XVIII. Vályi Gyula Emlékverseny
2012 május 24-26

V. osztály

1. Adott a következő számsorozat: 2, 5, 8, 11, 14, …

a.) Határozzuk meg a sorozat 601-ik tagját.
b.) Vizsgáljuk meg, hogy a 2012 tagja-e a sorozatnak, és ha igen, akkor hányadik tagja.
c.) Számítsuk ki a sorozat első 100 tagjának összegét.

2. Ha az $N = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}$ szám osztható 3-mal, mutassuk ki, hogy az $\overline{abc}$ szám is osztható 3-mal.

3. Peti egy különleges vágógéppel egy A4-es papírlapot egy mozdulattal négy darabba vág. Majd veszi az egyik papírdarabot és egy újabb mozdulattal azt is négy darabba vágja.

a.) Hány papír darabja less Petinek 6 vágás (mozdulat) után?
b.) Létezik-e valamilyen n-től függő összefüggés (képlet), amely megmondja, hogy n lépés után hány papírdarabja lesz Petinek?
c.) Bizonyos idő múlva Peti változtat a vágási technikáján. Először egy A4-es lapot öt részre vág, majd vesz két kis darabot és mindkettőt öt részre vágja, majd vesz három kis darabot és azokat öt részre vágja és így tovább. Hány papírdarabja lesz a hetedik vágás után?

4. Az ötödik osztályban kettesével ülnek a gyerekek a padokban. Valahány padban ül egy lány és egy fiú és három padban cask fiúk ülnek. Egy nap három gyerek hiányzott, egy lány és két fiú. A többi gyerek öttagú csapatokat alkotva – minden csapatban két lány és három fiú volt – egy matematika versenyen vettek részt. Hány gyerek jár az osztályba?

1. Az $MPN\sphericalangle$ szög $(PM$ szárán felvesszük az A és B pontokat, a $(PN$ szárán pedig a C és D pontokat úgy, hogy $PA+PB=PC+PD$. Az (AB) és (CD) szakaszok oldalfelező merőlegesei az O pontban metszik egymást. Igazoljuk, hogy $[OA]\equiv[OB]$ és az O pont az MPN szög szögfelezőjén van.

2. Az ABC háromszögben $AB=BC$, az A pontból meghúzzuk az AF merőlegest a BC-re, $F\in(BC)$ úgy, hogy m (FAC<) = 30° + m (BAF <). Határozzuk meg az ABC háromszög belső szögeinek mértékét.

3. a.) Számítsuk ki az
$$S=\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+...+\frac{1}{1+2+3+...+2012}$$
összeget.

   b.) Adottak a következő aránypárok: $\frac{x}{1,(2)}=\frac{y}{1,(5)}$ és $\frac{y}{2,(3)}=\frac{z}{1,(8)}$.

   Tudva, hogy $\frac{x}{3}+\frac{y}{7}+\frac{z}{2}=34$, számítsuk ki az x, y, z számok értékét.

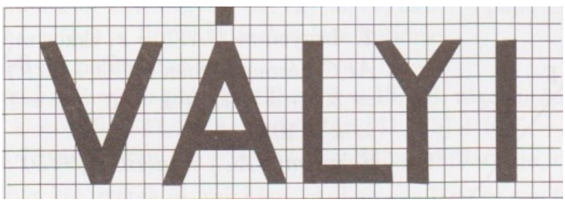
4. Szerkesszük meg az ABC háromszöget, ha adottaz $AM=4\,cm$ magasság, $m(MAC<)=55^{\circ}$ és a $BM=3\,cm$ szakasz.

1. Határozzuk meg az összes $(x, y) \in Z^* \times Z^*$ számpárt, amelyekre
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}.$$

2. Adott egy $BC=\sqrt{901}\,cm$ átmérőjű kör. A BC átmérő ugyanazon oldalán felvesszük a körön a D és E pontokat úgy, hogy $BD=1cm$, $BD\cap CE=\{A\}$ és $AD=16cm$. Számítsuk ki az EC szakaszhosszát.

3. Az ABC háromszög B és C csúcspontjaiba merőlegeseket állítunk az AB illetve az AC oldalakra. Legyen P ezeknek a merőlegeseknek a metszéspontja, Q és R pedig a P pontnak az AB illetve az AC egyenesek szerinti szimmetrikusai. Legyen továbbá H az A pontból a QR-re bocsátott merőleges talppontja. Bizonyítsuk be, hogy az AQR háromszög egyenlőszárú, a H pont pedig az ABC háromszög magasságpontja.

4. Egy faliújságon VÁLYI neve olvasható, amint az alábbi ábrán látható.



a) Ha egy négyzet oldala 2 cm, számítsuk ki a betűk által elfoglalt területet.
b) A faliújság területének hány százalékát foglalja el a felírat?

1. Adott az

$$E(x) = \frac{x^2 \cdot (x^2 + 10x + 25) + 12x \cdot (x + 5) + 35}{(x + 2)(x + 3) + 1}, x \in R \setminus \{-3, -2\}$$

tört.

   a.) Igazoljuk, hogy $E(x) \in R$.
   b.) Ha x, y olyan valós számok, amelyekre $x - 5y + 3 = 0$ és $x \in [-3; 2]$, határozzuk meg a $p = \sqrt{x^2 + y^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5}$ számértékét.

2. Adott a következő függvény $f: (-2,4] \rightarrow R$, mely teljesíti bármely $x \in R$ esetén a $2 \cdot f(1 - x) + 3 \cdot f(x) = -2x + 14$ feltételt.
   a.) Ábrázoljuk grafikusan az *f(x)* függvényt.
   b.) Határozzuk meg a függvény képét.
   c.) Számítsuk ki az origó távolságát a grafikus képtől.

3. Ha az ABC háromszög magasságpontja H és a BCH, ACH, ABH háromszögek köré írt körök középpontjai A_1, B_1, C_1, akkor az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek egybevágók.

4. Egy $VABC$ szabályos háromoldalú gúlába félgömböt írunk, mely érinti a gúla minden oldallapját. A gúla oldallapjai az ABC alappal 60^0-os szöget alkotnak és a gúla apotémája $20\sqrt{3}\,cm$.
   a.) Számítsuk ki a gúlába beírt félgömb felszínét.
   b.) Adjuk meg annak a P pontnak a helyzetét a VA oldalélen, amelyre a PBC háromszög területe minimális, majd számítsuk ki ezt a területet.
   c.) Felvesszük a félgömb érintő síkját, amely párhuzamos az ABC alappal és az oldaléleket A', B', C' pontokban metszi. Határozzuk meg az így kapott csonkagúla és az eredeti gúla térfogatának arányát.