Előszó

A zene az érzelem matematikája,
a matematika az értelem zenéje
Sylvester J.J.

Az Erdélyi Magyar Matematikaverseny az 1990-1991-es tanévben indult Brassóból, évi többfordulós vándorversenyként, és ma ünnepli a 18-adik születésnapját. Az EMMV évek alatt strukturálódott, intézményesedett, elérve a Tanügyminisztérium hivatalos elismerését is. Így a versenyző diákok által kiérdemelt oklevelek bármely egyetem felvételi pontrendszerébe beleszámítanak. Ezt eddig csak a Babeş-Bolyai Tudományegyetem Matematika és Informatika Karán alkalmazták. Az EMMV a felkészítés és a matematika körök többletét vállaló tanárok számára is hivatalos pontokat jelent.

Az EMMV fő vonulatát számos hozzáépült verseny gazdagítja, így a Wildt József-, a Székely Mikó-, a Márton Áron-, a Bolyai János-, a Radó Ferenc-, a Neumann János-, a Benkő József versenyek. Ezeket különböző városok, a lehetőségekhez mérten szervezik. Évekig a Székely Mikó verseny fixpontként működött, így az EMMV a Nemzetközi Magyar Matematikaverseny erdélyi válogató versenyévé vált. Az EMMV hazai és nemzetközi szerepe indokolttá tette a két írásbeli próba bevezetését.

A matematika mindamellett, hogy önismereti elmélyülést ad, hozzájárul az Univerzum törvényeinek a megismeréséhez. Ami fent, az lent, ami kint, az bent koordináta-rendszerében, szabad akaratának csillagpályáján évente több mint kétszáz diák méri össze tudását e versenyen. Az EMMV egyben kommunikációs fórum a diákoknak, és a tanároknak a vándorgyűlés szerepét is betölti.

Köszönet a Tamási Áron Gimnázium vezetőségének, tanári karának, Székelyudvarhelynek, a támogatóknak, a szülőknek, hogy az idén is egy rangos rendezvényen vehettünk részt.

Bencze Mihály

IX. osztály

1. Határozd meg a p prímszámot, ha tudjuk, hogy $p^4 - 6$ is prímszám!

András Szilárd, Kolozsvár

2. Milyen alapú számrendszerben lehet igaz a $33^2 = 2013$ egyenlőség? Lehet-e 2008 négyzetszám valamilyen alapú számrendszerben?

Kovács Béla, Szatmárnémeti

3. Hányféleképpen lehet lefedni egy 4×12-es táblát 1×4-es téglalapokkal?

Csapó Hajnalka, Csíkszereda

4. Az $ABCDE$ önmagát nem metsző töröttvonal minden csúcsa illeszkedik egy adott körre. Az ABC, BCD és CDE szögek mind 45°-osak. Bizonyítsd be, hogy $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DE^2$!

***

5. Az $ABCD$ trapéz AB nagyalapján felveszünk egy tetszőleges M pontot, melyen át meghúzzuk a BD-vel, illetve AC-vel párhuzamos ME és MF egyeneseket ($E \in (AD)$, $F \in (BC)$). Az EF egyenes AC-t és BD-t G-ben illetve H-ban metszi. Legyen O a trapéz átlóinak metszéspontja és $OM \cap CD = \{R\}$. Bizonyítsd be, hogy $MFRE$ paralelogramma és az OM felezi a (GH) szakaszt!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

6. a) Igazold, hogy $|x-a| + |x-b| \geq |a-b|$, bármely a, b és x valós számok esetén!

b) Oldd meg a $|x-1| + |x-2| + |x-3| + \ldots + |x-2n| = n^2$ egyenletet a valós számok halmazában, ahol $n \in \mathbb{N}^*$!

Dávid Géza, Székelyudvarhely

X. osztály

1. Oldd meg az $x^4 + y^4 = 2008^z + 3$ egyenletet az egész számok halmazában!

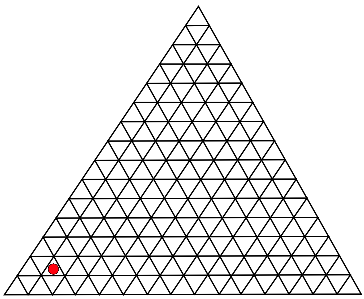
Farkas Csaba, Kolozsvár

2. Hányféleképpen lehet kitölteni egy $n \times n$-es táblázatot egész számokkal úgy, hogy az elemek szorzata minden sorban és minden oszlopban $+6$ vagy -6 legyen?

***

3. Egy háromszög minden oldalát n egyenlő részre osztjuk, és a megfelelő osztópontokat összekötjük (lásd a mellékelt ábrát). Az így keletkezett tábla egyik mezejére egy bábút helyezünk és lépésnek tekintjük, ha a bábút áthelyezzük valamelyik oldalszomszédos háromszögre. Legfeljebb hány lépést tehet meg a bábú, ha minden mezőre csak egyszer léphet, és a bábú kezdeti helyzetét megválaszthatjuk?

Csapó Hajnalka, András Szilárd



4. Az ABC háromszögben AB^2, BC^2 és CA^2 számtani haladványt alkotnak (ebben a sorrendben). Igazold, hogy a háromszög G súlypontjának a BC oldalra vonatkoztatott szimmetrikusa rajta van a háromszög köré írt körön!

Bencze Mihály, Brassó

5. Az *ABC* háromszögben $AB = 6$, $AC = 7$, $BC = 8$, G a háromszög súlypontja és I a háromszögbe beírt kör középpontja. Számítsd ki a BIG háromszög területét!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

6. Igazold, hogy ha $n \in \mathbb{N}^*$ és $x_k > 0, y_k > 0, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ valós számok, akkor

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^3}{y_k^2} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^3}{\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)^2} !$$

Bencze Mihály, Brassó

XI. és XII. osztály

1. Legyen $E = a \cdot 11^{2n-1} + b \cdot 7^{2k-1} - 5$, ahol a, b, n, k nullától különböző természetes számok. Bizonyítsd be, hogy E akkor és csak akkor osztható 24-gyel bármely $n, k \in \mathbb{N}^*$ esetén, ha $7a + 11b - 1$ osztható 24-gyel!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

2. Az $A_1A_2...A_{2008}$ sokszög kerülete 2839. Igazold, hogy létezik olyan 1-nél kisebb területű háromszög, amelynek a csúcsai a sokszög egymásutáni csúcsai!

Bencze Mihály, Brassó

3. Egy táblára felírjuk az első 2008 pozitív természetes szám inverzét. Egy lépésben letörölünk kettőt, a-t és b-t, és helyettük felírjuk az $a + b + ab$ számot. Az eljárást addig ismételjük, amíg a táblán egy szám marad. Lehet-e ez a 2008?

Dávid Géza, Székelyudvarhely

4. Határozd meg azoknak az M pontoknak a mértani helyét, amelyekre az MA, MB és MC szakaszokkal derékszögű háromszög szerkeszthető, ha ABC egyenlő oldalú háromszög!

***

5. Az $ABCD$ négyszögben $m\left(\widehat{BAD}\right) = 130^\circ$, $m\left(\widehat{ADC}\right) = 70^\circ$, $m\left(\widehat{DCB}\right) = 80^\circ$ és $\left[AB\right] \equiv \left[BC\right]$. Számítsd ki a $\widehat{BDA}$ mértékét!

András Szilárd, Kolozsvár

6. Igazold, hogy minden n természetes szám előállítható $n = a^2 - b^2 - c^2 + d^2$ alakban, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ páronként különbözők.

Dávid Géza, András Szilárd

IX. osztály

1. Oldd meg az

$$\left[x\right]-\left[\frac{x}{2008}\right]=2008$$

egyenletet a valós számok halmazán, ahol $\left[a\right]$ az $a\in\mathbb{R}$ egész részét jelöli.

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

2. Tekintsük az $A=\left\{1,2,3,\ldots,n^2\right\}$ halmazt, ahol $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$.

Jelöljük S_n-nel azoknak az A-ból kiválasztható háromtagú szigorúan növekvő mértani haladványoknak a számát, amelyeknek az állandó hányadosa is egész. Igazold, hogy

$$\frac{n^2-4n+6}{2}<S_n<n^2.$$

Dávid Géza, Székelyudvarhely

3. Legyen $ABCD$ egy trapéz, amelyben $AB\parallel CD$, $AB=a$, $CD=b$, O az átlók metszéspontja, E és F a trapéz alapjainak felezőpontja. Bizonyítsd be, hogy

a) ha M egy tetszőleges pont, akkor

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}+\frac{a-b}{a+b}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}\right);$$

b) ha az M pont esetén $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$, akkor M, E és F kollineáris pontok.

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

4. ABC olyan háromszög, amelyben az O, I, H pontok is háromszöget alkotnak (O a háromszög köré írt kör középpontja, I a beírt kör középpontja, H a magasságpont). Legyen G és G_1 az ABC illetve OIH háromszög súlypontja. Igazold, hogy $OI=3\cdot GG_1$.

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

X. osztály

1. Oldd meg a

$$2^{[\log_2 x]} = x^2 - x$$

egyenletet, ahol $\left[a\right]$ az $a \in \mathbb{R}$ egész részét jelöli.

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

2. Igazold, hogy ha $1 < a_k \le x_k \le b_k$, $k \in \left\{1, 2, \ldots, n\right\}$, akkor

$$\begin{aligned}&\log_{x_1}((a_2 + b_2)x_2 - a_2 b_2) + \log_{x_2}((a_3 + b_3)x_3 - a_3 b_3) + \ldots\\&\ldots + \log_{x_n}((a_1 + b_1)x_1 - a_1 b_1) \ge 2n\end{aligned}$$

Bencze Mihály, Brassó

3. Bizonyítsd be, hogy ha $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, $\left|z\right| = 1$ és $\operatorname{Im}\left(z\right) > 0$, akkor

$$\left(\frac{\left|z+1\right| + \left|z-1\right|}{\left|z+i\right|}\right)^2 + \left(\frac{\left|z+1\right| - \left|z-1\right|}{\left|z-i\right|}\right)^2 = 4\,.$$

Bencze Mihály, Brassó

4. Egy konvex hatszög oldalaira kívül szabályos háromszögeket szerkesztünk. Tudva, hogy a háromszögek harmadik, kívül eső csúcsai egy szabályos hatszöget alkotnak, igazold, hogy az eredeti hatszög szembenfekvő oldalai párhuzamosak és egyenlőek! Szabályos-e az eredeti hatszög?

Dávid Géza, Székelyudvarhely

XI. osztály

1. A $P \in \mathbb{R}[X]$ polinom rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n} \left(k^5 - 5k^3 + 4k\right),$$

minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

a) Igazold, hogy $P(n)$ osztható 120-szal minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

b) Számítsd ki $P(-3)$ értékét!

Mikó Ágnes, Sepsiszentgyörgy

2. Igazold, hogy ha az $A, B \in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ mátrixokra $AB + BA = O_n$, ahol O_n az n-ed rendű zérusmárix, akkor

$$\left(\det\left(A+B\right)\right)^2 + \left(\det\left(A-B\right)\right)^2 = 2\det\left(A^2 + B^2\right).$$

Bencze Mihály, Brassó

3. Az $A = \left(a_{ij}\right) \in M_k(\mathbb{R})$ mátrixban $a_{ij} = i - j$, bármely $i, j \in \left\{1, 2, \ldots, k\right\}$ esetén. A mátrix elemeiből tetszőlegesen kiválasztunk k olyan számot, amelyek különböző sorokban és oszlopokban vannak. Jelöljük azokat α_1, α_2, ..., α_k -val. Számítsd ki:

a) a $\det(A)$ értékét;

b) a $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \sqrt{n^2 + \alpha_i \cdot n}\right)$ határértéket.

Longáver Lajos, Nagybánya

4. Az $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ sorozat tagjaira $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_2 = 2$ és $a_{n+1} = \sqrt[n+1]{\dfrac{a_n^{2n}}{a_{n-1}^{n-1}}}$, $\forall n \geq 2$. Igazold, hogy a sorozat konvergens, és számítsd ki a határértékét.

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

XII. osztály

1. Az $f, g : [a,b] \to [a,b]$ folytonos függvényekre $f \circ g = g \circ f$. Igazold, hogy létezik olyan $x_0 \in [a,b]$, amelyre $f(x_0) = g(x_0)$.

Farkas Csaba, Kolozsvár

2. Adjál példát öt elemű, kommutatív monoidra tudva azt, hogy a szorzótábla belsejében a monoid elemei rendre 1-szer, 3-szor, 3-szor, 4-szer illetve 14-szer szerepelnek!

Szöllősy György, Máramarossziget

3. Hány megoldása van a $2x^2 + 8xy - y^2 = 1$ egyenletnek

a) az egész számok halmazában?

b) a racionális számok halmazában?

Kovács Béla, Szatmárnémeti

4. Az $\left(x_n\right)_{n\geq 0}$ valós számsorozat teljesíti az

$$x_{n+1} = \frac{\left(2n-1\right)x_n - \left(2n+1\right)}{\left(2n+1\right)x_n - \left(2n+3\right)},\ n \geq 0$$

rekurziót és $x_0 = -1$.

a) Határozd meg a sorozat általános tagjának képletét!

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{2}\left(1 - x_n\right)\right)$ határértéket.

András Szilárd, Kolozsvár

IX. osztály

1. Ha p osztható 5-tel, akkor csak a $p = 5$ eset lehetséges és ez jó is, mert $5^4 - 6 = 619$ prímszám. Ha p nem osztható 5-tel, akkor $p = 5M + k$, ahol $k \in \{\pm 1, \pm 2\}$, és így p^2-nek az 5-tel való osztási maradéka 1 vagy 4, tehát p^4-nek az 5-tel való osztási maradéka 1. Ez alapján $p^4 - 6$ osztható 5-tel és mivel a 11 nem teljes negyedik hatvány, ebben az esetben $p^4 - 6$ nem lehet prímszám. Tehát az egyetlen megoldás $p = 5$.

2. Ha x a számrendszer alapszáma, akkor az csak 3-nál nagyobb természetes szám lehet, és az adott egyenlőség alapján:

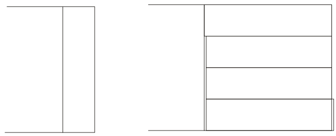
$$\left(3x+3\right)^2 = 2x^3 + x + 3 \Leftrightarrow 2x^3 - 9x^2 - 17x - 6 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(2x+1\right)\left(x-6\right) = 0\,.$$

Ebből következik, hogy az egyetlen megfelelő megoldás a 6, tehát 6-os alapú számrendszerben igaz az adott egyenlőség.

Vizsgáljuk 2008-at valamilyen x alapú számrendszerben. A $2x^3 + 8 = y^2$ egyenletet kell megoldani a természetes számok halmazában, és a megoldás, ha van, akkor 9-nél nagyobb kell legyen. A felírt egyenlet bal oldala páros, ezért a jobb oldal is páros kell legyen, tehát $y = 2p$, $p \in \mathbb{N}$. Így $x^3 + 4 = 2p^2$, tehát x is páros. Az $x = 2q$, $q \in \mathbb{N}$ jelöléssel $4q^3 + 2 = p^2$, tehát p is páros. Így $p = 2r$, ahol $r \in \mathbb{N}$, tehát $2q^3 + 1 = 2r^2$. Mivel a jobb oldal páros és a bal oldal páratlan, az egyenletnek nincs megoldása.

Megjegyzés. A $33 \cdot 33$ szorzat utolsó számjegye (tetszőleges számrendszerben) a $3 \cdot 3$ szorzat utolsó számjegyéből adódik. Ez csak akkor lehet 3-as, ha a számrendszer alapja 6. Ellenőrizhető, hogy $33_{(6)} \cdot 33_{(6)} = 2013_{(6)}$.

3. A lefedés „jobb széle” az alábbi ábrák valamelyike lehet



Ha a_n -nel jelöljük a $4 \times n$ -es tábla lefedéseinek számát, akkor $a_n = a_{n-1} + a_{n-4}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$ és $a_4 = 2$. Tehát

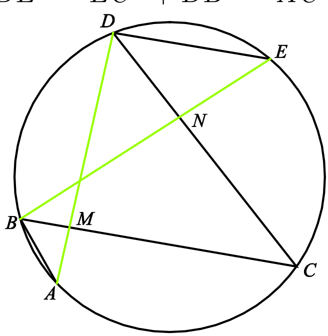
$$a_{12} = a_{11} + a_8 = a_{10} + 2a_7 + a_4 = a_9 + 3a_6 + 4 =$$
$$= a_8 + 4a_5 + 7 = a_7 + 5a_4 + 11 =$$
$$= a_6 + 22 = a_5 + 23 = a_4 + 24 = 26 .$$

4. A feltételek alapján (a mellékelt ábra jelöléseit használva) $AB \parallel CD$ és $BC \parallel DE$, valamint az $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{BD}$ és $\overset{\frown}{CE}$ körívek mértéke $90°$. Így $AD \perp BC$ és $BE \perp CD$. Ha az AMB, BMD, DMC és CMA háromszögekben felírjuk Pitagorász tételét, akkor kapjuk, hogy

$$AB^2 + CD^2 = \left(AM^2 + BM^2\right) + \left(MC^2 + MD^2\right) =$$
$$= \left(AM^2 + MC^2\right) + \left(BM^2 + MD^2\right) = AC^2 + DB^2 .$$

Hasonló módon kapjuk, hogy

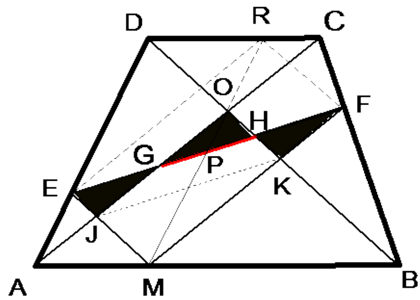
$$BC^2 + DE^2 = EC^2 + DB^2 = AC^2 + DB^2 .$$



5. Legyen $OM \cap EF = \{P\}$, $ME \cap AC = \{J\}$ és $MF \cap BD = \{K\}$.

$OMB_\Delta \sim ORD_\Delta$, tehát $\frac{OM}{OR} = \frac{OB}{OD}$ és a sugársor párhuzamosokkal való metszési tételéből következik, hogy $\frac{OB}{OD} = \frac{JM}{JE}$. Így $\frac{OM}{OR} = \frac{JM}{JE}$, tehát $ER \parallel JO \parallel MF$ vagyis $ER \parallel MF$.

Ehhez hasonlóan bizonyítjuk, hogy $RF \parallel OK \parallel EM$, tehát $MFRE$ paralelogramma.
A hasonlóság alaptétele, a Thalész tétele és annak fordított tétele segítségével írhatjuk, hogy



$$EGJ_\Delta \sim HGO_\Delta \Rightarrow \frac{EG}{HG} = \frac{GJ}{GO} \qquad (1)$$

$$HFK_\Delta \sim HGO_\Delta \Rightarrow \frac{HF}{HG} = \frac{HK}{HO} \qquad (2)$$

$$\frac{EJ}{JM} = \frac{DO}{OB} = \frac{CO}{OA} = \frac{FK}{KM} \Rightarrow JK \parallel EF \Rightarrow OKJ_\Delta\text{-ben}$$

$$GH \parallel JK \Rightarrow \frac{GJ}{GO} = \frac{HK}{HO} \qquad (3).$$

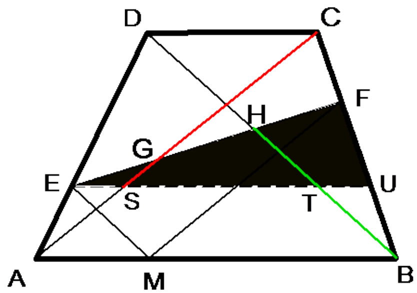
(1), (2), (3) –ból következik $\frac{EG}{HG} = \frac{HF}{HG}$, ahonnan kapjuk, hogy $EG = HF$.

Az $MFRE$ paralelogramma átlóinak metszéspontja P, tehát $EP = PF$ és mivel $EG = HF$, ezért

$$GP = EP - EG = PF - HF = PH,$$

vagyis P a (GH) felezőpontja.

Megjegyzés. Vázoljuk az $EG = HF$ egy másik bizonyítását is. Az ADB és ABC háromszögekben az átlókkal húzott párhuzamosokra alkalmazzuk Thalész tételét:



$$\frac{EA}{ED} = \frac{MA}{MB}; \qquad \frac{FC}{FB} = \frac{MA}{MB} \Rightarrow$$

$$\frac{EA}{ED} = \frac{FC}{FB}.$$

Felvesszük az $U \in (BC)$ pontot úgy, hogy $UB = FC$ és innen következik, hogy

$$\frac{UB}{UC} = \frac{FC}{FB} = \frac{EA}{ED} = \frac{p}{q}.$$

Legyen S, T az EU metszéspontja AC illetve BD-vel és legyen $T_1 \in (BD)$ úgy, hogy $\frac{T_1B}{T_1D} = \frac{p}{q}$, ekkor Thalész fordított tételéből következik $ET_1 \parallel AB$, $T_1U \parallel CD$ és mivel $AB \parallel CD$ következik, hogy E, T_1, U egy egyenesen helyezkednek el és így $T_1 = T$ és $EU \parallel AB$.

Mivel $EU \parallel AB$, a hasonlóság alaptétele értelmében: $\frac{ES}{DC} = \frac{EA}{AD} = \frac{UB}{BC} = \frac{TU}{DC}$ és így *ES*=*TU*. Az EFU háromszögben alkalmazzuk Menelaosz tételét előbb a B, T, H majd a C, G, S szelőkre és mivel az $UB = FC$ és $ES = TU$, következik, hogy $\frac{BU}{BF} = \frac{CF}{CU}$ és $\frac{TE}{TU} = \frac{SU}{SF}$. Így $\frac{HF}{HE} = \frac{GE}{GF}$, ahonnan következik, hogy $EG = HF$.

6. a) $\left|x-a\right|+\left|x-b\right|=\left|x-a\right|+\left|b-x\right|\geq\left|(x-a)+(b-x)\right|=\left|a-b\right|$

Egyenlőség akkor és csakis akkor van, ha $(x-a)$ és $(b-x)$ azonos előjelűek, vagyis ha az x az a és a b közt van.

b) A $\left|x-a\right|+\left|x-b\right|\geq\left|b-a\right|$ egyenlőtlenséget használjuk az

$$(a,b)\in\{(1,2n),(2,2n-1),...(n,n+1)\}$$

számpárokra, majd az egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összeadjuk. A bal oldalon az egyenletben szereplő összeg jelenik meg, a jobb oldalon pedig $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$. Mivel a felhasznált egyenlőtlenségben pontosan akkor van egyenlőség, ha x az a és a b közt van, a

$$\left|x-1\right|+\left|x-2\right|+\left|x-3\right|+\ldots+\left|x-(2n-1)\right|+\left|x-2n\right|\geq n^2$$

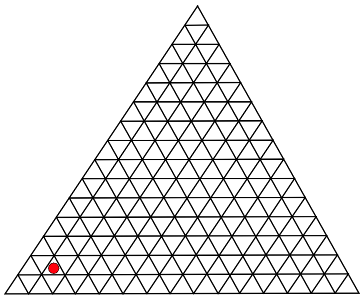
egyenlőtlenségben egyenlőség csakis akkor állhat fenn, ha $x\in[n,n+1]$.

X. osztály

1. Egy egész szám negyedik hatványának 8-cal való osztási maradéka 0 vagy 1, tehát a bal oldal 8-cal való osztási maradéka 0, 1 vagy 2. Ha $z<0$, akkor a bal oldal egész szám, a jobb oldal pedig nem, tehát ebben az esetben az egyenletnek nincs megoldása. Ha $z=0$, akkor a baloldal 4, tehát nem lehet egyenlő egy olyan számmal amelynek a 8-cal való osztási maradéka 0, 1 vagy 2. Ha $z>0$, akkor a (2008^z+3)-nak a 8-cal való osztási maradéka 3, következésképpen nem lehet egyenlő a jobb oldallal. Tehát az egyenlőség nem teljesülhet, ha $x,y,z\in\mathbb{Z}$.

2. Készítsünk három táblázatot. Egyet, amelyben az elemek szorzata minden sorban és minden oszlopban $+1$ vagy -1. Ilyen táblázat csak úgy készíthető, ha minden eleme $+1$ vagy -1, ami azt jelenti, hogy minden mezőt kétféleképpen lehet kitölteni. Mivel n^2 mező van, ezért ilyen táblázat 2^{n^2} darab készíthető. A második táblázat legyen olyan, amelynek minden sorában és minden oszlopában az elemek szorzata 2.

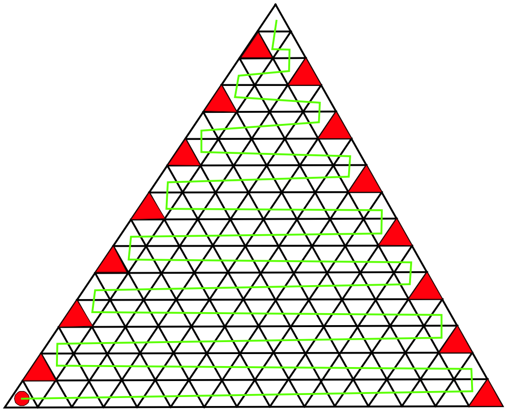
Ilyen táblázat csak úgy készíthető, ha minden sorban és oszlopban van egy 2-es és a többi elem 1-es. Az első sorban a 2-es elhelyezésére van n lehetőség, a másodikban $(n-1)$ és így tovább az utolsóban 1, tehát ilyen táblázat $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1=n!$ darab készíthető. A harmadik táblázat ugyanolyan mint a második, csak a 2-es helyett 3-sal. Ilyen is $n!$ darab készíthető. A három fajta táblázatból bárhogyan is helyezzünk egymásra egyet-egyet az egymásra eső mezők elemeit összeszorozva, egy olyan táblázatot kapunk, amelyben az elemek szorzata minden sorban és minden oszlopban $+6$ vagy -6. Ugyanakkor ha egy $n\times n$-es táblázat minden sorában és minden oszlopában az elemek szorzata $+6$ vagy -6, akkor ehhez a táblázathoz egyértelműen hozzárendelhető az előbbi három típusú táblázat, tehát a kért táblázat $2^{n^2}\cdot n!\cdot n!=2^{n^2}\cdot\left(n!\right)^2$-féleképpen tölthető ki.



3. Színezzük ki a háromszögeket két színnel (fehér és fekete) úgy, hogy bármely két oldalszomszédos háromszögnek legyen különböző színe. Minden lépésben fehérről feketére vagy feketéről fehérre léphetünk, tehát az érintett fekete és fehér mezők számának különbsége -1, 0 vagy 1. Másrészt a táblán az egyikből pontosan n darabbal van több, tehát legalább $n-1$ mező kimarad a lépéssorozatból. A mellékelt ábrán látható kígyószerű lépéssorozat alapján láthatjuk, hogy elérhető az, amikor csak $n-1$ mező marad ki, így tehát a leghosszabb lépéssorozat hossza

$$H=\frac{n\left(n+1\right)}{2}+\frac{\left(n-1\right)n}{2}-(n-1)-1=n^2-n\,.$$

Természetesen más útvonalak is léteznek, de mindegyiknél az egyik csúcsban kell kezdeni és valamelyik másikban befejezni a lépéssorozatot.



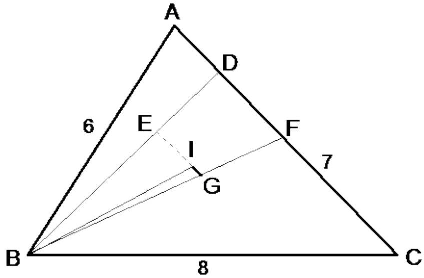
4. Legyen $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ így $c < a < b$ és $2a^2 = b^2 + c^2$. A háromszög G súlypontjának a BC oldalra vonatkoztatott szimmetrikusa akkor és csakis akkor van a háromszög köré írt körön, ha $m\left(\widehat{BGC}\right) = 180^\circ - m(\widehat{A})$.

A $BGC\triangle$-ből az oldalfelezők hosszára vonatkozó képlet, a koszinusztétel és a feltétel alapján $\cos(\widehat{BGC}) = -\dfrac{a^2}{2bc}$. Másrészt a koszinusztételből az ABC háromszögben azt kapjuk, hogy $\cos(\widehat{A}) = \dfrac{a^2}{2bc}$, tehát

$m\left(\widehat{BGC}\right) = 180^\circ - m(\widehat{A})$.

5. Az ABC háromszögben

$$\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AI} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} - \frac{7\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC}}{8+7+6} = \frac{\overrightarrow{AC}}{21}.$$



Ez azt jelenti, hogy $IG \parallel AC$ és $IG = \frac{AC}{21} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$. Legyen BD az ABC háromszög magassága ($D \in AC$) és legyen $BD \cap IG = \{E\}$, így BE a BIG háromszög magassága. F-el jelöljük az *(AC)* felezőpontját. A Heron képlettel kiszámítjuk az *ABC* háromszög területét: $T = \frac{21\sqrt{15}}{4} = \frac{AC \cdot BD}{2}$, ahonnan $BD = \frac{3\sqrt{15}}{2}$. Mivel $IG \parallel AC$, következik $\frac{BE}{BD} = \frac{BG}{BF} = \frac{2}{3}$, ahonnan $BE = \sqrt{15}$. Tehát $T_{BIG_\Delta} = \frac{IG \cdot BE}{2} = \frac{\sqrt{15}}{6}$.

Megjegyzés. A feladat általánosítható.

Ha a szokásos jelöléseket használjuk és $b = \frac{a+c}{2}$ (*c*<*b*<*a* olyan számtani haladvány, amelyben az állandó különbség $0 < r < \frac{b}{2}$, hogy a háromszög oldalai között fennálljon az egyenlőtlenség) , akkor $\overrightarrow{IG} = \frac{b-c}{3b}\overrightarrow{AC}$ vagyis az *IG* párhuzamos az *AC*-vel és az előzőekhez hasonlóan kiszámíthatjuk a *BIG* háromszög területét az *a, b, c* függvényében: $T_{BIG_\Delta} = \frac{2(b-c)T_{ABC_\Delta}}{9b}$.

6. Ha $n = 1$, akkor $\frac{x_1^3}{y_1^2} \geq \frac{x_1^3}{y_1^2}$, ami igaz.

Ha $n = 2$, akkor a kijelentés a következő alakú $\frac{x_1^3}{y_1^2} + \frac{x_2^3}{y_2^2} \geq \frac{(x_1 + x_2)^3}{(y_1 + y_2)^2}$,

ami átírható a következő alakba $(y_1 + y_2)^2 \left(\frac{x_1^3}{y_1^2} + \frac{x_2^3}{y_2^2} \right) \geq (x_1 + x_2)^3$. Ezt az egyenlőtlenséget a következőképpen igazolhatjuk:

$$(y_1 + y_2)^2 \left(\frac{x_1^3}{y_1^2} + \frac{x_2^3}{y_2^2} \right) =$$

$$= x_1^3 + \left(\frac{x_2^3 y_1^2}{y_2^2} + \frac{x_1^3 y_2}{y_1} + \frac{x_1^3 y_2}{y_1} \right) + \left(\frac{x_1^3 y_2^2}{y_1^2} + \frac{x_2^3 y_1}{y_2} + \frac{x_2^3 y_1}{y_2} \right) + x_2^3 \geq$$

$$\geq x_1^3 + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{x_2^3 y_1^2}{y_2^2} \cdot \frac{x_1^3 y_2}{y_1} \cdot \frac{x_1^3 y_2}{y_1}} + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{x_1^3 y_2^2}{y_1^2} \cdot \frac{x_2^3 y_1}{y_2} \cdot \frac{x_2^3 y_1}{y_2}} + x_2^3 = \left(x_1 + x_2\right)^3$$

.

Ezt felhasználva, feltételezzük, hogy az egyenlőtlenség igaz n-re és igazoljuk $\left(n + 1\right)$-re.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{x_k^3}{y_k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^3}{y_k^2} + \frac{x_{n+1}^3}{y_{n+1}^2} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right)^3}{\left(\sum_{k=1}^{n} y_k \right)^2} + \frac{x_{n+1}^3}{y_{n+1}^2} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k \right)^3}{\left(\sum_{k=1}^{n+1} y_k \right)^2}.$$

XI. és XII. osztály

1. E pontosan akkor osztható 24-gyel, ha $77E$ is osztható 24-gyel.

$$\begin{aligned}77\cdot E &= 7\cdot a\cdot 11^{2n}+11\cdot b\cdot 7^{2k}-385=\\ &= 7\cdot a\cdot 121^{n}+11\cdot b\cdot 49^{k}-385=\\ &= 7\cdot a\cdot\left(5\cdot 24+1\right)^{n}+11\cdot b\cdot\left(2\cdot 24+1\right)^{k}-385\end{aligned}$$

Az $\left(5\cdot 24+1\right)^{n}$ kifejtésében (Newton-féle binomképlet) az utolsó tag kivételével minden tag osztható 24-gyel, tehát

$$\left(5\cdot 24+1\right)^{n}=24\cdot k_1+1.$$

Hasonlóan $\left(2\cdot 24+1\right)^{k}=24\cdot k_2+1$, ahol $k_1,k_2\in\mathbb{N}^*$. Ezek alapján írhatjuk:

$$\begin{aligned}77\cdot E &= 7\cdot a\cdot\left(24\cdot k_1+1\right)+11\cdot b\cdot\left(24\cdot k_2+1\right)-(16\cdot 24+1)=\\ &= \left(7\cdot a\cdot k_1+11\cdot b\cdot k_2-16\right)\cdot 24+(7\cdot a+11\cdot b-1),\end{aligned}$$

ahol $\left(7\cdot a\cdot k_1+11\cdot b\cdot k_2-16\right)\in\mathbb{N}^*$ és $(7\cdot a+11\cdot b-1)\in\mathbb{N}^*$. Tehát $77E$ (és így E is) akkor és csak akkor osztható 24-gyel, ha $7a+11b-1$ osztható 24-gyel.

2. Az A_kA_{k+1} szakasz hosszát jelölje a_k, $k\in\{1,2,\dots,2008\}$ ($a_{2008}=\left|A_{2008}A_1\right|$). Feltételezzük, hogy a kívánt tulajdonságú háromszög nem létezik. Így $\dfrac{a_k+a_{k+1}}{2}\geq\sqrt{a_ka_{k+1}}\geq\sqrt{a_ka_{k+1}\sin(A_kA_{k+1}A_{k+2})}\geq\sqrt{2}$.

Ez alapján írhatjuk, hogy $2839=K=\sum\limits_{k=1}^{2008}\dfrac{a_k+a_{k+1}}{2}\geq 2008\sqrt{2}$.

Másrészt $\sqrt{2}=1,4142...>1,414>\dfrac{2839}{2008}$, tehát ellentmondáshoz jutunk. Így létezik a kért tulajdonságú háromszög.

3. Mivel $(a+b+ab)+1=(a+1)(b+1)$, ha a táblára írt számokhoz egyet hozzáadunk és az így kapott számokat összeszorozzuk, a szorzat értéke invariáns. Ez a szorzat kezdetben

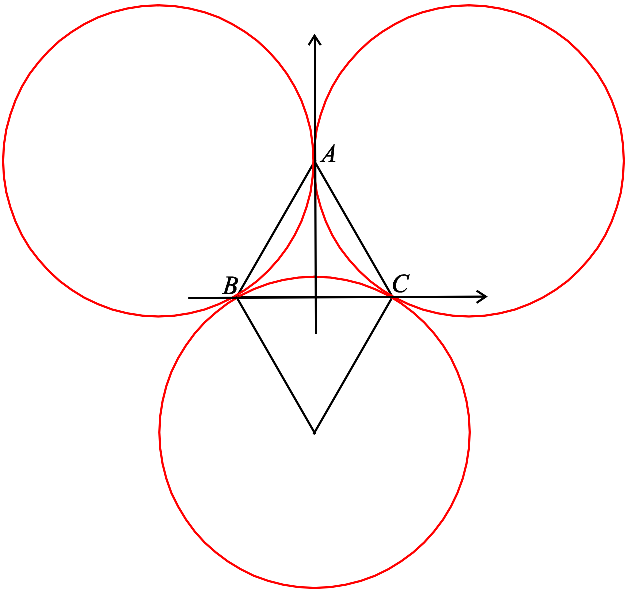
$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2008}\right)=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2009}{2008}=2009,$$

tehát akármilyen sorrendben cseréljük a számokat, a végén mindig $2009-1=2008$ marad.

4. Ha az ABC háromszög oldalhossza $2a$, akkor a BC-t Ox tengelynek választva és a felezőpontját origónak, írhatjuk, hogy

$$MA^2=x^2+\left(y-a\sqrt{3}\right)^2$$

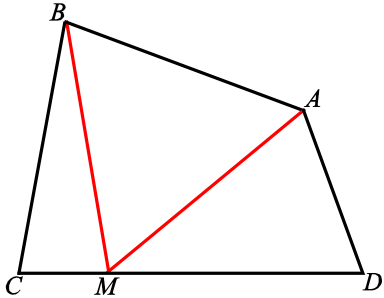
$$MB^2=(x+a)^2+y^2 \text{ és } MC^2=(x-a)^2+y^2.$$



Így az $MA^2 = MB^2 + MC^2$ egyenlőség ekvivalens az $x^2 + \left(y + a\sqrt{3}\right)^2 = 4a^2$ összefüggéssel. Ez viszont a D középpontú DB sugarú kör egyenlete, ahol D az A-nak a BC-re vonatkozó szimmetrikusa. Hasonló módon az $MB^2 = MA^2 + MC^2$ és $MC^2 = MB^2 + MA^2$ egyenlőségekből további két kört kapunk, amelyeknek középpontja a B-nek illetve C-nek a szembenfekvő oldalra vonatkozó szimmetrikusa és sugara $2a$, tehát a mértani hely a három kör egyesítése.

5. Vegyük fel a DC oldalon az M pontot úgy $m\left(\widehat{MBC}\right) = 20^\circ$. Mivel $m\left(\widehat{DCB}\right) = 80^\circ$, az MBC háromszög egyenlő szárú, tehát $[BM] \equiv [BC]$. Az ABM háromszögben $[AB] \equiv [BM]$ és $m\left(\widehat{MBA}\right) = 60^\circ$, tehát ez a háromszög egyenlő oldalú. De így $m\left(\widehat{MAD}\right) = 70^\circ$, tehát az ADM háromszög is egyenlő szárú. Így $[AM] \equiv [MD]$, tehát $[MD] \equiv [BM]$.

De $m\left(\widehat{AMD}\right) = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$ és ez alapján $m\left(\widehat{MDB}\right) = 40^\circ$, tehát $m\left(\widehat{BDA}\right) = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$.



6. A sajátos esetek vizsgálata során eljuthatunk a következő azonosságokhoz:

$$\left(n+4\right)^2+\left(n+5\right)^2-\left(n+2\right)^2-\left(n+6\right)^2=2n+1,$$

$$\left(n+8\right)^2+\left(n+4\right)^2-\left(n+9\right)^2-\left(n+1\right)^2=4n-2,$$

tehát a páratlan számok és a $4n-2$ alakú számok előállíthatók a kívánt alakban. Másrészt, ha m előállítható, akkor $4m$ is előállítható (mert mind a négy számot szorozzuk 2-vel), tehát így az $1=1^2+5^2-3^2-4^2$ felírás és a fenti két azonosság alapján tetszőleges, 0-tól különböző, 4-gyel osztható szám is előállítható a kért alakban. A $0=1^2+8^2-5^2-6^2$ előállítás mutatja, hogy $n=0$ esetén is létezik a kért előállítás, ezért a bizonyítás teljes.

Megjegyzés. Az $\left(n+4\right)^2+\left(n+1\right)^2-n^2-\left(n+3\right)^2=4n+8$ azonosság alapján is belátható a 4 többszöröseire vonatkozó rész.

IX. osztály

1. Ha $\left[\frac{x}{2008}\right]=k\in\mathbb{Z}$, akkor $2008k\le x<2008\left(k+1\right)$. Másrészt az $\left[x\right]=k+2008$ egyenlőségből $k+2008\le x<k+2009$, tehát

$$x\in\left[2008k,2008\left(k+1\right)\right)\cap\left[k+2008,k+2009\right).$$

Ez a metszet üres, ha

$$2008\left(k+1\right)\le k+2008,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow k\le 0,\ k\in\mathbb{Z}$$

vagy ha

$$k+2009\le 2008k,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow k\ge 2,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Ez azt jelenti, hogy csak a $k=1$ eset lehetséges, és ebben az esetben

$$x\in\left[2008,4016\right)\cap\left[2009,2010\right).$$

Tehát a megoldás $x\in\left[2009,2010\right)$.

2. A feltételek alapján az állandó hányados a $\{2,3,4,\dots,n\}$ halmazban kell legyen. Olyan mértani haladvány, amelynek a hányadosa 2-vel egyenlő $\left[\frac{n^2}{2^2}\right]$ választható ki, olyan amelynek a hányadosa 3-mal egyenlő $\left[\frac{n^2}{3^2}\right]$ és így tovább. Tehát $S_n=\left[\frac{n^2}{2^2}\right]+\left[\frac{n^2}{3^2}\right]+\dots+\left[\frac{n^2}{n^2}\right]$ és így azt kell igazolni, hogy

$$\frac{n^2-4n+6}{2}<\left[\frac{n^2}{2^2}\right]+\left[\frac{n^2}{3^2}\right]+\dots+\left[\frac{n^2}{n^2}\right]<n^2.$$

Felhasználva az egészrész értelmezését, azt kapjuk, hogy

$$S_n=\left[\frac{n^2}{2^2}\right]+\left[\frac{n^2}{3^2}\right]+\dots+\left[\frac{n^2}{n^2}\right]>\frac{n^2}{2^2}+\frac{n^2}{3^2}+\dots+1-n+2=$$

$$= -n + 3 + n^2 \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{(n-1)^2} \right) \geq$$

$$\geq -n + 3 + n^2 \left(\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + ... + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \right) = \frac{n^2 - 4n + 6}{2}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$S_n = \left[\frac{n^2}{2^2} \right] + \left[\frac{n^2}{3^2} \right] + ... + \left[\frac{n^2}{n^2} \right] < \frac{n^2}{2^2} + \frac{n^2}{3^2} + ... + \frac{n^2}{n^2} =$$

$$= n^2 \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} \right) <$$

$$= n^2 \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \right) < n^2.$$

3. a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} =$

$$= \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD} =$$

$$= 4\overrightarrow{MO} + \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} \right) + \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} \right) \qquad (1)$$

Az AOB és COD háromszögek hasonlósága alapján

$$\frac{OA}{OC} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{OA}{OA + OC} = \frac{a}{a+b},$$

$$\frac{OA + OC}{OC} = \frac{a+b}{b} \Rightarrow OA = \frac{a}{a+b} CA,\ OC = \frac{b}{a+b} CA.$$

Hasonlóképpen $OB = \frac{a}{a+b} DB$, $OD = \frac{b}{a+b} DB$, tehát

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \frac{a-b}{a+b} \overrightarrow{CA} \text{ és}$$

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \frac{a-b}{a+b} \overrightarrow{DB} \ (2)$$

(1)-ből és (2)-ből következik a bizonyítandó összefüggés.

b) Az (1) összefüggés alapján

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}+\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$$, ahol

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OF}$, tehát

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\left(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}\right)+4\overrightarrow{MO}$,

ezért ha $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$, akkor innen következik, hogy

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}}{2}.$$

Másrészt az O,E,F pontok kollineárisak, ezért következik, hogy M,E,F is kollineáris pontok, éspedig $M=G$ az EF felezőpontja (a trapéz súlypontja).

4. Felírjuk az *OIH* háromszög súlypontjának helyzetvektorát:

$$\overrightarrow{OG_1}=\frac{\overrightarrow{OO}+\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OI}}{3}=\frac{\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OI}}{3}$$

és felhasználjuk az Euler-egyenesen érvényes $\overrightarrow{OH}=3\cdot\overrightarrow{OG}$ összefüggést. Így az

$$\overrightarrow{OG_1}=\frac{3\cdot\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OI}}{3}=\overrightarrow{OG}+\frac{\overrightarrow{OI}}{3}$$

Egyenlőséghez jutunk, ahonnan $\overrightarrow{OG_1}-\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OI}}{3}$, tehát $\overrightarrow{GG_1}=\frac{\overrightarrow{OI}}{3}$, amiből következik, hogy $OI=3\cdot GG_1$ és $OI\parallel GG_1$.

X. osztály

1. A logaritmus létezéséhez szükséges az $x > 0$ egyenlőtlenség, és a bal oldal pozitivitása miatt a megoldások teljesítik az $x^2 - x > 0$ egyenlőtlenséget is. Így $x > 1$. Ha $[\log_2 x] = k$, akkor $k \in \mathbb{Z}$ és $k \geq 0$ valamint

$$k \leq \log_2 x < k+1 \Leftrightarrow 2^k \leq x < 2^{k+1}. \quad (1)$$

Az $x^2 - x - 2^k = 0$ egyenlet gyökei közül csak a pozitív gyök felel meg, tehát $x = \frac{1+\sqrt{1+2^{k+2}}}{2}$ és ez a gyök teljesíti az (1) összefüggést. A

$$2^k \leq \frac{1+\sqrt{1+2^{k+2}}}{2} < 2^{k+1}$$

egyenlőtlenségrendszer megoldásából és a $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$ feltételekből azt kapjuk, hogy $k = 0$ vagy $k = 1$. Így az eredeti egyenlet megoldásai

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ és } x_2 = 2.$$

2. Ha $x_k \in [a_k, b_k]$, akkor $(a_k + b_k)x_k - a_k b_k \geq x_k^2$, ahonnan azt kapjuk, hogy $\sum\limits_{ciklikus} \log_{x_1}\left((a_k + b_k)x_k - a_k b_k\right) \geq \sum\limits_{ciklikus} \log_{x_1}\left(x_2^2\right) \geq$

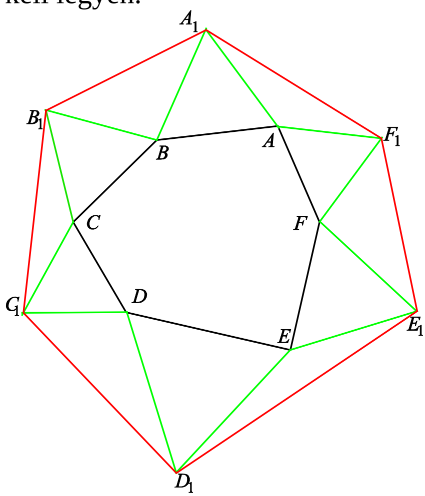
$$\geq 2\sum_{ciklikus} \log_{x_1} x_2 \geq 2n \sqrt[n]{\prod_{ciklikus} \log_{x_1} x_2} = 2n.$$

3. Legyen $z = x + iy$, ahol $x^2 + y^2 = 1$ és $y > 0$.

Számolással igazolható, hogy $\frac{|z+1| + |z-1|}{|z+i|} = \sqrt{2}$ és

$\frac{|z+1| - |z-1|}{|z-i|} = \sqrt{2}$, tehát a bizonyítandó egyenlőség igaz ($2 + 2 = 4$).

4. Helyezzük a hatszöget a komplex számsíkra. Legyenek a csúcsok affixumai az a, b, c, d, e, f komplex számok (trigonometrikus irányban a csúcsok $ABCDEF$). Legyen $\varepsilon = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Az ε-nal való szorzás egy pozitív irányú 60°-os forgatást jelent. A hatszög AB oldalára írt háromszög csúcsa legyen A_1, a BC oldalára írt hatszög csúcsa B_1 és így tovább. Ekkor azt kapjuk, hogy $a_1 = b + \varepsilon(a-b)$, $b_1 = c + \varepsilon(b-c)$, $c_1 = d + \varepsilon(c-d)$ stb. Ha az $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ hatszög szabályos és a középpontját választjuk origónak, akkor A_1-et az origó körül 60°-kal elforgatva B_1-et kapunk és így tovább. Tehát $b_1 = \varepsilon a_1$, $c_1 = \varepsilon b_1$ és így tovább. Innen kapjuk, hogy $c - \varepsilon c = \varepsilon^2(a-b)$ és $d - \varepsilon d = \varepsilon^2(b-c)$. Az ε-t kiküszöbölve azt kapjuk, hogy $d - b = 2(c-b)$ ez pedig azt jelenti, hogy AD és BC párhuzamosak és BC az AD fele. Ugyanígy felírva a többi csúcsokra is az összefüggéseket, azt kapjuk, hogy a külső hatszög szabályosságának szükséges és elégséges feltétele az, hogy az eredeti hatszög szemben fekvő oldalai egyenlők és párhuzamosak legyenek, ami nem azt jelenti, hogy a hatszög szabályos kell legyen.



XI. osztály

1. a) Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$k^5 - 5k^3 + 4k = \left(k-2\right)\left(k-1\right)k\left(k+1\right)\left(k+2\right),$$

azaz öt egymás utáni egész szám szorzata, amely osztható $5! = 120$-szal (a számok közt van egy, amely osztható 5-tel, legalább egy, amely osztható 3-mal és két páros szám, amelyek közül az egyik 4-gyel is osztható, tehát a számok szorzata osztható $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 120$-szal, vagy egyszerűen $C_{k+2}^5 = \dfrac{(k+2)(k+1)k(k-1)(k-2)}{120} \in \mathbb{N}$).

b) A $P(n) = \sum_{k=1}^{n} \left(k-2\right)\left(k-1\right)k\left(k+1\right)\left(k+2\right)$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, feltételből következik, hogy $P(1) = P(2) = 0$, $P(3) = 5! = 120$,

$$P(4) = 5! + 6! = 7 \cdot 5! = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{6},$$

$$P(5) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{6} + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6}.$$

Úgy tűnik, hogy érvényes a

$$P(n) = \frac{1}{6}\left(n-2\right)\left(n-1\right)n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)$$

összefüggés ($n \in \left\{1, 2, 3, 4, 5\right\}$ esetén biztosan igaz). Ezt a matematikai indukció módszerével igazoljuk.

$$P(n+1) = P(n) + (n-1)n(n+1)(n+2)(n+3) =$$

$$= \frac{1}{6}(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4),$$

tehát a matematikai indukció elve alapján

$P(n) = \dfrac{1}{6}\left(n-2\right)\left(n-1\right)n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

Ez az egyetlen polinom, amely teljesíti az adott feltételt, mert ha lenne még egy Q polinom is, akkor a két polinom helyettesítési értéke végtelen sok pontban (minden természetes számra) azonos lenne, és így a két polinom is azonos volna. A polinom képlete szerint

$$P(-3) = \frac{1}{6}(-5)(-4)(-3)(-2)(-1)\cdot 0 = 0\,.$$

Megjegyzések. i. Ha

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n}\left(k-p\right)\left(k-p+1\right)...k\left(k+1\right)\left(k+2\right)...(k+p), \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

akkor

$$P(n) = \frac{1}{2(p+1)}(n-p)(n-p+1)...(n-1)n(n+1)....(n+p)(n+p+1)\,,$$

ahol $p \in \mathbb{N}^*$.

ii. Írhatjuk, hogy $\frac{1}{120}P(n) = \sum_{k=1}^{n} C_{k+2}^{5} = \sum_{k=1}^{n}\left(C_{k+3}^{6} - C_{k+2}^{6}\right) = C_{n+3}^{6}$,

tehát

$$P(n) = 120\cdot C_{n+3}^{6} = \frac{\left(n+3\right)\left(n+2\right)\left(n+1\right)n\left(n-1\right)\left(n-2\right)}{6}.$$

Ez alapján következik, hogy

$$P(x) = \frac{\left(x+3\right)\left(x+2\right)\left(x+1\right)x\left(x-1\right)\left(x-2\right)}{6},\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

2. Az $AB + BA = O_n$ egyenlőség alapján

$$\left(A+B\right)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + B^2, \text{ és}$$

$$\left(A-B\right)^2 = A^2 - AB - BA + B^2 = A^2 + B^2\,,$$

ahonnan $\left(\det\left(A+B\right)\right)^2 = \det\left(A^2+B^2\right)$ és $\left(\det\left(A-B\right)\right)^2 = \det\left(A^2+B^2\right)$,

tehát

$$\left(\det\left(A+B\right)\right)^2 + \left(\det\left(A-B\right)\right)^2 = 2\det\left(A^2+B^2\right).$$

3. a) A feltételek alapján

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & ... & -k+1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & ... & -k+2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & ... & -k+3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & ... & -k+4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k-1 & k-2 & k-3 & k-4 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

A mátrix második sorát kivonva a harmadikból, majd az elsőt kivonva a másodikból (vagy általában akármelyik sort kivonva a rákövetkezőből) olyan sorokat kapunk, amelyeknek minden eleme 1-gyel egyenlő. Így a mátrix determinánsa nulla minden $k \geq 3$ természetes szám esetében. $k=1$ esetén a determináns 0 és $k=2$ esetén 1.

b) A kiválasztott számok összege nulla:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = a_{1j_1} + a_{2j_2} + ... + a_{kj_k} = 1 - j_1 + 2 - j_2 + ... + k - j_k =$$

$$= (1+2+...+k) - (1+2+...+k) = 0.$$

A határérték kiszámításához a következő lépések vezetnek:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \sqrt{n^2+\alpha_i \cdot n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \sqrt{n^2+\alpha_i \cdot n} - n\cdot 0\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i==1}^{k} \alpha_i \cdot \sqrt{n^2+\alpha_i \cdot n} - n \cdot \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{k}\left(\alpha_i \cdot \left(\sqrt{n^2+\alpha_i \cdot n} - n\right)\right)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \frac{n^2+\alpha_i \cdot n - n^2}{\sqrt{n^2+\alpha_i\cdot n}+n} = \frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2+...+\alpha_k^2}{2}.$$

4. Az $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ sorozat általános tagja felírható az $a_n = 2^{b_n}$ alakban, ahol $b_1 = -1,\, b_2 = 1$ és $2nb_n = \left(n-1\right)b_{n-1} + \left(n+1\right)b_{n+1}$. Az így értelmezett $\left(b_n\right)_{n\geq 1}$ sorozatra

$$b_{n+1} - b_n = \frac{n-1}{n+1}\left(b_n - b_{n-1}\right),$$

ahonnan $b_{n+1} - b_n = \dfrac{4}{n\left(n+1\right)}$, vagy $b_n = \dfrac{3n-4}{n}$. Az utóbbi összefüggés alapján azonnal következik, hogy a $\left(b_n\right)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens és határértéke 3, ami azt mutatja, hogy az $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ sorozat is konvergens és határértéke 8.

Megjegyzés. A rekurzió logaritmálása után látható, hogy az $x_n = n \cdot \ln\left(a_n\right)$ sorozat számtani haladvány.

XII. osztály

1. Feltételezzük, hogy $f(x) \neq g(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$. Mivel f és g folytonosak, az $f - g$ függvény is az, és ráadásul előjeltartó (feltételezhetjük, hogy $(f-g)(x) > 0$, $\forall\, x \in [a,b]$). Ha $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x) - g(x)$, akkor írhatjuk, hogy $f(x) > g(x) + m$, $\forall\, x \in [a,b]$. Ha x helyett $f(x)$-et helyettesítünk, akkor azt kapjuk, hogy

$$f(f(x)) > g(f(x)) + m\,,\ \forall\, x \in [a,b].$$

De $g(f(x)) = f(g(x))$ és az $f(x) > g(x) + m$ egyenlőtlenségbe x helyett $g(x)$-et helyettesítve kapjuk, hogy $f(g(x)) > g(g(x)) + m$, tehát

$$f(f(x)) > g(g(x)) + 2m\,,\ \forall\, x \in [a,b].$$

A matematikai indukció módszerével igazolhatjuk, hogy

$$\underbrace{f(f...f}_{n}(x)) > \underbrace{g(g...g}_{n}(x)) + n \cdot m\,,\ \forall\, x \in [a,b].$$

De létezik olyan $n \in \mathbb{N}^*$, amelyre $n \cdot m > b - a$ és így az előbbi egyenlőtlenség nem lehetséges, mert $\underbrace{f(f...f}_{n}(x)) \in [a,b]$ és $\underbrace{g(g...g}_{n}(x)) \in [a,b]$.

A kapott ellentmondásból következik a feladat állítása.

2. Jelöljük e-vel a semleges elemet. Miután kitöltjük a művelettábla első sorát és első oszlopát (ezek tartoznak a semleges elemhez) láthatható, hogy biztosan e lesz az 1-szer szereplő elem (minden más elem legalább kétszer fordul elő). A két darab 3-szor előforduló elemet jelöljük a-val és b-vel, a másik kettőt c-vel és d-vel. Az a és a b még egyszer kell szerepeljen a főátlón, a c és d közül az egyik kétszer a táblázatban és az összes többi helyen a másik elem. Kevés kísérletezéssel rájöhetünk, hogy a következő műveletttábla megfelel:

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	a	d	d	d
b	b	d	b	c	d
c	c	d	c	d	d
d	d	d	d	d	d

Ebben a táblázatban az $\{x,y,z\} \cap \{e,c,d\} \neq \varnothing$ esetén az $x(yz) = (xy)z$ egyenlőség teljesül, ellenkező esetben alig egy pár esetet kell megvizsgálni annak belátásához, hogy az $x(yz) = (xy)z$ egyenlőség tetszőleges x, y, z esetén igaz legyen.

Az előbbi művelettábla egy olyan monoidhoz tartozik, amely izomorf az $M = \left\{\hat{1}, \hat{4}, \hat{6}, \hat{9}, \hat{0}\right\} \subset \mathbb{Z}_{12}$ halmazon a szorzás által meghatározott monoiddal (és ebben az asszociativitást nem kell ellenőrizni).

3. a) Az egyenletet $2\left(x+2y\right)^2 - \left(3y\right)^2 = 1$ alakba írhatjuk. Mivel egy teljes négyzetnek a 3-mal való osztási maradéka 0 vagy 1, az egyenletnek az egész számok halmazában nem lehet megoldása.

b) Az $x+2y=u$ és $3y=v$ jelölésekkel az $2u^2 - v^2 = 1$ egyenlethez jutunk, amelynek már végtelen sok megoldása van az egész számok halmazán, hisz

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^n \left(\sqrt{2}+1\right)^n = 1$$

és Newton binomiális tétele alapján létezik olyan $a_n, b_n \in \mathbb{N}$, amelyre $\left(\sqrt{2}+1\right)^n = \sqrt{2}a_n + b_n$, $\left(\sqrt{2}-1\right)^n = \sqrt{2}a_n - b_n$. Így $u = a_n$ és $v = b_n$ esetén $2u^2 - v^2 = 1$. Ugyanakkor $y = \frac{b_n}{3}$ és $x = a_n - \frac{2b_n}{3}$, tehát ha $a_n, b_n \in \mathbb{N}$, akkor $x, y \in \mathbb{Q}$ és így az egyenletnek végtelen sok racionális megoldása van.

Megjegyzés. A feladat gyakorlatilag a $2\left(x+2y\right)^2 - \left(3y\right)^2 = 1$ egyenletű hiperbola racionális koordinátájú pontjaira vonatkozik. Az előbbi megoldás nem adja meg az összes lehetséges megoldás alakját. Ha a megoldások alakjára vagyunk kíváncsiak, akkor a következő geometriai eljárást érdemes választani. Választunk egy tetszőleges racionális koordinátájú pontot a hiperboláról (például $u = v = 1$) és tekintjük azokat a racionális iránytényezőjű egyeneseket amelyek ezen a ponton áthaladnak. Csak az ilyen egyenesek tartalmazhatják a racionális koordinátájú pontokat. Ha az egyenes irányvektora $v = (a, b)$, $a, b \in \mathbb{Z}$, akkor az egyenlete

$$\frac{u-1}{a}=\frac{v-1}{b}=\lambda\,.$$

Innen $u=1+\lambda a$ és $v=1+\lambda b$, tehát visszahelyettesítve az egyenletbe kapjuk, hogy

$$\lambda=\frac{2\left(b-2a\right)}{2a^2-b^2}\,.$$

Ebből következik, hogy $u=-\frac{2a^2+b^2-2ab}{2a^2-b^2}$ és $v=\frac{2a^2+b^2-4ab}{2a^2-b^2}$ és így az eredeti egyenlet összes megoldásának parametrikus alakját az $x=u-\frac{2v}{3}$, $y=\frac{v}{3}$ egyenlőségekből kapjuk. Pontosabban

$$u=\frac{1}{3}\frac{-10a^2-5b^2+14ab}{2a^2-b^2} \text{ és } v=\frac{1}{3}\frac{2a^2+b^2-4ab}{2a^2-b^2}\,,$$

ahol $a,b\in\mathbb{Z}$.

4. a) Kiszámítjuk a sorozat első néhány tagját. Így a következő eredményekhez jutunk: $x_1=0$, $x_2=\frac{3}{5}$, $x_3=\frac{4}{5}$, $x_4=\frac{15}{17}$, $x_5=\frac{12}{13}$, $x_6=\frac{35}{37}$. A páros indexű tagokban a számláló és a nevező különbsége 2 és köztük az index négyzete van, tehát ezekre a tagokra az $x_n=\frac{n^2-1}{n^2+1}$ összefüggés teljesül. Látható, hogy ez igaz a páratlan indexű tagokra is (csak a 2-vel való egyszerűsítés miatt nehezebben vehető észre). Matematikai indukcióval igazoljuk, hogy $x_n=\frac{n^2-1}{n^2+1}$, $\forall\, n\geq 0$.

b) Az előbbiek alapján $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{2}\left(1-x_n\right)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2+1}\right)$.

Másrészt

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x\right)}{x}=1$, tehát bármely $\varepsilon>0$ esetén létezik $\delta>0$ úgy, hogy $1-\varepsilon<\frac{\ln\left(1+x\right)}{x}<1+\varepsilon$, ha $-\delta<x<\delta$. Ugyanakkor létezik olyan $n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, amelyre $0<\frac{k}{n^2+1}\leq\frac{n}{n^2+1}<\delta$, bármely $k\in\{1,2,3...,n\}$ esetén. Így $1-\varepsilon<\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2+1}\right)}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+1}}<1+\varepsilon$, tehát

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln P_n}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+1}}=1$. Másrészt $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2\left(n^2+1\right)}=\frac{1}{2}$,

tehát $\lim\limits_{n\to\infty}\ln P_n=\frac{1}{2}$ és így a keresett határérték $\sqrt{e}$.

9. osztály

Aczél Andrea	*Székely Mikó Kollégium*	*Sepsiszentgyörgy*
Balázs Norbert Mihály	*Arany János Főgimnázium*	*Nagyszalonta*
Barna Ádám Tibor	*Arany János Főgimnázium*	*Nagyszalonta*
Bartalis Szilárd	*Salamon Ernő Gimnázium*	*Gyergyószentmiklós*
Bartos Júlia	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Benedek Annabella	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Bokor Ábel	*Székely Mikó Kollégium*	*Sepsiszentgyörgy*
Bondici László	*Kölcsey Ferenc Főgimnázium*	*Szatmárnémeti*
Borsos Gergő	*Kölcsey Ferenc Főgimnázium*	*Szatmárnémeti*
Borsos Zalán	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Bunta Bálint	*Baczkamadarasi Kis Gergely Református Kollégium*	*Székelyudvarhely*
Csiszér Ágnes	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Dávid Erika	*Tamási Áron Gimnázium*	*Székelyudvarhely*
Demeter Török Bálint	*Orbán Balázs Gimnázium*	*Székelykeresztúr*
Fazekas Norbert	*Mihai Eminescu Főgimnázium*	*Nagyvárad*
Fehér Áron	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Fodor Ferenc	*Székely Mikó Kollégium*	*Sepsiszentgyörgy*
Forró Timea	*Nagy Mózes Líceum*	*Kézdivásárhely*
Grecu Marius Iustin	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Héjja Rudolf	*Székely Mikó Kollégium*	*Sepsiszentgyörgy*
Hevele Balázs	*Orbán Balázs Gimnázium*	*Székelykeresztúr*
Hodgyai László	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Huszár Gellért	*Salamon Ernő Gimnázium*	*Gyergyószentmiklós*
Illyés Attila	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Jakab Péter Kinga	*Székely Mikó Kollégium*	*Sepsiszentgyörgy*
Kelemen Réka	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Kerekes József	*Báthory István Líceum*	*Kolozsvár*
Kovács Zoltán	*Benedek Elek Tanítóképző*	*Székelyudvarhely*
Kulik Árpád	*Németh László Elméleti Liceum*	*Nagybánya*

Lőrinczi Ábel	*Mikes Kelemen Főgimnázium*	*Sepsiszentgyörgy*
Mátyás Ádám	*Kölcsey Ferenc Főgimnáziumn*	*Szatmárnémeti*
Miklós Melinda	*Nagy Mózes Líceum*	*Kézdivásárhely*
Milich Andrea	*Csiki Gergely Líceum*	*Arad*
Nagy Zoltán	*Tamási Áron Gimnázium*	*Székelyudvarhely*
Neubauer Helga	*Tamási Áron Gimnázium*	*Székelyudvarhely*
Oláh Bernadett	*Ady Endre Elméleti Líceum*	*Nagyvárad*
Orbán M. Szabolcs	*Székely Mikó Kollégium*	*Sepsiszentgyörgy*
Pasztor Timea	*Tamási Áron Gimnázium*	*Székelyudvarhely*
Rab Sarolta Enikő	*Székely Mikó Kollégium*	*Sepsiszentgyörgy*
Sándor Péter	*Kölcsey Ferenc Főgimnáziumn*	*Szatmárnémeti*
Sentes Zsombor	*Nagy Mózes Líceum*	*Kézdivásárhely*
Spir Anita	*Csiki Gergely Líceum*	*Arad*
Suciu Renáta	*Ady Endre Elméleti Líceum*	*Nagyvárad*
Szabó Enikő	*Baróti Szabó Dávid Iskolacsoport*	*Barót*
Szabó Lilla	*Mikes Kelemen Főgimnázium*	*Sepsiszentgyörgy*
Takács Petra	*Báthory István Líceum*	*Kolozsvár*
Tempfli Arnold	*Kölcsey Ferenc Főgimnáziumn*	*Szatmárnémeti*
Tikosi Kinga	*Tamási Áron Gimnázium*	*Székelyudvarhely*
Vajda Szabolcs	*Báthory István Líceum*	*Kolozsvár*
Várady Csongor	*Németh László Elméleti Liceum*	*Nagybánya*
Várhelyi Melinda	*Báthory István Líceum*	*Kolozsvár*
Vass Balázs	*Tamási Áron Gimnázium*	*Székelyudvarhely*
Zalányi Rezső	*Németh László Elméleti Liceum*	*Nagybánya*
Zsögön Csilla	*Nagy Mózes Líceum*	*Kézdivásárhely*

10. osztály

Bedő Anita	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Bele Mihály	*Csiki Gergely Líceum*	*Arad*
Bence Boglárka	*Tamási Áron Gimnázium*	*Székelyudvarhely*
Benedek Elek Zalán	*Székely Mikó Kollégium*	*Sepsiszentgyörgy*
Bodó Emőke	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Bodor Kinga	*Tamási Áron Gimnázium*	*Székelyudvarhely*
Bodor Zoltán	*Kölcsey Ferenc Főgimnáziumn*	*Szatmárnémeti*
Boros Zoltán	*Csiki Gergely Líceum*	*Arad*
Bratescu Andrei	*Brassai Sámuel Líceum*	*Kolozsvár*
Brudasca Renáta	*Báthory István Líceum*	*Kolozsvár*
Buslig Szabolcs	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Domokos Ilka	*Áprily Lajos Líceum*	*Brassó*
Farkas Ágnes	*Orbán Balázs Gimnázium*	*Székelykeresztúr*
Fülöp Annamária	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Gencsi Márta	*Tamási Áron Gimnázium*	*Székelyudvarhely*
Gurza László	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Hadnagy Kinga	*Csiki Gergely Líceum*	*Arad*
Hevele istván	*Orbán Balázs Gimnázium*	*Székelykeresztúr*
Ilyés Beatrix	*Tamási Áron Gimnázium*	*Székelyudvarhely*
Jakab Lilla	*Octavin Goga Főgimnázium*	*Margita*
János Csongor	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Kakucs Szende	*Baróti Szabó Dávid Iskolacsoport*	*Barót*
Kállai Brigitta	*Silvania Fógimnázium*	*Zilah*
Kassay Farkas Ákos	*Unitárius Kollégium*	*Kolozsvár*
Kecseti Hunor	*Salamon Ernő Gimnázium*	*Gyergyószentmiklós*
Király Amália	*Silvania Fógimnázium*	*Zilah*
Kolumbán József	*Báthory István Líceum*	*Kolozsvár*
Konnert Raimund	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Kovács Enikő	*Áprily Lajos Líceum*	*Brassó*

Kovács-Krausz Zoltán	*Báthory István Líceum*	*Kolozsvár*
Kővári Szabolcs	*Petőfi Sándor Elméleti Líceum*	*Székelyhíd*
Lieb Helga	*Kölcsey Ferenc Főgimnáziumn*	*Szatmárnémeti*
Lőrincz Timea	*Áprily Lajos Líceum*	*Brassó*
Madár István	*Tamási Áron Gimnázium*	*Székelyudvarhely*
Mandici Szilárd	*Kölcsey Ferenc Főgimnáziumn*	*Szatmárnémeti*
Módis László	*Németh László Elméleti Liceum*	*Nagybánya*
Nagy Orsolya	*Petru Maior Líceum*	*Szászrégen*
Nagy Sándor	*Apáczai Csere János Líceum*	*Kolozsvár*
Nagy Zsolt István	*Apáczai Csere János Líceum*	*Kolozsvár*
Nemes Kinga	*Bartók Béla Elméleti Líceum*	*Temesvár*
Pál Levente	*Tamási Áron Gimnázium*	*Székelyudvarhely*
Péterfi Zsuzsánna	*Silvania Főgimnázium*	*Zilah*
Polcz Péter	*Kölcsey Ferenc Főgimnáziumn*	*Szatmárnémeti*
Sasu Róbert	*Székely Mikó Kollégium*	*Sepsiszentgyörgy*
Sebestyén Balázs	*Báthory István Líceum*	*Kolozsvár*
Simon Erika	*Kölcsey Ferenc Főgimnáziumn*	*Szatmárnémeti*
Sipos Lehel	*Székely Mikó Kollégium*	*Sepsiszentgyörgy*
Sütő Szabolcs	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Szabó Ágnes	*Nagy Mózes Líceum*	*Kézdivásárhely*
Szakács Csilla	*Baczkamadarasi Kis Gergely Református Kollégium*	*Székelyudvarhely*
Szallós-Kis Orsolya	*Benedek Elek Tanítóképző*	*Székelyudvarhely*
Székely Noémi	*Petru Maior Líceum*	*Szászrégen*
Szőke Árpád Ferenc	*Octavin Goga Főgimnázium*	*Margita*
Szőke Katalin	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Tana Hunor	*Áprily Lajos Líceum*	*Brassó*
Török Tamás	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Zongor Rebeka	*Tamási Áron Gimnázium*	*Székelyudvarhely*

11. osztály

Ábrahám Timea	*Ady Endre Elméleti Líceum*	*Nagyvárad*
Akácsos Tibor	*Baróti Szabó Dávid Iskolacsoport*	*Barót*
Bajnóczi Tamás	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Bánházi Botond László	*Octavin Goga Főgimnázium*	*Margita*
Biró Emese	*Tamási Áron Gimnázium*	*Székelyudvarhely*
Biró Zsolt	*Tamási Áron Gimnázium*	*Székelyudvarhely*
Borbáth Áron	*Áprily Lajos Líceum*	*Brassó*
Borbáth Tamás	*Áprily Lajos Líceum*	*Brassó*
Csutak Katalin	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Ecsedi Roland Károly	*Octavin Goga Főgimnázium*	*Margita*
Gurzó András	*Salamon Ernő Gimnázium*	*Gyergyószentmiklós*
Debreceni Ilona	*Mihai Eminescu Főgimnázium*	*Nagyvárad*
Hodgyai Zoltán	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Illyés Ágota	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Károly Réka	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Keresztély Enikő	*Tamási Áron Gimnázium*	*Székelyudvarhely*
Kilyén Attila Őrs	*Székely Mikó Kollégium*	*Sepsiszentgyörgy*
Kinczel Lajos Roland	*Petru Maior Líceum*	*Szászrégen*
Kisfaludi Bak Zsombor	*Székely Mikó Kollégium*	*Sepsiszentgyörgy*
Kiss Botond	*Brassai Sámuel Líceum*	*Kolozsvár*
Kiss Kálmán	*Tamási Áron Gimnázium*	*Székelyudvarhely*
Kolcsár Kálmán Imre	*Salamon Ernő Gimnázium*	*Gyergyószentmiklós*
Koncz Tamás	*Orbán Balázs Gimnázium*	*Székelykeresztúr*
Kovács Zsolt Péter	*Salamon Ernő Gimnázium*	*Gyergyószentmiklós*
Kulcsár Johanna	*Ady Endre Elméleti Líceum*	*Nagyvárad*
Laczkó Timea-Magdolna	*Tamási Áron Gimnázium*	*Székelyudvarhely*
László Alma	*Silvania Főgimnázium*	*Zilah*
Lázár Enikő	*Tamási Áron Gimnázium*	*Székelyudvarhely*

Lestyán Erika	*Nagy Mózes Líceum*	*Kézdivásárhely*
Maksay Dorottya	*Kölcsey Ferenc Főgimnáziumn*	*Szatmárnémeti*
Matanie Ábel	*Csiki Gergely Líceum*	*Arad*
Mátyás Helga	*Orbán Balázs Gimnázium*	*Székelykeresztúr*
Melega Rolf	*Leövey Klára Elméleti Liceum*	*Máramarossziget*
Mihály Kinga	*Tamási Áron Gimnázium*	*Székelyudvarhely*
Nagy Levente	*Mihai Eminescu Főgimnázium*	*Nagyvárad*
Nagy Tímea	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Padrah István	*Leövey Klára Elméleti Liceum*	*Máramarossziget*
Papp Ingrid	*Ady Endre Elméleti Líceum*	*Nagyvárad*
Portik Bakai Ervin	*Tamási Áron Gimnázium*	*Székelyudvarhely*
Portik Dániel	*Petru Maior Líceum*	*Szászrégen*
Rangyák Eszter	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Simon Levente	*Székely Mikó Kollégium*	*Sepsiszentgyörgy*
Sükösd Hunor	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Szabó Péter	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Szász Zsigmond	*Áprily Lajos Líceum*	*Brassó*
Szatmári Barna	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Székely Timea	*Áprily Lajos Líceum*	*Brassó*
Szerző Péter	*Székely Mikó Kollégium*	*Sepsiszentgyörgy*
Tóth Miklós	*Bartók Béla Elméleti Líceum*	*Temesvár*
Tóth Orsolya	*Ady Endre Elméleti Líceum*	*Nagyvárad*
Visky Mária	*Báthory István Líceum*	*Kolozsvár*
Wekerle Tibor	*János Zsigmond Unitárius Kollégium*	*Kolozsvár*

12. osztály

Baló István	*Baróti Szabó Dávid Iskolacsoport*	*Barót*
Barta Róbert	*Csiki Gergely Líceum*	*Arad*
Bene Zoltán	*Nagy Mózes Líceum*	*Kézdivásárhely*
Berecki Beáta	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Bíró Csongor	*Salamon Ernő Gimnázium*	*Gyergyószentmiklós*
Biró Lehel József	*Orbán Balázs Gimnázium*	*Székelykeresztúr*
Bokor Kálmán	*Nagy Mózes Líceum*	*Kézdivásárhely*
Dávid Tamás	*Tamási Áron Gimnázium*	*Székelyudvarhely*
Dobribán Edgár	*Báthory István Líceum*	*Kolozsvár*
Dorner Boglárka	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Fecske Nándor	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Ferencz Endre	*Kölcsey Ferenc Főgimnáziumn*	*Szatmárnémeti*
Kalló-Jankucz Anna	*Báthory István Líceum*	*Kolozsvár*
Kántor Lajos	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Keresztúri Mónika	*Ady Endre Elméleti Líceum*	*Nagyvárad*
Kertész Lóránd Tamás	*Székely Mikó Kollégium*	*Sepsiszentgyörgy*
Kisfaludi Bak Zoltán	*Székely Mikó Kollégium*	*Sepsiszentgyörgy*
Nagy Katalin	*Tamási Áron Gimnázium*	*Székelyudvarhely*
Ördög Dorottya	*Bartók Béla Elméleti Líceum*	*Temesvár*
Réti Zenkő Zsuzsanna	*Székely Mikó Kollégium*	*Sepsiszentgyörgy*
Rill Robert Adrian	*Székely Mikó Kollégium*	*Sepsiszentgyörgy*
Sándor Bulcsú	*Orbán Balázs Gimnázium*	*Székelykeresztúr*
Sándor Izabella	*Tamási Áron Gimnázium*	*Székelyudvarhely*
Szenkovits Ágnes Enikő	*Székely Mikó Kollégium*	*Sepsiszentgyörgy*
Szenkovits Annamária	*Báthory István Líceum*	*Kolozsvár*
Szőke Andrea	*Csiki Gergely Líceum*	*Arad*
Tankó István	*Tamási Áron Gimnázium*	*Székelyudvarhely*
Terkál Róbert	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Tófalvi Lehel	*Székely Mikó Kollégium*	*Sepsiszentgyörgy*
Tóth Helga	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Zsombori Attila	*Tamási Áron Gimnázium*	*Székelyudvarhely*

A részt vevő tanárok névsora

András Ibolya	*Tamási Áron Gimnázium*
Balázs Vilmos	*Tamási Áron Gimnázium*
Biró Judit	*Székely Mikó Kollégium*
Bíró Zoltán	*Salamon Ernő Gimnázium*
Csurulya Edit	*Székely Mikó Kollégium*
Deák Imre	*Tamási Áron Gimnázium*
Deák Zsuzsanna	*Tamási Áron Gimnázium*
Egyed Géza	*Nagy Mózes*
Gáspár Mária	*Nagy Mózes*
Hatházi Annamária	*Báthory István Elméleti Líceum*
Horváth Éva	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*
Kacsó Ferenc	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*
Kinczel Lajos	*Petru Maior Líceum*
Kiss Gyula	*Silvania Főgimnázium*
Kovács Béla	*Kölcsey Ferenc Főgimnáziumn*
Kovács Lajos	*Tamási Áron Gimnázium*
Kulcsár Ilona	*Orbán Balázs Gimnázium*
Mátéfi István	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*
Mészár Julianna	*Arany János Főgimnázium*
Mikó Ágnes	*Mikes Kelemen Főgimnázium*
Nagy Zoltán	*Ady Endre Líceum*
Nemes András	*Bartók Béla Elméleti Líceum*
Oláh-Ilkei Árpád	*Baróti Szabó Dávid Iskolacsoport*
Olosz Ferenc	*Kölcsey Ferenc Főgimnáziumn*
Páll Olga	*Márton Áron Gimnázium*
Péter András	*Csiki Gergely Líceum*
Péterfi Margit	*Tamási Áron Gimnázium*
Sebestyén József	*Orbán Balázs Gimnázium*
Szász Pál	*Octavian Goga Főgimnazium*

Szilágyi Ferenc	*Salamon Ernő Gimnázium*
Takács Attila	*Leövey Klára Elméleti Líceum*
Tamási Csaba	*Márton Áron Gimnázium*
Vandra Mária	*Áprily Lajos Líceum*
Ványi Emese	*Kölcsey Ferenc Főgimnáziumn*
Zákány Mónika	*Németh László Elméleti Líceum*

Meghívottak

Matekovics Mihály, *a tanügyi és kutatási tárca nemzeti kisebbségek oktatásáért felelős vezérigazgatója*

Bunta Levente, *Hargita Megyei Tanács elnöke*

Szász Jenő, *Székelyudvarhely polgármestere*

Bondor István, *Hargita megyei főtanfelügyelő*

Hodgyai László, *matematika szakos tanfelügyelő, Hargita Megye*

Dáné Károly, *igazgató, Editura Didactică şi Pedagogică*

Díjazottak
IX. osztály

1.	Borsos Zalán	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	99	**I. díj**
2.	Bondici László	Kölcsey Ferenc Főgimnáziumn	72	**I. díj**
3.	Tikosi Kinga	Tamási Áron Gimnázium	69	**I. díj**
4.	Benedek Annabella	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	66	**II. díj**
5.	Vass Balázs	Tamási Áron Gimnázium	62	**II. díj**
6.	Lőrinczi Ábel	Mikes Kelemen Főgimnázium	56	**III. díj**
7.	Fehér Áron	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	55	**III. díj**
8.	László Alma	Silvania Főgimnázium	51	Dicséret
9.	Vajda Szabolcs	Báthory István Líceum	51	Dicséret
10.	Takács Petra	Mikes Kelemen Főgimnázium	50	Dicséret
11.	Csiszér Ágnes	Márton Áron Gimnázium	49	Dicséret
12.	Nagy Zoltán	Tamási Áron Gimnázium	47	Dicséret
13.	Fazekas Norbert	Mihai Eminescu Főgimnázium	45	Dicséret
14.	Rab Sarolta Enikő	Székely Mikó Kollégium	45	Dicséret
15.	Várhelyi Melinda	Báthory István Líceum	45	Dicséret
16.	Pasztor Timea	Tamási Áron Gimnázium	43	Dicséret
17.	Bartos Júlia	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	42	Dicséret
18.	Spir Anita	Csiki Gergely Líceum	42	Dicséret
19.	Illyés Attila	Márton Áron Gimnázium	39	Dicséret
20.	Hevele Balázs	Márton Áron Gimnázium	38	Dicséret
21.	Huszár Gellért	Salamon Ernő Gimnázium	38	Dicséret
22.	Kerekes József	Báthory István Líceum	38	Dicséret
23.	Bartalis Szilárd	Salamon Ernő Gimnázium	36	Dicséret
24.	Grecu Marius Iustin	Orbán Balázs Gimnázium	36	Dicséret
25.	Sentes Zsombor	Nagy Mózes Líceum	36	Dicséret
26.	Zsögön Csilla	Nagy Mózes Líceum	36	Dicséret
27.	Tempfli Arnold	Kölcsey Ferenc Főgimnáziumn	35	Dicséret
28.	Szabó Enikő	Baróti Szabó Dávid Iskolacsoport	34	Dicséret

Megjegyzés. *A vonal fölötti díjazottak képviselik Erdélyt a XVII. Nemzetközi Magyar Matematika Versenyen, 2008. március 5-9 között Kassán.*

X. osztály

1.	Módis László	Németh László Elméleti Liceum	50	**I. díj**
2.	Farkas Ágnes	Orbán Balázs Gimnázium	46,5	**I. díj**
3.	Gencsi Márta	Tamási Áron Gimnázium	36	**II. díj**
4.	Kovács-Krausz Zoltán	Báthory István Líceum	35	**II. díj**
5.	Sipos Lehel	Székely Mikó Kollégium	33,5	**II. díj**
6.	Hevele István	Orbán Balázs Gimnázium	31	**III. díj**
7.	Simon Erika	Kölcsey Ferenc Főgimnáziumn	31	**III. díj**
8.	Boros Zoltán	Csiki Gergely Líceum	30	Dicséret
9.	Buslig Szabolcs	Márton Áron Gimnázium	30	Dicséret
10.	Szabó Ágnes	Nagy Mózes Líceum	30	Dicséret
11.	Kolumbán József	Báthory István Líceum	29	Dicséret
12.	Sebestyén Balázs	Báthory István Líceum	29	Dicséret
13.	Bedő Anita	Márton Áron Gimnázium	28	Dicséret
14.	Gurza László	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	26	Dicséret
15.	Sasu Róbert	Székely Mikó Kollégium	26	Dicséret
16.	Bodor Zoltán	Kölcsey Ferenc Főgimnáziumn	25	Dicséret
17.	Pál Levente	Tamási Áron Gimnázium	25	Dicséret
18.	Brudasca Renáta	Báthory István Líceum	24,5	Dicséret
19.	Péterfi Zsuzsánna	Silvania Főgimnázium	24	Dicséret
20.	Polcz Péter	Kölcsey Ferenc Főgimnáziumn	24	Dicséret
21.	Jakab Lilla	Octavin Goga Főgimnázium	23,5	Dicséret
22.	Mandici Szilárd	Kölcsey Ferenc Főgimnáziumn	23	Dicséret
23.	Kállai Brigitta	Silvania Fógimnázium	22,5	Dicséret
24.	Szallós-Kis Orsolya	Benedek Elek Tanítóképző	22	Dicséret

XI. osztály

1.	Szerző Péter	Székely Mikó Kollégium	67	**I. díj**
2.	Lestyán Erika	Nagy Mózes Líceum	55,5	**II. díj**
3.	Illyés Ágota	Márton Áron Gimnázium	51,5	**II. díj**
4.	Kisfaludi Bak Zsombor	Székely Mikó Kollégium	50	**II. díj**
5.	Biró Emese	Tamási Áron Gimnázium	47	**III. díj**
6.	Bajnóczi Tamás	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	45,5	**III. díj**
7.	Károly Réka	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	45,5	**III. díj**
8.	Rangyák Eszter	Márton Áron Gimnázium	44	Dicséret
9.	Szabó Péter Robert	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	44	Dicséret
10.	Szatmári Barna	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	43,5	Dicséret
11.	Bánházi Botond László	Octavin Goga Főgimnázium	43	Dicséret
12.	Simon Levente	Székely Mikó Kollégium	42,5	Dicséret
13.	Keresztély Enikő	Tamási Áron Gimnázium	42	Dicséret
14.	Kovács Zsolt Péter	Salamon Ernő Gimnázium	42	Dicséret
15.	Kilyén Attila Őrs	Székely Mikó Kollégium	40	Dicséret
16.	Nagy Tímea	Márton Áron Gimnázium	40	Dicséret
17.	Visky Mária	Báthory István Líceum	40	Dicséret
18.	Biró Zsolt	Tamási Áron Gimnázium	39,5	Dicséret
19.	Hodgyai Zoltán	Márton Áron Gimnázium	38	Dicséret
20.	Maksay Dorottya	Kölcsey Ferenc Főgimnáziumn	34,5	Dicséret
21.	Matanie Ábel	Csiki Gergely Líceum	34,5	Dicséret
22.	Szasz Zsigmond	Áprily Lajos Líceum	34,5	Dicséret
23.	Ecsedi Roland Károly	Octavin Goga Főgimnázium	33,5	Dicséret
24.	Koncz Tamás	Orbán Balázs Gimnázium	33,5	Dicséret
25.	Borbath Aron	Áprily Lajos Líceum	33	Dicséret
26.	Mátyás Helga	Orbán Balázs Gimnázium	31	Dicséret

XII. osztály

1.	Ferencz Endre	Kölcsey Ferenc Főgimnáziumn	66	**I. díj**
2.	Kántor Lajos	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	49,5	**II. díj**
3.	Terkál Róbert	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	46	**II. díj**
4.	Bíró Csongor	Salamon Ernő Gimnázium	43	**III. díj**
5.	Kisfaludi Bak Zoltán	Székely Mikó Kollégium	43	**III. díj**
6.	Sándor Bulcsú	Orbán Balázs Gimnázium	39,5	Dicséret
7.	Tankó István		38	Dicséret
8.	Biró Lehel József	Orbán Balázs Gimnázium	35	Dicséret
9.	Dávid Tamás	Tamási Áron Gimnázium	34,5	Dicséret
10.	Rill Robert Adrian	Székely Mikó Kollégium	33	Dicséret
11.	Baló István	Baróti Szabó Dávid Iskolacsoport	32	Dicséret
12.	Kertész Lóránd Tamás	Székely Mikó Kollégium	31	Dicséret
13.	Réti Zenkő Zsuzsanna	Székely Mikó Kollégium	30,5	Dicséret
14.	Nagy Katalin	Tamási Áron Gimnázium	29	Dicséret
15.	Sándor Izabella	Tamási Áron Gimnázium	28,5	Dicséret
16.	Fecske Nándor	Márton Áron Gimnázium	28	Dicséret
17.	Keresztúri Mónika	Ady Endre Elméleti Líceum	27	Dicséret
18.	Szenkovits Ágnes Enikő	Székely Mikó Kollégium	26	Dicséret

Figyelmükbe ajánljuk:

1. Erdélyi magyar matematikai fórum: http://www.netmatek.extra.hu
2. Matematika tesztverseny: http://www.mikmatek.extra.hu
3. Matematika-Informatika tudományos diákkonferencia, Nagyszalonta, email: meszarjulianna@yahoo.com (jelentkezés április 15-ig)
4. Sapientia-ECN 2008 Matematika csapatverseny, email: abege@ms.sapientia.ro (jelentkezés február 29-ig)