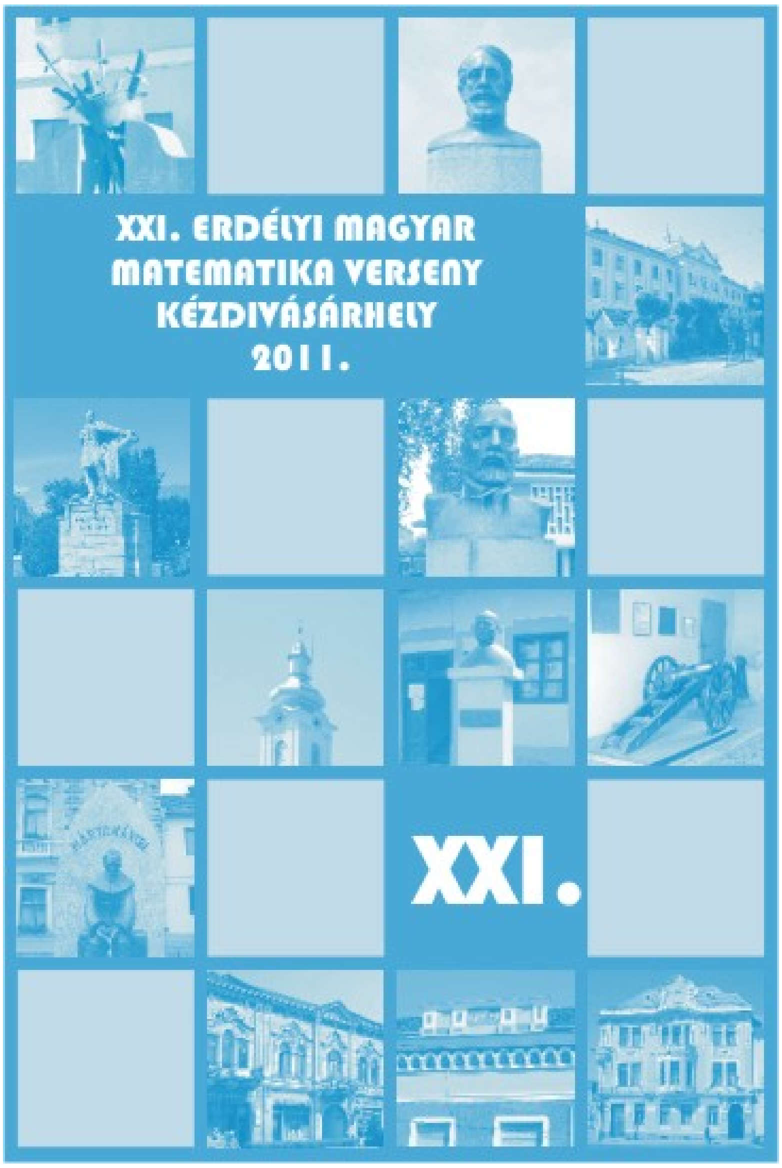

XXI. ERDÉLYI MAGYAR
MATEMATIKA VERSENY
KÉZDIVÁSÁRHELY
2011.
XXI.

A feladatokat összeállító bizottság:

dr. András Szilárd, BBTE, Kolozsvár
Bencze Mihály, Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Csapó Hajnalka, Márton Áron Líceum, Csíkszereda
Dávid Géza, Tamási Áron Líceum, Székelyudvarhely
Mészáros Alpár, BBTE, Kolozsvár
Nagy Örs, Bolyai Farkas Líceum, Marosvásárhely
Szilágyi Judit, Báthory István Líceum, Kolozsvár

ISBN 978-606-8052-35-9

Készült a Státus nyomdában Madéfalván 2011-ben
Tiparul executat sub comanda nr. 3/2011, la Status Printers Siculeni

ANDRÁS SZILÁRD BENCZE MIHÁLY
CSAPÓ HAJNALKA DÁVID GÉZA
MÉSZÁROS ALPÁR NAGY ÖRS
SZILÁGYI JUDIT

XXI. ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY

Feladatok és megoldások

STÁTUS KIADÓ
CSÍKSZEREDA, 2011

Tartalomjegyzék

Műszaki szerkesztés: András Szilárd, Csapó Hajnalka,
Nagy Örs, Mészáros Alpár

A kéziratot ellenőrizte és helyenként kiegészítette:
Demeter Albert, Farkas Csaba, Sipos Kinga, Nagy Tímea

A verseny támogatói

SC. Productie Agrico-M
SC. Babette
SC. Siculcom SRT
DNP Papp Ibolya
New Fashion SA
SC. Productie TEKS SRL
ISTVANA SRL
SC. Julius Meinl Romania SRL
Asociaţia Culturală „Nagy Mózes”

Előszó

Az Erdélyi Magyar Matematikaverseny az elmúlt 21 év során sokat változott a szervezés, a lebonyolítás, az elismertség, a célrendszer szempontjából. A 2011-ben rendezett Erdélyi Magyar Matematikaverseny a román oktatási minisztérium által hivatalosan elismert versenyek listáján is szerepel, ugyanakkor a versenyen szerzett oklevél több egyetemen is beleszámít a felvételi jegybe. Ez természetesen nagyon hasznos mind a versenyző diákok, mind a versenyen résztvevő tanárok szempontjából. Hivatalosan ennél nagyobb elismerésre nem is számíthat egy verseny. Ugyanakkor úgy érzékelem, hogy ezzel párhuzamosan értékvesztés tapasztalható a résztvevő diákok felkészültségét, illetve hozzáállását tekintve. Ezt egykori versenyzőként (és „edzőként") érzékelem, mivel több évig a verseny résztvevőinek további pályája szorosan kötődött a matematikához, hisz versenyzői tapasztalattal és a versenyekre való felkészülés által nyert alaposabb, gazdagabb ismeretrendszerrel, valamint tágabb szemléletmóddal a matematika vagy informatika karon (de egyéb, esetleg nem reál jellegű karokon is) a verseny résztvevői nagyrészt az élvonalban voltak egyetemi hallgatóként is, illetve kiváló szakemberek váltak belőlük. Úgy látom, hogy napjainkban ebből a szempontból visszaesés tapasztalható, és ez egyértelműen megnyilvánul az EMMV fontosságának az újraértékelésében is, valamint jelzésértékű a szervezők és a zsűri számára is.

Az EMMV továbbra is válogatóversenynek számít, és mivel az NMMV a Nemzetközi Diákolimpiával egy kategóriában szerepel az elismert versenyek közt, így a továbbjutás egy fontos szempont lehet minden versenyzőnek. Sajnos jelen pillanatban a romániai tanterv radikálisan eltér a legtöbb Kárpát-medencei ország tantervétől, ezért az EMMV tematikája két komponenst tartalmaz, az egyik a helyi tanterveknek, a másik az NMMV tematikájának felel meg. Három évig (2007-2009.) kétfordulós volt a verseny, egy 3 órás (helyi tematikához illeszkedően) és egy 4 órás (inkább logikai, az NMMV tematikáját követő) próbán mérhették össze tudásukat a diákjaink. A jelenlegi megoldás visszalépés ehhez képest, egy 4 órás próbából áll, amelynek tematikája mindkét komponenst tartalmazza, de igazából egyiknek sem felel meg. Ez tükröződik a feladatok jellegében, elvesztődik a saját tananyagunk rengeteg sajátossága (különösen a XI. és a XII. osztályban), és ugyanakkor az NMMV-re való válogatást is megzavarja az, hogy a 6 feladatból 1-2 a helyi tananyaghoz kötődik, és így a többi nem fedheti le kellő arányban az NMMV tematikáját. A végeredmény az, hogy a kritikus részek (azok, amelyek a tanterveink szerint kis mértékben támogatottak, pl. az elemi geometria) nagyobb hangsúlyt nyernek mindkét tematikából, és emiatt éppen azok a részek maradnak ki, amelyekben a diákok a legjobban elmélyedhetnek. Ez kitűnik a feladatsorokból is, és külön fejtörést okoz a zsűrinek, hogy egy olyan optimumot kell megtalálnia, amiről az idő több ízben is igazolta, hogy nem létezik. Hasonló problémát okozott az is, hogy a beérkezett javaslatok zöme általában közepes vagy annál nehezebb feladatokat tartalmazott, így a feladatsorok nehézségi fokának kalibrálása több esetben is arra kényszerített, hogy eredeti elképzelésünkről lemondjunk annak érdekében, hogy a feladatsorok többé-kevésbé hozzáférhetők legyenek (a 4 órára adott 6 feladat alapvető logikája, hogy 2 egyszerűbb, 2 közepes és 2 nehezebb feladat legyen). Véleményem, hogy ebben a szerkezetben mindkét alapvető funkciója csorbul a versenynek, és hasonlóan lehetetlen helyzetbe hozza majd a következő években is a feladatokat összeállító zsűrit, arról nem is szólva, hogy a külső szemlélők (kollégák) szempontjából sokat veszíthet a presztízséből.

András Szilárd, Kolozsvár

9. osztály

1. Feladat. Igazold, hogy $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ esetén

$$a + b + c + d - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 \leq 1.$$

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

2. Feladat. Hasonlítsd össze az

$$A = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{2011 \text{ darab } 2\text{-es}} \quad \text{és} \quad B = \underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}_{2010 \text{ darab } 3\text{-as}}$$

számokat!

Demeter Albert, Kolozsvár

3. Feladat. Határozd meg a következő egyenletek megoldásait a természetes számok halmazában!

a) $20x^2 + 11y^2 = 2011$ **b)** $20x^2 - 11y^2 = 2011$

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

4. Feladat. Az $ABCD$ paralelogrammában a BAD szög $45°$-os és az ABD szög $30°$-os. Igazold, hogy a B pontnak az (AC) átlótól mért távolsága $\frac{AD}{2}$-vel egyenlő!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

5. Feladat. Az $ABCD$ paralelogrammában $AB > AD$. Legyen E, F az (AB) és a (CD) oldal egy-egy pontja úgy, hogy

$$\frac{EB}{AB} = \frac{DF}{DC} = \frac{1}{n}, \quad n \in \{2,\ 3,\ 4,\ \ldots\},$$

G_1, G_2 az ADE, BCF háromszög súlypontja és $G_1G_2 \cap AB = \{K\}$. Bizonyítsd be, hogy $KA = EB$.

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

6. Feladat. Legközelebb melyik évben lesz 4 olyan péntek, amely egyben 13-a is?

***

10. osztály

1. Feladat. Mennyi az

$$E(x) = (3 - 2\mathrm{tg}x)^2 + (3 + 2\mathrm{ctg}x)^2$$

kifejezés legkisebb lehetséges értéke, ha $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$?

Kovács Béla, Szatmárnémeti

2. Feladat. a) Igazold, hogy $x > 1$ esetén

$$2^{\sqrt{\log_2 x}} = x^{\sqrt{\log_x 2}}.$$

b) Határozd meg a következő egyenlet valós megoldásait:

$$2^{\sqrt{2x \log_2 x}} + x^{\sqrt{2x \log_x 2}} = 2^x + x^2.$$

Longáver Lajos, Nagybánya

3. Feladat. Határozd meg azokat a z komplex számokat, amelyekre

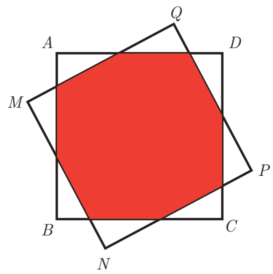
$$z^2 + \left(\frac{2z}{z-2}\right)^2 = 5.$$

Kovács Béla, Szatmárnémeti

4. Feladat. Az $ABCD$ négyszögben M az AB, N pedig a CD szakasz felezőpontja. Az AC és a BD átlók hossza $2\sqrt{3}$ és $60°$-os szöget zárnak be. Számítsd ki az MN szakasz hosszát!

Dávid Géza, Székelyudvarhely

5. Feladat. Az $ABCD$ és az $MNPQ$ kongruens, egységoldalú négyzeteket egymásra helyezzük úgy, hogy teljesen fedjék egymást. Az $ABCD$ négyzetet rögzítettnek tekintjük, majd az $MNPQ$ négyzetet a középpontja körül forgatni kezdjük. Legalább mekkora a két négyzet közös részének területe?



András Szilárd, Kolozsvár

6. Feladat. Legfeljebb hány elemet tartalmazhat az a halmaz, amelynek bármely 5 eleme közül kiválasztható három, amely mértani haladványt alkot?

András Szilárd, Kolozsvár

11. osztály

1. Feladat. Határozd meg azokat az x, y, z természetes számokat, amelyekre

$$xy + yz + zx = 3(x + y + z) + 1.$$

Kovács Béla, Szatmárnémeti

2. Feladat. Igazold, hogy ha $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, és $\det A = \alpha$, akkor

$$\det\left(A^2 + A - \alpha I_2\right) + \det\left(A^2 + \alpha I_2\right) = \alpha(1 + 4\alpha).$$

Bencze Mihály, Brassó

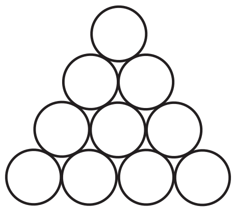
3. Feladat. Az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozatot az $x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n,\ n \geq 0$ és $x_0 = 2$, $x_1 = 3$ összefüggésekkel értelmezzük. Van-e ennek a sorozatnak olyan tagja, amely teljes négyzet?

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

4. Feladat. Az ABC nem egyenlő oldalú háromszögben jelölje A_1 az A-nak a B-re vonatkozó, B_1 a B-nek a C-re vonatkozó és C_1 a C-nek az A-ra vonatkozó szimmetrikusát. Igazold, hogy ha H, O az ABC háromszögben és H_1, O_1 az $A_1B_1C_1$ háromszögben a magasságpont és a háromszög köré írt kör középpontja, akkor OO_1HH_1 trapéz!

Bencze Mihály, Brassó

5. Feladat. 10 billiárdgolyó a mellékelt ábra szerint van elhelyezve. Legkevesebb hány golyót kell elvenni ahhoz, hogy a megmaradó golyók közt ne legyen három olyan, melyeknek a középpontjai egy egyenlő oldalú háromszöget alkotnak.



Demeter Albert, Kolozsvár

6. Feladat. Legfeljebb hány síkrészt határozhat meg a síkon 2011 kör és 1102 egyenes?

András Szilárd, Kolozsvár

12. osztály

1. Feladat. Bizonyítsd be, hogy nem létezik olyan deriválható $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre

$$xf'(x) - f(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

2. Feladat. A 2010 elemű $(G, \cdot)$ csoportban létezik három, páronként és az egységelemtől különböző a, b, c elem, amelyre $a^2 = b^2 = c^2 = e$. Igazold, hogy a $(G, \cdot)$ csoport nem kommutatív!

Szilágyi Judit, Kolozsvár

3. Feladat. Hányféleképpen kövezhető ki egy $2 \times n$-es téglalap alakú sétány kétféle színű 1×1-es négyzet alakú kövekkel úgy, hogy ne legyen olyan kő, amely azonos színű valamely két szomszédjával? (Két négyzet szomszédos, ha van közös oldaluk.)

Nagy Örs, Marosvásárhely
András Szilárd, Kolozsvár

4. Feladat. Az $ABCD$ négyzetben M az (AD) oldal egy változó pontja és N a (BC) oldal azon pontja, amelyre $AM = CN$. Legyen $P \in (MN)$ úgy, hogy $\dfrac{MP}{PN} = \left(\dfrac{AM}{MD}\right)^2$. Igazold, hogy $AP \perp PB$ és határozd meg a P pont mértani helyét!

Csapó Hajnalka, Csíkszereda

5. Feladat. Az ABC háromszögben jelölje M, N és P a beírt körnek az érintési pontjait a BC, CA illetve AB oldalon. Igazold, hogy ha D a BC oldal felezőpontja és $AD \cap NP = \{E\}$, akkor $ME \perp BC$.

Dávid Géza, Székelyudvarhely

6. Feladat. Határozd meg a legkisebb $m \in \mathbb{N}^*$ természetes számot, amelyre igaz a következő állítás!
Bármely m darab egymást követő nem nulla természetes szám közt van olyan, amelynek a valódi osztóit összeadva az eredmény nem kisebb a szám $\frac{4}{3}$-ánál.

Demeter Albert, András Szilárd, Kolozsvár

Megoldások

9. osztály

1. Feladat. Igazold, hogy $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ esetén

$$a + b + c + d - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 \leq 1.$$

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

Megoldás. 0-ra redukáljuk a bal oldalt és a jobb oldalon teljes négyzeteket alakítunk ki. Az $a^2 - a$ kifejezés az $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2$ kifejtésében jelenik meg, emiatt az 1-et felírjuk $1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ alakban, és így a következő ekvivalens átalakításokat végezhetjük:

$$0 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - a - b - c - d + 1$$

$$\Updownarrow$$

$$0 \leq \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(d - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Az utolsó egyenlőtlenség nyilvánvaló, mivel a teljes négyzetek nem lehetnek negatívak, és négy nemnegatív szám összege sem lehet negatív. $\circledast$

2. Feladat. Hasonlítsd össze az

$$A = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{2011 \text{ darab } 2\text{-es}} \quad \text{és} \quad B = \underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}_{2010 \text{ darab } 3\text{-as}}$$

számokat!

Demeter Albert, Kolozsvár

Megoldás. Vezessük be az

$$A_n = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n \text{ darab } 2\text{-es}} \quad \text{és} \quad B_n = \underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}_{n \text{ darab } 3\text{-as}}$$

jelöléseket! Ekkor $A_2 = 4$, $B_1 = 3$, $A_3 = 16$, $B_2 = 27$, $A_4 = 2^{16}$, $B_3 = 3^{27} > 2^{16} = A_4$. Az előzőek alapján az a sejtésünk, hogy

$$A_{n+1} < B_n, \text{ ha } n \geq 2.$$

A P_n : „$A_{n+1} < B_n$”, $n \geq 2$ állítás igaz voltát a matematikai indukció módszerével igazoljuk. $n = 2$ esetén a P_2 : „$A_3 < B_2$” állítás az előzőek alapján igaz. Ha valamely $k \geq 2$ esetén P_k igaz, akkor $A_{k+1} < B_k$, ahonnan $A_{k+2} = 2^{A_{k+1}} < 2^{B_k} < 3^{B_k} = B_{k+1}$, azaz P_{k+1} is igaz. A matematikai indukció elve alapján az $A_{n+1} < B_n$ egyenlőtlenség igaz bármely $n \geq 2$ természetes számra, tehát $A_{2011} < B_{2010}$. ⊛

3. Feladat. Határozd meg a következő egyenletek megoldásait a természetes számok halmazában!
a) $20x^2 + 11y^2 = 2011$ **b)** $20x^2 - 11y^2 = 2011$

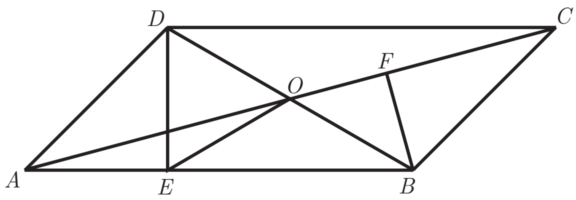
Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

Megoldás. **a)** $20x^2$ utolsó számjegye 0, tehát $11y^2$ utolsó számjegye 1, azaz y^2 utolsó számjegye is 1, vagyis y utolsó számjegye 1 vagy 9. Ugyanakkor $11y^2 \leq 2011$, ahonnan $y \leq 13$, tehát $y \in \{1, 9, 11\}$.
Ha $y = 1$, akkor $20x^2 = 2000$, tehát $x = 10$.
Ha $y = 9$, akkor $20x^2 = 1120$, innen $x^2 = 56$, tehát ebben az esetben nem jutunk megoldáshoz, mivel 56 nem teljes négyzet.
Ha $y = 11$, akkor $20x^2 = 680$, innen $x^2 = 34$, és mivel 34 nem teljes négyzet, ebben az esetben sincs megoldás $\mathbb{N}$-ben.

Tehát az egyenlet egyetlen megoldása a $(10, 1)$ számpár.
b) Az egyenlet egyenértékű a $20(x^2 - 100) = 11(y^2 + 1)$ egyenlettel, ahonnan $y^2 + 1$ osztható 4-gyel, ami nem lehetséges, mert y^2-nek 4-gyel való osztási maradéka 0 vagy 1. ⊛

4. Feladat. Az $ABCD$ paralelogrammában a BAD szög $45°$-os és az ABD szög $30°$-os. Igazold, hogy a B pontnak az (AC) átlótól mért távolsága $\frac{AD}{2}$-vel egyenlő!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti



Első megoldás. Legyen E a D pont vetülete az AB egyenesre, F a B pont vetülete az AC egyenesre és O az átlók metszéspontja. Ekkor az AED háromszögben $m(\widehat{DAE}) = 45°$ és $m(\widehat{AED}) = 90°$, tehát $AE = ED$. A BED háromszögben $m(\widehat{DBE}) = 30°$ és $m(\widehat{DEB}) = 90°$, tehát $DE = \frac{BD}{2}$. Ugyanakkor EO oldalfelező a BED derékszögű háromszögben, tehát $OE = \frac{BD}{2} = DO = OB$. Az előzőek alapján $AE = OE = OB = OD = DE$, ahonnan

$$m(\widehat{EAO}) = \frac{180° - m(\widehat{AEO})}{2} = \frac{m(\widehat{BEO})}{2}$$

$$= \frac{m(\widehat{EBO})}{2} = 15°.$$

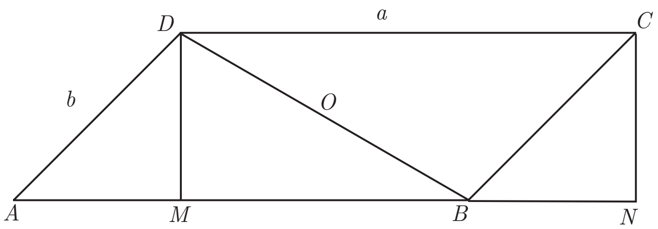
Így $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{BAD}) - m(\widehat{CAB}) = 45° - 15° = 30°$. Az FBC derékszögű háromszögben $m(\widehat{FCB}) = 30°$, tehát $BF = \frac{BC}{2} = \frac{AD}{2}$ ⊛

Második megoldás. A mellékelt ábrán legyen $BC = a$, $AB = b$. Az AMD derékszögű háromszögben

$$AM = MD = \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{b\sqrt{2}}{2} = b'.$$

A BMD derékszögű háromszögben

$$\mathrm{tg}30^\circ = \frac{MD}{BM} = \frac{b'}{a-b'} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad b' = \frac{a}{\sqrt{3}+1}.$$



Az ANC derékszögű háromszögben $AC^2 = AN^2 + NC^2$, azaz

$$AC^2 = (a+b')^2 + b'^2 = a^2 + 2b'^2 + 2ab' =$$

$$= a^2 + \frac{2a^2}{(\sqrt{3}+1)^2} + \frac{2a^2}{\sqrt{3}+1}, \text{ ahonnan}$$

$$AC^2 = \frac{2a^2 \cdot (\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}+1)^2} = 2a^2 \quad \Rightarrow \quad AC = a\sqrt{2}.$$

Ugyanakkor

$$T_{ADC_\triangle} = \frac{AC \cdot x}{2} = \frac{AB \cdot CN}{2}, \text{ ahol } \ x = d(D, AC).$$

Innen

$$x = \frac{AB \cdot CN}{AC} = \frac{a \cdot \frac{b}{\sqrt{2}}}{a\sqrt{2}} = \frac{b}{2},$$

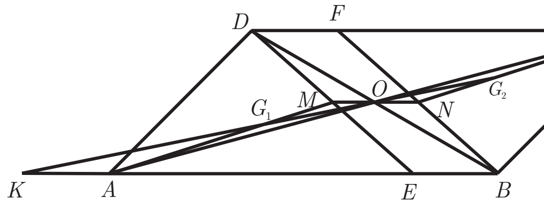
tehát $d(D, AC) = \frac{AD}{2}$. ⊛

5. Feladat. Az $ABCD$ paralelogrammában $AB > AD$. Legyen E, F az (AB), (CD) oldal egy-egy pontja úgy, hogy

$$\frac{EB}{AB} = \frac{DF}{DC} = \frac{1}{n}, \quad n \in \{2,\ 3,\ 4,\ \ldots\},$$

G_1, G_2 az ADE, BCF háromszög súlypontja és $G_1G_2 \cap AB = \{K\}$. Bizonyítsd be, hogy $KA = EB$.

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti



Első megoldás. A paralelogramma átlójának O metszéspontja szimmetriaközéppont, így a feladat feltételei alapján E és F, G_1 és G_2, valamint a DE és BF szakaszok M illetve N felezőpontjai is szimmetrikusak az O pontra nézve. A fentiek alapján $DFBE$ paralelogramma és $MN = EB = DF$. Mivel G_1 és G_2 szimmetrikusak az O pontra nézve, következik, hogy K, G_1 és O kollineárisak. Thálesz tétele alapján $\frac{MO}{KA} = \frac{MG_1}{G_1A} = \frac{1}{2}$, tehát $KA = 2MO = MN = EB$.
Második megoldás. Felírjuk a $\overrightarrow{G_1G_2}$ vektort az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$ segítségével.

$$\overrightarrow{G_1G_2} = \overrightarrow{AG_2} - \overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF}\right) - \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}\right).$$

Tudjuk, hogy $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{n-1}{n} \cdot \overrightarrow{AB}$ és

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{n}\left(\overrightarrow{AC} + (n-1)\cdot\overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{n}\left(\overrightarrow{AB} + n\cdot\overrightarrow{AD}\right),$$

tehát
$$\overrightarrow{G_1G_2} = \frac{1}{3n}\left((n+2)\cdot\overrightarrow{AB} + n\cdot\overrightarrow{AD}\right).$$
Legyen $\frac{AK}{AB} = \alpha$, ekkor
$$\overrightarrow{KG_1} = \overrightarrow{AG_1} - \overrightarrow{AK} = \frac{1}{3n}\left((n-1)\cdot\overrightarrow{AB} + n\cdot\overrightarrow{AD}\right) - \alpha\cdot\overrightarrow{AB} =$$
$$= \frac{1}{3n}\left((n-1-3n\alpha)\cdot\overrightarrow{AB} + n\cdot\overrightarrow{AD}\right).$$
Mivel K, G_1, G_2 kollineárisak, és A, B, D nem kollineárisak, ezért a $\overrightarrow{G_1G_2}$ és $\overrightarrow{KG_1}$ vektorok $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorok szerinti felbontásaikban az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorok együtthatói arányosak, azaz
$$\frac{n+2}{n-1-3n\alpha} = \frac{n}{n},$$
ahonnan $\alpha = -\frac{1}{n}$. Tehát $\overrightarrow{AK} = -\frac{1}{n}\overrightarrow{AB}$ és így $\overrightarrow{KA} = \frac{1}{n}\overrightarrow{AB}$ vagyis $\frac{KA}{AB} = \frac{1}{n} = \frac{EB}{AB}$. Ebből következik, hogy $KA = EB$. $\circledast$

6. Feladat. Legközelebb melyik évben lesz 4 olyan péntek, amely egyben 13-a is?

***

Megoldás. Nyilvánvaló, hogy azon hónapokban, amelyekben 13-a pénteki napra esik, elseje is a hét ugyanazon napjára (vasárnapra) esik. Legyenek a hét napjai egymásután rendre A, B, C, D, E, F, G, azzal a nappal kezdve, amelyikre január elseje is esett. A következő táblázatok tartalmazzák az év hónapjainak első és utolsó napjait nem szökőévben, illetve szökőévben. Mindkét táblázatban látható, hogy nincs négy hónap, amely ugyanazzal a nappal kezdődne, így 13-a sem eshet 4 különböző hónapban péntekre semmilyen évben.

hónap	1	...	29	30	31
jan.	A	...	A	B	C
febr.	D	...			
márc.	D	...	D	E	F
ápr.	G	...	G	A	
máj.	B	...	B	C	D
jún.	E	...	E	F	
júl.	G	...	G	A	B
aug.	C	...	C	D	E
szept.	F	...	F	G	
okt.	A	...	A	B	C
nov.	D	...	D	E	
dec,	F	...	F	G	A

hónap	1	...	29	30	31
jan.	A	...	A	B	C
febr.	D	...	D		
márc.	E	...	E	F	G
ápr.	A	...	A	B	
máj.	C	...	C	D	E
jún.	F	...	F	G	
júl.	A	...	A	B	C
aug.	D	...	D	E	F
szept.	G	...	G	A	
okt.	B	...	B	C	D
nov.	E	...	E	F	
dec.	G	...	G	A	B

$\circledast$

10. osztály

1. Feladat. Mennyi az

$$E(x) = (3 - 2\mathrm{tg}x)^2 + (3 + 2\mathrm{ctg}x)^2$$

kifejezés legkisebb lehetséges értéke, ha $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$?

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Megoldás. Teljes négyzet, esetleg plusz egy konstans kialakítása érdekében a következő átalakításokat végezzük:

$$(3-2\mathrm{tg}x)^2+(3+2\mathrm{ctg}x)^2 = 9-12\mathrm{tg}x+4\mathrm{tg}^2x+9+12\mathrm{ctg}x+4\mathrm{ctg}^2x =$$

$$= 4(\mathrm{tg}^2x + \mathrm{ctg}^2x) + 12(\mathrm{ctg}x - \mathrm{tg}x) + 18 =$$

$$= 4(\mathrm{ctg}x - \mathrm{tg}x)^2 + 8 + 12(\mathrm{ctg}x - \mathrm{tg}x) + 9 + 9 =$$

$$= (2\mathrm{ctg}x - 2\mathrm{tg}x + 3)^2 + 17.$$

A kifejezés legkisebb értéke 17, és ezt el is éri, amikor

$$2\mathrm{ctg}x - 2\mathrm{tg}x + 3 = 0,$$

ahonnan $\mathrm{tg}x = -\frac{1}{2}$ vagy $\mathrm{tg}x = 2$, és ilyen x érték létezik. $\circledast$

2. Feladat. **a)** Igazold, hogy $x > 1$ esetén

$$2^{\sqrt{\log_2 x}} = x^{\sqrt{\log_x 2}}.$$

b) Határozd meg a következő egyenlet valós megoldásait:

$$2^{\sqrt{2x \log_2 x}} + x^{\sqrt{2x \log_x 2}} = 2^x + x^2.$$

Longáver Lajos, Nagybánya

Megoldás. **a)** Ha logaritmáljuk az igazolandó összefüggést, azt kapjuk, hogy

$$\log_2 2^{\sqrt{\log_2 x}} = \log_2 x^{\sqrt{\log_x 2}}$$
$$\sqrt{\log_2 x} = \sqrt{\log_x 2} \cdot \log_2 x$$
$$\sqrt{\log_2 x} = \sqrt{\log_2 x},$$

ami igaz. Az $x > 1$ feltétel alapján az előbbi átalakítások ekvivalens átalakítások, tehát a bizonyítandó egyenlőség is igaz.
b) A létezési feltételek alapján $x > 1$. Az a) alpont alapján $2^{\sqrt{2x \log_2 x}} = x^{\sqrt{2x \log_x 2}}$, így az egyenlet

$$2^{\sqrt{2x \log_2 x}} = \frac{2^x + x^2}{2}$$

alakban írható. De

$$2^{\sqrt{2x \log_2 x}} \leq 2^{\frac{x + \log_2 x^2}{2}} = \sqrt{2^x \cdot 2^{\log_2 x^2}} = \sqrt{2^x \cdot x^2} \leq \frac{2^x + x^2}{2},$$

és egyenlőséget csak akkor kapunk, ha $x = \log_2 x^2$ és $2^x = x^2$. Látható, hogy az $x = 2$ és $x = 4$ megoldások. Továbbá $x > 0$ esetén az $x = 2 \log_2 x$ egyenlet jobb oldalán álló $x \to 2 \log_2 x$ függvény konkáv és a bal oldalon az $x \to x$ függvény konvex, tehát a grafikus képüknek legfeljebb két közös pontja lehet. Így más megoldás nincs. ⊛

3. Feladat. Határozd meg azokat a z komplex számokat, amelyekre

$$z^2 + \left(\frac{2z}{z-2}\right)^2 = 5.$$

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Megoldás. Az $a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ azonosság alapján az egyenlet a következő alakba írható:

$$\left(z + \frac{2z}{z-2}\right)^2 - 2z\frac{2z}{z-2} = 5,$$

$$\left(\frac{z^2}{z-2}\right)^2 - 4\frac{z^2}{z-2} - 5 = 0.$$

A $t = \frac{z^2}{z-2}$ változócserét alkalmazva a $t^2 - 4t - 5 = 0$ egyenlethez jutunk, ahonnan $t_1 = -1$ és $t_2 = 5$. Az első esetben $\frac{z^2}{z-2} = -1$, ahonnan $z^2+z-2 = 0$ és a gyökök $z_1 = -2$ és $z_2 = 1$. A második esetben $\frac{z^2}{z-2} = 5$, tehát $z^2-5z+10 = 0$, és a gyökök $z_{3,4} = \frac{5\pm i\sqrt{15}}{2}$. Tehát az egyenlet megoldásainak halmaza

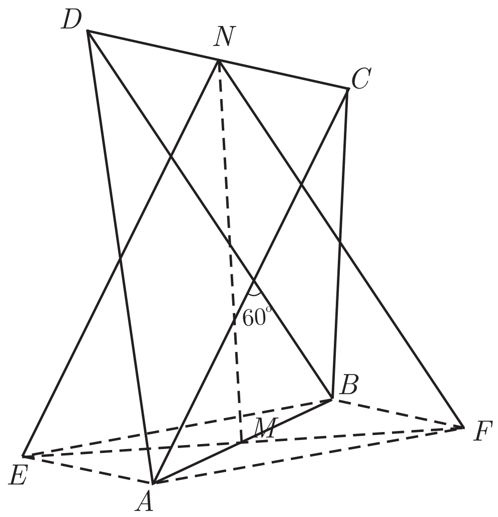
$$M = \left\{-2, 1, \frac{5 \pm i\sqrt{15}}{2}\right\}.$$

⊛

4. Feladat. Az $ABCD$ négyszögben M az AB, N pedig a CD szakasz felezőpontja. Az AC és a BD átlók hossza $2\sqrt{3}$ és $60°$-os szöget zárnak be. Számítsd ki az MN szakasz hosszát!

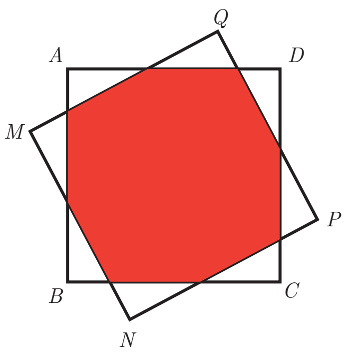
Dávid Géza, Székelyudvarhely

Megoldás. Legyen O az átlók metszéspontja. Két esetet tárgyalunk aszerint, hogy az $\widehat{AOB}$ vagy a $\widehat{BOC}$ szög $60°$-os.
I. eset: Ha $\widehat{AOB} = 60°$, akkor a következő két mellékszerkesztést végezzük: $NE \parallel AC$, $NE = AC$ és $NF \parallel DB$, $NF = DB$. Innen következik, hogy az $ACNE$ és az $NDBF$ négyszögek paralelogrommák, ahonnan azt kapjuk, hogy $AE \parallel FB$ és $AE = FB$, mert N felezőpont és mindkettő párhuzamos a DC-vel. Következik, hogy az $AFBE$ négyszög is paralelogramma. Tehát az EF átmegy az AB szakasz M felezőpontján és M az EF felezőpontja. A szerkesztésből adódik, hogy az ENF háromszög egyenlő oldalú, mert $EN = AC = DB = NF$ és az $\widehat{ENF} = 60°$. Tehát NM az ENF egyenlő oldalú háromszög magassága, így $NM = \frac{\sqrt{3}EN}{2} = \frac{\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}}{2} = 3$.



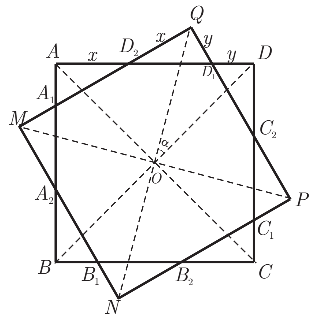
II. eset: Ha $\widehat{AOB} = 120°$, akkor is ugyanazt a segédszerkesztést végezzük el, csak ebben az esetben ENF egy olyan egyenlő szárú háromszög, amelyben $\widehat{ENF} = 120°$ és $EN = NF = 2\sqrt{3}$. Ebben az esetben $EF = 6$ és $MN = \sqrt{3}$. ⊛

5. Feladat. Az $ABCD$ és az $MNPQ$ kongruens, egységoldalú négyzeteket egymásra helyezzük úgy, hogy teljesen fedjék egymást. Az $ABCD$ négyzetet rögzítettnek tekintjük, majd az $MNPQ$ négyzetet a középpontja körül forgatni kezdjük. Legalább mekkora a két négyzet közös részének területe?



András Szilárd, Kolozsvár

Megoldás. Legyenek $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2$ az elforgatott négyzet és az eredeti négyzet oldalainak metszéspontjai (lásd az ábrát).



Ha az ábrát elforgatjuk az O pont körül $90°$-kal, akkor az új ábra megegyezik az eredetivel, mert a négyzet átlói felezik egymást és merőlegesek egymásra. Tehát

$$AA_1D_{2\Delta} \equiv BB_1A_{2\Delta} \equiv CC_1B_{2\Delta} \equiv$$

$$\equiv DD_1C_{2\Delta} \text{ és} MA_1A_{2\Delta} \equiv NB_1B_{2\Delta} \equiv$$

$$\equiv PC_1C_{2\Delta} \equiv QD_1D_{2\Delta}.$$

A keresett terület

$$T = T_{A_1A_2B_1B_2C_1C_2D_1D_2} = T_{MNPQ} - 4T_{QD_1D_{2\Delta}} = 1 - 2xy,$$

ami akkor minimális, ha az xy szorzat maximális, ahol $D_2Q = x$ és $QD_1 = y$. Ugyanakkor $QD_1D_{2\Delta} \sim CC_1B_{2\Delta}$ és

$$T = 1 - 4T_{QD_1D_{2\Delta}} = 1 - 4T_{CC_1B_{2\Delta}},$$

következik, hogy $T_{QD_1D_{2\Delta}} = T_{CC_1B_{2\Delta}}$, tehát ez a két háromszög kongruens, mert hasonlóak és területük egyenlő. Következésképpen mind a 8 háromszögecske kongruens. A kongruencia alapján

$AD_2 = x$ és $DD_1 = y$, a QD_1D_2 derékszögű háromszögből pedig $D_1D_2 = \sqrt{x^2+y^2}$, tehát $x+y+\sqrt{x^2+y^2} = 1$, ahonnan $x^2+y^2 = 1+x^2+y^2-2x-2y+2xy$ vagyis

$$xy = x+y-\frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Így az xy szorzat pontosan akkor maximális, ha az $x+y$ összeg maximális. Az (1) összefüggés egyenértékű az $(1-x)(1-y) = \frac{1}{2}$ összefüggéssel, és mivel $1-x \geq 0$, $1-y \geq 0$, alkalmazhatjuk rájuk a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget, azaz

$$\frac{1-x+1-y}{2} \geq \sqrt{(1-x)(1-y)} = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Ez alapján

$$x+y \leq 2-\sqrt{2},$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $1-x = 1-y = \sqrt{\frac{1}{2}}$, azaz $x = y = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ebben az esetben a terület $T = 2\sqrt{2}-2$. $\circledast$

Második megoldás. Az előző megoldás megállapításai alapján

$$OD_1D_{2\Delta} \equiv OA_1D_{2\Delta} \equiv OA_1A_{2\Delta} \equiv OB_1A_{2\Delta} \equiv OB_1B_{2\Delta} \equiv$$

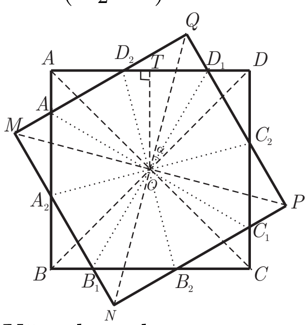
$$\equiv OC_1B_{2\Delta} \equiv OC_1C_{2\Delta} \equiv OD_1C_{2\Delta}$$

Így $m(\widehat{D_1OD_2}) = \frac{360°}{8} = 45°$ és

$$T = 8T_{OD_1D_{2\Delta}} = 8 \cdot \frac{OD_1 \cdot OD_2 \cdot \sin(\widehat{D_1OD_2})}{2} = 2\sqrt{2} \cdot OD_1 \cdot OD_2.$$

Tehát az $OD_1 \cdot OD_2$ szorzat minimumát keressük. Ha az elforgatás szöge $\alpha \in [0, 45°]$ (nagyobb szöggel való elforgatást megkaphatunk ezekből forgatással vagy tükrözéssel), és az O pont vetülete az AD

egyenesre T, akkor $m(\widehat{D_1OT}) = m(\widehat{TOD}) - m(\widehat{D_1OD}) = 45° - \frac{\alpha}{2}$ és $m(\widehat{D_2OT}) = 45° - m(\widehat{D_1OT}) = \frac{\alpha}{2}$. Innen



$$OD_1 = \frac{OT}{\cos(45° - \frac{\alpha}{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)} \text{ és}$$

$$OD_2 = \frac{OT}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Következésképpen a

$$\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\alpha + 45°)$$

kifejezés maximumát keressük. Ez akkor maximális a $[0, 45°]$ intervallumon, ha $\alpha = 45°$, ekkor a terület $T = 2\sqrt{2} - 2$ $\otimes$

6. Feladat. Legfeljebb hány elemet tartalmazhat az a halmaz, amelynek bármely 5 eleme közül kiválasztható három, amely mértani haladványt alkot?

András Szilárd, Kolozsvár

Megoldás. Jelölje k a halmaz elemeiből alkotható leghosszabb mértani haladvány hosszát. Ha $k \geq 9$, és a haladvány tagjai $x_0, x_1, \ldots, x_8$, akkor az x_0, x_1, x_3, x_7 és x_8 közt nincs három mértani haladványban, tehát ez esetben a halmaz nem tartalmazhat 9 vagy ennél több elemet. Ugyanakkor beláthatjuk, hogy ha a halmaz elemei $x_0, x_1, \ldots, x_7$, akkor közülük bármely öt közt van három, amely mértani haladványt alkot. Ez azt mutatja, hogy nyolc eleme lehet a halmaznak. A továbbiakban vizsgáljuk azokat az eseteket, amelyekben $k \leq 8$ és a halmaznak legalább 9 eleme van.

Ha $k = 8$, akkor a halmaz egy részhalmaza

$$H_8 = \{x_0, x_0q, x_0q^2, \ldots, x_0q^7, y\},$$

ahol $y \notin H_8$, $y \neq x_0q^8$ és $y \neq x_0/q$. Elégséges belátni, hogy az $\{x_0, x_0q, x_0q^6, x_0q^7, y\}$ és az $\{x_0, x_0q, x_0q^4, x_0q^5, y\}$ részhalmazokban nem létezhet egyszerre három-három elem, amely mértani haladványban van.
$k = 7$ esetén a halmaz egy részhalmaza

$$H_7 = \{x_0, x_0q, x_0q^2, \ldots, x_0q^6, y\},$$

ahol $y \notin H_7$, $y \neq x_0q^7$ és $y \neq x_0/q$. Ebben az esetben elégséges belátni, hogy az $\{x_0, x_0q, x_0q^5, x_0q^6, y\}$ és $\{x_0, x_0q, x_0q^3, x_0q^4, y\}$ részhalmazokban nem létezhet egyszerre három-három elem, amely mértani haladványban van.
$k = 6$ esetén a halmaz egy részhalmaza

$$H_6 = \{x_0, x_0q, x_0q^2, \ldots, x_0q^5, y\},$$

ahol $y \notin H_6$, $y \neq x_0q^6$ és $y \neq x_0/q$. Ebben az esetben elégséges belátni, hogy az $\{x_0, x_0q, x_0q^4, x_0q^5, y\}$ és $\{x_0, x_0q, x_0q^3, x_0q^4, y\}$ részhalmazokban nem létezhet egyszerre három-három elem, amely mértani haladványban van.
$k = 5$ esetén a halmaz egy részhalmaza

$$H_5 = \{x_0, x_0q, x_0q^2, x_0q^3, x_0q^4, y\},$$

ahol $y \notin H_5$, $y \neq x_0q^5$ és $y \neq x_0/q$. Ebben az esetben az y a $K = \{x_0q^{1/2}, x_0q^{3/2}, x_0q^{5/2}, x_0q^{7/2}, x_0q^6, x_0q^7, x_0q^8\}$ halmaz eleme lehet, tehát ha az eredeti H halmaznak lenne legalább 9 eleme, akkor K-ból további négy elemet kellene tartalmaznia. Másrészt a törtkitevős kifejezések közül legfeljebb kettőt tartalmazhat (különben nem teljesülne a $k = 5$ feltétel), és így az x_0q^6, x_0q^7

és x_0q^8 elemek közül legalább kettőt tartalmaz. Így viszont az $\{x_0, x_0q, x_0q^3, x_0q^7, x_0q^8\}$ vagy $\{x_0, x_0q, x_0q^4, x_0q^6, x_0q^7\}$ vagy $\{x_0, x_0q^2, x_0q^6, x_0q^8, x_0q^{v/2}\}$ halmazok valamelyike része lesz a H-nak és nem tartalmaz három elemet, amely mértani haladványt alkot. Hasonlóan tárgyalható a $k = 4$, illetve $k = 3$ eset is. ⊛

11. osztály

1. Feladat. Határozd meg azokat az x, y, z természetes számokat, amelyekre

$$xy + yz + zx = 3(x + y + z) + 1.$$

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Megoldás. A kifejezések alapján érezhető, hogy ha a számok eléggé nagyok, akkor a bal oldal sokkal nagyobb, mint a jobb oldal. Pontosabban, ha $x \geq 4, y \geq 4$ és $z \geq 4$, akkor $xy+yz+zx > 3(x+y+z)+1$, tehát ebben az esetben nincs megoldás. A szimmetria alapján feltehetjük, hogy az x, y, z számok közül a legkisebb x. Így tehát $x \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Ha $x = 0$, akkor az egyenlet: $(y-3)(z-3) = 10$, ennek megoldásai: $(0, 4, 13)$, $(0, 5, 8)$.

Ha $x = 1$, akkor az egyenlet: $(y-2)(z-2) = 8$, ennek megoldásai: $(1, 3, 10)$, $(1, 4, 6)$.

Ha $x = 2$, akkor az egyenlet: $(y-1)(z-1) = 8$, ennek megoldásai: $(2, 2, 9)$, $(2, 3, 5)$.

Ha $x = 3$, akkor az egyenlet: $yz = 10$, ennek megoldásai: $(3, 1, 10)$, $(3, 2, 5)$.

A szimmetriai okok miatt vehetjük mindegyik megoldás permutációit is. Ennek alapján az egyenletnek összesen $5 \cdot 6 + 3 = 33$ megoldása van. ⊛

2. Feladat. Igazold, hogy ha $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, és $\det A = \alpha$, akkor

$$\det\left(A^2 + A - \alpha I_2\right) + \det\left(A^2 + \alpha I_2\right) = \alpha(1 + 4\alpha).$$

Bencze Mihály, Brassó

Első megoldás. A Cayley-Hamilton tétel alapján írhatjuk, hogy

$$A^2 - tA + \alpha I_2 = O_2,$$

ahol $t = Tr(A)$. Továbbá ez alapján

$$A^2 + A - \alpha I_2 = (t + 1)A - 2\alpha I_2 = (t + 1)\left(A - \frac{2\alpha}{t + 1} I_2\right) \Rightarrow$$

$$\det\left(A^2 + A - \alpha I_2\right) = (t + 1)^2 \det\left(A - \frac{2\alpha}{t + 1} I_2\right).$$

De tudjuk azt, hogy $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ esetén $\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - \lambda Tr(A) + \det(A)$ (ez egyszerű számolással is könnyen ellenőrizhető). Ez alapján írható, hogy

$$\det\left(A^2 + A - \alpha I_2\right) = (t + 1)^2 \left(\left(\frac{2\alpha}{t + 1}\right)^2 - \frac{2\alpha}{t + 1} t + \alpha\right) =$$

$$= 4\alpha^2 - 2t(t + 1)\alpha + (t + 1)^2\alpha = 4\alpha^2 + \left(1 - t^2\right)\alpha. \qquad (2)$$

Ismét a Cayley-Hamilton tétel alapján írhatjuk, hogy $A^2 + \alpha I_2 = tA$. Innen

$$\det\left(A^2 + \alpha I_2\right) = t^2\alpha. \qquad (3)$$

Az (2) és (3) alapján következtethetünk, hogy

$$\det\left(A^2 + A - \alpha I_2\right) + \det\left(A^2 + \alpha I_2\right) =$$

$$= 4\alpha^2 + \left(1 - t^2\right)\alpha + t^2\alpha = \alpha(1 + 4\alpha).$$

$\circledast$

Második megoldás. Ha $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ akkor $\mathrm{Tr}A = a + d$ és a Cayley-Hamilton tételt felírva az $A^2 - (a+d)A + \alpha I_2 = O_2$ egyenlőséget kapjuk, ahonnan $A^2 + \alpha I_2 = (a+d)A$, így $\det(A^2 + \alpha I_2) = (a+d)^2 \det A = (a+d)^2\alpha$. Ugyanakkor

$$A^2 + A - \alpha I_2 = (a + d + 1)A - 2\alpha I_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} (a+d+1)a - 2\alpha & (a+d+1)b \\ (a+d+1)c & (a+d+1)d - 2\alpha \end{pmatrix},$$

ahonnan

$$\det(A^2+A-\alpha I_2) = (a+d+1)^2(ad-bc)-2\alpha(a+d+1)(a+d)+4\alpha^2 =$$

$$= \alpha(a+d+1)(1-a-d) + 4\alpha^2 = \alpha[1-(a+d)^2] + 4\alpha^2.$$

Ekkor

$$\det\left(A^2 + A - \alpha I_2\right) + \det\left(A^2 + \alpha I_2\right) =$$

$$= (a+d)^2\alpha + \alpha[1-(a+d)^2] + 4\alpha^2 = \alpha + 4\alpha^2 = \alpha(4\alpha+1).$$

$\circledast$

3. Feladat. Az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozatot az $x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n,\ n \geq 0$ és $x_0 = 2$, $x_1 = 3$ összefüggésekkel értelmezzük. Van-e ennek a sorozatnak olyan tagja, amely teljes négyzet?

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

Első megoldás. Mivel a sorozat első két tagja egész szám, a sorozat értelmezése alapján azonnali, hogy a sorozat minden eleme egész. Továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén írhatjuk, hogy

$$x_{n+3} = 3x_{n+2} - x_{n+1} = 3(3x_{n+1} - x_n) - x_{n+1} =$$

$$= 8x_{n+1} - 3x_n = 4(2x_{n+1} - x_n) + x_n.$$

Ebből a felírásból észrevehető, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_{n+3} \equiv x_n \pmod 4. \tag{4}$$

Ekkor legyen $(r_n)_{n\geq 0}$ sorozat, ahol minden $n \in \mathbb{N}$ esetén r_n az x_n-nek 4-gyel vett osztási maradéka. Az (4) összefüggés alapján látható, hogy az $(r_n)_{n\geq 0}$ sorozat periodikus és periódusa 3. Mivel a sorozat első három tagja $x_0 = 2, x_1 = 3, x_2 = 7$ következik, hogy $r_n \in \{2, 3\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ez azt jelenti, hogy a sorozat minden tagjának 4-gyel vett osztási maradéka vagy 2 vagy 3.
Innen következik, hogy a sorozat egyetlen tagja sem lehet teljes négyzet, hiszen egy teljes négyzet 4-gyel vett osztási maradéka vagy 0 vagy 1. $\circledast$

Második megoldás. Számítsuk ki a sorozat első néhány tagját: $x_0 = 2, x_1 = 3, x_2 = 7, x_3 = 18, x_4 = 47, x_5 = 123$. Ha ezeket a számokat a legközelebbi teljes négyzethez viszonyítjuk, akkor azt látjuk, hogy a páratlan indexű tagok 2-vel nagyobbak egy teljes négyzetnél és a páros indexű tagok 2-vel kisebbek egy teljes négyzetnél. Ha azt is megvizsgáljuk, hogy minek a négyzeténél kisebbek, illetve nagyobbak a sorozat tagjai, akkor észrevehetjük, hogy $n \in \{0, 1, 2\}$ esetén

$$x_{2n} + 2 = x_n^2 \quad \text{és} \quad x_{2n+1} - 2 = (x_{n+1} - x_n)^2.$$

Mindkét egyenlőség igazolható az általános tag képlete alapján vagy a matematikai indukció módszerével. Az indukciós lépés helyessége az

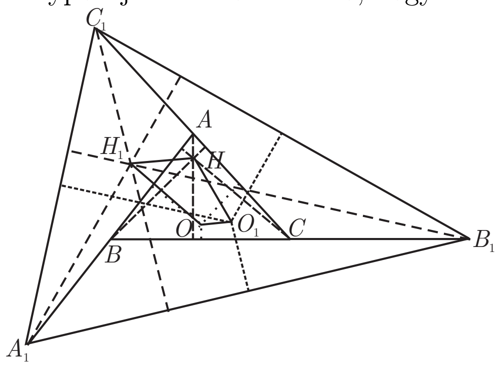
$$x_n^2 + x_{n+1}^2 - 3x_n x_{n+1} + 5 = 0, \quad n \geq 0$$

egyenlőségre vezetődik vissza, amit a rekurzió alapján szintén teljes indukcióval igazolhatunk. $\circledast$

4. Feladat. Az ABC nem egyenlő oldalú háromszögben jelölje A_1 az A-nak a B-re vonatkozó, B_1 a B-nek a C-re vonatkozó és C_1 a C-nek az A-ra vonatkozó szimmetrikusát. Igazold, hogy ha H, O az ABC háromszögben és H_1, O_1 az $A_1B_1C_1$ háromszögben a magasságpont és a háromszög köré írt kör középpontja, akkor OO_1HH_1 trapéz!

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Tekintsük az O pontot a koordinátarendszer középpontjának. Jelöljük G-vel és G_1-gyel az ABC illetve $A_1B_1C_1$ háromszögek súlypontjait. Ekkor felírható, hogy



$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}}{3} =$$

$$= \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC_1}}{3}$$

$$= \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CA}}{3},$$

$$= \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OC}}{3}$$

$$= \frac{2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}}{3} =$$

$$= \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{3} = \overrightarrow{OG}.$$

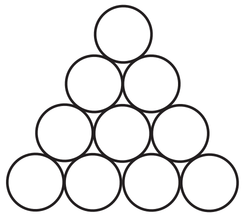
Tehát G=G_1. Másfelől tudjuk, hogy H, G és O illetve H_1, G_1 és O_1 egy egyenesen helyezkednek el (az Euler egyenesen) és

$$\frac{OG}{GH} = \frac{1}{2} = \frac{O_1G_1}{G_1H_1} = \frac{O_1G}{GH_1}$$

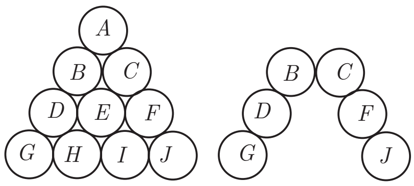
Vagyis $OO_1 \parallel HH_1$, amiből következik, hogy OO_1HH_1 trapéz.

⊛

5. Feladat. 10 billiárdgolyó a mellékelt ábra szerint van elhelyezve. Legkevesebb hány golyót kell elvenni ahhoz, hogy a megmaradó golyók közt ne legyen három olyan, melyeknek a középpontjai egy egyenlő oldalú háromszöget alkotnak.



Demeter Albert, Kolozsvár



Megoldás. Mivel AGJ_Δ egyenlő oldalú, ezért az A, G, J golyók valamelyikét el kell távolítani. Tegyük fel, hogy eltávolítjuk az A golyót. Mivel BIG és CHJ egyenlő oldalú háromszögek, a B, I, G, C, H, J golyók közül legalább kettőt el kell távolítani. Eddig eltávolítottunk legalább 3 golyót. A B, C, H, I golyók között van olyan, amely még nincs eltávolítva, ennek középpontja pedig az E és a D vagy F golyók valamelyikének középpontjával egyenlő oldalú háromszöget alkot, tehát legalább még egy golyót el kell távolítani. Az előzőek alapján legalább 4 golyót el kell távolítani. A mellékelt ábrákon látható, hogy 4 golyó eltávolítása elégséges.

⊛

6. Feladat. Legfeljebb hány síkrészt határozhat meg a síkon 2011 kör és 1102 egyenes?

András Szilárd, Kolozsvár

Megoldás. Ha csak köröket rajzolunk úgy, hogy minden kör minden kört két különböző pontban metsz és nincs három kör, amely egy pontban találkozik, akkor $n \geq 1$ esetén az $n+1$-edik kör $2n$ pontban metszi az eddigi köröket, így $2n$ tartományon halad át, vagyis $2n$-nel növeli a tartományok számát. Azaz n kör $a_n = 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + ... + 2 \cdot (n-1) = 2 + n(n-1)$ tartományra osztja a síkot.
Miután megrajzoltuk az n kört, rajzoljuk az egyeneseket úgy, hogy ne legyen köztük két párhuzamos vagy 3 összefutó egyenes, illetve minden egyenes minden kört két különböző pontban metsszen úgy, hogy azokon a metszéspontokon ne haladjon át másik kör vagy egyenes, illetve egy tartományon ne haladjon át kétszer. Az első egyenes $2n$ pontban metszi a köröket, a körökön kívüli tartományon kétszer halad át, így $2n$-nel növeli a tartományok számát. A második egyenes $2n$ pontban metszi a köröket és 1 pontban a behúzott egyenest, így $2n+2$ tartományon halad át. (A körökön kívüli tartományt már az előző egyenes szétválasztotta, így megtehető, hogy ne haladjon át kétszer egy tartományon.) Az $m+1$-edik egyenes $2n$ pontban metszi a köröket és m pontban az egyeneseket, így $2n+m+1$-gyel növeli a tartományok számát. Tehát n kör és m egyenes legfeljebb $a(n,m) = a_n + 2n + 2n + 2 + 2n + 3 + 2n + 4 + ... + 2n + m = 2 + n(n-1) + m \cdot 2n + \frac{m(m+1)}{2} - 1 = $ $= 1 + n(n-1) + 2mn + \frac{m(m+1)}{2}$ tartományra osztja a síkot, így 2011 kör és 1102 egyenes legfeljebb $a(2011, 1102) = 9082108$ síkrészt határoz meg.

⊛

12. osztály

1. Feladat. Bizonyítsd be, hogy nem létezik olyan deriválható $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre

$$xf'(x) - f(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

Első megoldás. Feltételezzük, hogy létezik a feltételt teljesítő deriválható függvény. Ekkor először is $f(0) = 0$, továbbá ha $x \neq 0$ azt kapjuk, hogy

$$f'(x) = 1 + \frac{f(x)}{x}. \tag{5}$$

Mivel f deriválható 0-ban, létezik a

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = L$$

határérték és $L = f'(0)$.
Az (5) kifejezésben határértékre térve azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 1 + f'(0). \tag{6}$$

Mivel f folytonos a 0-ban és deriválható az értelmezési tartományán, a Lagrange tétel következményeként $f'(0)$ nem csak létezik és véges, hanem megegyezik az f' függvény határértékével a 0-ban. Ez azt jelenti, hogy

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(x). \tag{7}$$

Azonban (6) és (7) egymásnak ellentmondó állítások, tehát a feltételezésünk hamis, vagyis nem létezik az adott tulajdonságú függvény.

$\circledast$

Második megoldás. Ismét feltételezzük, hogy létezik a feltételt teljesítő deriválható függvény. Ekkor ismét állíthatjuk, hogy $f(0) = 0$. Továbbá, ha $x \neq 0$, a feladat feltételét a következő alakban írhatjuk:

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{1}{x} = (\ln(|x|))'.$$

Ez egyenértékű azzal, hogy $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x\ln(-x) + c_1 x, & \text{ha } x < 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ x\ln(x) + c_2 x, & \text{ha } x > 0 \end{cases} \tag{8}$$

Az f függvény természetesen deriválható kell, hogy legyen a 0-ban is, ez azt jelenti, hogy léteznek és végesek az f 0-ban vett jobb- és bal oldali deriváltjai, mi több ezek egyenlőek kell, hogy legyenek. De

$$f'_j(0) = \lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \searrow 0} \ln(x) + c_1 = -\infty,$$

ez viszont ellentmond annak, hogy az f függvény deriválható. ⊛

2. Feladat. A 2010 elemű $(G, \cdot)$ csoportban létezik három, páronként és az egységelemtől különböző a, b, c elem, amelyre $a^2 = b^2 = c^2 = e$. Igazold, hogy a $(G, \cdot)$ csoport nem kommutatív.

Szilágyi Judit, Kolozsvár

Megoldás. Feltételezzük, hogy a $(G, \cdot)$ csoport kommutatív. Vizsgáljuk az $a \cdot b$ szorzat lehetséges értékeit. A feladat feltételei szerint $a \cdot b \neq a$, $a \cdot b \neq b$ és $a \cdot b \neq e$, így két lehetséges eset marad: $a \cdot b = c$ vagy $a \cdot b \notin \{e, a, b, c\}$.
1. eset: Ha $a \cdot b = c$, akkor $a \cdot (a \cdot b) = a \cdot c \Leftrightarrow a^2 \cdot b = a \cdot c \Leftrightarrow b = a \cdot c$. Hasonlóan $(a \cdot b) \cdot b = c \cdot b \Leftrightarrow a \cdot b^2 = c \cdot b \Leftrightarrow a = c \cdot b = b \cdot c$, mivel feltételezés szerint a csoport kommutatív.
Ekkor a $H_1 = \{e, a, b, c\}$ halmazra elkészítve a művelettáblát,

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

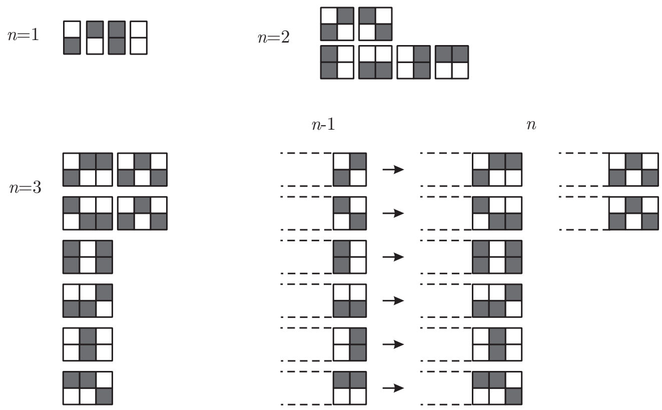
láthatjuk, hogy H_1 részcsoportja G-nek, de ez ellentmond Lagrange tételének, mely szerint a részcsoport rendje osztója a csoport rendjének, ami ebben az esetben azt jelentené, hogy 4 osztója 2010-nek, ami ellentmondás.
2. eset: Ha $a \cdot b \notin \{e, a, b, c\}$, akkor a $H_2 = \{e, a, b, c, ab, ac, bc, abc\}$ halmazra készítjük el a művelettáblát.

$\cdot$	e	a	b	c	ab	ac	bc	abc
e	e	a	b	c	ab	ac	bc	abc
a	a	e	ab	ac	b	c	abc	bc
b	b	ab	e	bc	a	abc	c	ac
c	c	ac	bc	e	abc	a	b	ab
ab	ab	b	a	abc	e	bc	ac	c
ac	ac	c	abc	a	bc	e	ab	b
bc	bc	abc	c	b	ac	ab	e	a
abc	abc	bc	ac	ab	c	b	a	e

Mivel H_2 részcsoportja G-nak, az előző esetbeli indoklás alapján ismét ellentmondáshoz jutunk. Tehát $(G, \cdot)$ nem kommutatív csoport. $\circledast$

3. Feladat. Hányféleképpen kövezhető ki egy $2 \times n$-es téglalap alakú sétány kétféle színű 1×1-es négyzet alakú kövekkel úgy, hogy ne legyen olyan kő, amely azonos színű valamely két szomszédjával? (Két négyzet szomszédos, ha van közös oldaluk.)

Nagy Örs, Marosvásárhely
András Szilárd, Kolozsvár



Megoldás. Induktívan, sajátos eseteket vizsgálva $n = 1$ esetén 4-féle, $n = 2$ esetén 6-féle, $n = 3$ esetén pedig 8-féle jó kövezés van. Megfigyelhető, hogy egy újabb oszlop kikövezésekor az utolsó 2×2-es négyzet mintája számít. Ha az tarka (sakktáblaszerű), akkor az újabb oszlop kétféleképpen kövezhető le. Ha oszlopos vagy soros mintájú, akkor az újabb oszlop csak egyféleképpen kövezhető jól.

Jelölje a_n a $2 \times n$-es sétányok különböző jó lekövezéseinek számát. Ha x_n, y_n és z_n jelöli a tarka, soros, illetve oszlopos 2×2-es négyzetre végződő $2 \times n$-es sétányok számát, akkor a fentiek alapján

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, \quad y_n = x_{n-1}, \quad z_n = z_{n-1} \quad \text{és}$$

$$a_n = x_n + y_n + z_n.$$

Ezek alapján $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ és mivel $x_2 = 2$, $x_3 = 4$ írhatjuk, hogy $x_n = 2F_n$, ahol $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ és $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, ha $n \geq 0$ a Fibonacci sorozat. Ebből következik, hogy $y_n = x_{n-1} = 2F_{n-1}$. A $(z_n)_{n \geq 0}$ sorozatra felírt rekurzió alapján $z_n = 2$, ha $n \geq 1$. Így

$$a_n = x_n + y_n + z_n = 2(F_n + F_{n-1} + 1) = 2(F_{n+1} + 1), \quad n \geq 2.$$

1. Megjegyzés. Az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat tagjait a karakterisztikus egyenlet segítségével is meghatározhatjuk. A fentiek alapján $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, tehát a karakterisztikus egyenlet $r^2 - r - 1 = 0$ és ennek a gyökei $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Így

$$x_n = c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Az $x_2 = 2$ és $x_3 = 4$ sajátos esetekből $c_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$ és $c_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ adódik. Tehát

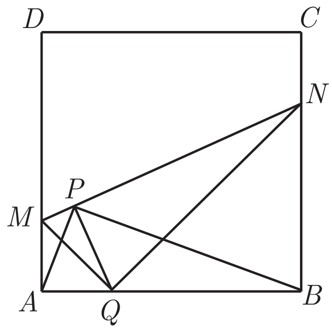
$$x_n = \frac{2}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \forall n \geq 2.$$

$\circledast$

4. Feladat. Az $ABCD$ négyzetben M az (AD) oldal egy változó pontja és N a (BC) oldal azon pontja, amelyre $AM = CN$. Legyen $P \in (MN)$ úgy, hogy $\dfrac{MP}{PN} = \left(\dfrac{AM}{MD}\right)^2$. Igazold, hogy $AP \perp PB$ és határozd meg a P pont mértani helyét!

Csapó Hajnalka, Csíkszereda

Első megoldás. Legyen $Q \in (AB)$ úgy, hogy $AQ = AM$. Ekkor AQM és BQN egyenlő szárú derékszögű háromszögek, tehát $m(\widehat{MQN}) = 90°$. $\dfrac{MP}{PN} = \left(\dfrac{MQ}{QN}\right)^2$, tehát QP magasság az MQN háromszögben. Az $AMPQ$ és $BNPQ$ négyszögek húrnégyszögek, így $m(\widehat{APQ}) = m(\widehat{AMQ}) = 45°$ és $m(\widehat{BPQ}) = m(\widehat{BNQ}) = 45°$. Tehát $m(\widehat{APB}) = 90°$. Ez azt jelenti, hogy a PAB háromszög mindig derékszögű, vagyis a P pont azt az AB átmérőjű félkört futja be, mely a négyzet belsejében van.



⊛

Második megoldás. Vegyünk fel egy derékszögű koordináta-rendszert, amelynek kezdőpontja az AB szakasz O felezőpontja, tengelyei az AB egyenes és az erre merőleges egyenes, egysége az OB, ekkor a négyzet csúcsainak koordinátái $A(-1,0), B(1,0), C(1,2)$ és $D(-1,2)$. Ha $AM = CN = x \in (0,2)$, akkor az M, illetve N pontok koordinátái $M(-1,x)$ és $N(1,2-x)$. Mivel $\frac{MP}{PN} = \left(\frac{AM}{MD}\right)^2 = \frac{x^2}{(2-x)^2}$, a P pont koordinátái

$$x_P = \frac{x^2 \cdot x_N + (2-x)^2 \cdot x_M}{x^2 + (2-x)^2} = \frac{x^2 - (2-x)^2}{x^2 + (2-x)^2}$$

és

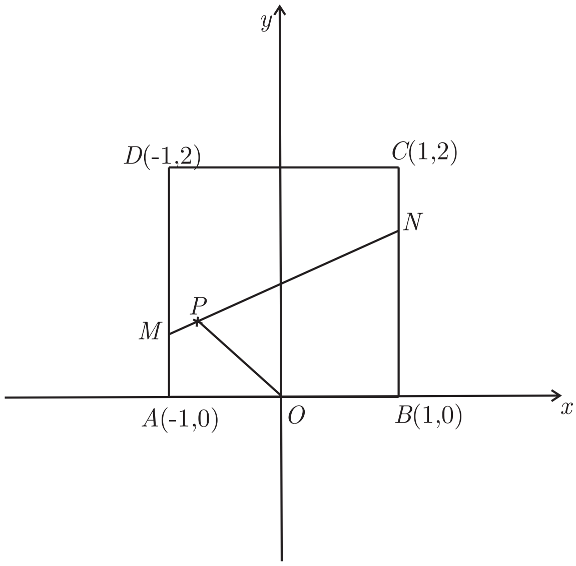
$$y_P = \frac{x^2 \cdot y_N + (2-x)^2 \cdot y_M}{x^2 + (2-x)^2} = \frac{x^2(2-x) + x(2-x)^2}{x^2 + (2-x)^2}$$

$$= \frac{2x(2-x)}{x^2 + (2-x)^2}$$

$$OP^2 = x_P^2 + y_P^2 = \frac{\left(x^2 - (2-x)^2\right)^2 + 4x^2(2-x)^2}{\left(x^2 + (2-x)^2\right)^2} =$$

$$= \frac{x^4 + (2-x)^4 + 2x^2(2-x)^2}{\left(x^2 + (2-x)^2\right)^2} = 1.$$

Tehát $OP = OA = OB$, azaz a P pont az AB átmérőjű körön van, így $m(APB\sphericalangle) = 90°$.



Az $f : (0,2) \to (-1,1), f(x) = \frac{x^2-(2-x)^2}{x^2+(2-x)^2}$ függvény folytonos és $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1, \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$, tehát szürjektív, $\frac{2x(2-x)}{x^2+(2-x)^2} > 0$, így a P pont végigfutja azt az AB átmérőjű félkört, amely a négyzet belsejében van. $\circledast$

Harmadik megoldás. A feladat feltételei alapján, ha $\frac{AM}{AD} = k$, akkor $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AD}$,

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + (1-k)\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + (1-k)\overrightarrow{AD},$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{k^2\overrightarrow{AN} + (1-k)^2\overrightarrow{AM}}{k^2+(1-k)^2} = \frac{k^2\overrightarrow{AB} + k(1-k)\overrightarrow{AD}}{k^2+(1-k)^2},$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}\right) =$$

$$= \frac{k^2\overrightarrow{AB} + k(1-k)\overrightarrow{AD}}{k^2+(1-k)^2} \cdot \frac{k(1-k)\overrightarrow{AD} - (1-k)^2\overrightarrow{AB}+}{k^2+(1-k)^2} =$$

$$= \frac{AD^2 - AB^2 + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\left(k^3(1-k) - k(1-k)^3\right)}{\left(k^2+(1-k)^2\right)^2} = 0.$$

Felhasználtuk, hogy $AB = AD$ és $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$, mert $AB \perp AD$. Tehát $AP \perp BP$. ⊛

Negyedik megoldás. Jelöljük az ábécé kis betűivel a pontok affixumait.
Ekkor $(b-a)i = d-a = c-b$, tehát $d = a(1-i)+bi$ és $c = -ai+b(1+i)$. Ugyanakkor $m = kd+(1-k)a = a(1-ki)+bki$, $n = kb+(1-k)c = a(k-1)i+b(1-ik+i)$ és

$$p = \frac{k^2n+(1-k)^2m}{k^2+(1-k)^2} =$$

$$= \frac{a\left((1-k)^2 - k(1-k)i\right) + b\left(k^2+k(1-k)i\right)}{k^2+(1-k)^2}$$

$$p - a = \frac{a\left(-k^2 - k(1-k)i\right) + b\left(k^2+k(1-k)i\right)}{k^2+(1-k)^2} =$$

$$= \frac{k\left(k+(1-k)i\right)(b-a)}{k^2+(1-k)^2},$$

$$p - b = \frac{a\left((1-k)^2 - k(1-k)i\right) + b\left(-(1-k)^2+k(1-k)i\right)}{k^2+(1-k)^2} =$$

$$= \frac{(1-k)\left(-(1-k)+ki\right)(b-a)}{k^2+(1-k)^2} =$$

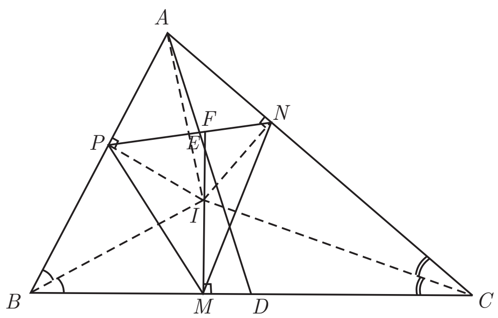
$$= \frac{(1-k)i\left(i(1-k)+k\right)(b-a)}{k^2+(1-k)^2}.$$

Tehát $\frac{p-b}{p-a} = \frac{1-k}{k}i \in \mathbb{R}i$, következik, hogy $AP \perp PB$. ⊛

5. Feladat. Az ABC háromszögben jelölje M, N és P a beírt körnek az érintési pontjait a BC, CA illetve AB oldalon. Igazold, hogy ha D a BC oldal felezőpontja és $AD \cap NP = \{E\}$, akkor $ME \perp BC$.

Dávid Géza, Székelyudvarhely

Megoldás. Legyen I a háromszögbe írt kör középpontja. A bizonyítást úgy végezzük el, hogy igazoljuk, hogy az AD és az MI egyenesek a PN szakaszt ugyanabban a pontban metszik. Legyen $AD \cap PN = \{E\}$ és $MI \cap PN = \{F\}$. Igazolni fogjuk, hogy $\frac{PE}{EN} = \frac{PF}{FN}$.



$$\frac{PE}{EN} = \frac{T_{APE_\triangle}}{T_{ANE_\triangle}} = \frac{\frac{AE \cdot AP \cdot \sin \widehat{PAD}}{2}}{\frac{AE \cdot AN \cdot \sin \widehat{DAC}}{2}} = \frac{\sin \widehat{PAD}}{\sin \widehat{DAC}} = \frac{\frac{2 \cdot T_{ABD_\triangle}}{AB \cdot AD}}{\frac{2 \cdot T_{ACD_\triangle}}{AC \cdot AD}} = \frac{AC}{AB},$$

tehát $\frac{PE}{EN} = \frac{AC}{AB}$. Ugyanakkor

$$\frac{PF}{FN} = \frac{T_{MPF_\triangle}}{T_{MNF_\triangle}} = \frac{\frac{MP \cdot MF \cdot \sin \widehat{PMF}}{2}}{\frac{MN \cdot MF \cdot \sin \widehat{NMF}}{2}} = \frac{MP \cdot \sin \frac{\widehat{B}}{2}}{MN \cdot \sin \frac{\widehat{C}}{2}},$$

mert $MIPB$ négyszög körbeírható, ezért $m(\widehat{IMP}) = m(\widehat{IBP})$, és hasonlóan $MINC$ négyszög is körbeírható, így $m(\widehat{IMN}) =$

$m(\widehat{NCI})$. Továbbá tudjuk, hogy $BM = BP$ és $CM = CN$, tehát $MP = 2BM \sin \frac{\widehat{B}}{2}$ és $MN = 2CM \sin \frac{\widehat{C}}{2}$, ahonnan kapjuk, hogy

$$\frac{PF}{FN} = \frac{2BM \sin^2 \frac{\widehat{B}}{2}}{2CM \sin^2 \frac{\widehat{C}}{2}} = \frac{2r\mathrm{ctg}\frac{\widehat{B}}{2} \sin^2 \frac{\widehat{B}}{2}}{2r\mathrm{ctg}\frac{\widehat{C}}{2} \sin^2 \frac{\widehat{C}}{2}} = \frac{\sin \widehat{B}}{\sin \widehat{C}} = \frac{AC}{AB}$$

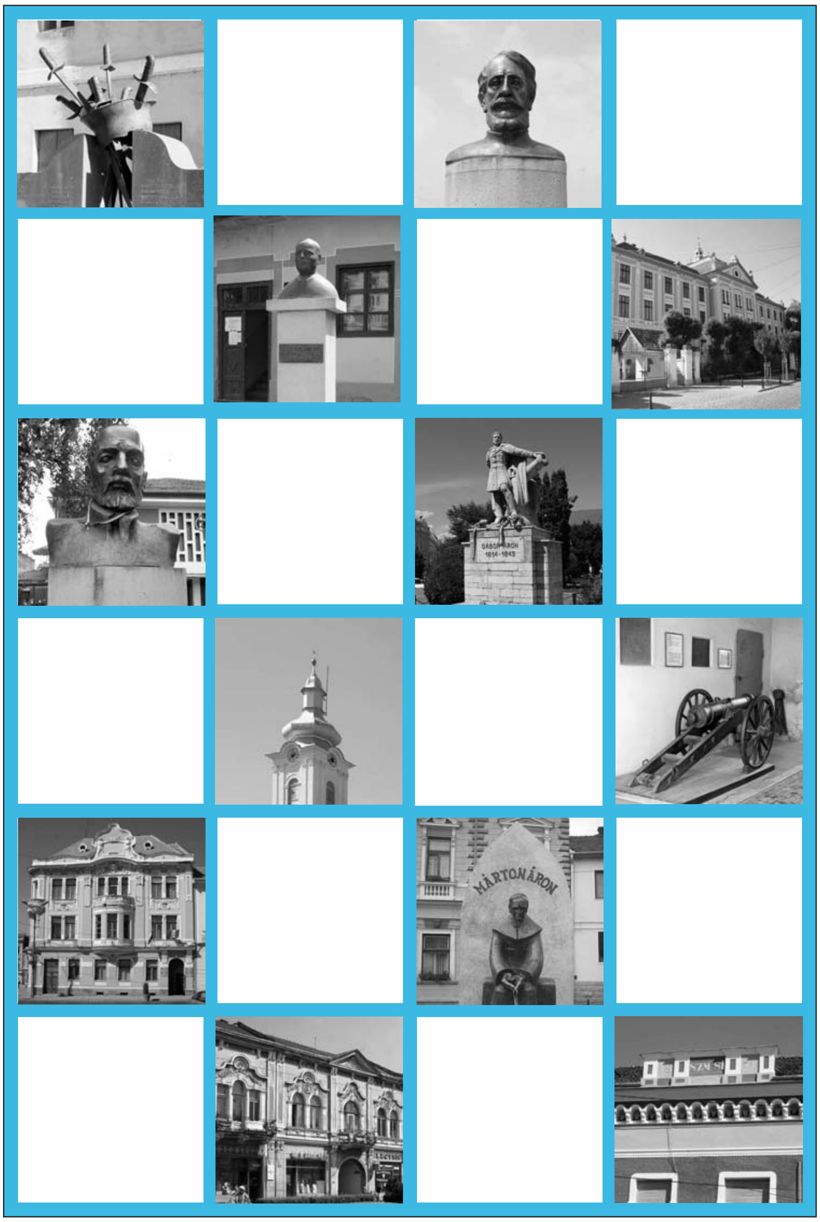
⊛

6. Feladat. Határozd meg a legkisebb $m \in \mathbb{N}^*$ természetes számot, amelyre igaz a következő állítás:
Bármely m darab egymást követő nem nulla természetes szám közt van olyan, amelynek a valódi osztóit összeadva az eredmény nem kisebb a szám $\frac{4}{3}$-ánál.

Demeter Albert, András Szilárd, Kolozsvár

Megoldás. Jelölje $f(n)$ az $n \geq 1$ szám valódi osztóinak összegét ($f(1) = 0$ és ha n prím, akkor $f(n) = 0$). Rendre kiszámítva $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $\ldots$ értékeit, azt találjuk, hogy $f(k) < \frac{4}{3} \cdot k$, $\forall k \in \{1, 2, 3, \ldots, 23\}$ és $f(24) = 2+3+4+6+8+12 = 35 \geq \frac{4}{3} \cdot 24$. Tehát van olyan 23 darab egymást követő nem nulla természetes szám (nevezetesen az $1, 2, \ldots, 23$), amelyek közt nincs olyan, amelynek a valódi osztóit összeadva az eredmény nem kisebb a szám $\frac{4}{3}$-ánál, ezért m legalább 24 kell legyen.
Kimutatjuk, hogy $m = 24$ megoldás. 24 egymást követő nem nulla természetes szám közt biztos van egy 24-gyel osztható. Legyen ez $n = 24k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Ekkor n valódi osztói közt szerepel $2k, 3k, 4k, 6k, 8k, 12k$, így $f(n) \geq 2k + 3k + 4k + 6k + 8k + 12k = 35k \geq \frac{4}{3} \cdot n$. Tehát $m = 24$ a legkisebb ilyen szám. ⊛

A versenyfüzet megjelenését támogatta a
SimpleX Egyesület és a Státus Kiadó.


MÁRTON ÁRON