XII Vályi Gyula Emlékverseny
2005. november 25-26.

V. osztály

1. Számítsuk ki, a következő szám utolsó számjegyét $\left(\overline{abcd}\right)^{2005}$, ahol $a = b$, $c = 2b$, $d = 3c$ és $2^{9(2a-1)} = 2^9$

2. Tekintsük az a = 123456789101112...20042005 természetes számot. Hány számjegye van a-nak? Számítsátok ki a 3+10+17+…+2005 összeget.

3. Határozzuk meg az összes olyan szám összegét, amelyet 7-tel osztva a hányados és a maradék ugyanannyi.

4. Mutassuk ki, hogy ha

$$a = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{95} \qquad akkor \qquad a \vdots 15$$

VI. osztály

1. Mutassuk ki, hogy a:

$$2006 + 2 + 4 + \ldots + 4010 \text{ szám teljes négyzet.}$$

2. Számítsuk ki: $X^Y + Y^X$-t ha:

$$X = 8^{33} : [4^{32} \cdot 2^{34} + (2^5 \cdot 2^{20})^5 : (32 \cdot 2^{22}) + (16 : 2^4 - 2005^0)^{33} \cdot 2005]$$
$$Y = [(11 - 0^{11}) \cdot (3^3 - 3^2) + 1^{2005}] \cdot (3^2 - 2^3) - 3^2 \cdot 11$$

3. Bizonyítsuk be, hogy:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{2005^2} < 1$$

4. Feltételezve, hogy ismert egy 14°-os szög, hogy szerkesszünk egy 3° -os szöget csak vonalzó és körző segítségével?

1. Bizonyítsuk be, hogy $a=\dfrac{11\cdot[\overline{0,(1x)}+\overline{0,(2x)}+\overline{0,(3x)}]}{\overline{1,(x)}+\overline{2,(x)}+\overline{3,(x)}}$ szám értéke 1-nél nagyobb.

2. Határozzuk meg az a, b, c számokat, tudva azt, hogy:
$\dfrac{0{,}0(9)}{a}=\dfrac{7{,}2}{b}=\dfrac{0,(3)}{c}$ és $15ab-bc-72ac=5400$

3. Az ABC_{Δ} háromszögben $[AD$ a $B\hat{A}C$ szögfelezője, $D\in(BC)$, P-vel és Q –val jelöljük a D pont szimmetrikusait az AB és AC oldalakra nézve.

a. Mutassuk ki, hogy APQ_{Δ} és DPQ_{Δ} egyenlő szárúak.
b. Ha $m(\hat{A})=60°$, határozzuk meg az *AQDP* négyszög természetét

4. Az *ABC* háromszög derékszögű *A*-ban. Az *AD* magasságvonal, *AE* és *BM* szögfelezők, *AF* súlyvonal (oldalfelező), (*D, E, F* $\in BC$, *M* $\in AC$). Meghosszabbítjuk *AD*-t és *AE*-t a *DN* illetve *EP* szakaszokkal úgy, hogy *AD=DN* és *AE=EP*. Igazoljuk, hogy:

c. *NP* párhuzamos *BC*-vel
d. *AE* szögfelezője a *DAF* szögnek
e. Ha *BM* metszi az *AN*-t a *Q* pontban, akkor az *AQM* háromszög egyenlőszárú.

1. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:
$$|1-|1-|x-2|||=3$$

2. Legyen $A_{2005}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}+...+\frac{2005}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2006}$

3.

a) Bizonyítsuk be:
$$A_{2005}-A_{2006}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot ...\cdot 2006\cdot 2007}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot ...\cdot 2005\cdot 2006}$$

b) Mutassuk ki, hogy:
$$A_{2005}=1-\frac{1}{1\cdot 2\cdot ...\cdot 2005\cdot 2006}$$

4. Az a oldalhosszúságú egyenlő oldalú ABC háromszögben, az óra járásával ellentétes irányba felvesszük az $AM=BN=CP=\frac{a}{5}$ szakaszokat.

a). Mekkora az MN szakasz hossza?

b). Ha $PS\perp MN$ *és* $PQ\perp AB$ $S\in MN$, $Q\in AB$ számítsuk ki QS hosszát az SPQ szög függvényében.

5. Legyen az $ABCDA'B'C'D'$ egy kocka, melynek AB éle 1 cm.

a) Számítsuk ki, az $A'C$ és AD' egyenesek közötti távolságot.

b) Határozzuk meg a D' pont távolságát az $A'DC'$ síktól.