolt	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Beke Viktória Kincső	Horváth János Elméleti Líceum, Margitta
Béres-Duha Csongor	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Berszán Gréta	2. sz. Általános Iskola, Brassó
Bokor Zalán	Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár
Buzogány Szabolcs	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Chiş Robert Lucian	Andrei Mureşanu Főgimnázium, Beszterce
Dáni Eszter	Nagy Mózes Gimnázium, Kézdivásárhely
Drohobeczky Orsolya	János Zsigmond Elméleti Líceum, Kolozsvár
Gonczel Roland	Andrei Mureşanu Főgimnázium, Beszterce
Hegyi Boglárka	Csiky Gergely Főgimnázium, Arad
Iuhász Erik	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Kacsó Péter Gábor	Ady Endre Elméleti Líceum, Bukarest
Katona Bugner Attila Krisztián	Apáczai Csere János Elméleti Líceum, Kolozsvár
Köllő Zsolt	Köllő Miklós Általános Iskola, Gyergyócsomafalva (Hargita)
Laczkó Kata	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Majla Nándor	Benedek Elek Gimnázium, Székelyudvarhely
Mares Hanna Blanka	Nicolae Iorga Általános Iskola, Nagybánya
Miheler Péter	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Molnar Tas Szilveszter	1. sz. Általános Iskola, Marosludas
Moriczi Sándor	Általános Iskola, Szentmáté (Beszterce-Naszód)
Muszka Zsuzsa	1. sz. Általános Iskola, Nagykároly
Nagy Edward Szilárd	15. sz. Általános Iskola, Brassó
Ördög Ákos	József Attila Általános Iskola, Csíkszereda
Orosz Kelemen	Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár
Portik Kriszta	Florea Bogdan Általános Iskola, Szászrégen
Sallai Henrietta	Avram Iancu Sportiskola, Zilah

Schram István	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Skapinyák Szilárd	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti
Soós Márton	Zajzoni Rab István Elméleti Líceum, Négyfalu (Brassó)
Soós Roland	Simion Bărnuţiu Általános Iskola, Zilah
Stekbauer Hanzi Réka	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Stelczner Norbert	Corvin Mátyás Kollégium, Vajdahunyad
Szabó Liza	Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár
Szász Helga	Nicolae Iorga Általános Iskola, Nagybánya
Szász Tamás	Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár
Széles Roland Edvin	Simion Bărnuţiu Általános Iskola, Zilah
Udvari Róbert	Téglás Gábor Elméleti Líceum, Déva
Vinczi Richárd	Báthory István Általános Iskola, Medgyes
Zsámbók Emese Mária	Általános Iskola, Zimándújfalu (Arad)

VIII. osztály

Antal Ildikó	Báthory István Általános Iskola, Medgyes
Baja Zsolt	Baczkamadarasi Kis Gergely Református Gimnázium, Székelyudvarhely
Bold Barbara Bianca	Általános Iskola, Zimándújfalu (Arad)
Csóti Zselyke Mariann	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Csukás Bálint	Arany János Elméleti Líceum , Nagyszalonta
Daczó Melinda	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Demény Andrea Bernadett	Petőfi Sándor Általános Iskola, Csíkszereda
Demeter Hunor	Baczkamadarasi Kis Gergely Református Gimnázium, Székelyudvarhely
Divin Péter	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Fogarasi Zsigmond Levente	Brassai Sámuel Elméleti Líceum, Kolozsvár
Gegő Csenge Beáta	8. sz. Általános Iskola, Brassó
Horváth Abigél	Molnár Józsiás Általános Iskola, Kézdivásárhely
Kádár Attila	Gaál Mózes Általános Iskola, Barót
Kenéz Anna	Arany János Elméleti Líceum , Nagyszalonta
Komlosi Róbert	Nicolae Iorga Általános Iskola, Nagybánya
Kovács Ferencz	Szacsvay Imre Általános Iskola, Nagyvárad
Kutasi Enikő	Mihai Eminescu Főgimnázium, Petrozsény

Lukács Áron Zsolt	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Majoros Máté	Szacsvay Imre Általános Iskola, Nagyvárad
Mastan Lorena Eliza	Nicolae Iorga Általános Iskola, Nagybánya
Medgyesi Attila	Gaál Mózes Általános Iskola, Barót
Mihály Eszter	Bükki Általános Iskola, Gyimesbükk (Bákó)
Nagy Obed Benjámin	Simion Bărnuţiu Általános Iskola, Zilah
Péterfi Orsolya	2. sz. Általános Iskola, Marosvásárhely
Sarga Angéla Bernadett	Felsőbányai Műszaki Iskola, Felsőbánya
Schefler Barna	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti
Simó Andrea Ildikó	15. sz. Általános Iskola, Brassó
Soós Timea	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Stelczner Brigitta	Corvin Mátyás Kollégium, Vajdahunyad
Szabó Ágnes	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Szabó Zoltán	Általános Iskola, Magyardécse (Beszterce-Naszód)
Szallós Kis Csaba	Brassai Sámuel Elméleti Líceum, Kolozsvár
Székely Gyöngyike	Kelemen Didák Általános Iskola, Kézdialmás (Kovászna)
Szőcs Marianna	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Talpă Diana	Petőfi Sándor Általános Iskola, Kézdivásárhely
Tamás Andrea	Kelemen Didák Általános Iskola, Kézdialmás (Kovászna)
Tankó Gábor Tihamér	Majláth Gusztáv Károly Általános Iskola, Gyimesközéplok (Hargita)
Tőtős György	Simion Bărnuţiu Általános Iskola, Zilah
Vitus Regina	Váradi József Általános Iskola, Sepsiszentgyörgy

Szervezők

Szabó Csilla,	tanügyminisztériumi tanácsos
Kéry Hajnal,	Bihar megyei tanfelügyelőség
Farkas Tünde,	Bihar megyei tanfelügyelőség
Vad Márta,	Bihar megyei tanfelügyelőség
Pásztor Gabriella,	Szacsvay Imre Általános Iskola
Kecse Gabriella,	Szacsvay Imre Általános Iskola
Nagy Enikő,	Szent László Római Katolikus Líceum
Pálhegyi Farkas László,	Mihai Eminescu Nemzeti Kollégium
Nagy Gyöngyi,	Szacsvay Imre Általános Iskola
Molnár Tünde,	Szacsvay Imre Általános Iskola

A feladatok szerzőinek névjegyzéke

A versenyfüzet megjelenését támogatta a
SimpleX Egyesület, a S.C. Amigo&Intercost SRL
és a Státus Kiadó.