5. osztály

1. feladat:

Anna és Tamás egy 7x10 kisnégyzetből álló tábla csokoládén osztozik. Felváltva törnek vagy egy sort vagy egy oszlopot a táblából, amíg elfogy.
Ha Anna vesz először, milyen stratégiája kell legyen, ha azt szeretné, hogy neki több csoki jusson, mint Tamásnak?

Megoldás:
A nyerő stratégiához a sorok és az oszlopok száma páros kell legyen. Első alkalommal 1x10-es sort tör le Anna. Folytatásban ugyanannyit tör le, mint Tamás. A fennmaradó részt egyenlően osztják el

Koczinger Éva, Szatmárnémeti

2. feladat:

„Hepehupa” számnak nevezzük azt a tízes számrendszerbeli többjegyű számot, amelyben a második számjegy nagyobb az elsőnél, a harmadik kisebb a másodiknál, a negyedik nagyobb a harmadiknál, az ötödik kisebb a negyediknél, és így tovább, és „hupahepe” számnak nevezzük azt a tízes számrendszerbeli többjegyű számot, amelyben a második számjegy kisebb az elsőnél, a harmadik nagyobb a másodiknál, a negyedik kisebb a harmadiknál, az ötödik nagyobb a negyediknél, és így tovább. Legyen x a legnagyobb, tíz különböző számjegyből álló „hepehupa” szám és y a legkisebb, tíz különböző számjegyből álló „hupahepe” szám.

a) Számítsd ki az $x-y$ különbséget!
b) Igazold, hogy az $\frac{x}{y}$ tört nem irreducibilis!
c) Adj példát olyan különböző számjegyekből álló ötjegyű „hepehupa” számra, melynek kétszerese viszont „hupahepe” szám!

Mikó Ágnes, Sepsiszentgyörgy

Megoldás:

a) a) $x=8967452301$, $y=1032547698$ ezért $x-y=7934904603$

b) Az $\frac{x}{y}$ tört egyszerűsíthető, mivel a számláló és a nevező is osztható 9-cel, mert

mindkettőben a számjegyek összege 45.

Megjegyzések:
- munkaidő 4 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár

c) Ha $x = 36452$, akkor $2x = 72904$.

3. feladat:

Zsófi születésnapi buliján a résztvevők átlagéletkora 8 évről 9 évre emelkedett, amikor egy 13 éves újabb vendég csatlakozott hozzájuk.

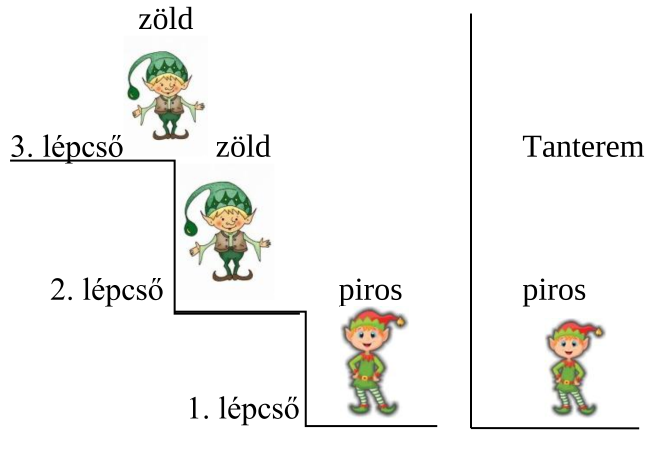
a) Hány éves kellett volna legyen az új vendég ahhoz, hogy az átlagéletkor 10 évre emelkedjen?
b) A tavalyi születésnapi bulin ugyanezek a vendégek voltak. Akkor a Zsófi édesanyjával együtt az átlagéletkor 12 év volt. Hány éves most Zsófi édesanyja?

Róka Sándor, Nyíregyháza és Kocsis Attila, Déva

Megoldás:

a) Legyen az eredeti létszám *n*. Ekkor a születésnapi bulin résztvevők életkorának összege $8 \cdot n + 13 = 9 \cdot (n+1)$, innen $n = 4$. Ha az új átlagéletkor 10 év, és az új vendég A éves, akkor $4 \cdot 8 + A = 5 \cdot 10$, $A = 18$.
b) Egy évvel ezelőtt az átlag életkor 8 év volt. Az öt vendég életkorának összege 40 év. Édesanyával együtt az átlag életkor 12 év, tehát a 6 személy életkorának összege 6 $\cdot$ 12 év =72 év Édesanya tavaly 72 év – 40 év = 32 év. Édesanya idén 33 éves.

4. feladat:



Egy emelkedő lépcsősor három egymás utáni lépcsőjén áll egy-egy bölcs manó, a negyedik bölcs manó pedig egy tanteremben tartózkodik, akit egyik bölcs manó sem lát, és nyílván az sem látja a többi hármat. (Lásd az ábrát.) A lépcsőn álló bölcs manók mindegyike csak lefele nézhet, és az alatta levő lépcsőkön levők sapkájának a színét látja.
Az a bölcs manó győz, aki legelőbb bemondja saját sapkájának színét.

Megjegyzések:
- munkaidő 4 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár

A bölcs manók nem fordulhatnak hátra, saját sapkájuk színét nem látják, azt nem vehetik le a fejükről, de mindegyikük tudja, hogy két zöld és két piros sapkájuk van összesen.
A manók gongütésre ha tudják, meg kell mondják, hogy milyen a saját fejükön levő sapka színe.
Első gongütésre a manók hallgatnak.
Második gongütésre egyikük jól válaszol.
Melyik bölcs manó helyében lennél, hogy nyerj? Fogalmazd meg miért!

Varga János, Székesfehérvár és Spier Tünde, Arad

Megoldás:
A második lépcsőn álló manó helyében lennék. Egyik manó sem tudja egyből megmondani saját sapkájának a színét, nagy csend lesz. Ebből következteti ki a 2. lépcsőn álló manó, hogy a felette álló azért nem szólalt meg, mert két különböző színű sapkát látott, vagyis az ő sapkájának színe különbözik az alatta állóétól. De mivel ő látja, hogy az alatta levő manó sapka színe piros, rögtön tudni fogja, hogy akkor az ő sapkájának a színe csakis zöld lehet, tehát ő fog győzni.

5. feladat:

Igazold, hogy:

$$\{3a+1 \mid a \in N\} \cap \{5b+3 \mid b \in N\} \cap \{7c+4 \mid c \in N\} = \{105d-17 \mid d \in N\}$$

Dr. Bencze Mihály, Bukarest és Fülöp Edith, Brassó

Megoldás 1

A metszet a közös elemeket tartalmazza
Legyen x = 3a + 1 = 5b + 3 = 7c + 4
x = 3a + 1 = 5b + 3 = 7c + 4 $\mid +17$
x + 17 = 3a + 18 = 5b + 20 = 7c + 21
x + 17 = 3(a + 6) = 5(b + 4) = 7(c + 3)
x + 17 = többszöröse 3-nak, 5-nek , 7-nek
x + 17 = 105d -ből következik x = 105d - 17

Megoldás 2

Legyen $x \in \{3a+1 \mid a \in N\} \cap \{5b+3 \mid b \in N\} \cap \{7c+4 \mid c \in N\} \Rightarrow$

x = 3a + 1 = 5b + 3 = 7c + 4

3a + 1 = 5b + 3 $\Rightarrow a = b + \dfrac{2(b+1)}{3} \Rightarrow b+1 = 3t \Rightarrow b = 3t-1$

$$x = 5b + 3 = 15t - 2 = 7c + 4 \Rightarrow c = 2t - 1 + \frac{t+1}{7} \Rightarrow t + 1 = 7k \Rightarrow t = 7k - 1$$

$$x = 15t - 2 = 15(7k - 1) - 2 = 105k - 17$$

6. feladat:

A 2016 számban az egyesek számjegye kétszerese az ezresek, százasok és tízesek számegyei összegének.

a) Hány négyjegyű évszám rendelkezik ezzel a tulajdonsággal? Sorold fel őket!
b) Hány évvel ezelőtt volt utoljára ezzel a tulajdonsággal rendelkező évszám?
c) Hány év telik el az első és az utolsó ilyen tulajdonsággal rendelkező évszám között?

Durugy Erika, Torda és Nagy Enikő, Nagyvárad

Megoldás:

a)

sorszám	Ezresek számjegye	Százasok számjegye	Tízesek számjegye	Egyesek számjegye
1	1	0	0	2
2	2	0	0	4
3	1	1	0	4
4	1	0	1	4
5	1	1	1	6
6	2	1	0	6
7	2	0	1	6
8	1	2	0	6
9	1	0	2	6
10	3	0	0	6
11	2	1	1	8
12	1	2	1	8
13	1	1	2	8
14	2	2	0	8
15	2	0	2	8
16	3	1	0	8
17	3	0	1	8
18	1	0	3	8
19	1	3	0	8
20	4	0	0	8

Táblázattal való felírás vagy képlet $((a+b+c)\cdot 2=d)$ felírása 20 szám.

b) A keresett évszám 2004
 2016-2004= 12
c) Az első ilyen évszám: 1002
 Az utolsó évszám: 4008
 A két évszám közötti különbség: 4008-1002=3006

6. osztály

1. feladat:

Koppány kistestvére és édesapja születésének évei között 32 esztendő telt el. Mindketten olyan évben születtek, amely felírható $P=2^p\left(2^{p+1}-1\right)$ vagy $Q=2^{p+1}\left(2^p-1\right)$ alakban, ahol p természetes szám. Melyik évben születtek?

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Megoldás:

Számítsuk ki a két év közötti különbséget:

$P-Q=2^p\left(2^{p+1}-1\right)-2^{p+1}\left(2^p-1\right)=2^{p+p+1}-2^p-2^{p+1+p}+2^{p+1}=2^{p+1}-2^p=2^p\left(2-1\right)=2^p=32=2^5$

innen $p=5$, azaz $P=2^5\left(2^6-1\right)=32\cdot 63=2016$ és $Q=2^6\left(2^5-1\right)=64\cdot 31=1984$.

2. feladat:

Egy négyzet minden oldalát 7 egyenlő részre osztjuk és az osztópontokat pirosra festjük. Határozzuk meg hány piros csúccsal rendelkező háromszög szerkeszthető?

Mátéfi István, Marosvásárhely

Megoldás:

Minden oldalon 6 osztópont található.

1.Háromszög szerkeszthető ha az egyik oldalon rögzítünk 2 pontot és egy másik pontot a megmaradt oldalakon. A két csúcspont 15 féleképpen választható ki az egyik oldalon a harmadik csúcspont a másik három oldalról 18 féleképpen, tehát a fenti gondolatmenet szerint 4·15·18=1080 háromszög szerkeszthető.

2.Egy más lehetőség, hogy három különböző oldalon vegyük fel a csúcspontokat. Ha rögzítünk 1 pontot az egyik oldalon, akkor összeköthető 6-6 ponttal egy-egy oldalról és mivel négy oldal van, 4·6·6·6=864 háromszöget kapunk.

Tehát összesen 1944 háromszöget kapunk.

IV. ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY 5-8.
Országos szakasz, Temesvár, 2016. április 1 –3.
CONCURSUL DE MATEMATICĂ AL GIMNAZIILOR MAGHIARE

Etapa națională, Timișoara 1-3 aprilie 2016

3. feladat:

Legyen H az ABC hegyesszögű háromszög magasságpontja, A_1 az A pontból húzott magasság talppontja és $AB = CH$.

a) Igazold, hogy az AA_1C egyenlő szárú derékszögű háromszög!
b) Hány egyenlő szárú derékszögű háromszög keletkezett? Bizonyítsd be, hogy ezek mindenike egyenlő szárú derékszögű háromszögek!

Zákány Mónika, Nagybánya

Megoldás:a)

BAA_1 és BCC_1 szögek az ABC háromszög B szögének pótszögei, ezért egybevágó szögek. BAA_1 és HCA_1 háromszögek kongruensek, mivel derékszögűek és $AB = CH$.

Következik, hogy $CA_1 = AA_1$, vagyis a CAA_1 háromszög derékszögű egyenlőszárú.

b) Az a) alpont alapján az egyik ilyen háromszög AA_1C ,

A másik ilyen háromszög AB_1H mert $m\left(B_1\hat{A}H\right) = m\left(A\hat{H}B_1\right) = 45^\circ$

A harmadik ilyen háromszög HA_1B mert $B\hat{H}A_1$ és $B_1\hat{H}A$ csúcsszögek. Tehát 3 ilyen háromszög van.

IV. ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY 5-8.
Országos szakasz, Temesvár, 2016. április 1 –3.
CONCURSUL DE MATEMATICĂ AL GIMNAZIILOR MAGHIARE

Etapa națională, Timișoara 1-3 aprilie 2016

4. feladat:

a) Keresd meg azt a legkisebb számot, amelynek ugyanannyi osztója van, mint a 2016-nak.

b) Melyik nagyságrendileg a második olyan szám, amelynek ugyanannyi osztója van, mint a 2016-nak?

Róka Sándor, Nyíregyháza

Megoldás:

a) A $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ osztóiban a prímtényezők csak a 2, 3 és a 7 lehetnek. Ezek kitevői a 2 esetén 0, 1, 2, 3, 4, 5; a 3 esetén 0, 1, 2; és a 7 esetén 0 vagy 1 lehetnek. A lehetséges osztók száma így $6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$.

$36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6 = 3 \cdot 3 \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ alapján a következő alakú számoknak van 36 osztója:

$p^{35},\ p \cdot q^{17},\ p^2 \cdot q^{11},\ p^3 \cdot q^8,\ p^5 \cdot q^5,\ p^2 \cdot q^2 \cdot r^3,\ p \cdot q^2 \cdot r^5, p \cdot q \cdot r^8, p \cdot q \cdot r^2 \cdot s^2$, ahol *p, q, r, s* különböző prímek. Mindegyik prímtényezős alaknál a 2, 3, 5 és 7 prímekkel felírjuk a legkisebb számot, és közülük kiválasztjuk a legkisebbet. Ez a szám $p \cdot q \cdot r^2 \cdot s^2 = 5 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 1260$.

b) a) alponthoz hasonlóan a nagyságrendileg következő szám $p \cdot q^2 \cdot r^5 = 5 \cdot 3^2 \cdot 2^5 = 1440$.

5. feladat:

Az ABC háromszögben a C pontból húzott szögfelező az AB oldalt a D pontban metszi úgy, hogy $3AD = AB$. Legyen F az A pont CD szerinti szimmetrikusa.

a) Igazold, hogy az F pont rajta van a BC oldalon!

b) Ha a DFB háromszög F csúcsából húzott oldalfelező hossza egyenlő a (BD) hosszának felével, akkor számítsd ki a B szög mértékét!

c) Igazold, hogy az ABC háromszög derékszögű!

Kolumbán Anikó, Sepsiszentgyörgy, Czeglédi Csilla, Arad

Megoldás: tekintsük a következő ábrát:

a) $AE \perp CD$, $AE \cap CB = \{F\}$.

$AEC_{\Delta} \equiv FEC_{\Delta}$ (B.H.). Innen következik, hogy $(AE) \equiv (FE)$, tehát az A pont CD szerinti szimmetrikusa az F pont, ami rajta van a BC oldalon.

b) A CD oldalfelező merőleges, ebből következik, hogy $(AD) \equiv (DF)$.

Legyen FG az oldalfelező, akkor $(DF) \equiv (DG) \equiv (GF) \Rightarrow DFG_{\Delta}$ egyenlő oldalú, ezért $m\left(B\hat{G}F\right) = 120^{\circ}$. Mivel GBF_{Δ} egyenlő szárú háromszög $\Rightarrow$ $m\left(\hat{B}\right) = 30^{\circ}$.

c) $CFD_{\Delta} \equiv CAD_{\Delta}$ (o.o.o.), innen $m(B\hat{F}G) + m(G\hat{F}D) = m(D\hat{F}C) = m(D\hat{A}C) = 90^{\circ}$,tehát az ABC_{Δ} derékszögű.

6. feladat:

Legyen M az $\{1, 2, 3, \dots, 2016\}$ halmaz egy olyan részhalmaza, amelyik 675 elemet tartalmaz. Igazold, hogy az M halmaznak létezik két különböző eleme úgy, hogy összegük osztható legyen 6 -tal!

Dr. Bencze Mihály, Bukarest

I. Megoldás:

Alkalmazzuk a reduction ad absurdum módszerét. Feltételezzük, hogy ha az M halmaznak bármely két különböző a és b elemét vesszük az összegük nem osztható 6 -tal.

Minden természtes szám alakja a következő lehet: $6k,\ 6k+1,\ 6k+2,\ 6k+3,\ 6k+4,\ 6k+5$. Mivel az $\{1, 2, 3, \dots, 2016\}$ halmazban 2016 elem van, minden $6k,\ 6k+1,\ 6k+2,\ 6k+3,\ 6k+4,\ 6k+5$ alakú természetes számból pontosan $2016 : 6 = 336$ darab van.

A $6k$ alakú számokból csak egy lehet az M halmazban.

A $6k+1$ *és a* $6k+2$ alakú számokból mind a 336 benne lehet az M halmazban.

A $6k+3$ alakú számokból csak egy lehet az M halmazban.

A $6k+4$ alakú számokból egy sem lehet benne az M halmazban, mert egy $6k+4$ alakú számhoz nem adhatunk hozzá egy $6k+2$ alakú számot. Hasonlóan a $6k+5$ alakú számokból egy sem lehet benne az M halmazban, mert egy $6k+5$ alakú számhoz nem adhatunk hozzá egy $6k+1$ alakú számot. Tehát összesen az M halmazban 674 elem lehet, ami elletmondás.

7. osztály

1. feladat: Az x és y pozitív valós számok esetén igazold, hogy:

a) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$;

b) ha $x+y>16$, akkor $(x+2)^2+(y+2)^2>200$.

Koczinger Éva, Szatmárnémeti

Megoldás:

a) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2 \Leftrightarrow x^2+y^2\geq 2xy \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2\geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2\geq 0$

b) Ha $x+y>16$, akkor következik, hogy $x^2+2xy+y^2>256$

de $x^2-2xy+y^2\geq 0$ igaz bármely $x,y\in\mathbb{R}_+^*$ esetén.

A két egyenlőtlenséget összeadva kapjuk, hogy $2x^2+2y^2>256 \Rightarrow x^2+y^2>128$, melyből következik, hogy:

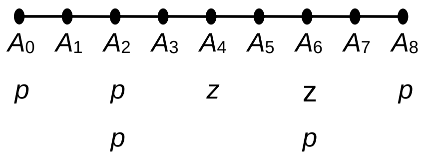
$(x+2)^2+(y+2)^2=x^2+y^2+4(x+y)+8>128+4\cdot 16+8>200.$

2. feladat: Az $[A_0A_8]$ szakaszt az A_1, A_2, ..., A_7 pontok kongruens szakaszokra osztják. Színezd ki az A_0, A_1, ..., A_8 pontokat úgy, hogy egyeseket pirossal, a többieket zölddel. Igazold, hogy létezik közöttük három azonos színű pont, amelyek közül az egyik pont a másik két pont által meghatározott szakasz felezőpontja!

Simon József, Csíkszereda

Megoldás

Megpróbáljuk úgy színezni a pontokat, hogy az állítás ne teljesüljön. Kiderül, hogy lehetetlen.



1. eset: ha A_0 és A_8 piros $\Rightarrow$ A_4 zöld. (ha A_4 piros lenne, akkor A_0, A_4 és A_8 azonos színűek lennének, A_4 pedig az $[A_0A_8]$ felezőpontja lenne)

A következő lépésben, ha A_2 és A_6 pirosak lennének, akkor A_1 és A_7 zöldek lennének, így A_1, A_4 és A_7 zöldek lennének, és az állítás igaz lenne.

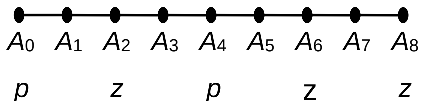
Ha pedig A_2 és A_6 zöldek lennének, akkor A_2, A_4 és A_6 lennének zöldek.

Nem marad más hátra, mint A_2 piros és A_6 zöld. (fordítva ugyanaz) $\Rightarrow$ A_5 piros $\Rightarrow$ A_2, A_5, és A_8 pirosak, A_5 pedig az $[A_2A_8]$ felezőpontja. Tehát létezik a fenti tulajdonsággal rendelkező három azonos színű pont.

Megjegyzések:

- munkaidő 4 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár

2. eset: ha A_0 piros és A_8 zöld, legyen A_4 piros (ha zöld lenne, akkor ugyanaz az eset lenne) $\Rightarrow$ A_2 zöld. A_6 nem lehet piros, mert akkor A_5 zöld, tehát A_2, A_5 és A_8 zöldek lennének. Így A_6 zöld $\Rightarrow$ A_7 piros.



A_1 nem lehet piros, mert akkor A_1, A_4 és A_7 piros lenne. A_1 tehát zöld $\Rightarrow$ A_3 piros $\Rightarrow$ A_5 zöld $\Rightarrow$ A_2, A_5 és A_8 zöldek a fenti tulajdonsággal. Tehát ebben az esetben is létezik a fenti tulajdonságokkal rendelkező három pont.

3. feladat: Egy 2016 x 2016-os négyzetrács minden négyzetét úgy töltsd ki, hogy az első sorában balról jobbra haladva írd be a mezőkbe sorba az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyeket, majd ezt addig ismételd, amíg a sor végére érsz. A második sorban ugyanígy járj el, csak az első mezőbe a 2-es számjegyet írd be, és innen folytasd a sor végéig. A harmadik sort a 3-as számjeggyel kezdd, és így tovább, amíg kitöltöd az egész rácsot.

a) Milyen számjegyek kerülnek a négyzetrács sarkaiba?
b) Hány darab lesz az egyes számjegyekből külön–külön a négyzetrácsban?
c) Igazold, hogy ha a négyzetrácsnak bármely két sarkát levágod, a megmaradt rész nem fedhető le 1 x 5-ös téglalapokkal!

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Megoldás:

a)

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	....
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	....
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	....
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	....
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	....
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	....
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	....
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	....
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	....
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

$2016 = 2015 + 1$ és $2015 = 403 \cdot 5 \Rightarrow$ az első sorban az $1, 2, 3, 4, 5$ számjegyeket 403-szor írjuk le, a végére 1- es kerül. Hasonlóan, az első oszlop utolsó számjegye ugyancsak 1-es. Az utolsó sor ugyanaz, mint az első, tehát a jobb alsó sarokba is 1-es kerül. Minden sarokban 1-es számjegy lesz.

b) Az utolsó sortól és oszloptól eltekintve minden számjegy $403 \cdot 2015$ - ször szerepel. A jobb alsó saroktól eltekintve minden számjegyből van még $403 \cdot 2$ darab.

Összesen: a 2, 3, 4, 5 számjegyekből egyenként

$403 \cdot 2015 + 403 \cdot 2 = 403 \cdot 2017 = 86731$ darab van.

Az 1-esből 86732 darab van.

c) A sarkokból két darab 1-est levágva, az 1-esekből egy darabbal kevesebb lesz, mint a többiből. Következésképpen a lefedés lehetetlen

4. feladat: Ha $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, bizonyítsd be, hogy:

i) $(a^2+1)(b^2+1) = (ab-1)^2 + (a+b)^2$;

ii) $(a^2+1)(b^2+1) \geq 2|ab-1| \cdot (a+b)$;

iii) $\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{a+b} + \frac{(b^2+1)(c^2+1)}{b+c} + \frac{(c^2+1)(a^2+1)}{c+a} \geq 2 \cdot (|ab-1| + |bc-1| + |ca-1|)$.

Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás:

i) $(a^2+1)(b^2+1) = a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 = a^2b^2 - 2ab + 1 + a^2 + 2ab + b^2 = (ab-1)^2 + (a+b)^2$

ii) Felhasznáva az i) alpontot, valamint a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget, azt kapjuk, hogy:

$(a^2+1)(b^2+1) = (ab-1)^2 + (a+b)^2 \geq 2\sqrt{(ab-1)^2 \cdot (a+b)^2} = 2|ab-1| \cdot (a+b)$.

iii) Felhasználva a ii) alpontot

$\Rightarrow \frac{(a^2+1)(b^2+1)}{a+b} \geq 2|ab-1|$, $\frac{(b^2+1)(c^2+1)}{b+c} \geq 2|bc-1|$ és $\frac{(c^2+1)(a^2+1)}{c+a} \geq 2|ca-1|$.

összeadva az egyenlőtlenségeket $\Rightarrow$

$\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{a+b} + \frac{(b^2+1)(c^2+1)}{b+c} + \frac{(c^2+1)(a^2+1)}{c+a} \geq 2 \cdot (|ab-1| + |bc-1| + |ca-1|)$.

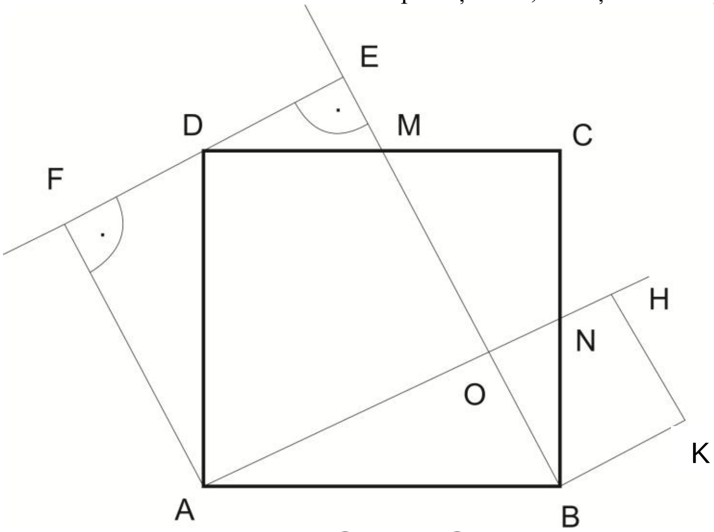
5. feladat: Az $ABCD$ négyzetben N a $[BC]$, M pedig a $[CD]$ oldal felezőpontja és $AN \cap BM = \{O\}$. Legyen $DE \perp BM, E \in BM$ és $AF \perp DE, F \in DE$. Igazold, hogy:

a) az $AOEF$ négyszög négyzet;

b) $T_{ABCD} = T_{AOEF} + T_{OBKH}$, ahol K és H a sík olyan pontjai, amelyekre $OBKH$ négyzet.

Császár Sándor, Csíkmadaras

Megoldás



a) Mivel $[MC] \equiv [NB]$, $\widehat{MCB} \equiv \widehat{NBA}, [CB] \equiv [AB]$ (1. e.e.) $\Longrightarrow MCB_\Delta \equiv NBA_\Delta \Longrightarrow \widehat{MBC} \equiv \widehat{NAB}$.

$\widehat{AOE}, \widehat{OEF}$ és $\widehat{EFA}$ derékszögek $\Longrightarrow$ $AOEF$ téglalap. $AOB_\Delta \equiv AFD_\Delta$(átfogó, hegyesszög) $\Longrightarrow$ $[FA] \equiv [AO] \Longrightarrow ABCD$ négyzet.

b) $T_{ABCD} = AB^2, T_{AOEF} = AO^2$ és $T_{OBKH} = OB^2$.

Az AOB háromszögben Pitagorasz tétele alapján: $AB^2 = AO^2 + OB^2$.

Innen következik, hogy $T_{ABCD} = T_{AOEF} + T_{OBKH}$.

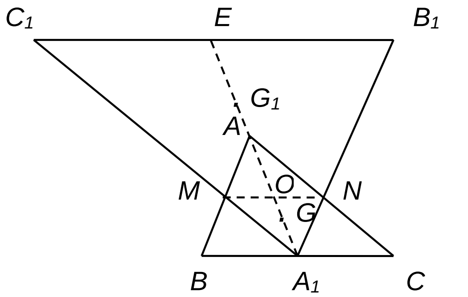
6. feladat: Az ABC háromszögben M, A_1 és N az AB, BC és AC oldalak felezőpontjai. Legyen $C_1 \in (A_1M$ és $B_1 \in (A_1N$ úgy, hogy $A_1C_1 = 2k \cdot A_1M$ és $A_1B_1 = 2k \cdot A_1N$, ahol $k \in \mathbb{N}^*$. Jelöld G-vel és G_1-gyel az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek súlypontjait! Legyen E a B_1C_1 szakasz felezőpontja.

a) Igazold, hogy az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek hasonlóak, és a hasonlósági arány k.
b) Igazold, hogy a G, G_1 és E pontok az AA_1 egyenesen vannak.
c) Számítsd ki az A_1E szakasz hosszát, ha $GG_1 = 46$ és $k = 12$.

Simon József, Csíkszereda

Megoldás

a) A feltevés alapján $\frac{A_1B_1}{A_1N} = \frac{A_1C_1}{A_1M} = 2k$ (1).



$[A_1M]$ és $[A_1N]$ az ABC_Δközépvonalai $\Rightarrow A_1B_1 \parallel AB$ és $A_1C_1 \parallel AC$ $\Rightarrow \widehat{B_1A_1C_1} \equiv \widehat{BAC}$ (párhuzamos szárú szögek) (2)

Az (1) és (2) összefüggésekből következik, hogy ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek hasonlóak. (2. eset).

$A_1N = \frac{AB}{2}$ és $A_1M = \frac{AC}{2}$. Az (1) összefüggésbe behelyettesítve $\Rightarrow \frac{A_1B_1}{\frac{AB}{2}} = 2k$.

b) AA_1 az ABC_Δ oldalfelezője $\Rightarrow G \in AA_1$. Az

Megjegyzések:
- munkaidő 4 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár

AMA_1N négyszög szemben fekvő oldalai párhuzamosak, tehát AMA_1N paralelogramma $\Rightarrow$ az AA_1 átló az MN átlót az O felezőpontjában metszi.
Az (1) összefüggésből következik, hogy $MN \parallel C_1B_1$.
Legyen $A_1O \cap B_1C_1 = \{F\}$. Az AFC_1 és AFB_1 háromszögekben felírjuk a hasonlóság alaptételét: $\frac{A_1O}{A_1F} = \frac{OM}{FC_1}$ és $\frac{A_1O}{A_1F} = \frac{ON}{FB_1} \Rightarrow \frac{OM}{FC_1} = \frac{ON}{FB_1} \Rightarrow FC_1 \equiv FB_1 \Rightarrow F = E \Rightarrow$
$E \in AA_1$, a G_1 súlypont viszont az A_1E oldalfelezőn van $\Rightarrow G_1 \in AA_1$.
c) $GA_1 = \frac{1}{3}AA_1$ és $G_1A_1 = \frac{2}{3}A_1E \Rightarrow GG_1 = G_1A_1 - GA_1 = \frac{2}{3}A_1E - \frac{1}{3}AA_1 = 46$. Mivel az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek hasonlóak $\Rightarrow A_1E = 12 \cdot AA_1$
$\Rightarrow \frac{24}{3}AA_1 - \frac{1}{3}AA_1 = 46 \Rightarrow 23 \cdot AA_1 = 46 \cdot 3 \Rightarrow AA_1 = 6 \Rightarrow A_1E = 6 \cdot 12 = 72.$

8. osztály

1. feladat

Oldd meg a valós számok halmazán az $\begin{cases} x^2-9y+22=2\sqrt{z-4} \\ y^2-9z+22=2\sqrt{x-4} \\ z^2-9x+22=2\sqrt{y-4} \end{cases}$ egyenletrendszert!

dr. Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás: A négyzetgyökök miatt $x, y, z \geq 4$. Balra rendezve és összeadva az így kapott egyenleteket az

$$x^2-9x-2\sqrt{x-4}+y^2-9y-2\sqrt{y-4}+z^2-9z-2\sqrt{z-4}+66=0 \ (*)$$

egyenlethez jutunk. Felhasználva, hogy

$$t^2-9t-2\sqrt{t-4}+22=t^2-10t+25+(t-4)-2\sqrt{t-4}+1=(t-5)^2+\left(\sqrt{t-4}-1\right)^2, \ \forall t\geq 4$$

a (*) egyenlet $(x-5)^2+\left(\sqrt{x-4}-1\right)^2+(y-5)^2+\left(\sqrt{y-4}-1\right)^2+(z-5)^2+\left(\sqrt{z-4}-1\right)^2=0$ alakba hozható. Mivel az összeg tagjai nemnegatívak, ezért egyenlőség csak $x=y=z=5$ esetén áll fenn. Tehát $M=\{(5,5,5)\}$.

2. feladat

Kiválasztottunk 15 egymásutáni természetes számot és összeadtuk őket, de egy számot kihagytunk az összeadásból, így az összeg 2016 lett. Melyik szám maradt ki?

dr. Kiss Sándor, Nyíregyháza

Megoldás: A 15 egymásutáni természetes szám legyen n, $(n+1)$, $(n+2)$, ... $(n+14)$, a kifelejtett szám pedig $n+k$. Ekkor felírhatjuk a következő egyenletet:

$$n+(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+14)-(n+k)=2016, \text{ ahol } k\in\{0,...,14\}.$$

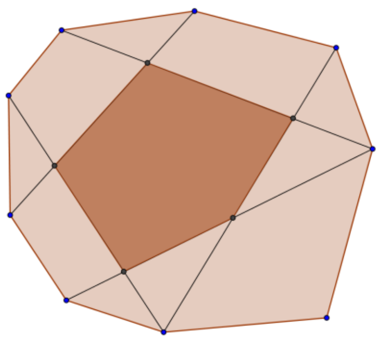
Elvégezve a számításokat a $15n+\frac{14\cdot 15}{2}-(n+k)=2016 \Leftrightarrow 14n+105-k=2016 \Leftrightarrow$ $14n-k=1911$ egyenlethez jutunk. Mivel $0\leq k\leq 14 \Leftrightarrow 0\geq -k\geq -14 \mid +14n$ ezért

$14n \geq 1911 \geq 14n-14$, azaz $1911 \leq 14n \leq 1925$, vagyis $n=137$, ahonnan $k=7$. Tehát a 144 maradt ki az összeadásból. Valóban $137+...+151-144=144\cdot 15-144=2016$.

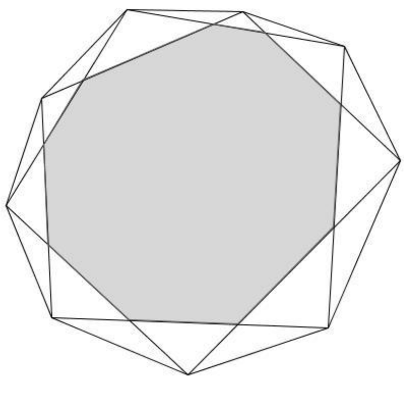
3. feladat:

Egy kilencoldalú konvex sokszög átlói is meghatároznak konvex sokszögeket. Egy példa az alábbi ábrán látható. Legfeljebb hány oldala van egy ilyen sokszögnek?

Róka Sándor, Nyíregyháza



Megoldás: A kilencoldalú konvex sokszögben keletkező sokszögek közül válasszunk egyet. Ez a sokszög konvex és egy oldala az eredeti sokszög egy átlóján fekszik. A kilencoldalú sokszög egy csúcsából – a konvexitás miatt – legfeljebb két olyan átló indulhat, amely a belső sokszögünknek is oldalát alkotja. Mivel minden átlónak két végpontja van, ezért a belső sokszög oldalainak száma legfeljebb $\frac{2\cdot 9}{2}=9$, ami elérhető. Lásd az ábrát!



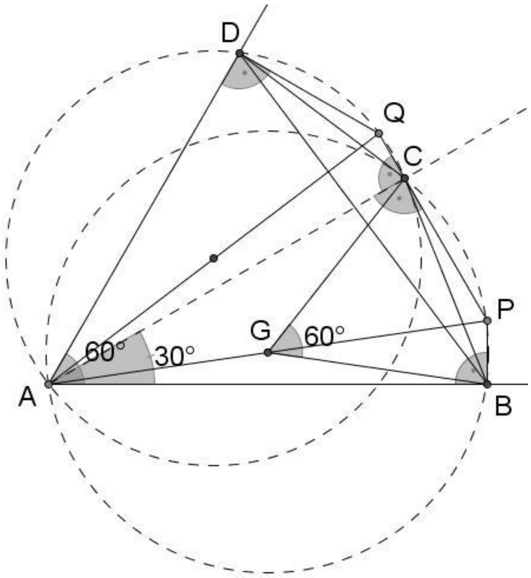
4. feladat

Jelölje A egy 60°-os szög csúcsát és legyen az $[AC$ félegyenes a szög szögfelezője. Az A szög belső tartományában, a szögfelező két különböző oldalán tekintsük a P illetve Q pontokat úgy, hogy $PQ \perp CA$ és $AC \cap PQ = \{C\}$. Legyen B és D a P illetve Q pontokból az eredeti szög száraira húzott merőlegesek talppontja.

Igazold, hogy $AP+AQ>2\cdot BD$.

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Megoldás: Tekintsük a mellékelt ábrát. Mivel az ABP és ACP derékszögű háromszögek, a B és C pontok rajta vannak az AP átmérőjű körön. Jelölje ennek középpontját G. Mivel $m(BAC) = 30°$, ezért a $m(BGC) = 60°$, mert középponti szög. Mivel GB és GC sugarak, a BGC háromszög egyenlő oldalú, tehát $[BC] \equiv [GC]$. Mivel AP átmérő, ezért $AP = 2 \cdot BC$. Hasonlóan igazoljuk, hogy $AQ = 2 \cdot CD$. Innen következik, hogy $AP + AQ = 2 \cdot BC + 2 \cdot CD > 2 \cdot BD$.



5. feladat

Az $ABCD$ téglalapban $AB = 2AD$. A téglalap síkjára merőlegesen felvesszük az EAB, FBC, GCD és HAD egyenlő szárú derékszögű háromszögeket úgy, hogy az első kettő a téglalap síkja alatt, az utolsó kettő pedig a téglalap síkja fölött helyezkedik el. A derékszögű háromszögek átfogói a téglalap oldalai.

Igazold, hogy a) az $EFGH$ négyszög téglalap

b) $GH \perp (HED)$

Simon József, Csíkszereda

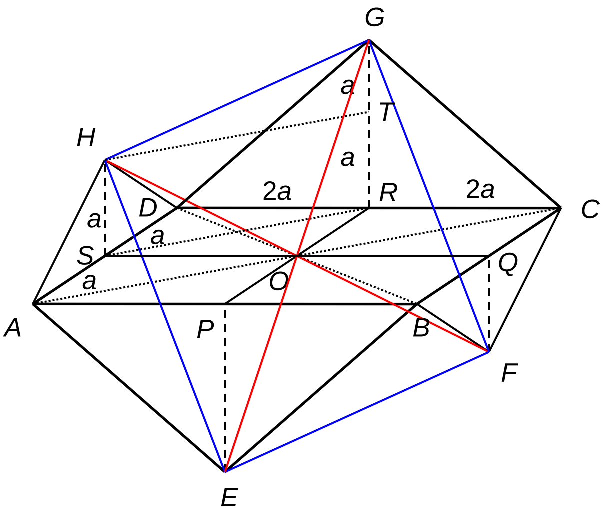
Megoldás:

a) Legyen O az $ABCD$ téglalap középpontja, P, Q, R és S pedig a téglalap AB, BC, CD és DA oldalainak felezőpontjai.

$[EP]$ és $[GR]$ az EAB és GCD kongruens háromszögek magasságai $\Rightarrow$ $EP \parallel GR$ és $[EP] \equiv [GR] \Rightarrow EPGR$ paralelogramma

$\Rightarrow$ az $[EG]$ és $[PR]$ átlók felezik egymást, az $ABCD$ téglalap O középpontjában metszik egymást.

Hasonlóan a $HSFQ$ négyszög is paralelogramma, az $[SQ]$ és $[HF]$ átlók felezik egymást, és ugyancsak az O pontban metszik egymást.



Tehát $HF \cap EG = \{O\}$ és $[EO] \equiv [OG]$ és $[HO] \equiv [OF] \Rightarrow EFGH$ paralelogramma.

Tudjuk, hogy $HS = \dfrac{AD}{2}$ és $GR = \dfrac{DC}{2}$ $\Rightarrow [HS] \equiv [OR]$ és $[OS] \equiv [GR] \Rightarrow HSO\triangle \equiv ORG\triangle$

(*befogó-befogó eset*) $\Rightarrow [GO] \equiv [HO] \Rightarrow [GE] \equiv [HF] \Rightarrow EFGH$ téglalap.

b) Legyen $AD = 2a$ és $DC = 4a \Rightarrow HD = a\sqrt{2}$ és $GD = 2a\sqrt{2}$. A $HSRG$ derékszögű trapézban legyen $HT \parallel SR$, ahol $T \in GR$. $HT = SR = \sqrt{DS^2 + DR^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$, $GH = \sqrt{HT^2 + GT^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{5}\right)^2 + a^2} = a\sqrt{6}$. A HDG háromszögben fennáll a $GD^2 = HD^2 + HG^2$, mert $\left(2a\sqrt{2}\right)^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{6}\right)^2$, Pitagorasz tételének fordított tételéből következik, hogy $GH \perp HD$. Tudjuk, hogy $GH \perp HE \Rightarrow GH \perp (HED)$.

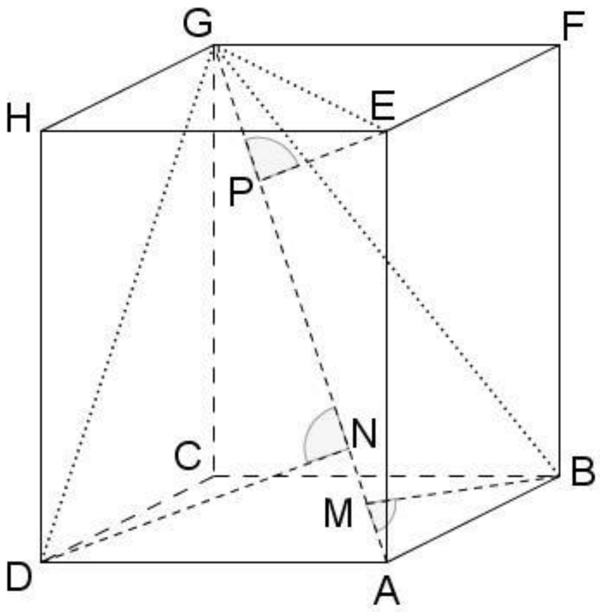
6. feladat

Az $ABCDEFGH$ téglatestben legyen $AB = a$, $BC = b$ és $AE = c$, valamint jelölje M, N és P a B, D illetve E pontok merőleges vetületét az AG testátlóra.

Igazold, hogy $\sqrt{\dfrac{AM}{MG}} + \sqrt{\dfrac{AN}{NG}} + \sqrt{\dfrac{AP}{PG}} > 2$.

Mátéfi István, Marosvásárhely

Megoldás: Az $ABCDEFGH$ téglatestben az ABG, ADG illetve azAEG derékszögű háromszögek. Az ABG háromszögben legyen $M = pr_{AG}(B)$, alkalmazva a befogó tételét kapjuk, hogy $AB^2 = AM \cdot AG$ illetve $BG^2 = GM \cdot AG$, ahonnan $\dfrac{AB^2}{BG^2} = \dfrac{AM \cdot AG}{GM \cdot AG}$. A jelöléseket felhasználva kapjuk, hogy $\dfrac{AM}{MG} = \dfrac{a^2}{b^2 + c^2}$. Hasonló gondolatmenetet alkalmazva az ADG illetve az AEG háromszögekben $\dfrac{AN}{NG} = \dfrac{b^2}{a^2 + c^2}$ illetve $\dfrac{AP}{PG} = \dfrac{c^2}{a^2 + b^2}$.



Ekkor a feladatban megadott egyenlőtlenség a következő alakban írható:

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2 + c^2}} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2 + c^2}} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2 + b^2}} > 2$$

A bal oldali összeg minden tagjára alkalmazva a mértani és harmonikus középarányosok közötti $\sqrt{x \cdot y} \ge \dfrac{2xy}{x + y}$, $\forall x, y > 0$ egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$\sqrt{1\cdot\frac{a^2}{b^2+c^2}} \ge \frac{2\cdot\frac{a^2}{b^2+c^2}}{1+\frac{a^2}{b^2+c^2}} \Rightarrow \sqrt{1\cdot\frac{a^2}{b^2+c^2}} \ge \frac{2a^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\sqrt{1\cdot\frac{b^2}{a^2+c^2}} \ge \frac{2b^2}{a^2+b^2+c^2}, \text{ illetve } \sqrt{1\cdot\frac{c^2}{a^2+b^2}} \ge \frac{2c^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Összeadva a kapott egyenlőtlenségeket következik, hogy

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2+c^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{a^2+b^2}} \ge 2, \text{ vagyis } \sqrt{\frac{AM}{MG}}+\sqrt{\frac{AN}{NG}}+\sqrt{\frac{AP}{PG}} \ge 2.$$

Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $\frac{a^2}{b^2+c^2}=\frac{b^2}{a^2+c^2}=\frac{c^2}{a^2+b^2}=1$, ahonnan $a^2=b^2+c^2$, $b^2=a^2+c^2$ és $c^2=a^2+b^2$, összeadva kapjuk, hogy $a^2+b^2+c^2=0$, ami lehetetlen, tehát

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2+c^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{a^2+b^2}} > 2.$$