XVII. ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY
CSÍKSZEREDA
2007. FEBRUÁR 8-11.

1. NAP

---

9. OSZTÁLY

1. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ esetén $n^n > 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$

Lackó József, Csíkszereda

2. Az $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ számok esetén határozzuk meg az $E(x) = \sqrt{x-a} + \sqrt{b-x}$ kifejezés minimumát és maximumát az $[a, b]$ intervallumon.

Tamási Csaba, Csíkszereda

3. Bizonyítsuk be, hogy ha $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n > 0$, akkor

$$\sum_{k=1}^{n} \left(3k^2 - 3k + 1\right) x_k^3 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right)^3 .$$

Bencze Mihály, Brassó

4. Egy bálteremben kerek asztalok vannak, minden ülés foglalt. Mielőtt táncra perdülnének a következő játékba kezdenek: mindenki percenként egy üléssel jobbra ül. Ha valamely asztalnál mindenki visszakerül az eredeti helyére, akkor annál az asztalnál ülők a helycsere irányát megváltoztatják. Ha minden asztalnál mindenki megint az eredeti helyén ül, akkor kezdődik a tánc. Lesz-e tánc a bálban?

Csapó Hajnalka, Csíkszereda

5. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ páratlan és nem prímhatvány. Jelölje $r_1 < r_2 < \ldots < r_k$ az n-nél kisebb és n-nel relatív prímek véges sorozatát. Bizonyítsuk be, hogy:

a) létezik $j \in \{2, 3, \ldots, k\}$ úgy, hogy $r_j - r_{j-1} = 2$.

b) létezik $i \in \{2, 3, \ldots, k\}$ úgy, hogy $r_i - r_{i-1} = 3$.

Darvas Tamás, Barót

6. Határozzuk meg azokat az $n \geq 1$ természetes számokat, amelyekre léteznek az A, B halmazok úgy hogy

$$A \cap B = \varnothing, A \cup B = \{1, 2, \ldots, n\} \text{ és}$$
$$A = \left\{ x + y \mid xy \in B, x, y \in \mathbb{N}^* \right\}, B = \left\{ xy \mid x + y \in A, x, y \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Dobribán Edgár, Kolozsvár

Megjegyzés. Munkaidő 4 óra. Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér. Lényeges általánosításért vagy az elsőtől lényegesen különböző megoldásért feladatonként legfeljebb 5 pont szerezhető.

XVII. ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY
CSÍKSZEREDA
2007. FEBRUÁR 8-11.

2. NAP

9. OSZTÁLY

1. Igazoljuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén léteznek olyan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ természetes számok, amelyekre

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = 1 .$$

***

2. Az ABC háromszög belső P pontján keresztül meghúzzuk a PA', PB', PC' párhuzamosokat az A, B és C csúcsokból kiinduló oldalfelezőkhöz ($A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$). Bizonyítsuk be, hogy

$$\overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{PB'} + \overrightarrow{PC'} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{PG} ,$$

ahol G az ABC háromszög súlypontja.

Longáver Lajos, Nagybánya

3. Az $n \in \mathbb{N}^*$ páros szám esetén az a_1, a_2, ..., a_n számok fele 1-gyel, fele 2-vel egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sqrt{a_1 \left\{\frac{2}{3}\right\}} + \sqrt{a_2 \left\{\frac{2^2}{3}\right\}} + \sqrt{a_3 \left\{\frac{2^3}{3}\right\}} + \ldots + \sqrt{a_n \left\{\frac{2^n}{3}\right\}} \le \frac{n\sqrt{3}}{2},$$

ahol $\{x\}$ az $x \in \mathbb{R}$ törtrészét jelöli.

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

4. Legyen M az $A_1A_2A_3A_4$ konvex négyszög egy tetszőleges belső pontja. G_1, G_2, G_3 és G_4 rendre az MA_1A_2, MA_2A_3, MA_3A_4, illetve MA_4A_1 háromszög súlypontja. B_1, B_2, B_3 és B_4 az A_3A_4, A_4A_1, A_1A_2, illetve A_2A_3 oldalak felezőpontja. Bizonyítsuk be, hogy G_1B_1, G_2B_2, G_3B_3 és G_4B_4 összefutó egyenesek.

Tamási Csaba, Csíkszereda

Megjegyzés. Munkaidő 3 óra. Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér. Lényeges általánosításért vagy az elsőtől lényegesen különböző megoldásért feladatonként legfeljebb 5 pont szerezhető.

XVII. ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY
CSÍKSZEREDA
2007. FEBRUÁR 8-11.

1. NAP

10. OSZTÁLY

1. Oldjuk meg az egész számok halmazában az $x^{2008}+y^{2008}=2008xy-2006$ egyenletet!

Laczkó József, Csíkszereda

2. Határozzuk meg azokat a tízes számrendszerbeli a, b, c, x számjegyeket, amelyek teljesítik a következő feltételeket:

i) az $n=\overline{abc}_x+\overline{bca}_x+\overline{cab}_x$ természetes szám osztható 15-tel (*x* a számrendszer alapját jelenti);

ii) az a, b, c számok egy szigorúan növekvő számtani haladványt alkotnak.

Mikó Ágnes, Sepsiszentgyörgy

3. Oldjuk meg az $\begin{cases}(x+y)^n=x-y\\(x-y)^n=x+y\end{cases}$ egyenletrendszert, ahol $x,y\in\mathbb{C}$ és $n\geq 1$ rögzített természetes szám.

4. Számítsuk ki az $xy+yz+xz$ összeg értékét, ha $x,y,z>0$ és $\begin{cases}x^2+xy+y^2=4\\y^2+yz+z^2=7\\z^2+zx+x^2=3\end{cases}$.

Farkas Csaba, Székelykeresztúr

5. Legyen A, B és C egy kör három rögzített pontja. Igazold, hogy az ABC háromszög akkor és csakis akkor egyenlő oldalú, ha $PA+PC=PB$ a B-t nem tartalmazó $\overset{\frown}{AC}$ nyílt körív bármely P pontja esetén.

Dávid Géza, Székelyudvarhely

6. A jégkorongcsapat szurkolója szerencsés, ha a szezon összes mérkőzésén jelen volt, amikor a csapat nyert, de egy mérkőzésen sem volt jelen mikor a csapat vesztett. Egy szurkolótábor szerencsés, ha a szezon végére lesz legalább egy szerencsés tagja. Az egyik szurkolótábor kieszelt egy stratégiát, amivel a szezon végére szerencséssé válik, a mérkőzések kimenetelétől függetlenül. Az éppen soron következő mérkőzés előtt döntik el, hogy ki megy el a mérkőzésre és ki nem. Ha a szezonban összesen n mérkőzés van, akkor legalább hány tagja kell legyen a szurkolótábornak? Adjuk meg a szurkolótábor egy lehetséges stratégiáját (köztudott dolog, hogy a jégkorong mérkőzések végeredménye sosem döntetlen).

Darvas Tamás, Barót

Megjegyzés. Munkaidő 4 óra. Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér. Lényeges általánosításért vagy az elsőtől lényegesen különböző megoldásért feladatonként legfeljebb 5 pont szerezhető.

XVII. ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY
CSÍKSZEREDA
2007. FEBRUÁR 8-11.

2. NAP

10. OSZTÁLY

1. Határozzuk meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ injektív és a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ szürjektív függvényt, ha

$$f\left(g\left(xy\right)\right)=f(x)\,g\left(y\right),$$

bármely $x,y\in\mathbb{R}$ esetén.

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$\log_{2006}(x-1)+\log_{2007}(x-1)=3-\lg\left(x^{10}-24\right)$$

egyenletet.

Kovács Lajos, Székelyudvarhely

3. a) Igazoljuk, hogy ha α,β,γ páronként különböző komplex számok és $z\in\mathbb{C}$, akkor

$$\frac{\alpha\left(z-\beta-\gamma\right)}{\left(\alpha-\beta\right)\left(\alpha-\gamma\right)}+\frac{\beta\left(z-\gamma-\alpha\right)}{\left(\beta-\gamma\right)\left(\beta-\alpha\right)}+\frac{\gamma\left(z-\alpha-\beta\right)}{\left(\gamma-\alpha\right)\left(\gamma-\beta\right)}=1.$$

b) Jelölje A_1, B_1, C_1 az ABC háromszög BC, CA, AB oldalainak felezőpontját, R a háromszög köré írt kör sugarát, H a magasságpontját, m_a, m_b, m_c az oldalfelezők hosszát és legyen P egy tetszőleges pont a háromszög síkjában. Igazoljuk, hogy

i) $R\left(a\cdot PA_1+b\cdot PB_1+c\cdot PC_1\right)\geq\frac{1}{2}abc$;

ii) $a\cdot m_a\cdot HA+b\cdot m_b\cdot HB+c\cdot m_c\cdot HC\geq\frac{3}{2}abc$.

Szász Róbert, Marosvásárhely

4. Az ABC háromszög tetszőleges belső pontján keresztül meghúzzuk az MN, PQ, ST párhuzamosokat a BC, CA, AB oldalakhoz, ahol $M,P\in AB$, $S,Q\in BC$, $N,T\in AC$. Igazoljuk, hogy

$$T\left[ASQ_{\Delta}\right]+T\left[BNT_{\Delta}\right]+T\left[CMP_{\Delta}\right]=T\left[ABC_{\Delta}\right].$$

Longáver Lajos, Nagybánya

Megjegyzés. Munkaidő 3 óra. Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér. Lényeges általánosításért vagy az elsőtől lényegesen különböző megoldásért feladatonként legfeljebb 5 pont szerezhető.

XVII. ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY
CSÍKSZEREDA
2007. FEBRUÁR 8-11.

1. NAP

11-12. OSZTÁLY

1. Egy n-ed rendű determináns minden sorában és minden oszlopában az 1, 2, 2^2, ..., 2^{n-1} számok vannak elhelyezve valamilyen sorrendben úgy, hogy egy sorban, illetve egy oszlopban is minden szám pontosan egyszer szerepel. Bizonyítsuk be, hogy az ilyen determináns értéke nem nulla.

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

2. Az $ABCD$ trapézban $AB \parallel CD$, O az átlók metszéspontja, G_1 és G_2 az OAB illetve OCD háromszögek súlypontja, H_1 és H_2 az OBC illetve ODA háromszögek magasságpontja. Igazold, hogy $G_1G_2 \perp H_1H_2$.

Tamási Csaba, Csíkszereda

3. Legyen $n \in N$, páros és nem kettőhatvány. Jelölje $r_1 < r_2 < \ldots < r_k$ az n-nél kisebb, n-nel relatív prímek véges sorozatát. Bizonyítsuk be, hogy létezik $j \in \{2, 3, \ldots, k\}$ úgy, hogy $r_j - r_{j-1} = 4$.

Darvas Tamás, Barót

4. Egy $m \times n$-es ($m, n \in \mathbb{N}^*$) táblázat minden mezején egy pohár áll, talpra állított helyzetben. Rögzítjük az $1 \le i \le m$ és az $1 \le j \le n$ természetes számokat. Egy lépés azt jelenti, hogy kiválasztunk i sort és j oszlopot és a közös mezőkben levő poharakat megfordítjuk (vagyis ha talpon álltak, akkor fejre állítjuk, ellenkező esetben talpra állítjuk). Ennek a lépésnek a véges sok ismétlésével elérhető-e, hogy minden pohár fejjel lefele álljon? Tárgyalás.

András Szilárd, Kolozsvár

5. Igazold, hogy a Fibonacci-sorozat első $2n$ tagja közül bárhogyan is választunk ki $(n+1)$-et, a kiválasztott számok között mindig lesz két olyan szám, melyek közül az egyik osztója a másiknak!

Dávid Géza, Székelyudvarhely

6. Egy csiga végigjár egy 10×10-es négyzethálót úgy, hogy minden mezőre pontosan egyszer lép, egy mezőről csak oldalszomszédos mezőre „léphet". Megszámozzuk a mezőket 1-től 100-ig aszerint, hogy melyik mezőre hányadik lépésénél „lépett" a csiga. Ezután két tetszőleges oldalszomszédos mezőn szereplő számot ugyanazzal a természetes számmal növelünk, vagy csökkentünk és ezt többször is megismételhetjük. Elérhetjük-e, hogy minden mezőn ugyanaz a szám szerepeljen?

Csapó Hajnalka, Csíkszereda

Megjegyzés. Munkaidő 4 óra. Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér. Lényeges általánosításért vagy az elsőtől lényegesen különböző megoldásért feladatonként legfeljebb 5 pont szerezhető.

XVII. ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY
CSÍKSZEREDA
2007. FEBRUÁR 8-11.

2. NAP

---

11. OSZTÁLY

1. Határozzuk meg azokat az $(x_n)_{n\geq 1}$ nemnegatív számokból álló valós számsorozatokat, amelyek teljesítik az $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=x_n x_{n+1}$ összefüggést, bármely $n\geq 1$ természetes szám esetén!

Dávid Géza, Székelyudvarhely

2. Adott a következő két mátrix:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & 2n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \ldots & 1 & 2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n & n+1 & n+2 & \ldots & n-2 & n-1 \end{pmatrix} \text{ és } B=\begin{pmatrix} (-1)^1 & (-1)^2 & \ldots & (-1)^n \\ (-2)^1 & (-2)^2 & \ldots & (-2)^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (-2n)^1 & (-2n)^2 & \ldots & (-2n)^n \end{pmatrix},$$

ahol $n\in N^*$. Számítsuk ki a *BA* mátrix determinánsát.

Mikó Ágnes, Sepsiszentgyörgy

3. Legyen $a,b\in\mathbb{R}$, $|a|\neq|b|$ és $A,B\in M_n(R)$ két olyan mátrix, amelyre $a\cdot AB=I_n+b\cdot BA$. Igazoljuk, hogy $\det(AB-BA)=0$.

Longáver Lajos, Nagybánya

4. Adott a következő sorozat: $a_1=a\neq 2$, $a_2=\dfrac{a}{a-2}$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2}{a_n^2-2a_n+2}$, ahol $n\geq 2$.

Igazoljuk, hogy: $a_1+2a_2+2^2a_3+\ldots+2^{n-1}a_n=a_1a_2\ldots a_n$, bármely $n\geq 1$ esetén. Vizsgáljuk a sorozat konvergenciáját és határozzuk meg a határértékét. Határozzuk meg a sorozat általános tagját!

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Megjegyzés. Munkaidő 3 óra. Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér. Lényeges általánosításért vagy az elsőtől lényegesen különböző megoldásért feladatonként legfeljebb 5 pont szerezhető.

12. OSZTÁLY

1. Az $f, g : [0,1] \to [0,\infty)$ folytonos függvények esetén $\inf\limits_{0\le x\le 1} f(x) = \inf\limits_{0\le x\le 1} g(x)$. Igazoljuk, hogy létezik $\lambda \in [0,1]$ úgy, hogy $f^2(\lambda) + 5f(\lambda) = g^2(\lambda) + 5g(\lambda)$.

Farkas Csaba, Székelykeresztúr

2. Az $f : (1,+\infty) \to (1,+\infty)$ deriválható függvény teljesíti a következő feltételeket:

a) $F(f(x))F(x) = 1$, $\forall\, x \in (1,+\infty)$;

b) $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

Igazoljuk, hogy bármely $x \in (1,+\infty)$ esetén $f(f(x)) = x$, majd határozzuk meg a f és a F függvényeket.

Szász Róbert, Marosvásárhely

3. Az $A, B, C, D \in M_2(\mathbb{C})$ mátrixok az $X^2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ egyenlet különböző megoldásai. Igazoljuk, hogy $A^{2007} + B^{2007} + C^{2007} + D^{2007} = 0_2$.

Bencze Mihály, Brassó

4. A $G(a,\alpha) = \left(a^{\frac{1}{\alpha}}, +\infty\right)$ halmazon értelmezzük az $x * y = \left(\left(x^\alpha - a\right)\left(y^\alpha - a\right) + a\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ műveletet, ahol $a, \alpha > 0$. Igazoljuk, hogy $\left(G(a,\alpha), *\right)$ Abel-féle csoport és $\left(G(a,\alpha), *\right) \cong \left(G(b,\beta), *\right)$, bármely $b, \beta > 0$ esetén.

Bencze Mihály, Brassó

Megjegyzés. Munkaidő 3 óra. Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér. Lényeges általánosításért vagy az elsőtől lényegesen különböző megoldásért feladatonként legfeljebb 5 pont szerezhető.

Megoldások
1. nap
IX. osztály

1. Alkalmazzuk a számtani és a mértani középarányos közötti egyenlőtlenséget az $1,3,5,\ldots,2n-1$ számokra és figyelembe vesszük, hogy $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

$$n=\frac{n^2}{n}=\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n}\geq\sqrt[n]{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}.$$

Mivel a számok nem mind egyenlők egymással, az egyenlőtlenség szigorú, tehát n-edik hatványra emelés után kapjuk, hogy $n^n>1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)$.

2. A négyzetgyökök értelmezéséből $x\in[a,b]$. Az $y=\sqrt{x-a}+\sqrt{b-x}>0$ kifejezés pontosan akkor maximális vagy minimális, ha y^2 maximális, illetve minimális.

$$y^2=b-a+2\sqrt{(x-a)(b-x)}\geq b-a,$$

tehát $y_{\min}=\sqrt{b-a}$, mert ezt az értéket $x=a$ vagy $x=b$ esetén el is éri.

Az $(A+B)^2+(A-B)^2=2\left(A^2+B^2\right)$ azonosság felhasználásával írhatjuk, hogy $y^2=2(b-a)-\left(\sqrt{x-a}-\sqrt{b-x}\right)^2$ és ez akkor maximális, ha $\left(\sqrt{x-a}-\sqrt{b-x}\right)^2=0$, azaz ha $\sqrt{x-a}=\sqrt{b-x}$. Innen következik, hogy $x=\dfrac{a+b}{2}$ esetén éri el a maximumát és $y_{\max}=\sqrt{2(b-a)}$.

3. Ha $n=1$, akkor az egyenlőtlenség teljesül. A továbbiakban a matematikai indukció módszerét használjuk. Feltételezzük, hogy igaz n-re és igazoljuk $(n+1)$-re.

$$\sum_{k=1}^{n+1}\left(3k^2-3k+1\right)x_k^3=\left(\sum_{k=1}^{n}\left(3k^2-3k+1\right)x_k^3\right)+\left(3(n+1)^2-3(n+1)+1\right)x_{n+1}^3=$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^3+\left(3n^2+3n+1\right)x_{n+1}^3\leq$$

$$\leq\left(\sum_{k=1}^{n+1}x_k\right)^3-3x_{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2-3x_{n+1}^2\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)-x_{n+1}^3+\left(3n^2+3n+1\right)x_{n+1}^3\leq$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1}x_k\right)^3+\left(3n^2+3n+1\right)x_{n+1}^3-3n^2x_{n+1}^3-3nx_{n+1}^3-x_{n+1}^3=\left(\sum_{k=1}^{n+1}x_n\right)^3.$$

Az utolsó becslésnél felhasználtuk, hogy $\sum_{k=1}^{n}x_k\geq nx_{n+1}$. A matematikai indukció elve alapján a bizonyítandó egyenlőtlenség igaz bármely $n\geq 1$ esetén.

4. Jelöljük n_1, n_2, …, n_k-val az asztaloknál levő helyek számát. Ha az n_1, n_2, …, n_k legkisebb közös többszöröse N, akkor N perc után minden asztalnál ismét az eredeti sorrendben ülnek, tehát kezdődhet a tánc. Természetesen előfordulhat, hogy ez a szám annyira nagy, hogy ennyi helycsere gyakorlatilag kivitelezhetetlen.

5. a) Legyen p az n legkisebb prímosztója. Az $a = p - 1$ és $b = p + 1$ számok n-nél kisebbek, és n-el relatív prímek valamint egymást követő páros számok.

b) A feladat feltételei mellett $n = p_1^{l_1} p_2^{l_1} \dots p_h^{l_h}$ alakba írható ($2 < p_1 < p_2 < \dots < p_h$). Legyen $a = p_1$ és $b = p_2 \dots p_h$. Mivel a és b relatív prímek, következik, hogy létezik $c, d \in \mathbb{Z}$ úgy, hogy $ca + db = 1$, és $|ca| < n$.

1.eset: Ha c pozitív, akkor $b \mid ca - 1 \Rightarrow (b, ca - 2) = 1$ és $(b, ca + 1) = 1$. Természetesen $(a, ca + 1) = 1$ és $(a, ca - 2) = 1$. Ezek után egyszerű belátni, hogy $ca - 2$ és $ca + 1$ két egymást követő n-nél kisebb és n-nel relatív prím.

2.eset: Ha c negatív, akkor $b \mid -ca + 1 \Rightarrow (b, -ca + 2) = 1$ és $(b, -ca - 1) = 1$. Természetesen $(a, -ca - 1) = 1$ és $(a, -ca + 2) = 1$. Ezek után egyszerű belátni, hogy $-ca + 2$ és $-ca - 1$ két egymást követő n-nél kisebb és n-nel relatív prím.

6. Nyilván ha valamelyik halmaz üres, akkor a másikban sem lehet egy elem sem, de $A \cup B = \{1, 2, \dots, n\}, n \geq 1$ miatt ez lehetetlen. Tehát egyik halmaz sem üres, és így $n \geq 2$.

Az $A = \{x + y \mid xy \in B, x, y \in \mathrm{N}^*\}$ feltételt úgy tudjuk átírni, hogy az A csakis olyan elemeket tartalmaz, amelyek felírhatók $x + y$ alakban, ahol $x, y \in \mathbb{N}^*$ és $xy \in B$, és minden ilyen típusú elemet tartalmaz. Hasonlóan átírhatjuk a másik feltételt is.

Ha $n = 2$, akkor az $A = \{2\}, B = \{1\}$ halmazok megfelelnek, mivel $2 = 1 + 1, 1 \cdot 1 = 1 \in B$ és $1 = 1 \cdot 1, 1 + 1 = 2 \in A$.

Ha $n = 3$, az 1 nem lehet A-ban, mivel ekkor $1 = x + y, x, y \in \mathbb{N}^*$ kellene, ami lehetetlen ($x, y \geq 1$). Tehát $1 \in B$, így mivel $1 = 1 \cdot 1 \Rightarrow 1 + 1 = 2 \in A$. Ha $3 \in A$, akkor $3 = 1 + 2 \Rightarrow 1 \cdot 2 = 2 \in B$ ellentmondás, mert $2 \in A$. Ha $3 \in B$, akkor $3 = 1 \cdot 3 \Rightarrow 1 + 3 = 4 \in A$ ellentmondás mert $n = 3$. Tehát $n = 3$ esetén nem léteznek ilyen halmazok.

Bebizonyítjuk, hogy $n \geq 4$ esetén sem léteznek megfelelő halmazok. Ha $4 \in A$, akkor $4 = 2 + 2 \in A$ miatt $2 \cdot 2 = 4 \in B$ lehetetlen. Ha $4 \in B$, akkor $4 = 2 \cdot 2 \in B$ miatt $2 + 2 = 4 \in A$ lehetetlen. Tehát a 4 nem lehet benne egyik halmazban sem, így nem létezik megfelelő A és B halmaz.

X. osztály

1. Alkalmazzuk a számtani mértani közepek közti egyenlőtlenséget 2006 darab 1-esre és x^{2008}-ra, illetve y^{2008}-ra.

$$\frac{x^{2008} + y^{2008} + 2006}{2008} \geq \sqrt[2008]{x^{2008} y^{2008}} = |xy| \geq xy.$$

Egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha $x^{2008} = y^{2008} = 1$ és x, illetve y azonos előjelűek, tehát csak az $x = y = 1$ illetve $x = y = -1$ megoldások léteznek.

2. A b) feltétel alapján felírhatjuk, hogy $a = b - r$, $c = b + r$, ahol $r > 0$ a haladvány állandó különbsége.

$$n = \overline{abc}_x + \overline{bca}_x + \overline{cab}_x = (a + b + c)\left(x^2 + x + 1\right) = 3b\left(x^2 + x + 1\right).$$

Az x^2+x+1 összeg csak $5m+1,\ 5m+2,\ 5m+3$ alakú lehet, azaz nem osztható 5-tel. Ezért n csak akkor osztható 15-tel, ha b osztható 5-tel, és mivel b számjegy, $b=5$. A számrendszer alapja tehát legalább 7 kell legyen, mert ha $b=5$ és az a, b, c számok egy szigorúan növekvő számtani haladványt alkotnak, akkor $c\geq 6$. Sorra vesszük az x lehetséges értékeit, és a következő megoldásokat kapjuk:

$$\begin{cases}a=4\\ b=5\\ c=6\\ x=7\end{cases},\ \begin{cases}a=4\\ b=5\\ c=6\\ x=8\end{cases},\ \begin{cases}a=3\\ b=5\\ c=7\\ x=8\end{cases},\ \begin{cases}a=4\\ b=5\\ c=6\\ x=9\end{cases},\ \begin{cases}a=3\\ b=5\\ c=7\\ x=9\end{cases},\ \begin{cases}a=2\\ b=5\\ c=8\\ x=9\end{cases}.$$

3. Ha $n=1$, akkor $x+y=x-y\Rightarrow y=0$, így $(x,0)$ párok megoldások, $\forall x\in\mathbb{C}$. Ha $n\geq 2$ az első egyenletet n-re emelve, a másodikat behelyettesítve majd átrendezve kapjuk, hogy $(x+y)\left[(x+y)^{n^2-1}-1\right]=0$, ahonnan $x+y=0$ vagy $(x+y)^{n^2-1}=1$. Az első esetben $x+y=0$ és $x-y=0$, tehát az $x=y=0$ megoldás adódik. A második esetben $x+y=\cos\frac{2k\pi}{n^2-1}+i\sin\frac{2k\pi}{n^2-1}$, ahol $k\in\{0,1,2,\ldots,n^2-2\}$. Innen $x-y=\cos\frac{2kn\pi}{n^2-1}+i\sin\frac{2kn\pi}{n^2-1}$, tehát a megoldások

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2k\pi}{n^2-1}+\cos\frac{2kn\pi}{n^2-1}\right)+\frac{i}{2}\left(\sin\frac{2k\pi}{n^2-1}+\sin\frac{2kn\pi}{n^2-1}\right)\\ y=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2k\pi}{n^2-1}-\cos\frac{2kn\pi}{n^2-1}\right)+\frac{i}{2}\left(\sin\frac{2k\pi}{n^2-1}-\sin\frac{2kn\pi}{n^2-1}\right)\end{cases},$$

ahol $k\in\{0,1,2,\ldots,n^2-2\}$.

4. 1. megoldás. Mivel az x^2+xy+y^2 kifejezés a koszinusz tételben szereplő kifejezés, ezért létezik egy olyan háromszög amelynek az oldalai $2,x,y$, hasonlóan létezik olyan háromszög amelynek az oldalai $\sqrt{7},y,z$ és létezik olyan háromszög amelynek oldalai $\sqrt{3},z,x$. Ezeknek a háromszögeknek az x,y, y,z, illetve z,x oldalai által bezárt szög mértéke 120^0. Ha ezeket a kis háromszögeket összeillesztenénk a megfelelő oldalnál akkor egy olyan háromszöget kapnánk amelynek belsejében van egy olyan pont amelyből minden oldal 120^0 fokos szög alatt látszik, és amelynek oldalai $2,\sqrt{3},\sqrt{7}$. Ez a háromszög derékszögű és a területe $\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$. Ugyanakkor a kis háromszögek területének összege a nagy háromszög területe, tehát

$$\sum_{x,y,z}\frac{xy\sin 120^0}{2}=\sum_{x,y,z}\frac{xy}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}(xy+yz+zx).$$

Tehát $\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}(xy+yz+zx)$ és így $xy+yz+zx=4$.

2. megoldás. Az első egyenlőség mindkét oldalát beszorozzuk $(x-y)$-nal, stb. Azt kapjuk, hogy:

$$x^3 - y^3 = 4x - 4y\,,$$
$$y^3 - z^3 = 7y - 7z\,,$$
$$z^3 - x^3 = 3z - 3x\,.$$

Ha összeadjuk a megfelelő oldalakat azt kapjuk, hogy $z = \dfrac{x+3y}{4}$. Az első és a harmadik összege egyenlő a másodikkal (a jobb oldal miatt), ahonnan $2x^2 + xy + zx = yz$, ide $z = \dfrac{x+3y}{4}$-t helyettesítve, $3x^2 + 2xy - y^2 = 0$ adódik. Ez alapján $y = 3x$ (közben használjuk, hogy $x, y > 0$, tehát azonos előjelűek), tehát $z = \dfrac{5x}{2}$ és így $13x^2 = 4$, vagyis $x > 0$ alapján $x = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$, $y = \dfrac{6}{\sqrt{13}}$, $z = \dfrac{5}{\sqrt{13}}$ és innen $xy + yz + zx = 4$.

5. Először azt igazoljuk, hogy ha a háromszög egyenlő oldalú, akkor $PB = PA + PC$.

1. módszer: A *PABC* körbeírt négyszögre felírjuk Ptolemaiosz tételét: $PA \cdot BC + PC \cdot AB = AB \cdot AC$, ahonnan, mivel $AB = BC = CA$, kapjuk, hogy $PB = PA + PC$.

2 .módszer: PC-t a *C* felől meghosszabbítjuk a *PD* szakasszal, úgy hogy *PD*=*PA*. Azt kapjuk, hogy *PD*=*PA*+*PC*, tehát igazolni kell, hogy *PD*=*PB*. Könnyen belátható, hogy a *BAP* háromszög egybevágó a *BCD* háromszöggel, ahonnan következik, hogy *PB*=*BD*. Mivel a *BPD* szög 60°, következik, hogy a PBD háromszög egyenlő oldalú, tehát *PB*=*PD*.

A továbbiakban igazoljuk a kijelentés fordítottját. Mivel $PB = PA + PC$ minden *P*-re az $\overset{\frown}{AC}$ körívről, ezért sajátosan a *P*-t úgy választjuk meg, hogy először az $\overset{\frown}{AC}$ körív felezőpontja legyen, majd a *C*-hez közelebbi harmadoló pontja legyen. Mindkét esetben felírva Ptolemaiosz tételét a *PABC* négyszögre azt kajuk, hogy: $PA \cdot BC + PC \cdot AB = AB \cdot AC$, ahonnan egyik esetben következik, hogy $BC + AB = 2AC$, a másik esetben, pedig a $2BC + AB = 3AC$ összefüggés. Ezen utóbbi két egyenlőségből következik, hogy *BC*=*AC*. Ha a *P*-t úgy választjuk meg, hogy először az $\overset{\frown}{AC}$ körív felezőpontja legyen, majd az A-hoz közelebbi harmadoló pontja legyen a fentiekhez hasonlóan azt kapjuk, hogy *AB*=*AC*, tehát a háromszög egyenlő oldalú.

6. Belátjuk, hogy 2^n létszámú szurkolótábor esetén kieszelhető egy stratégia, amely a szurkolótábort szerencsséssé teszi.

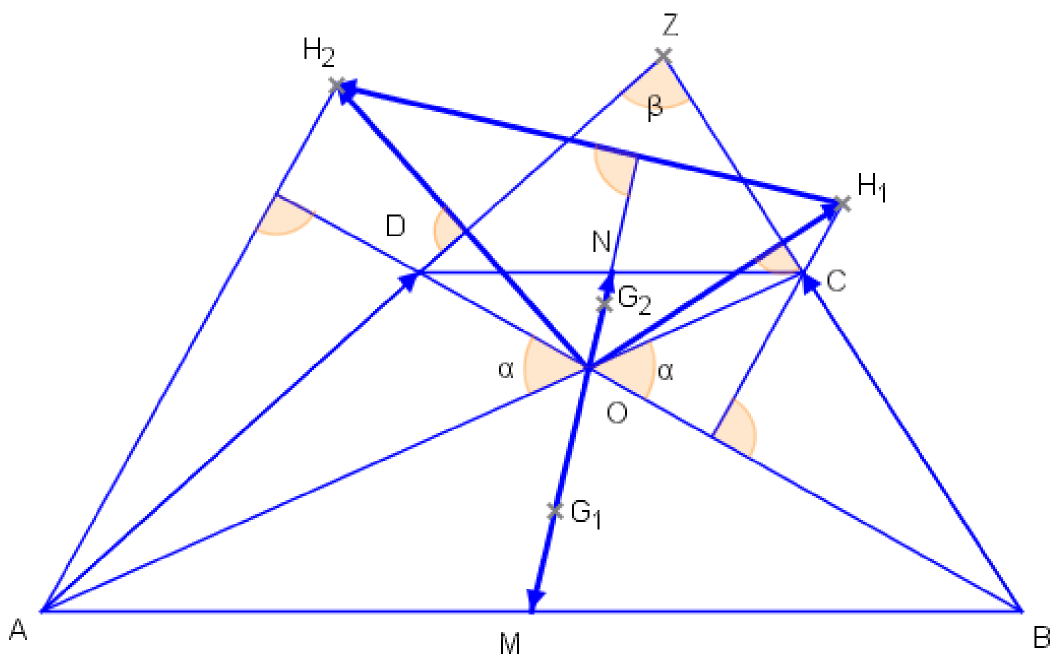
Az első mérkőzés előtt a szurkolótábor vezetője kijelöl 2^{n-1} embert aki megnézheti a mérkőzést, a többi nem mehet el. Így az első mérkőzés után pontosan 2^{n-1} szurkoló reménykedhet abban, hogy szerencsés lesz a idény végén. Ezek közül a szurkolótábor vezetője kijelöl 2^{n-2} embert, aki megnézheti a második mérkőzést, a többi pedig nem mehet el. Ezt a módszert folytatva, az idény végére lesz pontosan egy szerencsés szurkoló.

Belátható, hogy ennél kevesebb szurkoló esetén nem biztosítható hasonló stratégia. Az utolsó mérkőzés előtt léteznie kell legalább 2 „addig” szerencsés szurkolónak. Ellenkező esetben az utolsó mérkőzés kimenetele befolyásolhatja azt, hogy szerencsés lesz-e a szurkolótábor vagy sem. Hasonló meggondolás alapján az utolsóelőtti mérkőzés előtt legalább 4 „addig” szerencsés szurkoló szükséges, az azelőtti mérkőzés előtt 8 és általában az első mérkőzés előtt 2^n.

XI-XII. osztály

1. Igazoljuk, hogy a determináns értéke páratlan. Ha a determináns minden elemét helyettesítjük a 2-vel való osztási maradékával, akkor az így kapott determináns paritása megegyezik az eredeti determináns paritásával. Másrészt az így kapott determináns kifejtése, az értelmezés alapján, csak egy nemnulla tagot tartalmaz és az 1 vagy -1. Ez alapján az eredeti determináns páratlan, tehát nem lehet 0.

2.



Mivel G_1 és G_2 rajta van az OM és ON oldalfelezőn és a trapézban M, O, N kollineáris, elég igazolni, hogy $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{H_1H_2} = 0$. Ezt a következőképpen alakíthatjuk

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{H_1H_2} = \left(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}\right) \cdot \left(\overrightarrow{OH_1} - \overrightarrow{OH_2}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{OH_1} - \overrightarrow{OH_2}\right) = 0$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OH_2} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OH_2} - \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OH_1} = 0. \; (1)$$

Mivel $AD \perp OH_2$ és $BC \perp OH_1 \Rightarrow \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OH_2} = 0$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OH_1} = 0$, illetve $m\left(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{OH_2}}\right) = m\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OH_1}}\right) = 90^\circ - \beta$ és ha az OBC illetve az ODA háromszögekben felírjuk a BC, OH_1, illetve AD, OH_2 szakaszokat a köré írt kör sugarának függvényében, következik, hogy $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OH_2}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OH_1}=0$ azaz teljesül az (1) egyenlőség.

3. A feladat feltételei mellett $n=2^l p_1^{l_1} p_2^{l_1}...p_h^{l_h}$ alakba írható (p_i különböző páratlan prímek). Ha $a=p_1p_2...p_h-2$ és $b=p_1p_2...p_h+2$, akkor a és b két egymást követő páratlan szám, n-nél kisebbek és n-nel relatív prímek.

4. Az e-edik sor f-edik poharát ha összesen x_{ef}-szer forgatjuk, akkor a pohárforgatások száma $\sum_{e=1}^{m}\sum_{f=1}^{n}x_{ef}$. Ha a kívánt állapot elérhető, akkor ennek a paritása megegyezik az mn paritásával, mert ez mn darab páratlan szám összege. Másrészt egyszerre ij darab forgatást végzünk, tehát ijv a forgatások száma, ahol v a lépések száma. Eszerint ijv és mn ugyanolyan paritásúak. Ez lehetetlen, ha az m és n páratlan de az i és j közül valamelyik páros. Sőt ha i is és j is páros, de az m és n közül csak az egyik páros, akkor szintén nem lehetséges, mert ebben az esetben minden sorban és minden oszlopban a fordítások száma páros, de ugyanakkor, ha m páratlan, akkor minden oszlopban (és ha n páratlan, akkor minden sorban) páratlan sok forgatást kellene végezni. A továbbiakban igazoljuk, hogy ha i és j páratlan, akkor tetszőleges m,n esetén, ha i páros és j páratlan, akkor páros m-re és tetszőleges n-re, ha j páros és i páratlan, akkor páros n-re és tetszőleges m-re, míg ha i-is és j-is páros, akkor páros m-re és n-re elérhető a kívánt konfiguráció.

Ha i páratlan, akkor minden pohár i-szer fordul meg egy oszlopban, ha rendre kiválasztjuk a k-adik elemtől kezdődően a következő i sort (az utolsó után az első következik). Ha i páros, akkor az első $i-1$ sort mindig választjuk és az utolsó sornak rendre választjuk az i-edik, $(i+1)$-edik, stb., n-edik sort választjuk. Így ismét minden pohár páratlan sokszor fordul meg.Ha ezt a két kiválasztási formát összekombináljuk, mindig elérhető a kívánt állapot.

5. Észrevehető, hogy ha n osztja az m-et, akkor az F_n osztja az F_m-et, tehát elégséges igazolni, hogy ha az $\{1,2,...,2n\}$ halmazból kiválasztunk $n+1$ elemet, akkor köztük mindig lesz két olyan szám melyek közül az egyik osztója a másiknak. Ennek érdekében a kiválasztott $n+1$ számot $2^k\cdot p$ alakba írjuk, ahol p páratlan és $p\le 2n-1$. Mivel 1-től $2n$-ig csak n páratlan szám van, ezért a kiválasztott $n+1$ szám közül legalább két számnál a p ugyanaz kell legyen, vagyis van két olyan szám, amelyek $2^k\cdot p$ és $2^l\cdot p$ alakúak, amelyek közül az egyik osztója a másiknak.

6. A mezőket kifestjük sakktáblaszerűen, így két oldalszomszédos mező színe különböző. A fekete mezőn szereplő számok összegéből kivonjuk a fehér mezőn szereplő számok összegét. Ez a különbség nem változik, ha két oldalszomszédos mezőn szereplő számot ugyanazzal a természetes számmal növeljük, vagy csökkentjük.

A csiga is fekete mezőről fehérre, és fehérről feketére lép, így a páros számok mind azonos színű mezőkön helyezkednek el, a páratlanok szintén. Tehát a kiinduló különbség $1-2+3-4+...+99-100=-50$ vagy 50. Ahhoz, hogy minden mezőn ugyanaz a szám szerepeljen, ez a különbség 0 kellene legyen, viszont ez nem lehetséges, mert ez a különbség invariáns.

Megoldások
2. nap
IX. osztály

1. Az $n=1$ esetén $x_1=2$. Az $n=2$ esetén $x_1=2$ és $x_2=3$ (vagy fordítva). A továbbiakban a matematikai indukció módszerével igazoljuk, hogy tetszőleges $n\geq 3$ esetén is léteznek olyan természetes számok, amelyek teljesítik az adott egyenlőséget. Ha $n+1$-re is ugyanazokat az $x_1,x_2,\ldots,x_n$ számokat használjuk, akkor az

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_1x_2\ldots x_n}=1 \text{ és}$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_{n+1}}+\frac{1}{x_1x_2\ldots x_{n+1}}=1$$

egyenlőségekből következik, hogy

$$\frac{1}{x_{n+1}}+\frac{1}{x_1x_2\ldots x_nx_{n+1}}=\frac{1}{x_1x_2\ldots x_n}.$$

Ha ebből kifejezzük az x_{n+1}-et, akkor az $x_{n+1}=1+x_1x_2\ldots x_n$ összefüggést kapjuk, tehát ha $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{N}^*$, akkor $x_{n+1}\in\mathbb{N}^*$ és így a matematikai indukció elve alapján következik a feladat állítása.

2. A P ponton keresztül MN, TQ, RS párhuzamosokat húzunk a BC, AC és AB oldalakkal $\left(R,Q\in BC,\ N,S\in AC,\ M,T\in AB\right)$. Az így keletkezett PRQ, PNS, PTM háromszögek az ABC háromszöggel hasonlóak és bennük a PA', PB', PC' szakaszok oldalfelezők. Ezért

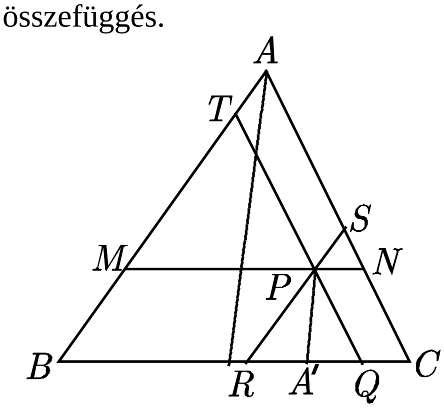
$$2\cdot\overrightarrow{PA'}=\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{PQ},\ \ 2\cdot\overrightarrow{PB'}=\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PS},\ \ 2\cdot\overrightarrow{PC'}=\overrightarrow{PT}+\overrightarrow{PM}.$$

$$2\cdot\left(\overrightarrow{PA'}+\overrightarrow{PB'}+\overrightarrow{PC'}\right)=\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{PT}+\overrightarrow{PM}\Leftrightarrow$$

$$2\cdot\left(\overrightarrow{PA'}+\overrightarrow{PB'}+\overrightarrow{PC'}\right)=\left(\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{PM}\right)+\left(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PN}\right)+\left(\overrightarrow{PT}+\overrightarrow{PS}\right)\Leftrightarrow$$

$$2\cdot\left(\overrightarrow{PA'}+\overrightarrow{PB'}+\overrightarrow{PC'}\right)=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}=3\cdot\overrightarrow{PG},$$

ahonnan következik a kért összefüggés.



3. Először kiszámítjuk az $S_n = \left\{\frac{2}{3}\right\} + \left\{\frac{2^2}{3}\right\} + \ldots + \left\{\frac{2^n}{3}\right\}$ összeget. Ha $k \in \mathbb{N}^*$ és k páros, akkor $\frac{2^k}{3} = \frac{2^{2m}}{3} = \frac{4^m - 1 + 1}{3} = 4^{m-1} + 4^{m-2} + \cdots + 1 + \frac{1}{3}$, tehát $\left\{\frac{2^k}{3}\right\} = \frac{1}{3}$. Ha k páratlan, akkor

$$\begin{aligned} \frac{2^k}{3} = \frac{2^{2m+1}}{3} = 2\frac{2^{2m}}{3} = 2\frac{4^m}{3} = 2\left(4^{m-1} + 4^{m-2} + \ldots + 1 + \frac{1}{3}\right) = \\ = 2\left(4^{m-1} + 4^{m-2} + \ldots + 1\right) + \frac{2}{3} \end{aligned},$$

tehát $\left\{\frac{2^k}{3}\right\} = \frac{2}{3}$. Ezek alapján $S_n = \frac{n}{2}$, ha n páros és $S_n = \frac{3n+1}{6}$, ha n páratlan. Alkalmazzuk a Cauchy-Bunjakowski egyenlőtlenséget a $\sqrt{a_1}$, $\sqrt{a_2}$, …, $\sqrt{a_n}$, illetve $\sqrt{\left\{\frac{2}{3}\right\}}, \sqrt{\left\{\frac{2^2}{3}\right\}}, \ldots, \sqrt{\left\{\frac{2^n}{3}\right\}}$ számokra (és használjuk azt, hogy n páros):

$$\sqrt{a_1\left\{\frac{2}{3}\right\}} + \sqrt{a_2\left\{\frac{2^2}{3}\right\}} + \ldots + \sqrt{a_n\left\{\frac{2^n}{3}\right\}} \le \sqrt{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}\sqrt{S_n} = \sqrt{\frac{n}{2} + 2\frac{n}{2}} \cdot \sqrt{\frac{n}{2}} = \frac{n\sqrt{3}}{2}.$$

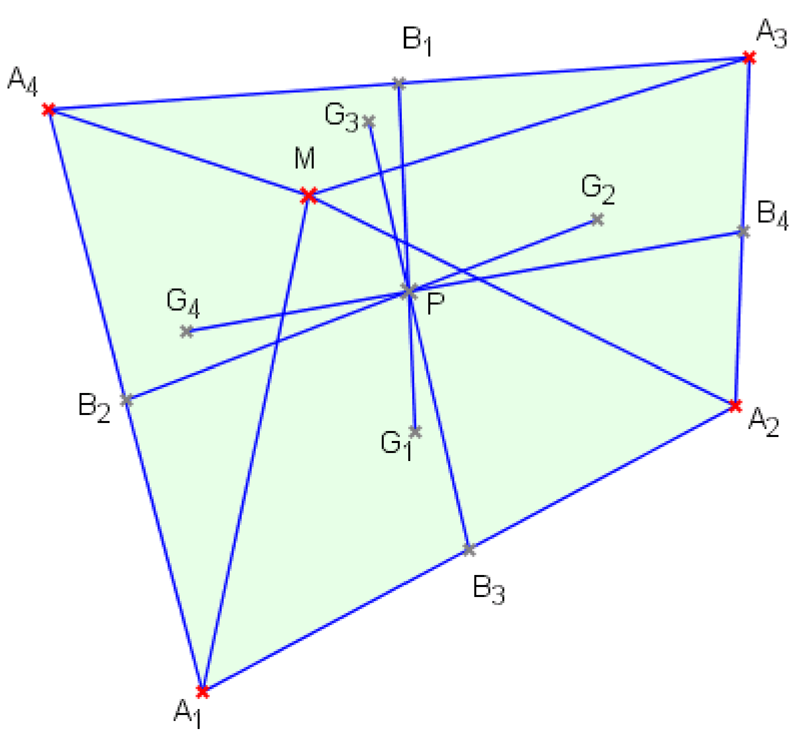
4. A B_1G_1 és B_3G_3 metszéspontját jelöljük P-vel. A $B_1B_3G_1G_3$ négyszög trapéz és az MB_1B_3 háromszögben $\frac{MG_3}{MB_1} = \frac{2}{3}$, tehát $\frac{G_3P}{PB_3} = \frac{G_1G_3}{B_1B_3} = \frac{2}{3}$. Ezek alapján írhatjuk, hogy

$$\overrightarrow{MP} = \frac{3\cdot\overrightarrow{MG_1} + 2\cdot\overrightarrow{MB_1}}{5} = \frac{2\cdot\overrightarrow{MB_3} + 2\cdot\overrightarrow{MB_1}}{5} = \frac{\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3} + \overrightarrow{MA_4}}{5}.$$

Hasonlóan a B_2G_2 és B_4G_4 szakaszok P' metszéspontjára is teljesül az

$$\overrightarrow{MP'} = \frac{\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3} + \overrightarrow{MA_4}}{5}$$

összefüggés, tehát a négy szakasz összefutó.



X. osztály

1. Mivel g szürjektív, létezik olyan $y_0 \in \mathbb{R}$, amelyre $g(y_0) = 1$. A feltétel alapján

$$f(g(xy_0)) = f(x).$$

Az f injektivitása alapján következik, hogy $g(xy_0) = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Az y_0 nem lehet 0 és így $g(u) = \frac{1}{y_0} u$, $\forall\, u \in \mathbb{R}$. Ha ezt visszahelyettesítjük az adott feltételbe, akkor az

$$f(axy) = ayf(x)$$

egyenlőséghez jutunk, ahol $a = \frac{1}{y_0}$. Az $x = \frac{1}{a}$ értékre következik, hogy $f(y) = af\left(\frac{1}{a}\right)y$, $\forall\, y \in \mathbb{R}$, tehát az $af\left(\frac{1}{a}\right) = b$ jelöléssel $f(x) = bx$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Látható, hogy ezek a függvények teljesítik a megadott összefüggést.

2. Vegyük észre, hogy $x = 2$ megoldása az egyenletnek. Bebizonyítjuk, hogy más megoldása nincs. Az értelmezési tartomány $\left(\sqrt[10]{24}, +\infty\right)$. Ha $\sqrt[10]{24} < x < 2$, akkor az egyenlet bal oldala negatív, a jobb oldala pozitív. Ha $x > 2$, akkor az egyenlet bal oldala pozitív, a jobb oldala negatív.

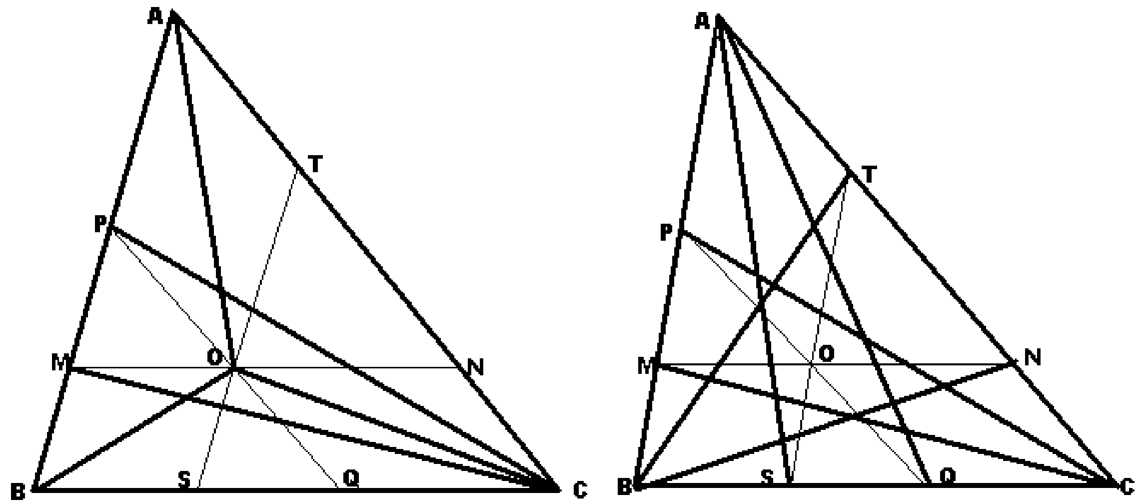
3. Az a) alpontot számolással ellenőrizzük. A továbbiakban tekintsük az ABC háromszög köré írt kör középpontját origónak és legyen α, β és γ az A, B és C csúcs affixuma valamint z a P pont affixuma. Ha A_1, B_1 és C_1 az oldalak felezőpontjai, akkor $PA_1 = \left|z - \frac{\gamma+\beta}{2}\right|$, $PB_1 = \left|z - \frac{\alpha+\gamma}{2}\right|$ és $PC_1 = \left|z - \frac{\alpha+\beta}{2}\right|$. Így $R = |\alpha| = |\beta| = |\gamma|$ és $a = |\beta - \gamma|$, $b = |\gamma - \alpha|$, illetve $c = |\alpha - \beta|$. Az a) alpontban igazolt összefüggésbe helyettesítsünk z helyett $2z$-t. Világos, hogy az azonosság alapján írhatjuk, hogy

$$\left|\frac{\alpha(2z-\beta-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\right| + \left|\frac{\beta(2z-\gamma-\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}\right| + \left|\frac{\gamma(2z-\alpha-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\right| \geq 1$$

és ez épp a bizonyítandó egyenlőtlenség.

A második egyenlőtlenség igazolása hasonló, csak origónak a háromszög magasságpontját tekintjük és P-t a súlypontnak választjuk.

4. Jelölje T az ABC háromszög területét.



$$T[CMP] = T - T[ACP_\Delta] - T[BCM_\Delta] = T - T[ACO_\Delta] - T[BOC_\Delta] \Rightarrow$$
$$T[CMP_\Delta] = T[AOB_\Delta].$$

Hasonlóképp

$$T[BNT_\Delta] = T[AOC_\Delta];$$
$$T[ASQ_\Delta] = T[BOC_\Delta].$$
$$T[ASQ_\Delta] + T[BNT_\Delta] + T[CMP_\Delta] = T[AOB_\Delta] + T[AOC_\Delta] + T[BOC_\Delta] = T.$$

XI. osztály

1. Felírva a megadott összefüggést (n+1)-re is és abból kivonva az n-re megadott összefüggést azt kapjuk, hogy $x_{n+1}^2 = x_{n+1}x_{n+2} - x_{n+1}x_n$, $\forall n \geq 1$, vagyis, hogy

$$x_{n+1}(x_{n+1} - x_{n+2} + x_n) = 0,\ \forall n \geq 1,$$

ahonnan következik, hogy bármely $n \geq 1$ esetén $x_{n+1} = 0$ vagy $x_{n+1} - x_{n+2} + x_n = 0$.

Ha létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}^*$, amelyre $x_{n_0} = 0$, akkor, mivel $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n_0}^2 = x_{n_0}x_{n_0+1}$, következik, hogy $x_1 = x_2 = ... = x_{n_0} = 0$. Tehát ha a sorozatnak minden határon túl van 0-ás tagja, akkor minden tagja 0, ami teljesíti is a feladatban megadott feltételt.

A továbbiakban azt az esetet vizsgáljuk, amikor a sorozatnak nem minden tagja 0. Ebben az esetben létezik olyan n_0 természetes szám úgy, hogy a sorozat tagjai az n_0-adik tagig mind nullák, és attól kezdve egy tagja sem nulla. Legyen a a sorozat első nullától különböző tagja. Könnyen belátható, hogy a következő tagok a $2a$, $3a$, $5a$, $8a$, …, $F_k a$,…, ahol F_k a *Fibonacci*-sorozat *k*-adik tagja.

Tehát a megadott feltételt csak a 0, 0, …, 0, a, a, $2a$, $3a$, $5a$, $8a$, …, $F_k a$,… alakú sorozatok teljesítik.

2. Mivel a B mátrix $(2n,n)$ típusú, az A pedig $(n,2n)$ típusú, a BA szorzat $(2n,2n)$ típusú lesz. Az A és a B mátrixok rangja legfeljebb n lehet, a szorzat rangja viszont nem lehet nagyobb a tényezők rangjának minimumánál, tehát a *BA* rangja is legfeljebb n lehet. Ez azt jelenti, hogy a $(2n,2n)$ típusú BA mátrix determinánsa nulla.

3. $a \cdot AB = I_n + b \cdot BA \Leftrightarrow a \cdot (AB - BA) = I_n + (b-a) \cdot BA$.

$$a \cdot AB = I_n + b \cdot BA \Leftrightarrow b \cdot (AB - BA) = I_n + (b - a) \cdot AB.$$

Tudjuk, hogy bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ és $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ esetén igaz a következő összefüggés:

$$\det(I_n + \lambda \cdot AB) = \det(I_n + \lambda \cdot BA).$$

Ez alapján

$$\det[I_n + (b - a) \cdot BA] = \det[I_n + (b - a) \cdot AB]$$

tehát

$$\det(a \cdot (AB - BA)) = \det(b \cdot (AB - BA)) \text{ vagyis}$$

$$a^n \cdot \det(AB - BA) = b^n \cdot \det(AB - BA) \text{ ahonnan}$$

$$(a^n - b^n) \cdot \det(AB - BA) = 0 \text{ és így } \det(AB - BA) = 0.$$

4. Az $a = 0$ esetén a sorozat minden tagja 0, a sorozat állandó, konvergens és határértéke 0. Az $a = 4$ esetén a sorozat: $4, 2, 2, \ldots, 2, \ldots$, ez szintén állandó sorozat a második tagtól kezdve, tehát konvergens és határértéke 2. Mindkét sorozatra teljesül a vizsgált egyenlőség.

Legyen $a \neq 2$ és $a \neq 0$. Az $n = 1$ esetén az egyenlőség nyilvánvaló. Az $n = 2$ esetén

$$a_1 + 2a_2 = a + \frac{2a}{a - 2} = \frac{a^2}{a - 2} = a_1 a_2.$$

$n \geq 2$ esetén a rekurzív összefüggés $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{a_n^2 - 2(a_n - 1)}$ alakba írható. Ez felírható

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n+1} - 1} = \frac{a_n^2}{2(a_n - 1)}$$

alakba, ahonnan egyrészt

$$a_n = 2 \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n - 1}{a_{n+1} - 1},$$

másrészt

$$a_n = 2\frac{a_{n+1}}{a_{n+1} - 1} - \frac{a_n}{a_n - 1}.$$

Ezeket az összefüggéseket felírjuk $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, …stb. értékekre, majd az első esetben összeszorozzuk, második esetben, szorozva rendre a 2, 2^2, 2^3, stb. tényezőkkel, összeadjuk, és mindkét esetben figyelembe vesszük azt, hogy $a_1 = \dfrac{2a_2}{a_2 - 1}$. Így egyrészt az

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = 2^n \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} - 1}$$

másrészt az

$$a_1 + 2a_2 + 2^2 a_3 + \ldots + 2^{n-1} a_n = 2^n \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} - 1}$$

összefüggéseket kapjuk. Tehát $a_1 + 2a_2 + 2^2 a_3 + \ldots + 2^{n-1} a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$, bármely $n \geq 1$ esetén.

Vizsgáljuk most a sorozat konvergenciáját és határozzuk meg a határértékét.

A rekurzív összefüggés alapján $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{a_n^2 - 2a_n + 2} \geq 0$, ha $n \geq 2$, vagyis a sorozat alulról korlátos. Másrészt $a_{n+1} - 2 = \dfrac{-(a_n - 2)^2}{a_n^2 - 2a_n + 2} \leq 0$, ha $n \geq 2$, vagyis a sorozat felülről is korlátos. Tehát a sorozat korlátos.

Továbbá $a_{n+1} - 1 = \dfrac{2(a_n - 1)}{a_n^2 - 2a_n + 2}$, ha $n \geq 2$, vagyis a sorozat harmadik tagjától kezdve minden tagja nagyobb mint 1, vagy minden tagja kisebb mint 1 ($a_2 \neq 1$ és $a_n \neq 1$, ha $n \geq 2$).

Végül $a_{n+1} - a_n = \dfrac{-a_n(a_n - 1)(a_n - 2)}{a_n^2 - 2a_n + 2}$, $n \geq 2$, alapján következtethetünk a sorozat monotonitására.

Ha $a_1 = a < 0$, akkor $a_2 = \dfrac{a}{a-2} > 0$ és $a_2 < 1$, tehát $a_n < 1$, bármely $n \geq 2$ esetén. A sorozat korlátos és a második tagtól kezdve szigorúan csökkenő, tehát konvergens.

Ha $a_1 = a \in (0,2)$, akkor $a_2 = \dfrac{a}{a-2} < 0$, de $0 < a_3 < 1$ és így $a_n < 1$, bármely $n \geq 2$ esetén. A sorozat korlátos és a harmadik tagtól kezdve szigorúan csökkenő, tehát konvergens.

Ha $a_1 = a > 2$, akkor $a_2 = \dfrac{a}{a-2} > 1$, de $1 < a_3 < 2$ és így $a_n > 1$, bármely $n \geq 2$ esetén. A sorozat korlátos és a harmadik tagtól kezdve szigorúan növekvő, tehát konvergens.

Ha x a sorozat határértéke, akkor a rekurzív összefüggésben határértékre térve kapjuk az $x = \dfrac{x^2}{x^2 - 2x + 2}$ egyenletet, ami ekvivalens az $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ egyenlettel. A megoldások 0, 1 és 2. Figyelembe véve a sorozat monotonitását, kapjuk, hogy a sorozat határértéke csak 0 vagy 2 lehet. Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } a < 2 \\ 2, & \text{ha } a > 2 \end{cases}$.

A sorozat általános tagjának a meghatározására a megadott rekurzív összefüggés mindkét oldalának vesszük a reciprokát:

$$\frac{1}{a_{n+1}}=1-\frac{2}{a_n}+\frac{2}{a_n^2}\,,\ n\geq 2\,.$$

$a\neq 0$ és $a\neq 2$ esetén szorzunk 2-vel és teljes négyzetet alakítunk ki:

$$\frac{2}{a_{n+1}}-1=\left(\frac{2}{a_n}-1\right)^2.$$

Az előbbi összefüggés alapján következik, hogy $\frac{2}{a_n}-1=\left(\frac{2}{a_1}-1\right)^{2^{n-1}}$ és így

$$a_n=\frac{2\cdot a^{2^{n-2}}}{a^{2^{n-2}}+(a-4)^{2^{n-2}}}\,,\ n\geq 2\,.$$

XII. osztály

1. Ha rendezzük a bizonyítandó egyenlőséget, akkor az

$$[f(\lambda)-g(\lambda)][f(\lambda)+g(\lambda)+5]=0$$

egyenlőséghez jutunk. Láthatjuk, hogy ez pontosan akkor teljesül, ha létezik, olyan $\lambda\in[0,1]$, amelyre $f(\lambda)=g(\lambda)$.

Jelöljük a fenti infimumok közös értékét m-el. A Weierstrass tétel alapján léteznek $\alpha,\beta\in[0,1]$ úgy, hogy $f(\alpha)=g(\beta)=m$. Legyen a továbbiakban $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)-g(x)$. Látható, hogy a h függvény folytonos az értelmezési tartományán. A fentiek alapján, $h(\alpha)=m-g(\alpha)\leq 0$ (mert a g infimuma m), hasonlóan $h(\beta)=f(\beta)-m\geq 0$. Ha $\alpha=\beta$, akkor megtaláltuk a keresett értéket, ellenkező esetben az általánosság leszűkítése nélkül feltehetjük, hogy $\alpha<\beta$. Ekkor a fentiek alapján létezik $\lambda\in[0,1]$ úgy, hogy $h(\lambda)=0$, vagyis $f(\lambda)=g(\lambda)$.

2. Első lépésben vegyük észre, hogy az adott egyenlőségbe x helyére $f(x)$ helyettesíthető és az következik, hogy

$$F(f(f(x)))F(f(x))=1\,,\ \forall\,x\in(1,+\infty)\,.$$

Ezt egybevetve az a) egyenlőséggel azt kapjuk, hogy

$$F(f(f(x)))=F(x)\,,\ \forall\,x\in(1,+\infty)\,.$$

Mivel $F'(x)=f(x)>0$, $\forall\,x\in(1,+\infty)$, következik, hogy F injektív és így az előbbi összefüggés alapján

$$f(f(x))=x\,,\ \forall\,x\in(1,+\infty)\,.$$

Második lépésben deriváljuk az adott egyenlőség mindkét oldalát:

$$f(f(x))f'(x)F(x)+f(x)F(f(x))=0\,,\ \forall\,x\in(1,+\infty)\,,$$

tehát

$$xf'(x)F(x)+\frac{f(x)}{F(x)}=0\,,\ \forall\,x\in(1,+\infty)\,,$$

ami azzal ekvivalens, hogy

$$xf'(x)+\frac{f(x)}{F^2(x)}=0\,,\ \forall\,x\in(1,+\infty)\,.$$

Ezt integrálva következik, hogy
$$xf(x)-F(x)=\frac{1}{F(x)}+c\,,\ \forall\, x\in(1,+\infty)\,.$$
Mivel $f(\sqrt{2})=\sqrt{2}$, az a) feltétel alapján $F(\sqrt{2})=1$ és így az előző egyenlőségben $c=0$, tehát
$$\frac{f(x)}{F(x)+\dfrac{1}{F(x)}}=\frac{1}{x},\ \forall\, x\in(1,+\infty)\,.$$
Ha ezt integráljuk, akkor a $\ln\sqrt{F^2(x)+1}=\ln x+c_1$ összefüggést kapjuk, tehát $F(\sqrt{2})=1$ alapján $F(x)=\sqrt{x^2-1}$ és $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, $\forall\, x\in(1,+\infty)$.

3. Az adott egyenlőség alapján $\det X^2=(\det X)^2=49$, tehát $\det X\in\{-7,7\}$. Ha $X=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$, akkor $X^2-(a+d)X+\det X\cdot I_2=0_2$, tehát
$$(a+d)X=\begin{pmatrix} 3 & -5\\ 5 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 7 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & -5\\ 5 & 15\end{pmatrix},$$
ha $\det X=7$ és
$$(a+d)X=\begin{pmatrix} 3 & -5\\ 5 & 8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 7 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -5\\ 5 & 1\end{pmatrix},$$
ha $\det X=-7$. Az első esetben $(a+d)^2=25$ a másodikban $(a+d)^2=-3$, tehát az egyenlet megoldásai $\begin{pmatrix} 2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 1\\ -1 & -3\end{pmatrix}$, $i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} -4 & -5\\ 5 & 1\end{pmatrix}$ és $-i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} -4 & -5\\ 5 & 1\end{pmatrix}$.
Ezeknek az összege 0_2. Másrészt
$$A^{2007}+B^{2007}+C^{2007}+D^{2007}=\begin{pmatrix} 3 & -5\\ 5 & 8\end{pmatrix}^{1003}(A+B+C+D)=0_2\,.$$

4. A $*$ művelet értelmezése alapján látható, hogy
$$(x*y)^\alpha-a=(x^\alpha-a)(y^\alpha-a),$$
tehát az $f_{a,\alpha}:G(a,\alpha)\to\mathbb{R}$, $f_{a,\alpha}(x)=x^\alpha-a$ függvény művelettartó. Másrészt ha $\operatorname{Im} f_{a,\alpha}=(0,\infty)$, tehát az $f_{a,\alpha}^{-1}:(0,\infty)\to G(a,\alpha)$ függvény bijektív és művelettartó a $((0,\infty),\cdot)$ és $(G(a,\alpha),*)$ struktúrák közt. Mivel az első Abel-csoport, a második is az és izomorfak. Ez alapján $(G(a,\alpha),*)$ és $(G(b,\beta),*)$ közti izomorfizmus $f_{a,\alpha}\circ f_{b,\beta}^{-1}$.