

„tanuljunk meg bizonyítani, de
tanuljunk meg találgatni is”
Pólya György

Előszó

Minden emberi tudás alapja a tapasztalt dolgok, jelenségek, összefüggéseinek észrevétele. Ez alól a matematikai tudás sem kivétel. Bár a matematikus alkotó munkájának eredménye, végterméke egy bizonyítás, ezt okoskodással, találgatással fedezi fel.

Ha a matematikatanulás folyamatában tükrözi a felfedezést, akkor feltétlenül helyet kell kapjon benne a találgatás és azok a logikai műveletek, amelyek elvezetnek új összefüggések felfedezéséhez. Sajnos ezt a mi oktatási rendszerünk nem veszi elég komolyan és a tankönyvek nagy része sem törekszik ezen struktúrák beépítésére és folyamatos alkalmazására a tanítás folyamatában. Pedig az okoskodás eredményes használata, mint általában a gyakorlati dolgok, utánzással és gyakorlással tanulható. Ezért a mostaninál jóval nagyobb hangsúlyt kellene kapjanak a plauzibilis okoskodás módszerei a matematika tanítás/tanulásban. Egy ilyen módszer az analógia. Ha két dolog, vagy dolgok két rendszere között hasonlóságot észlelünk és ezt határozott fogalmakra akarjuk redukálni, analogikusan gondolkodunk. Az analógia teljesen áthatja gondolkodásunkat, mindennapi beszédünket, hétköznapi logikánkat, a kifejezés művészi eszközeit és a tudományos tevékenységet egyaránt. Minden fajta analógiának lehet szerepe különböző helyzetek felismerésében, feladatok megoldásában. Az emberek gyakran alkalmaznak bizonytalan, félreérthető, nem teljesen tisztázott analógiákat, de az analógia a matematikai pontosság fokát is elérheti.

Az analogikus gondolkodás fejlesztése (hisz lehetősége minden egyénben megtalálható) éppen ezért fontos feladata minden emberi gondolkodást és tanulást irányító felnőtteknek, tanárnak, előadónak, szerzőnek egyaránt.

I. FEJEZET

A GONDOLKODÁS SZERKEZETI PROBLÉMÁI

A gondolkodás nevelésének a kérdése a matematika tanulásának és tanításának igen fontos problémája. Éppen ezért ezt a témakört a pszichológia mellett, de ezzel karöltve, a matematika tanításának módszertana is tanulmányozza. Ebből kifolyólag választ kellene adni arra, hogy a matematikában mit és hogyan tanítsunk? Ezekre a kérdésekre univerzálisan egyértelmű válasz nem adható, a tanulmányozás céljából foglalkozunk a különböző matematikai stílusirányzatokkal, tanuláselméletekkel, tanulási stratégiákkal, módszerekkel és eljárásokkal egy dolgot azonban biztosan állíthatunk: a matematika tanítása során szükségszerű az információ nyújtás, de ugyanakkor nélkülözhetetlen a gondolkodás fejlesztése és általában a képességek fejlesztése is. A sikeres fejlődés és továbbhaladás érdekében a két komponens kölcsönösen feltételezi egymást. Szükségszerűen merül fel tehát a gondolkodás és a matematikai gondolkodás folyamatának tanulmányozása. Éppen ezért felelevenítenék néhány idevágó ismeretet.

1.1. A gondolkodás és problémamegoldó gondolkodás folyamata

Belső felépítését tekintve minden gondolkodási folyamat meghatározott „feladat” megoldására irányuló cselekvés vagy tevékenységi aktus. Ez a feladat magában foglalja az egyén gondolkodási tevékenysége számára a célt, amely kölcsönös összefüggésben van azokkal a feltételekkel, amelyek azt feladták. A szubjektumnak minden reális gondolkodási aktusa valamilyen motívumból indul ki, valamilyen cél, meghatározott „feladat” megoldása érdekében.

A gondolkodási folyamat kezdeti mozzanata rendszerint a probléma-helyzet. Akkor kezd az ember gondolkodni, amikor megjelenik az a szükséglete, hogy valamit megértsen. A gondolkodás rendszerint problémával vagy kérdéssel, csodálkozással vagy meglepődéssel, ellentmondásokkal kezdődik. Ez a problémahelyzet indítja meg a személyiségben a gondolkodási folyamatot, ami mindig valamilyen feladat megoldására irányul.

Az ilyen kezdet meghatározott befejezést is feltételez. A feladat megoldása a gondolkodási folyamat természetes befejezését jelenti. Annak beszüntetését, amíg a célt el nem érte, a szubjektum megghiúsulásként vagy kudarcként fogja elkönyvelni. A gondolkodási folyamat egésze tudatosan szabályozott művelet. A gondolkodási folyamat dinamikájával együtt jár a gondolkodó szubjektum emocionális közérzete, amely eleinte megfeszített, a végén kielégült vagy feloldódott.

Általában a valóságos gondolkodási folyamat az individuum egész pszichikus életével összefügg.

Tehát a gondolkodás mindenekelőtt cselekvési forma, amely a fejlődés során differenciálódik, szerveződik, működése kifinomul. Alapelemei a gondolkodási műveletek, amelyek a fejlődés kezdeti szakaszában tényleges cselekvésként jelentkeznek, a tárgyakkal végzett cselekvések alkotják azt a forrást, amelyből erednek. A fejlődés folyamán a külső cselekvés interiorizálódik (belsővé válik), a tényleges cselekvés a belsővé válási folyamat révén átalakul és lerövidül. Ezt a belső cselekvést gondolatban, a valóságos dolgokat helyettesítő képek, szimbólumok (jelek) segítségével végezzük el.

Többször is említettük már a „probléma” szót. Tágabb értelemben, de a matematikában is, problémának nevezünk olyan feladat, kérdés, szituáció felbukkanását, amelyre a választ, megoldást nem tudjuk azonnal észlelés, emlékezés, tapasztalás alapján közvetlenül megadni, hanem csak közvetett úton *gondolkodási és logikai műveletek végzésén* keresztül. Az ilyen szituációk felbukkanását *problémahelyzetnek* nevezünk, magát a folyamatot pedig *problematizálásnak*. Minden egyes problémahelyzet úgynevezett problémamegoldó gondolkodást igényel.

A gondolkodási tevékenységnek azt a részhalmazát, amely a problémák érzékelésén, felfogásán, megfogalmazásán, elemzésén, megoldásán keresztül egészen annak ellenőrzéséig és a kapott eredmények általánosításáig terjed, problémamegoldó gondolkodásnak nevezünk.

A definícióból következik, hogy a problémának relatív és szubjektív jellege van. Egyik ember számára problémát jelenthet az, ami a másik számára nem probléma, a megoldás után pedig mindannyiunk számára elveszti probléma jellegét.

A gondolkodásnak megvan a maga minőségileg sajátos tartalma és megvannak sajátos lefolyási törvényszerűségei. A gondolkodás sajátos tartalma a fogalom, a lefolyásában pedig az úgynevezett fázisokat különböztethetjük meg. Éppen ezért a pszichológia a problémamegoldás folyamatában kettős szerkezeti felépítést mutatott ki: a gondolkodás makrostruktúrája a gondolkodási fázisokat, a mikrostruktúrája a gondolkodási műveleteket foglalja magába.

A gondolkodási fázisok

1. Ténymegállapítás: a probléma adatainak vagy a megoldás menetében felismerhető bármely összefüggésnek a megnevezése. Aszerint, hogy a hogy a problémamegoldó épít-e a szóban forgó tényre, beszélünk spontán illetve tervszerű ténymegállapításról. Ezen kívül a ténymegállapítás lehet téves, irreális és szubjektív is. Ez a fázis megalapozza a gondolkodást és ha a gondolkodás sikertelen

újrakezdődik a megalapozás. A matematikában ebben a fázisban történik az adatok, ismeretlenek leolvasása és a köztük levő relációk megállapítása, érzékelése.

2. **A probléma módosítása:** az a gondolkodási fázis, amelynek során az elmélet vagy gyakorlat síkján, a megoldás érdekében, célszerű változtatást hajtunk végre a problémán. A valóság tükrözésétől függően lehet ez is tervszerű vagy irreális, amikor elszakad a problémától. Ez a fázis nevezhető a variálás fázisának is, hiszen ilyenkor jobban megismerjük a problémát, mivel újraszervezzük a tudásanyagot, felidézünk emlékeket.
3. **Megoldási javaslat vagy terv-készítés:** egy probléma megoldása során „zsákcúba jutás” esetén többször is megisméltődhet.
4. **Kritika:** saját ténymegállapításunkkal, problémamódosítási, megoldási javaslatunkkal kapcsolatos állásfoglalás. Ez lehet helyes vagy helytelen.
5. **Kétkedés:** egyrészt a probléma megoldhatóságában („ezt nem lehet megoldani”), másrészt a problémamegoldó képességeiben („én ezt nem tudom megoldani”).
6. **Mellékelt mozzanatok felbukkanása:** a problémával semmilyen összefüggésben nem levő megjegyzés, megállapítás, amely rendszerint a gondolkozás pillanatnyi zsákcújáról tanúskodik.
7. **Érzelmi mozzanatok:** csodálkozás, tetszés, a gondolkodást serkentő pozitív érzelmi mozzanatok. Bosszankodás (szintén gyűjtőnév) a gondolkodást hol gátló, hol serkentő érzelmi mozzanat. (Ide sorolható az idegesség türelmetlenség, zavar, indulatosság, düh, bosszúság, stb.)
8. **A munka feladása vagy a probléma megoldása:** az első menekülés a kellemetlen szituációtól, a belső kényelmetlen pszichikus feszültségérezéstől, míg a második, sikerélmény, amikor a belső pszichikus feszültség gyönyörélményben oldódik. Ennek nagysága arányos a problémamegoldásba fektetett energiával.

Lénárd Ferenc a Problémamegoldó gondolkodás [12] című könyvében sokkal több fázist különböztet meg, míg Pólya György a Gondolkozás iskolája [17] című könyvében csak négyet:

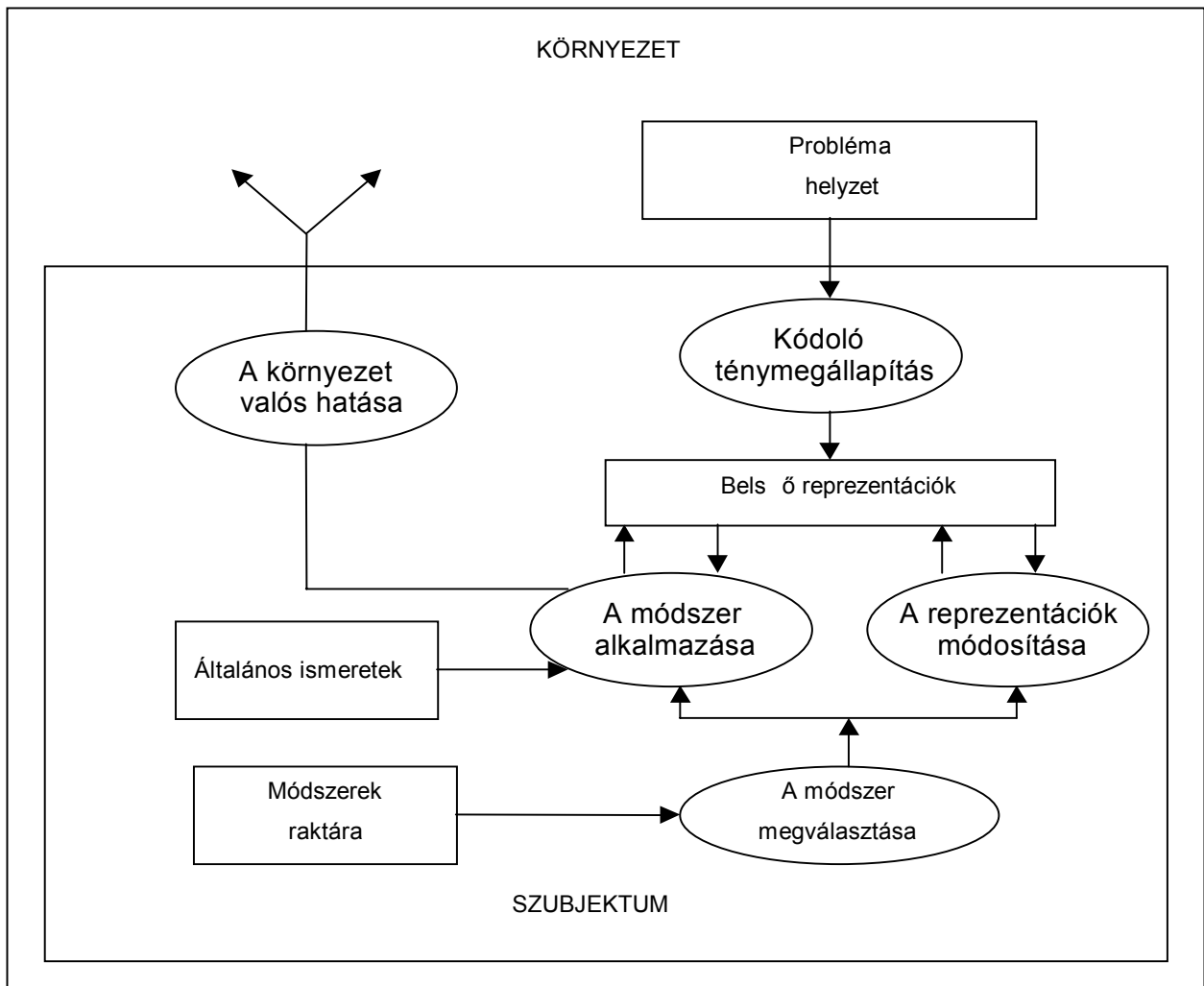
- A feladat megértése
- Tervkészítés
- A terv végrehajtása
- A megoldás vizsgálata

Belátható, hogy ez utóbbi osztályozás nem a gondolkodás pszichikus útját jellemzi, hanem minden pszichikus mozzanattól megtisztított, lerövidített, még zsákcúákat is figyelmen kívül hagyó utat jelöl. A gondolkodási lépéseknek ilyen láncolatát, amely törés nélkül vezet el a

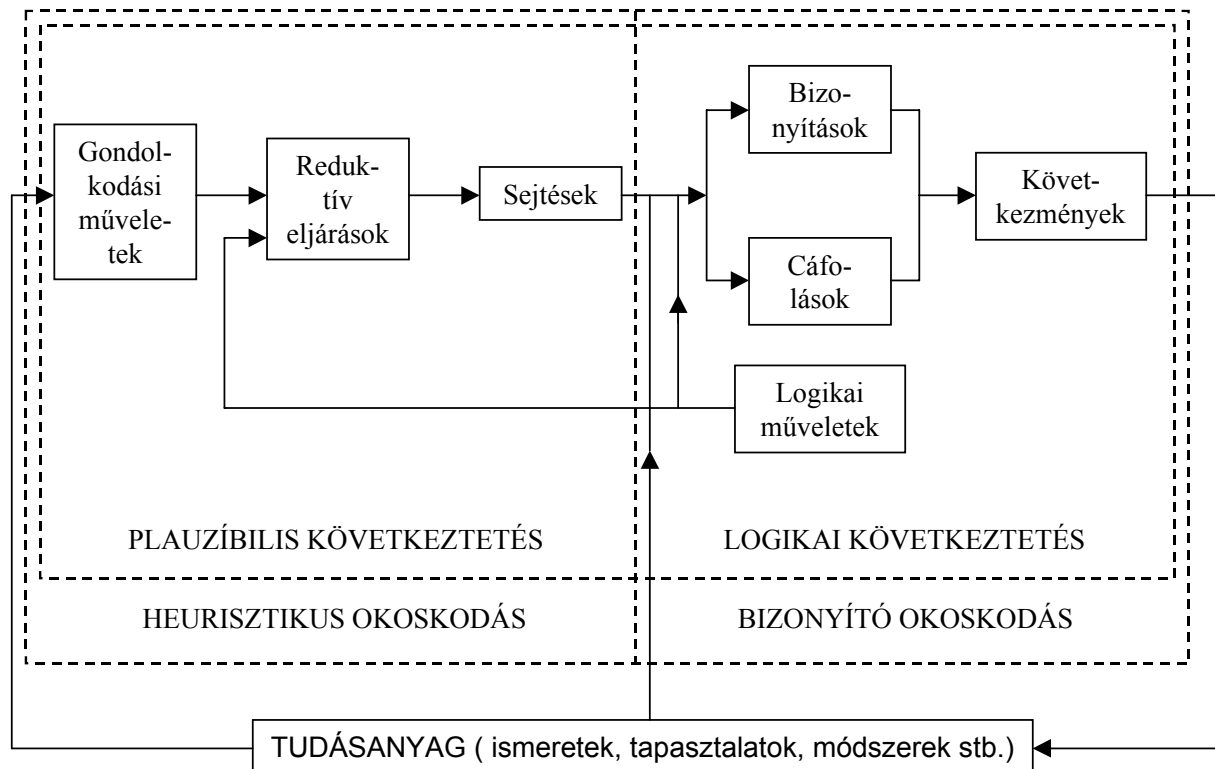
probléma felismerésétől annak megoldásáig gondolatmenetnek nevezzük.

Összegzésül föltétlen kihangsúlyozhatjuk, hogy a gondolkodás folyamatában az említett gondolkodási fázisok nem egyszer előforduló szakaszonként jelentkeznek, hanem ismételt komplex összefonódások láncolatában.

Mivel a matematikai tevékenységünk nap mint nap nagyrészt problémamegoldásokból áll célszerű néhány ezt szemléltető diagramm bemutatása. Mihai Golu szerint a problémamegoldás blokk-diagrammja az alábbi ábrán látható.



Tuzson Zoltán I. fokozati dolgozatában a problémamegoldás folyamatában a következő strukturális összefüggéseket emeli ki:



A gondolkodási műveletek és a logikai műveletek segítségével a már meglévő (megszerzett) tudásanyagból kiindulva, a reduktív eljárások által tevékenységünk a problémamegoldás megsejtésére irányul. Ezek nyomán alakulnak ki bennünk bizonyos sejtések a problémamegoldást illetően. Ez a tevékenység a plauzibilis következtetés fogalmkörébe, ez utóbbi pedig a heurisztika fogalmkörébe tartozik. Továbbá, tudásanyagunk birtokában, a logika szigorú szabályait alkalmazva bebizonyítjuk vagy megcáfoljuk sejtéseinket. Levonva a megoldásból származó tanulságokat, következtetéseket ezekkel tovább gyarapítjuk tudásanyagunkat ami természetesen döntő módon befolyásolja gondolkodásunkat az adott vagy egy újabb probléma megoldása érdekében. Nyilvánvaló, hogy a probléma megoldása már logikai következtetés, míg annak megsejtése csak plauzibilis következtetés, természetesen ezt is logikusan végezzük.

1.2. Az analógia, mint gondolkodási művelet

A gondolkodási műveletek a gondolkodás mikrostruktúrájának elemi építő köveit képezik. Mivel a cselekedeteink konkrétan megszervezhető műveletsorozatokra bonthatók és mivel a gondolkodás is cselekvési

forma ezért a gondolkodásunk is műveletekre bonthatók. Ezek a műveletek többféleképpen is osztályozhatók.

Elemi gondolkodási műveletek

1. **Analízis:** az a gondolkodási művelet amelynek során valamely dolgot, az elmélet vagy gyakorlat síkján olyan részekre bontunk fel, ahol a részek is viszonylag önálló egységet képeznek.
2. **Szintézis:** az a gondolkodási művelet, amely a részeket gondolatban vagy a cselekvés síkján egésszé kapcsolja össze.

A gondolkodás irányát illetően az analízis és a szintézis egymásnak fordított irányú gondolkodási műveletei, így a gondolkodásban rendszerint együtt jelentkeznek.

Összetett gondolkodási műveletek:

1. **Elvonatkoztatás:** az a gondolkodási művelet amellyel konkrét dolgoknak olyan közös tulajdonságát emeljük ki, amely segítségével egy őt tartalmazó halmazra térünk át.
2. **Konkretizálás:** Az a gondolkodási művelet amelynél egy halmazra vonatkozó tulajdonságot valamely elemére vonatkoztatjuk.

Az elvonatkoztatás és a konkretizálás egymással ellentétes irányú gondolkodási műveletek.

3. **Általánosítás:** az a gondolkodási művelet amelynek segítségével valamely megadott halmazról (részhalmazról) egy bővebb (az előzőt tartalmazó) halmazra térünk át.
4. **Specializálás:** az a gondolkodási művelet, amelynek segítségével egy megadott általános dologhoz (halmazhoz) tartozó alárendelt dolgot (részhalmazt) megtaláljuk.

Az általánosítás és a specializálás egymással ellentétes irányú gondolkodási műveletek.

5. **Összehasonlítás:** az a gondolkodási művelet amely konkrét vagy elvont dolgok azonosságát vagy különbözőségét tárja fel.
6. **Rendezés:** az a gondolkodási művelet, amely valamely halmazt felismert vagy megadott szempont alapján részhalmazokra bont.
7. **Összefüggés felfogása:** az a gondolkodási művelet, amellyel két dolog közötti valamilyen kapcsolatot (relációt) konkrétan megnevezünk.
8. **Kiegészítés:** az a gondolkodási művelet, amely valamely dologhoz egy adott reláció ismeretében megtalálja a megnevezett relációnak megfelelő másik dolgot.
9. **Analógia:** az a gondolkodási művelet, amely az összefüggés felfogását és a kiegészítés gondolkodási műveleteket alkalmazza, ebben a sorrendben.

Az analógia nagy segítség a gondolkodás számára. Az analógiás gondolkodás fiziológiai alakja a feltételes reflexkapcsolatok kialakulása.

A transzfer (átvitel) jelenségével is kapcsolatos. A transzfer létrejöttének alapfeltételei a módszerek és a tartalom hasonlósága valamint az alapelvek hasonlósága. Az analógiás gondolkodás módszertani szempontból káros is lehet, számos típushiba forrása.

1.3. Az analógia, mint redukzív eljárás

A kijelentések „durva szerkezetén” alapuló hihető (plauzibilis) következtetéseket *redukzív következtetéseknek* nevezzük. Részletesebben kifejezve, redukzív eljárásnak nevezzük a már megszerzett ismeretekből kiinduló új tételek, feladatok megsejtését eredményező tevékenységet. A megsejtés során két dolgot kell megsejtenünk: a következményt (vagy konklúziót) illetve a lehetséges alapot (premisszát). Tehát a redukzív eljárásokkal viszonylagos igazságokat próbálunk keresni, amelyekből végül biztosan igaz állításokhoz juthatunk. Nyilván a megsejtés után kapott eredményeket, tételeket be is kell bizonyítani.

1.3.1. A redukzív eljárások osztályozása és fontosabb sémái

A redukzív eljárások, mint plauzibilis következtetések, több szempont szerint osztályozhatók. Így például a gondolkodás iránya szerint lehetnek szintetikus (progresszív) vagy analitikus (regresszív) eljárások. A szintetikus eljárás, olyan gondolkodási eljárás amelynek alkalmazásával az okokról a következményekre térünk rá. Az analitikus eljárás olyan gondolkodási eljárás, amelynek segítségével a következményekről az okokra térünk át, megkeressük a következmények okát, eredetét.

Más szempontok szerint a redukzív eljárások lehetnek induktív vagy nem induktív eljárások. Számos kombinált típusú redukzív eljárás létezik, ezek közül a legfontosabbak az indukció, az általánosítás és az analógia.

Pólya György szerint a vizsgált következmények változatossága illetve a kiindulópontot képező premisszák változatossága nagy mértékben befolyásolják az induktív és redukzív érvelés erejét. Vizsgáljuk meg a folyamatokat induktívan és redukzívan.

Induktív

1. Ha az A előzőleg igazolt B_1, B_2, \dots, B_n következményei közül valamelyik nem igaz, akkor A nem igaz.
2. Ha A -ból következik B_{n+1} , B_{n+1} nagyon hasonló az A előzőleg igazolt B_1, B_2, \dots, B_n következményeihez és B_{n+1} igaz, akkor A egy kissé hihetőbb.

3. Ha A -ból következik B_{n+1} , B_{n+1} nagyon különbözik az A előzőleg igazolt B_1, B_2, \dots, B_n következményeitől és B_{n+1} igaz, akkor A sokkal hihetőbb.
4. Ha az A B_1, B_2, \dots, B_n következményei mind igazak A nagyon hihető.

Reduktív

1. Ha B az A_1, A_2, \dots, A_n mindegyikének következménye és A_1, A_2, \dots, A_n mindegyike igaz, akkor B igaz.
2. Ha B az $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ mindegyikének következménye, A_{n+1} nagyon hasonló A_1, A_2, \dots, A_n -hez és $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ mindegyike hamis, akkor B kevésbé hihető.
3. Ha B az $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ mindegyikének következménye, A_{n+1} nagyon különbözik A_1, A_2, \dots, A_n -től és $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ mindegyike hamis, akkor B valamivel kevésbé hihető.
4. Ha B az A_1, A_2, \dots, A_n mindegyikének következménye és A_1, A_2, \dots, A_n mindegyike hamis, akkor B nehezen hihető.

Az induktív folyamatokban, egy új következmény igazolása többet vagy kevesebbet jelent aszerint, hogy jobban vagy kevésbé tér el a korábban igazolt következményektől. Ugyanez fogalmazható meg fordítva, a reduktív folyamatok újabb feltevésére. Meggondolható továbbá, hogy egymást követő bizonyítási kísérletekből arra következtethetünk, hogy a további bizonyításból eredő bizalom megnövekszik, ha az újonnan igazolt következmény és az előzőleg igazolt következmények közötti hasonlóság csökken. A továbbiakban bemutatunk még néhány összetett reduktív következtetési sémát:

$$\begin{aligned} \{A \text{ analóg } B \text{ - vel; } B\} &\Rightarrow A \text{ hihetőbb} \\ \{A \text{ analóg } B \text{ - vel; } B \text{ hihetőbb}\} &\Rightarrow A \text{ valamivel hihetőbb} \\ \{A \leftarrow H; B \leftarrow H; B\} &\Rightarrow A \text{ hihetőbb} \end{aligned}$$

Az első, az analógiás következtetés alapvető sémája, a második pedig annak gyengített változata, a harmadik pedig egy összetett séma amelyben az A és B közötti analógiát úgy tekintjük, mint olyan közös H alap felfedezésére vonatkozó törekvést, amelyből A és B következnek. Tehát egy sejtés hihetőbb lesz, ha egy vele analóg sejtés igaz volta kiderül, illetve valamivel hihetőbbé válik, ha egy analóg sejtés hihetőbb.

Más reduktív következtetési séma-párok:

$$\begin{aligned} \{A \rightarrow B; B \text{ önmagában valószínűtlen; } B \text{ igaz}\} &\Rightarrow A \text{ sokkal sokkal hihetőbb} \\ \{A \rightarrow B, B \text{ önmagában igen valószínűtlen}\} &\Rightarrow A \text{ épp egy kicsit hihetőbb} \end{aligned}$$

Az alábbi séma-párokból leolvasható hogy a konklúzió ereje növekszik amennyiben B hihetősége csökken A nélkül:

$\{A \rightarrow B, B \text{ az } A \text{ nélkül alig hihető; } B \text{ igaz}\}$



A nagyon sokkal hihetőbb

$\{A \rightarrow B, B \text{ mindenképpen majdnem biztos; } B \text{ igaz}\}$



A nagyon kicsivel hihetőbb

A plauzibilis következtetés konklúziója monoton módon változik, ha egyik premisszája monoton módon változik, továbbá folytonosság is észlelhető olyan értelemben, hogy a plauzibilis következtetési sémáknak van „határesete” és ez egy demonstratív következtetési séma, tehát folytonos átmenet van a heurisztikus és valamely demonstratív séma között.

1.3.2. Az analógia, mint reduktív eljárás

Mivel az analógia reduktív eljárás és ez plauzibilis következtetés a reduktív eljárások jellemvonásai az analógiában is érvényesek. Alapvető analógia sémaként jelent meg a következő:

$\{A \text{ analóg } B\text{-vel; } B \text{ igaz}\} \Rightarrow A \text{ hihetőbb}$

Ez azonban explicite módon nem tartalmazza, hogy mit is jelent az, hogy „A analóg B-vel”? Analógiával következtethetünk úgy is, hogy fogalmakat vele analóg fogalmakkal cserélünk ki és megpróbáljuk megsejteni, hogy ez az analógia miként lesz jelen a bizonyításokban, vagy éppen analóg tételt, eredményt kapunk-e?

Az a kérdés is felmerül, hogy mikor mondhatjuk (feltételezhetjük), hogy két rendszer analóg?

Analógiával úgy is következtethetünk, hogy adott helyzetek, feltételek, érvek stb. hasonlósága miatt a bizonyítási módszerek analógiáira is, vagy (és) a tételek analógiáira is következtethetünk.

Nyilvánvalóan miután precíz matematikai-logikai eszközökkel deduktív módon be is bizonyítottuk sejtésünket, máris rendelkezésünkre állnak, végérvényesen, vitathatatlanul érvényes analóg bizonyítási módszerek, tételek stb.

Nézzük meg tehát az analógia elemi szintű leírását. Az analógia mindenek előtt a hasonlóság egy fajtája (nem a geometriában használt transzformációra gondolunk). Hasonlónak mondunk két dolgot, ha valamilyen tekintetben megegyeznek egymással, analógnak akkor

mondunk két dolgot, ha megfelelő részeik egyforma kapcsolatban vannak. Tehát ha az egyező vonás fogalommá tisztul, ezeket az objektumokat analógnak tekintjük. Ha sikerül világos fogalmakhoz jutnunk, akkor tisztáztuk az analógiát.

Ezek szerint két rendszer analóg, ha megfelelő részeik világosan megfogalmazható kapcsolataikban megegyeznek. Még jobban közelítve az analógiás következtetés mibenlétét kijelenthetjük, hogy az analógia a gondolkodásnak az a formája, amely alkalmazáskor két vagy több jelenségnek, dolognak, bizonyos tulajdonságokban, viszonyokban, struktúrában való megegyezése alapján más tulajdonságokban, viszonyokban struktúrában való megegyezését is sejtjük. Az eljárást szokás analógiás következtetési módnak nevezni.

Egy leegyszerűsített, leggyakrabban használt sémája a következő:

1. *feltétel*: az A objektum rendelkezik a, b, c, x tulajdonságokkal;

2. *feltétel*: a B objektum rendelkezik a, b, c, tulajdonságokkal;

Következtetés: valószínű hogy a B rendelkezik x tulajdonsággal is. (természetesen, egy lényegesen jellemző x tulajdonságot vizsgálunk)

A gondolkodás mikroszintjén – miszerint a gondolkodás műveletek formájában megy végben – az analógiás következtetés során az analógiát mint gondolkodási műveletet használjuk, vagyis összefüggéseket fogunk fel és egészítünk ki. Az analógiás gondolkodás fiziológiai alakja a feltételes reflexkapcsolatok kialakulása. A transzfer (átvitel) jelenségével is kapcsolatos. A transzfer létrejöttének alapfeltételei a módszerek és a tartalom hasonlósága valamint az alapelvek hasonlósága.

Az analógiás gondolkodás az alapja a „típusfeladatoknak”, az „egyenletkaptafáknak”, az „algoritmusoknak” a „szabályok alkalmazásának” stb. Kihangsúlyozandó azonban hogy az analógia nem feltétlenül egyértelmű: például egy háromszög analógnak tekinthető egy tetraéderrel, vagy éppen egy tetszőleges gúlával vagy kúppal. A tetraéder a háromszögon kívül bizonyos tekintetben analógnak tekinthető a triéderrel is. A fogalmak analógiái után felmerül az értelmezések, eljárások a bizonyítások, az eredmények analógiájának kérdése is. Amennyiben ezek analógiáját bizonyítani tudjuk, úgy analógiás sejtésünk beigazolódott. Így analóg tételek, feladatok párosított sorozatát kapjuk, amelyek végérvényesen tisztázott analógiák. Fontos újra kihangsúlyozni, hogy az analógiás következtetéssel nyert sejtést minden esetben követnie kell a bizonyításnak.

Ugyanakkor az analógia észrevétele az emlékezet hasznos eszköze. Gyakran az utólagos analógia észrevétele az ismeretek elmélyítését is szolgálja és erősíti a tartós emlékekezést.

Az analógiás gondolkodás módszertani szempontból számos típusba forrása lehet. A hamis analógiák gyarapodásához az is

hozzájárul, hogy egy fogalom – a szempont függvényében – több más fogalommal is analóg lehet.

Annak függvényében, hogy az analógiás fogalomcsere során általánosabb vagy speciálisabb fogalmakat illetve gondolatmeneteket használunk az analógiás következtetéseink lehetnek általánosító vagy specializáló analógiák.

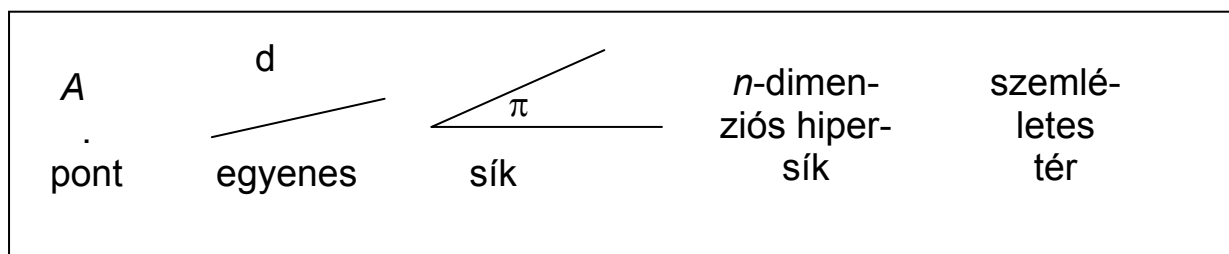
II. FEJEZET A GEOMETRIAI ANALÓGIÁKRÓL ÁLTALÁBAN

2.1. Geometriai fogalmak, értelmezések analógiája

Tisztáztuk, hogy az analógia különböző dolgok, jelenségek közötti hasonlóságot, egyezést jelent. A geometriában fogalmak, alakzatok, tételek, feladatok illetve bizonyítási módszerek, eljárások közötti analógiákról beszélhetünk (ez a hasonlóság, egyezés, amit a geometriai analógia jelent, nagyon különbözik a geometriában közismert hasonlóság fogalmától).

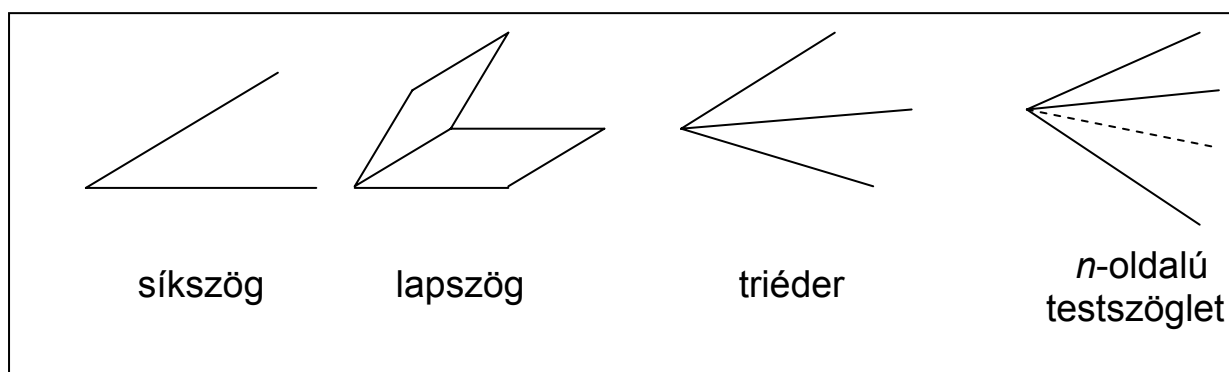
Már az alapfogalmak szintjén is jelentkeznek analógiák, és az analógiás gondolkodással egyidejűleg ennek az általánosítással és specializálással kapcsolatos szoros összefüggései.

Mivel analóg szerepet töltenek be analóg helyzetekben, értelmezésekben stb. analógnak tekintjük a



A felsorolás az analóg fogalmak által magukba foglalt általánosság szerint végeztük.

Szintén analóg fogalmak a:



A felsorolt fogalmak itt is magukkal hordozzák az általánosítás és specializálás jellemzőit.

Az általános háromszög esetén, nála sajátosabb a derékszögű, egyenlő szárú, egyenlő oldalú háromszög, általánosabb a négyszög, ötszög, ... , n -szög. Vagy például a téglalap esetén, nála sajátosabb a négyzet, háromszög, szakasz, pont, általánosabb a rombusz, paralelogramma, trapéz, konvex négyszög, konkáv négyszög, n -oldalú sokszög.

Ugyancsak analóg fogalmak a 2-, 3-, ..., n -dimenziós nem ortonormált és ortonormált koordináta rendszerek (euklideszi terek), így a tér dimenziója számos analógia forrása: a háromszög analóg a tetraéderrel, triéderrel, kúppal, n -szimplexel stb. Sajátosan a speciális tetraéderekkel, triéderekkel, kúpokkal stb. vagy általánosabban hasábbal, poliéderrel stb. A téglalapot analógnak tekinthetjük a téglatesttel, n -dimenziós téglatesttel, stb., sajátosan a kockával, n -dimenziós kockával, vagy általánosabban a paralelepipedonnal, a hasábbal, a poliéderrel stb.

A példák felsorolásából arra következtethetünk, hogy ha az analógiát nagyobb mértékben jellemzi az általánosítás, akkor csökken az analóg tulajdonságok mértéke (száma), ha viszont a sajátosságok dominálnak, akkor bizonytalanná válhat az analógiás sejtésünk, mert az analógiák a sajátos eset miatt is bekövetkezhetnek.

Értelmezések szintjén érdemes megfigyelnünk azt, hogy mi biztosítja már indulásból két fogalom közötti analógia alapját? Vizsgáljunk meg néhány példát:

A szakasz felezőmerőlegese a síkban és a szakasz felezőmerőleges síkja térben egyaránt két ponttól – a szakasz két végpontjától – egyenlő távolságra levő pontok halmaza.

A kör és gömb egyaránt azoknak a pontoknak a halmaza, amelyek adott ponttól adott távolságra vannak.

Mindkét példa esetében az analóg fogalmak értelmezésekor ugyanazt a definíciót használtuk.

A szabályos sokszög olyan sokszög, amelynek minden oldala és minden szöge egybevágó. A szabályos poliéder olyan konvex poliéder amelynek lapjai egybevágó szabályos sokszöglapok és lapszögei egybevágóak.

A fenti példa esetében analóg definíciókat használtunk azáltal, hogy a sokszög – poliéder, oldal – oldallap, szög – lapszög

analóg fogalompárokat használtuk. Nyilvánvaló, hogy az első felsorolás esetén ha továbbra is azonos értelmezéseket, azonos axiómákat stb. használunk átfogó és nyilvánvaló analógiákra számíthatunk, míg a második példa kapcsán számos tisztázott analógia bizonyítható, de eltérések is előállhatnak. Így bármely $n > 2$ esetén létezik n -oldalú szabályos sokszög, viszont a térben csak 5 szabályos poliéder van: a tetraéder, a hexaéder, az oktaéder, a dodekaéder és az ikozaéder.

A geometriai analógiákkal kapcsolatban fontosnak tartom kihangsúlyozni azt, hogy bizonyos analógiás fogalmak esetén az analógia további létéről előreláthatóan nem vélekedhetünk. Jó példa erre az, hogy míg a háromszög magasságai egy pontban metszik egymást, addig a tetraédernél a magasságok egy közös pontban való metszése speciális tetraéder – ortocentrikus tetraéder – tulajdonsága (a fogalom tisztázásával a speciális tetraéderek fejezetben foglalkozunk).

Végül adjunk néhány példát arra, amikor egy fogalomnak két, vagy több analógója van:

A háromszög analógójának tekinthetjük a tetraéderen kívül a három oldalú testszöveget és a gömb-háromszöveget is, mert több olyan tétel is érvényes rájuk, amely háromszögre igaz. Például nagyobb oldallal szemben nagyobb szög fekszik, bármely két oldal összege nagyobb, mint a harmadik oldal, koszinusztételt is felírhatunk stb. (egyébként nemcsak gömbfelületen értelmezhetünk háromszöveget, hanem más felületen is).

A négyzetbe írt kör analógja vagy a kockába írt gömb, vagy a kocka éleit érintő gömb, attól függően, hogy a négyzetoldalainak a kocka lapjait vagy a kocka éleit feleltetjük meg.

E néhány példából is láthatjuk, hogy a geometriában analógiát létrehozni számtalan módon lehetséges. A következő paragrafusban már csak a háromszög és tetraéder analógiáit taglaljuk.

2.2. Analóg fogalmak a háromszög és tetraéder geometriájában

Már említettük, hogy a tetraéderen kívül más térbeli alakzat is rendelkezik olyan tulajdonságokkal, amelyek hasonlóak a háromszög bizonyos tulajdonságaihoz. De ezeknek az analógiáknak a száma eltörpül azokéhoz képest, amelyek a háromszög és a tetraéder (három oldalú gúla, négy lapú szögletes test) között állnak fenn, ezért a háromszög térbeli analógjának a tetraédert tekintjük. Emellett szól az a tény is, hogy a háromszög a legegyszerűbb sokszög (poligon), a tetraéder pedig a legegyszerűbb poliéder. Továbbá kiemelhetjük azt is, hogy a háromszöveget felfoghatjuk mint 2 dimenziós szimplex, a tetraédert pedig mint 3 dimenziós szimplex. Azonban tisztázni kell az alapvető analóg fogalmakat, hisz a tetraéder gazdagabb, mint síkbeli társa, van oldaléle és oldallapja is. Tisztázzuk hát a háromszög nevezetes vonalaival analóg fogalmakat.

1. Oldalfelező merőleges és az él felezőmerőleges sík. Láttuk már, hogy az oldalfelező merőleges és az él felezőmerőleges síkja analóg fogalmak (ugyanazt az értelmezést használjuk), így háromszögben a 3 oldalhoz 3 oldalfelező merőlegest, a tetraéderben a 6 élhez 6 felezőmerőleges síkot csatolhatunk (itt az oldalélek játszanak fő szerepet). Ha az oldallapokat vesszük alapul, akkor az oldalfelező merőleges analóg megfelelője azon pontok mértani helye amelyek egyenlő távolságra vannak az oldallap három csúcsától. Ez nyilván az oldallap köré írt kör középpontjában, az oldallap síkjára állított merőleges egyenes – *lapfelező merőleges*. A 4 laphoz 4 ilyen lapfelező merőleges társítható.

2. Szögfelező és lapszög szögfelező síkja. Az a csúcsból kiinduló félegyenes, amely a szöveget két egybevágó szögre osztja, illetve lapszög esetén az a közös egyenesből kiinduló félsík, amely a lapszöveget két egybevágó lapszögre osztja. Azon pontok mértani helye, amelyek egyenlő

távolságra vannak a szög két szárától – lapszög két lapsíkjától. Így háromszögnél 3 oldalhoz 3 szögfelezőt (belső vagy külső) a tetraédernél a 6 lapszöghöz 6 lapszög szögfelező síkot társíthatunk. Másrészt ha a szög – triéder analógiából indulunk ki, a szögfelezőhöz hasonlóan a *triéder szögfelezője* azon pontok mértani helye, amelyek egyenlő távolságra vannak a triédert alkotó három síktól (ez az egyenes egyébként a triédert alkotó három élen áthaladó lapszögfelező síkok közös egyenese), akkor a tetraéder 4 csúcsához 4 ilyen triéder szögfelező társul és egy új analógiát hoztunk létre.

3. Oldalfelező és élfelező sík. Háromszögben egyik csúcsot a szemben fekvő oldal felezőpontjával összekötő szakasz míg tetraéderben egyik élen és a szemben fekvő oldal felezőpontján áthaladó sík analóg fogalmak. Ha viszont a az oldalfelezőt úgy fogjuk fel mint egyik csúcsot a szemben fekvő oldal súlypontjával összekötő szakaszt – súlyvonalat, akkor tetraéderben az egyik csúcsot a szemben fekvő oldallap súlypontjával összekötő szakaszt tekinthetjük a tetraéder súlyvonalának. Ezek szintén analóg fogalmak.

4. Magasságok. Egy csúcsot a szemben fekvő oldalra – odallapra eső merőleges vetületével összekötő szakasz.

Természetesen megpróbálhatjuk a magasság térbeli analógiának az egyik élen át a szemben fekvő élre bocsátott merőleges síkot tekinteni, vagy esetleg a szemben fekvő élek közös merőlegesét, de mint azt a negyedik fejezetben látni fogjuk, ezen síkok és egyenesek egy pontban való összefutása az előző paragrafusban már említett speciális tetraéderekben a fent bevezetett magasságok összefutásának következménye. Ezért a háromszögbeli magasság analógiának a fent bevezetett magasságot tekintjük.

A következő fejezetben azokkal a tételekkel foglalkozunk, amelyek általános alakzatokra (háromszög, tetraéder) vonatkoznak, majd a negyedik fejezetben olyan tetraéderekkel, amelyek bizonyos speciális szempontok szerint tekinthetők a háromszög analogonjának.

III. FEJEZET ALAPTÉTELEK

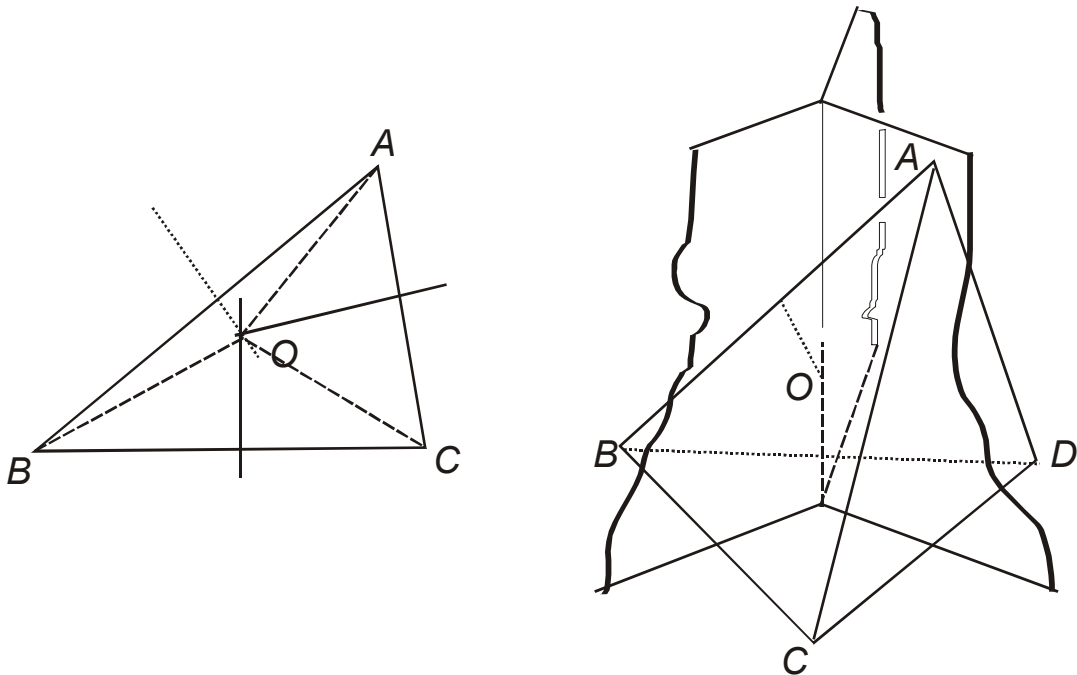
3.1. Háromszög és tetraéder köré írható kör illetve gömb

Tétel. a) A háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást. Ez a pont a háromszög köré írt kör középpontja.

b) A tetraéder éleinek felezőmerőleges síkjai egy pontban metszik egymást. Ez a pont a tetraéder köré írt gömb középpontja. Ugyanezt a pontot kapjuk a négy lapfelező merőleges egyenes metszéspontjaként is.

Bizonyítás. Háromszög esetén elegendő kimutatni, hogy két felezőmerőleges metszi egymást, mert ekkor az O metszéspont egyenlő távolságra van a háromszög mindhárom csúcsától, így rajta a harmadik oldalfelező merőlegesen is. Legyen d_1 az AB , d_2 a BC oldalfelező merőlegese. Ha d_1 és d_2 nem metszik egymást, akkor $d_1 \parallel d_2$. Mivel $d_1 \perp AB \Rightarrow d_2 \perp AB$ azaz B -n át d_2 -re két merőleges húzható. Ez nem lehetséges, tehát d_1 és d_2 metszik egymást.

Tetraéder esetén az egyik lapon fekvő élek oldalfelező merőleges síkjai egy egyenesben metszik egymást, ez a lap köré írt kör középpontjában a lapra emelt d merőleges. Ez az egyenes nem lehet párhuzamos a tetraéder többi éle közül egyikkel sem, mert a tetraéderben nincs olyan él, amely párhuzamos lenne valamelyik lappal. Így d metszi a többi él oldalfelező merőleges síkját is. Ha α egy ilyen sík és $\{O\} = d \cap \alpha$, akkor O egyenlő távolságra van a tetraéder négy csúcsától, tehát rajta van az összes él oldalfelező merőleges síkján. Ezt az O pontot nevezzük a tetraéder köré írt gömb középpontjának.



3.2. Tetraéderbe írható gömbök

Tétel. a) A háromszög belső szögfelezői egy pontban metszik egymást. Ez a pont a beírt kör középpontja.

b) A tetraéder hat lapszögének belső szögfelezősíkja egy közös pontban metszi egymást. Ez a pont a beírt gömb középpontja.

Bizonyítás. a) Háromszög esetén az A és B csúcsból kiinduló szögfelezők metszik egymást (ellenkező esetben párhuzamosak, így az A és B szög összege már 180° , ami lehetetlen). A két szögfelező I metszéspontja egyenlő távolságra van a háromszög mindhárom oldalától (a szögfelezők értelmezése alapján), tehát rajta van a harmadik szögfelezőn és egyben a beírt kör középpontja.

b) A BC és CD élű lapszögek szögfelezősíkjai nem esnek egybe, de van közös pontjuk, tehát egy egyenesben metszik egymást. Ez az egyenes metszi az (ABD) síkot, tehát a BD élű lapszög szögfelezősíkját is. Az I metszéspont a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

$$d(I, ABC) = d(I, BCD)$$

(mert a BC élű lapszög szögfelezősíkjában van),

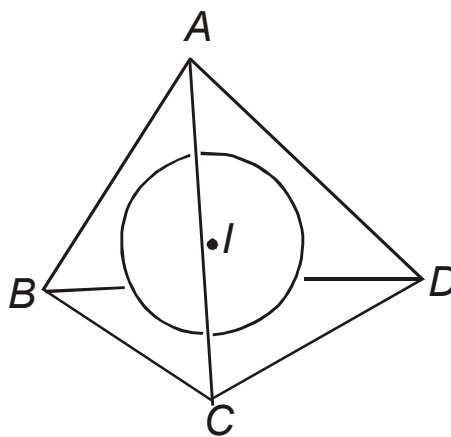
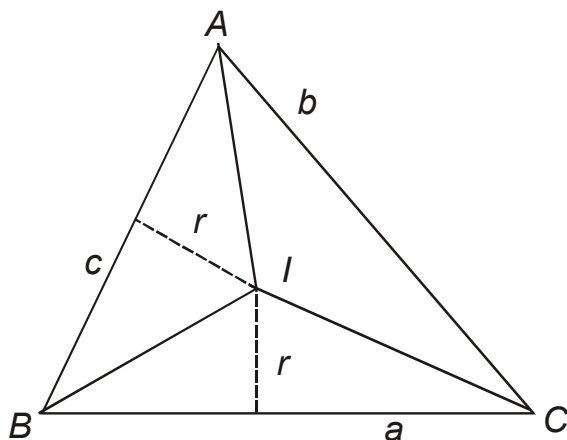
$$d(I, ACD) = d(I, BCD),$$

$$d(I, ABD) = d(I, BCD).$$

Ebből következik, hogy

$$d(I, ABC) = d(I, ACD), \quad d(I, ABC) = d(I, ABD) \quad \text{és} \quad d(I, ACD) = d(I, ABD).$$

Tehát az I pont benne van az AB , AC és AD élű lapszögek szögfelező síkjában is. Ez azt jelenti, hogy az I pont egyenlő távolságra van a tetraéder minden lapjától. Így az I középpontú és $d(I, ABC)$ sugarú gömb érinti a tetraéder minden lapját.

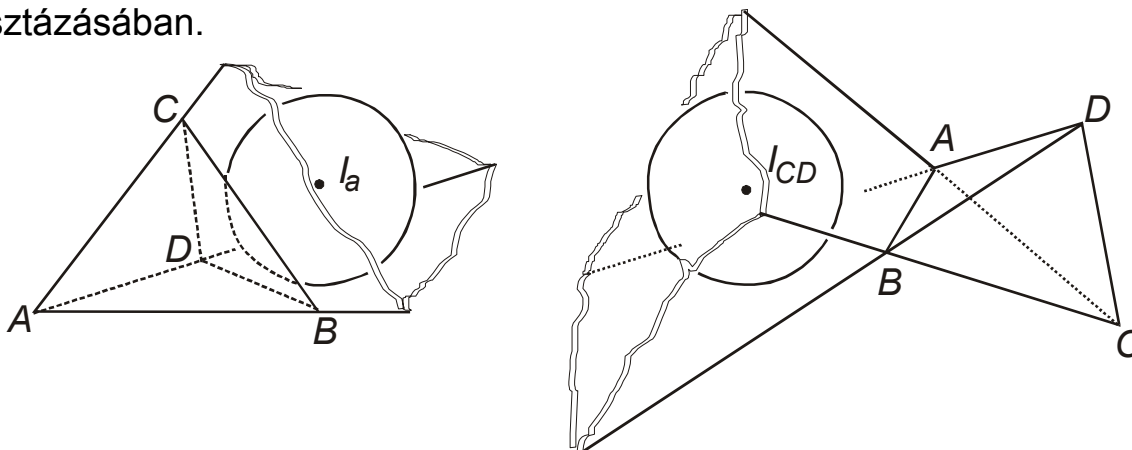


3.3. Tetraéderhez írható gömbök

Tétel. a) A háromszög B és C csúcsán átmenő külső és az A csúcsból kiinduló belső szögfelező egy pontban metszik egymást. Ez a pont I_a - az a oldalhoz hozzáírt kör középpontja.(és még 2 analógja)

b) Tetraéderben az AB, AC, AD élekhez tartozó belső és a BC, CD, DB élekhez tartozó külső lapszögfelező síkok (hat sík) egy pontban metszik egymást. Ez a pont I_A - az A csúccsal szemközti BCD laphoz hozzáírt gömb középpontja.(és még 3 analógja)

A belső és külső szögfelezők azonos tulajdonsága miatt a fenti tétel bizonyítása hasonló az előbbi tétel bizonyításához, ezért erre külön nem térek ki. Foglaljuk össze az témával kapcsolatos eredményeinket: A háromszögnek négy olyan köre van, amely mind a három oldalegyenesét érinti. A tetraédernek öt olyan gömbje van amely mind a négy lap síkját érinti. Vegyük észre, hogy a háromszög oldegyenesesei a síkot $7 = 2^3 - 1$ részre osztják és 4 érintő köre van, míg a tetraéder lapsíkjai a teret $15 = 2^4 - 1$ térrészre osztják de ezekből „csak” 5-ben van érintő gömb holott a várható eredmény 8 volna ($4 = 2^2, 8 = 2^3$). A következő tételben belátjuk, hogy a tetraédernél bizonyos esetben létezik még három érintőgömb (külső érintőgömb vagy más néven pszeudoérintő gömb). Nyilván ezen gömböknek nincs analóg megfelelője háromszög esetén de a példa rámutat a dimenzió fontos szerepére általánosításoknál és analógiák tisztázásában.



Tétel. A külső érintőgömb csak akkor létezik, ha a megfelelő két lap területének összege különbözik a másik két lap területének összegétől.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy a tetraéder beírt gömbje a tetraéder négy lap síkját „belülről” érinti, a hozzáírt gömbök pedig három lapsíkot „belülről”, egyet „kívülről” érintenek. Látni fogjuk, hogy a külső érintőgömbök két lapsíkot „belülről”, két lapsíkot „kívülről” érintenek. Egy $ABCD$ tetraéder két szemközti, például AB és CD élekre illeszkedő belső lapszögfelező síkmetszéspontját egy harmadik, például a BC élre illeszkedő külső lapszögfelező sík vagy metszi, vagy párhuzamos vele. Ha metszi, akkor a metszéspont vagy az AB -re „kifelé” illeszkedő ABC és ABD oldallapok

tartósíkjai által meghatározott térrészben, vagy a szemben fekvő CD -re „kifelé” illeszkedő ACD és BCD oldallapok tartósíkjai által meghatározott térrészben van (mindkettőben nem lehet metszéspont mert egy egyenes és egy sík csak egy pontban metszheti egymást). A lapszögfelező síkok tulajdonsága alapján ez a pont egyenlő távolságra van a négy lap síkjától tehát egy külső érintőgömb középpontja. Legyenek M , N és P a CD , AB és BC élekre illeszkedő szögfelező síkok metszéspontjai a szemben fekvő élekkel.

Ha $MN \parallel (BCP) \Leftrightarrow d(M, (BCP)) = d(N, (BCP)) \Leftrightarrow V[MBCP] = V[NBCP]$

ahonnan osztással $\frac{V[MBCP]}{V[ABCP]} = \frac{V[NBCP]}{V[ABCP]}$. (*) A továbbiakban kiszámítjuk

a két arány értékét és közben többször használjuk a 3.5. szögfelező tételt

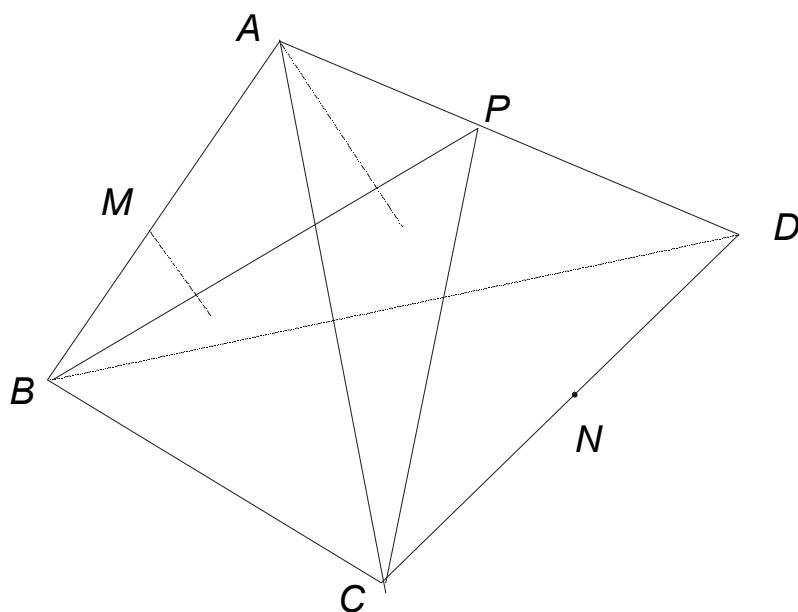
tetraéderre: $\frac{V[MBCP]}{V[ABCP]} = \frac{d(M, (BCP))}{d(A, (BCP))} = \frac{BM}{BA} = \frac{BM}{BM + MA} = \frac{T_A}{T_A + T_B}$ (1), ahol

T_x az X csúccsal szemben fekvő oldallap területét jelöli. Analóg módon

$\frac{V[NBCP]}{V[DBCP]} = \frac{CN}{CD} = \frac{CN}{CN + ND} = \frac{T_D}{T_C + T_D}$ ahonnan felírhatjuk, hogy

$$\frac{V[NBCP]}{V[ABCP]} = \frac{V[NBCP]}{V[DBCP]} \cdot \frac{V[DBCP]}{V[ABCP]} = \frac{T_D}{T_C + T_D} \cdot \frac{DP}{PA} = \frac{T_D}{T_C + T_D} \cdot \frac{T_A}{T_D} = \frac{T_A}{T_C + T_D}.$$

Ezt (*) alapján (1)-el egyenlővé téve: $T_A + T_B = T_C + T_D$. Analóg módon következtethetünk arra, hogy tetszőleges két lap területének összege egyenlő. Tehát ekkor nem léteznek külső érintőgömbök.



3.4. Súlypont

Tétel. a) A háromszög oldalfelezői (súlyvonalai) egy pontban metszik egymást. Ez a pont a háromszög súlypontja (G), bármelyik súlyvonalat a csúcstól számítva 2:1 arányban osztja.

b) Tetraéderben:

(1) az élfelező síkok (hat sík) egy pontban metszik egymást.

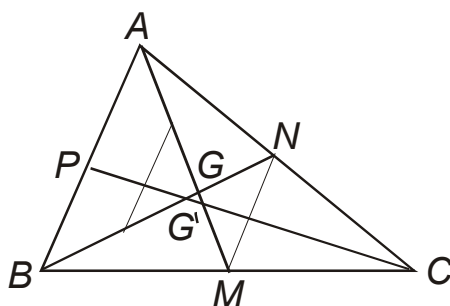
(2) a súlyvonalak (négy darab) egy pontban metszik egymást.

Ez a pont a tetraéder súlypontja (G), bármelyik súlyvonalat a csúcstól számítva 3:1 arányban osztja. Ezen a ponton mennek át a tetraéder éltengelyei (kettős felezői) is.

Bizonyítás. a) Legyen M a BC , N az AC , P az AB felezőpontja. Az AM és BN szakaszok biztos metszik egymást mert AM az ABC háromszög belsejében van és elválasztja a B és N pontokat. Legyen $\{G\} = AM \cap BN$ és P az AG illetve Q a BG felezőpontja. MN és PQ középvonalak az ABC és ABG háromszögekben, tehát $MN \parallel PQ$ és $MN = PQ = \frac{AB}{2} \Rightarrow NMPQ$

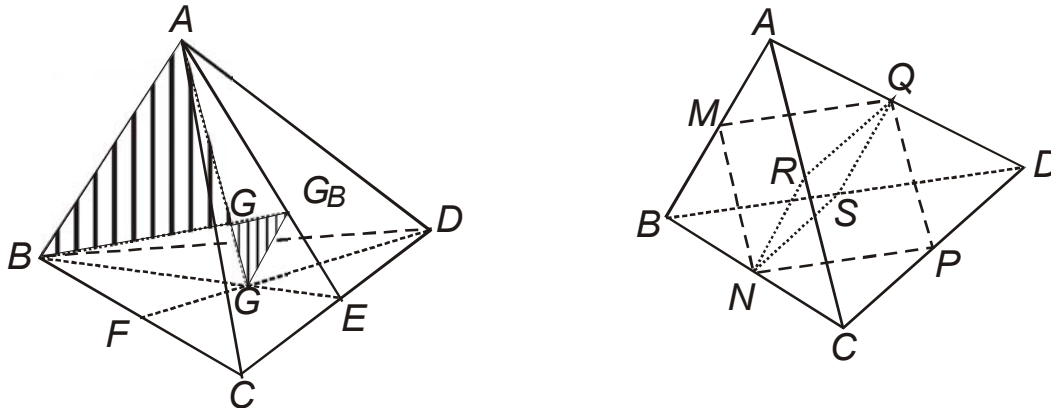
négyszög paralelogramma $\Rightarrow MG = GP$ és mivel P felezőpont nyilvánvaló, hogy $\frac{AG}{MG} = \frac{2}{1}$. Legyen $\{G'\} = AM \cap CP$. Az előbbi gondolatmenetet

megismételve $\frac{AG'}{MG'} = \frac{2}{1}$ vagyis G és G' az AM szakaszt ugyanolyan arányban osztja $\Rightarrow G = G'$ azaz az oldalfelezők összefutnak. Hasonlóan bizonyítjuk, hogy $\frac{CG}{PG} = \frac{2}{1}$.



b) Tetraéderben vegyük észre, hogy elegendő bebizonyítani a súlyvonalak összefutását, mert például a BCD háromszöget alkotó élék élfelező síkjainak metszéspontja az AG_A súlyvonal. Tekintsük a tetraéder AG_A és BG_B súlyvonalát amelyek ugyanabban az ABE síkban vannak (E a CD felezőpontja), tehát metszik egymást a G pontban. Mivel G_A és G_B a megfelelő lapok súlypontjai $\frac{EG_A}{G_A B} = \frac{1}{2}$ és $\frac{EG_B}{G_B A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{EG_A}{EB} = \frac{1}{3}$ és $\frac{EG_B}{EA} = \frac{1}{3}$.

Ez azt jelenti, hogy tehát $G_A G_B \parallel AB$ és $\frac{G_A G_B}{AB} = \frac{1}{3}$ vagyis $GG_A G_B \Delta \sim SAB \Delta$ és $\frac{G_A G}{GA} = \frac{G_B G}{GB} = \frac{1}{3}$. Ha a bizonyítást hasonlóan elvégezzük a többi súlyvonalra is a tételt bizonyítottuk.



Az élfelező tengelyek összefutásának bizonyítása. Az ábra jelöléseit használva belátható, hogy $MNPQ$ és $RNSQ$ négyszögek paralelogrammák (oldalaik a megfelelő háromszögekben középvonalak), tehát átlóik metszik egymást. De a két paralelogrammának van egy közös átlója, így a három átló egy pontban metszi egymást.

Megjegyzés. Módszertani szempontból érdemesnek tartom a súlyvonalak összefutásának más, lényegesen különböző bizonyítását is ismertetni, hisz a hozzá szükséges tudásanyag már középiskolás diákok által is ismert mechanikából (az anyagi pontok csoportosítási tétele vagy súlypont szerkesztési tétel). Az előbbi jelöléseket használjuk és az $A(m)$ jelöléssel utalunk az A pontra illetve a hozzárendelt súlyra. Így ha az $(A(1), B(1), C(1))$ pontrendszer $A(1)$ és $(B(1), C(1))$ halmazokra bontjuk akkor a rendszer $G(3)$ súlypontja az $A(1)M(2)$ szakasz M -hez közelebb eső harmadolópontja. Ha elvégezzük a $B(1)$, $(A(1), C(1))$ és $C(1)$, $(A(1), B(1))$ csoportosításokat állításunkat igazoltuk.

Tetraéderben az $A(1)$ és $(B(1), C(1), D(1))$ csoportosítással a rendszer $G(4)$ súlypontja az $A(1)G_A(3)$ szakasz G_A -hoz közelebb eső negyedelőpontja. Elvégezve az analóg csoportosításokat (1)-t bebizonyítottuk. Ha azonban az $(A(1), B(1))$ és $(C(1), D(1))$ csoportosítást végezzük el a tetraéder $G(4)$ súlypontja az $(M(2), P(2))$ szakasz felezőpontja és a másik két élpár szerinti csoportosítást is elvégezve (2)-t is bebizonyítottuk.

3.5. Szögfelező tétele

Tétel. a) Háromszögben az egyik csúcshoz tartozó belső szögfelező a szemközti oldalt a szöget bezáró oldalak hosszának arányában osztja két részre. (A nagyobb oldal mellett van a nagyobb rész.)

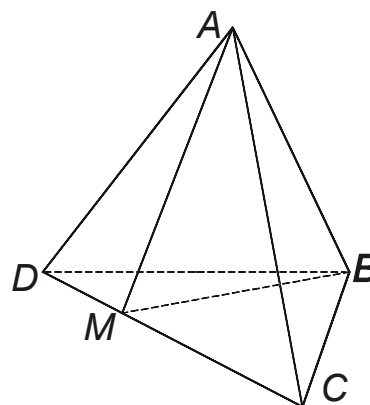
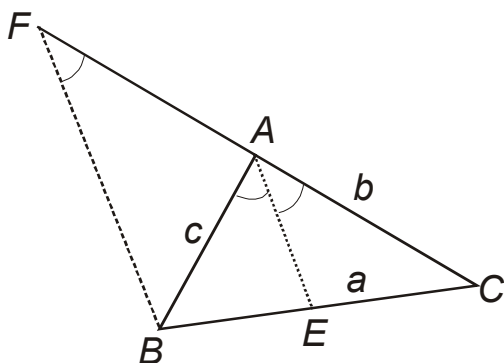
b) A tetraéder bármelyik élére illeszkedő belső lapszögfelező sík a szemközti élt a lapszöget bezáró lapok területének arányában osztja ketté. (A kisebb területű lap mellett van a kisebb rész.)

Bizonyítás. 1. Például ha E a BAC szögfelezőjének talppontja az ABE és AEC háromszögek A csúcshoz tartozó magassága közös és az E egyenlő távolságra van az AB és AC oldalaktól

$$\frac{BE}{EC} = \frac{T[ABE]}{T[AEC]} = \frac{AB \cdot d(E, AB)}{AC \cdot d(E, AC)} = \frac{AB}{AC},$$

amit bizonyítani akartunk.

2. Segédszerkesztéses bizonyítást is adhatunk. Ha B -n keresztül AE -hez húzott párhuzamos egyenes AC -t F -ben metszi, akkor ABF háromszög egyenlő szárú ($AF = AB$) és AEC háromszög hasonló FBC háromszöggel, ahonnan szintén következik az állítás.



Az $ABCD$ tetraéder AB élű lapszögének szögfelező síkja a CD szakaszt az M pontban metszi. Be kell bizonyítsuk, hogy $\frac{CM}{MD} = \frac{T[CAB]}{T[DAB]}$.

Az $AMBC$ és $AMBD$ tetraéderek AMB alapja közös, és a C , illetve a D -ből húzott magasságok aránya $\frac{CM}{MD}$, tehát

$$\frac{CM}{MD} = \frac{\frac{1}{3} CM \cdot T[AMB]}{\frac{1}{3} MD \cdot T[AMB]} = \frac{V[AMCB]}{V[ADBM]}.$$

A Dostor-féle kifejezés alapján (lásd metrikus relációknál)

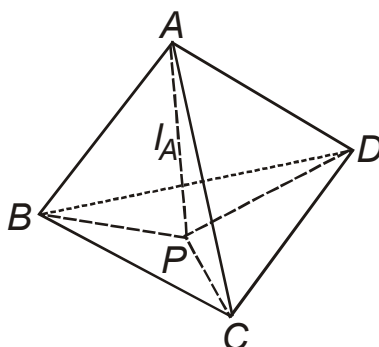
$$V[AMBC] = \frac{2}{3} \cdot \frac{T[AMB] \cdot T[ABC] \cdot \sin \alpha}{AB} \text{ és}$$

$$V[AMBD] = \frac{2}{3} \cdot \frac{T[AMB] \cdot T[ABD] \cdot \sin \alpha}{AB},$$

ahol α az AB élű lapszög mértékének a fele. Ebből következik, hogy

$$\frac{V[AMBC]}{V[AMBD]} = \frac{T[ABC]}{T[ABD]}, \text{ tehát } \frac{CM}{MD} = \frac{T[CAB]}{T[DAB]}.$$

2. analóg tétel. Ha az $ABCD$ tetraéderben az A csúcs által meghatározott triéder I_A szögfelezőjének BCD lappal való metszéspontját P -vel jelöljük akkor $T[PBC]:T[PCD]:T[PDB] = T[ABC]:T[ACD]:T[ADB]$.



Bizonyítás. A síkbeli (1) bizonyítással analóg módon a keletkező $PABC$, $PACD$, $PADB$ tetraéderek térfogatát kétféleképpen számítjuk ki. Egyrészt ezeknek A -ból kiinduló magassága közös tehát

$$V[PBC]:V[PCD]:V[PDB] = T[PBC]:T[PCD]:T[PDB]$$

másrészt a P a szögfelező tulajdonsága miatt egyenlő távolságra van a triéder lapjaitól, így

$$V[PBC]:V[PCD]:V[PDB] = T[ABC]:T[ACD]:T[ADB].$$

A két összefüggésből következik az állítás.

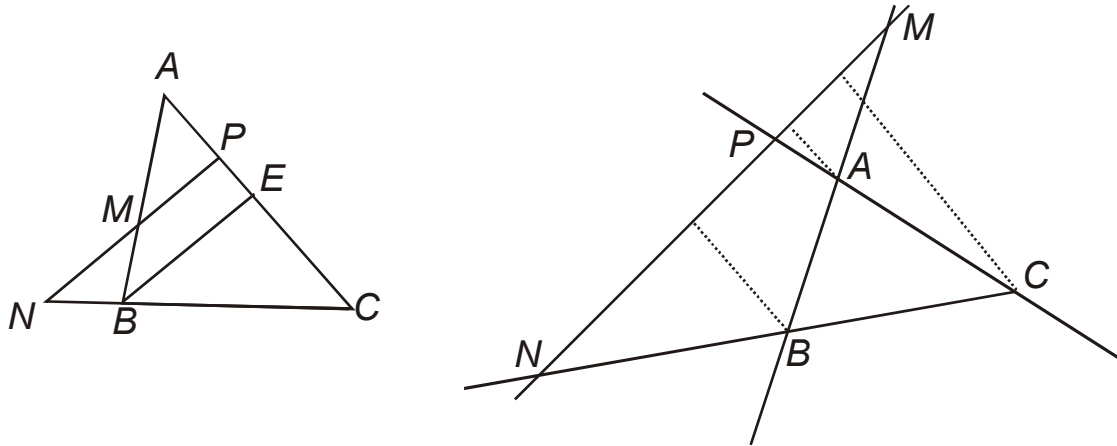
3.6. Menelaosz tétele

Tétel (Menelaosz tétele)

a) Az ABC háromszögben AB , BC és CA oldalainak tartóegyenesein vegyük fel az M , N és P pontokat úgy, hogy az oldalakhoz viszonyítva a belső pontok száma legyen páros. Az M , N , P pontok akkor és csak akkor vannak egy egyenesen, ha $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$.

b) Az $ABCD$ tetraéder AB , BC , CD és DA oldalélein vegyük fel az M , N , P illetve Q pontokat. Az M , N , P , Q pontok akkor és csak akkor vannak egy síkban, ha $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PD} \cdot \frac{DQ}{QA} = 1$.

Megoldás. Háromszögben az ábrák segítségével vegyük észre, hogy a pontok elhelyezése az egyeneseken nem lehet tetszőleges, legalább egy pont a háromszög valamelyik oldalán kívülre esik. A tétel első részét két módon is bizonyítjuk, az elsőt $N \notin [BC]$ de $M \in [AB]$ és $P \in [AC]$, a másodikat ellenkező esetben.



„ \Rightarrow ” Feltételezzük, hogy M , N , és P egy egyenesen vannak.

1. Legyen E a B -n keresztül az NP -hez húzott párhuzamos egyenes metszéspontja AC -vel. Ekkor az AMP és ABE illetve a CPN és CEB háromszögek hasonlóak azaz $\frac{AM}{MB} = \frac{PA}{PE}$ és $\frac{BN}{NC} = \frac{PE}{PC}$. A két

összefüggést összeszorozva következik az állítás.

2. Legyen d_x az X pont MN -től mért távolsága. A létrejött hasonlóságokból adódnak az $\frac{AM}{MB} = \frac{d_A}{d_B}$, $\frac{BN}{NC} = \frac{d_B}{d_C}$, $\frac{CP}{PA} = \frac{d_C}{d_A}$ összefüggések, amelyeket

összeszorozva következik, hogy $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$.

„ \Leftarrow ” A lehetetlenre való visszavezetés elvét alkalmazzuk. Feltételezzük, hogy $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$ (*) de M , N , P nem kollineáris, pl. $P \notin MN$. Jelölje

Q az MN és AC metszéspontját. Nyilván $P \neq Q$ (**). Az M , N , Q kollineáris pontokra alkalmazva a előbb bizonyított állítást kapjuk, hogy $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$. Ezt (*)-al összehasonlítva következik, hogy $\frac{CP}{PA} = \frac{CQ}{QA}$

azaz a P és Q pontok AC -t egyenlő arányban osztják, tehát $P = Q$ ami ellent mond (**)-nak. (Itt lényeges az M , N , P pontok helyzete a háromszög oldalaihoz képest, mert egyébként P és Q harmónikusan konjugált pontok is lehetnének AC -re nézve). Tehát M , N , P kollineárisak.

Tetraéderre is két bizonyítást ismertetünk:

1) „ \Rightarrow ” Feltételezzük, hogy M , N , P és Q egy síkban vannak.

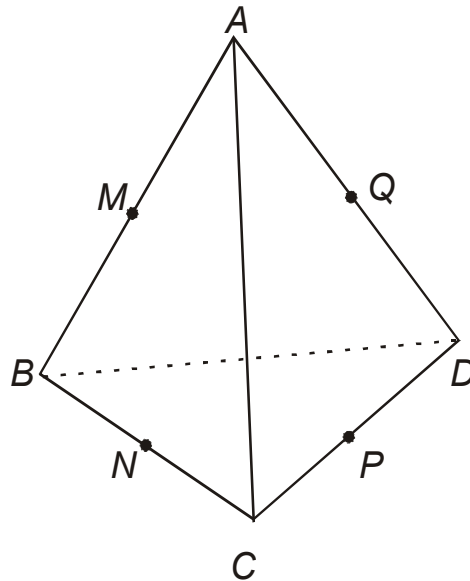
I. eset.

$$\left. \begin{array}{l} (MNPQ) \parallel AC \\ (MNPQ) \cap (ACD) = PQ \\ (MNPQ) \cap (ABC) = MN \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} MN \parallel AC \\ PQ \parallel AC \end{array}.$$

ABC_{Δ} -ben $MN \parallel AC$, tehát Thalesz tétele alapján $\frac{BN}{NC} = \frac{BM}{MA}$.

ACD_{Δ} -ben $PQ \parallel AC$, tehát Thalesz tétele alapján $\frac{DQ}{QA} = \frac{DP}{PC}$.

Ebből következik, hogy $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PD} \cdot \frac{DQ}{QA} = 1$.



II. eset.

Legyen $MNPQ \cap AC = \{R\}$. Az M , N és R illetve a P , Q és R pontok kollineárisak, mert $PQ = (ACD) \cap (MNPQ)$ és $R \in AC \subset (ACD)$, valamint $R \in (MNPQ)$, tehát $R \in (ACD) \cap (MNPQ)$ illetve $MN = (ABC) \cap (MNPQ)$ és $R \in MN \subset (ABC)$ valamint $R \in (MNPQ)$, tehát $R \in (ABC) \cap (MNPQ)$.

Felírjuk a síkbeli Menelaosz tételt az ABC_{Δ} -re és az M , N , R kollineáris pontokra, valamint az ACD_{Δ} -re és a P , Q , R kollineáris pontokra.

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1$$

$$\frac{CP}{PD} \cdot \frac{DQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RC} = 1.$$

A fenti két összefüggés megfelelő oldalait összeszorozva a bizonyítandó

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PD} \cdot \frac{DQ}{QA} = 1$$

összefüggéshez jutunk.

„ \Leftarrow ” Feltételezzük, hogy $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PD} \cdot \frac{DQ}{QA} = 1$ (*).

I. eset. Feltételezzük, hogy $PQ \parallel AC$.

Az ACD háromszögben Thalesz tétele alapján

$$\frac{DP}{PC} = \frac{DQ}{QA} \Rightarrow \frac{CP}{PD} \cdot \frac{DQ}{QA} = 1 \text{ és (*) alapján}$$

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} = 1 \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{CN}{NB}.$$

Alkalmazva Thalesz tételének fordított tételét az ABC háromszögben, következik, hogy $MN \parallel AC$. Viszont $PQ \parallel AC \Rightarrow MN \parallel PQ \Rightarrow M, N, P$ és Q egy síkban vannak.

II. eset. Ha $MN \parallel AC$, következik, hogy $PQ \parallel AC$, tehát M, N, P és Q egy síkban vannak.

III. eset. Ha $MN \cap AC = \{R\}$, $PQ \cap AC = \{R'\}$, akkor az ABC háromszögben az M, N, R kollineáris pontokra felírva Menelaosz tételét, a következő összefüggést kapjuk:

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1 \quad (1).$$

Az ACD háromszögben a P, Q, R' kollineáris pontokra felírva Menelaosz tételét:

$$\frac{DQ}{QA} \cdot \frac{AR'}{R'C} \cdot \frac{CP}{PD} = 1 \quad (2).$$

Az (1) és (2) összefüggések megfelelő oldalait összeszorozva kapjuk, hogy

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PD} \cdot \frac{DQ}{QA} \cdot \frac{CR}{RA} \cdot \frac{AR'}{R'C} = 1$$

, innen pedig (*) alapján

$$\frac{CR}{RA} \cdot \frac{AR'}{R'C} = 1 \text{ következik, hogy}$$

$$\frac{CR}{RA} = \frac{CR'}{R'A}.$$

Viszont C, A és R' kollineárisak, és R, R' az AC szakaszon kívül helyezkedik el, tehát $R = R'$.

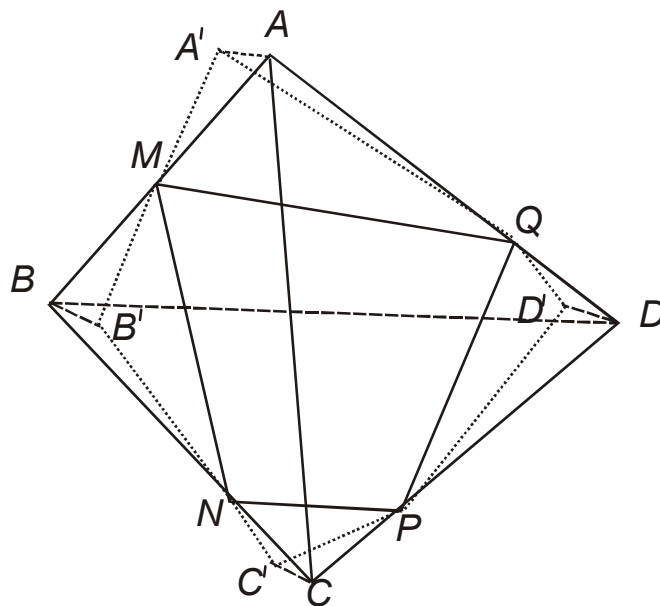
Ebből következik, hogy

$$MN \cap AC = PQ \cap AC = \{R\} \Rightarrow$$

$$MN \cap AC \cap PQ = \{R\}, \text{ tehát } MN$$

és PQ metsző egyenesek, ez

pedig azt jelenti, hogy M, N, P és Q egy síkban vannak.



2.) „ \Rightarrow ” Ez a bizonyítás a síkbeli 2.) bizonyítás térbeli analógja. Feltételezzük, hogy M, N, P és Q egy síkban vannak. Legyen X' az X merőleges vetülete az $(MNPQ)$ síkra és jelölje d_X az XX' távolságot. A keletkező $AA'N$ és $BB'N$ háromszögek hasonlóak (illetve páronként a többi is) tehát $\frac{AM}{MB} = \frac{d_A}{d_B}, \frac{BN}{NC} = \frac{d_B}{d_C}, \frac{CP}{PA} = \frac{d_C}{d_A}, \frac{DQ}{QA} = \frac{d_D}{d_A}$. A négy összefüggést összeszorozva az állítást igazoltuk.

3.7. Ceva tétele

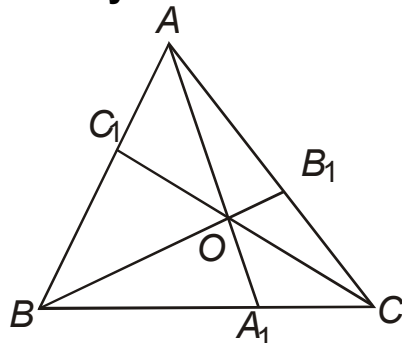
Tétel (Ceva)

a) Az ABC háromszögben legyen $A_1 \in BC, B_1 \in AC$ és $C_1 \in AB$. Az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek akkor és csak akkor összefutóak egy O pontban, ha $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

b) Legyen M, N, P és Q az $ABCD$ tetraéder AB, BC, CD és DA élének tetszőleges pontja. Az $(MCD), (NDA), (PAB), (QBC)$ síkok akkor és csak akkor metszik egymást egyetlen O pontban, ha

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PD} \cdot \frac{DQ}{QA} = 1. (*)$$

Bizonyítás



„ \Rightarrow ” Feltételezzük, hogy $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = \{O\}$. Két különböző módszerrel fogjuk bebizonyítani ezt az implikációt:

- (1)-Menelaos tétel segítségével,
- (2)-területek segítségével.

Az egy egyenesen fekvő $C_1 - O - C$ illetve $B_1 - O - B$ pontokra írjuk fel Menelaos tételét az ABA_1 és AA_1C háromszögekben:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BC}{CA_1} \cdot \frac{AO}{OA_1} = 1 \text{ és } \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AO}{OA_1} \cdot \frac{A_1B}{BC} = 1.$$

Ha a két összefüggést összeszorozzuk a kért összefüggést kapjuk. Mivel ABA_1 és AA_1C illetve OBA_1 és OAC háromszögek magasságai egyenlők

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{T[ABA_1]}{T[AA_1C]} = \frac{T[OBA_1]}{T[OAC]} = \frac{T[ABA_1] - T[OBA_1]}{T[AA_1C] - T[OAC]} = \frac{T[OAB]}{T[OAC]}$$

(a harmadik egyenlőséget származtatással nyertük). Analóg módon felírhatjuk, hogy

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{T[OBC]}{T[OAB]} \text{ és } \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{T[OAC]}{T[OBC]}.$$

Ha a három összefüggést összeszorozzuk a kért összefüggést kapjuk.

„ \Leftarrow ” A lehetetlenre való visszavezetés elvét alkalmazzuk. Feltételezzük, hogy $AA_1 \cap BB_1 = \{O\}$ és CC_1 nem megy át O-n de $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.(*)

Jelölje C_2 a CO és AB metszéspontját. Nyilván $C_1 \neq C_2$. Így az AA_1, BB_1 és CC_2 összefutó egyenesek tehát az előbbi gondolatmenet alapján $\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$. Ezt (*)-gal egyenlővé téve kapjuk, hogy

$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC_2}{C_2B}$ azaz $C_1 = C_2$ (mert AC -t ugyanolyan arányban osztják). Ez

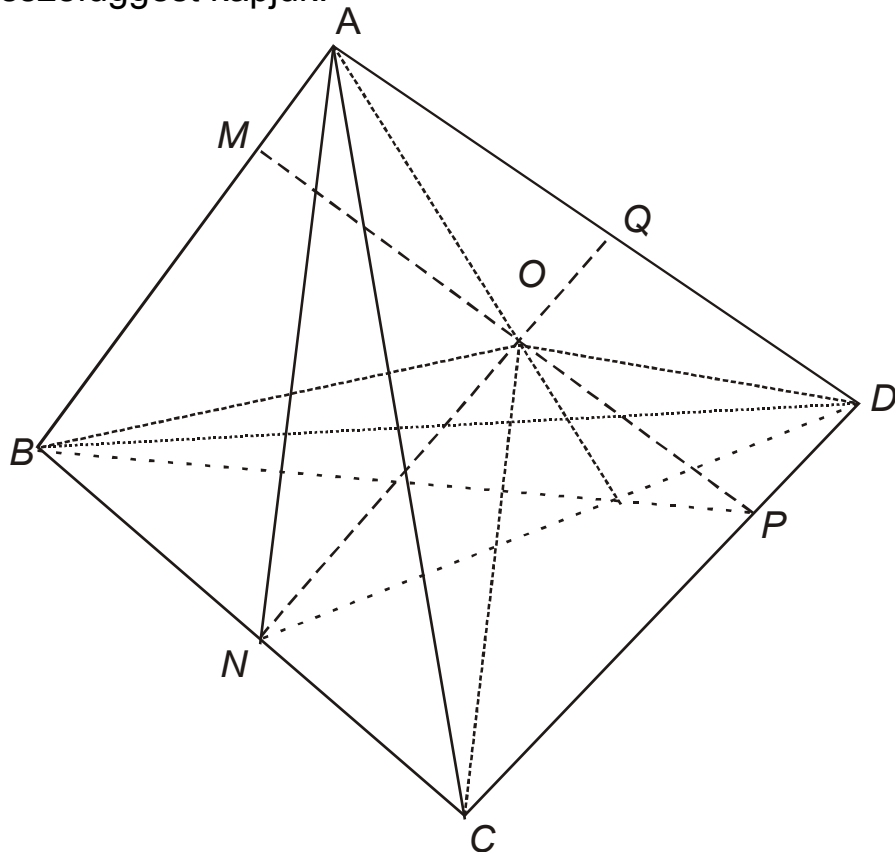
ellentmond a $C_1 \neq C_2$ feltételnek, tehát a három egyenes egy pontban metszi egymást.

Tetraéderben is az egyik irányban két bizonyítást ismertetünk.

„ \Rightarrow ” (1) Mivel O a négy sík közös metszéspontja, például a BC a szakaszon felírhatjuk a következőket:

$$\frac{BN}{NC} = \frac{T[NDB]}{T[NCD]} = \frac{V[ANDB]}{V[ANCD]} = \frac{V[ONDB]}{V[ONCD]} = \frac{V[ANDB] - V[ONDB]}{V[ANCD] - V[ONCD]} = \frac{V[OADB]}{V[OACD]}.$$

Ha analóg módon felírjuk a hiányzó három arányt majd összeszorozzuk őket a kívánt összefüggést kapjuk.



2. bizonyítás

Mivel $MP = (MCD) \cap (PAB)$ és $NQ = (QBC) \cap (NDA)$ és O a négy sík közös pontja, következik, hogy $O \in MP$ és $O \in NQ$ (ha például $O \notin MP$ az (MCD) és (PAB) síkoknak MP egyenesen kívül van még közös pontjuk, tehát egybeesnek, ami ellentmondás). Tehát MP és NQ metszik egymást, vagyis egy síkban vannak. Alkalmazva Menelaosz tételét M , N , P és Q pontokra következik az állítás.

„ \Leftarrow ” A lehetetlenre való visszavezetés elvét alkalmazzuk. Feltételezzük, hogy a négy sík közül az egyik(pl. (MCD)) nem megy át a másik három O metszéspontján de fennáll a (*) összefüggés. Legyen R az (OCD) sík és az AB él metszéspontja. Nyilván $R \neq M$ és tovább úgy járunk el mint a Menelaos tétel bizonyításánál.

3.8. Desargues tétele

Tétel. Legyen ABC és $A'B'C'$ két nem feltétlenül egy síkban levő háromszög, úgy, hogy létezzenek az $AB \cap A'B' = \{N\}$, $BC \cap B'C' = \{M\}$, $AC \cap A'C' = \{P\}$ metszéspontok. A következő kijelentések egyenértékűek:

a) Az AA' , BB' , CC' egyenesek O -ban összefutóak vagy párhuzamosak.

b) Az M , N és P pontok kollineárisak.

Bizonyítás. A tétel bizonyítását abban az esetben végezzük el amikor ABC és $A'B'C'$ nincsenek egy síkban (az ábrákat lásd a következő oldalon).

(a) \Rightarrow (b) Ez a következtetés igaz, mert az M , N és P pontok egyrészt az ABC által, másrészt az $A'B'C'$ által meghatározott síkban vannak, tehát rajta vannak a két sík közös egyenesén.

(b) \Rightarrow (a) Nyilván két esetet kell megkülönböztetnünk: *I.* $BB' \parallel AA'$ és *II.* $BB' \cap AA' = \{O\}$.

I. A feltétel alapján az ANA' és ABB' háromszögek hasonlóak, tehát $\frac{BA}{AN} = \frac{NA'}{A'B'} \Rightarrow \frac{BA}{AN} \cdot \frac{NA'}{A'B'} = 1$. Másrészt a $BAB'P$ tetraéderben A, A', C', C

egy síkban vannak és Menelaos tétele alapján $\frac{BA}{AN} \cdot \frac{NA'}{A'B'} \cdot \frac{B'C'}{C'P} \cdot \frac{PC}{CB} = 1$,

ahonnan az előző összefüggés alapján $\frac{CB}{PC} = \frac{B'C'}{C'P}$ azaz $BB' \parallel CC'$.

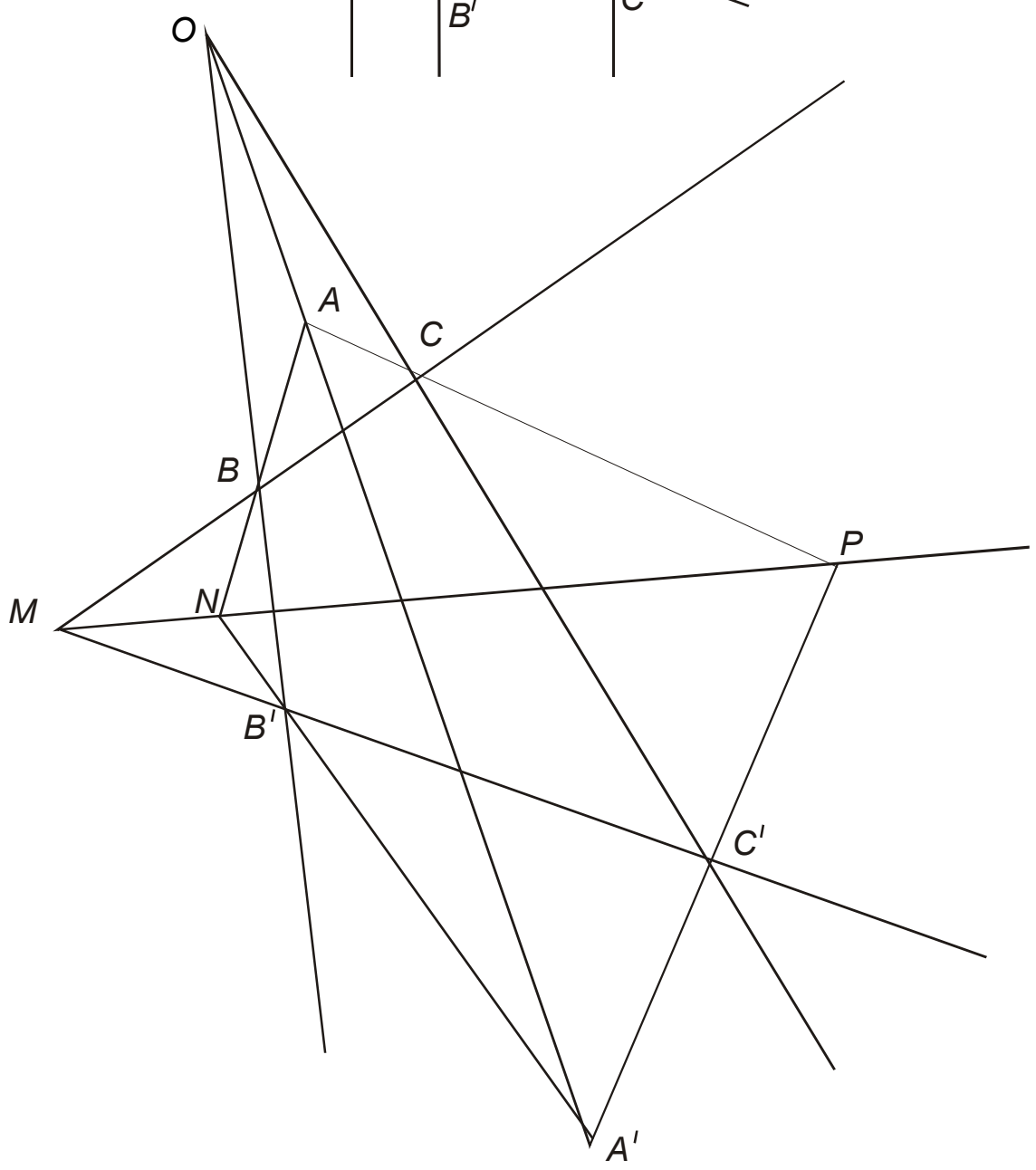
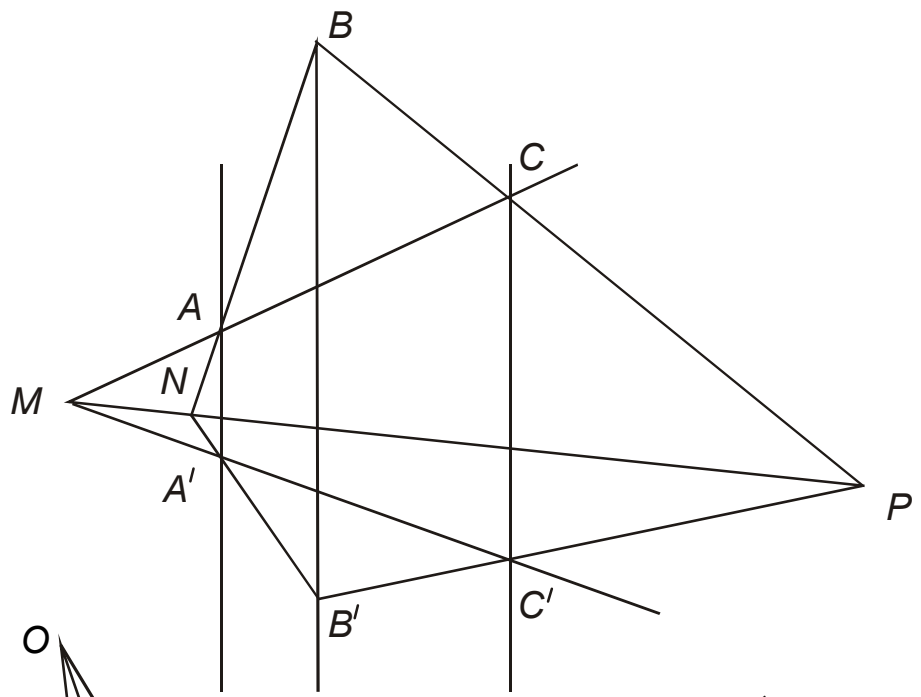
II. Ha $BB' \cap AA' = \{O\}$ akkor $CC' \cap AA' = \{O'\}$ (ha $CC' \parallel AA'$ az előbbi gondolatmenet nyomán $BB' \parallel AA'$ eredményhez jutnánk, ami ellentmond a feltevésnek). Az ANA' háromszög síkjában N, B', A' kollineárisak, APA' háromszög síkjában P, C', A' kollineárisak így alkalmazható Menelaosz tétele mindkét esetben. Alkalmazás után kifejezve $\frac{A'O}{OA}$ -t és $\frac{A'O'}{O'A}$ -t kapjuk

az $\frac{A'O}{OA} = \frac{A'B'}{B'N} \cdot \frac{NB}{BA}$ illetve $\frac{A'O'}{O'A} = \frac{A'C'}{C'P} \cdot \frac{PC}{CA}$ kifejezéseket. Mivel $ANA'P$

tetraéderben B, B', C', C pontok egy síkban vannak alkalmazható Menelaosz tétele. $\frac{AB}{BN} \cdot \frac{NB'}{B'A'} \cdot \frac{A'C'}{C'P} \cdot \frac{PC}{CA} = 1$, ahonnan $\frac{BN}{AB} \cdot \frac{B'A'}{B'N} = \frac{A'C'}{C'P} \cdot \frac{PC}{CA}$

és az előbbi kifejezések alapján $\frac{A'O}{OA} = \frac{A'O'}{O'A}$. Tehát O és O' ugyanolyan

arányban osztják AA' -t, ami azt jelenti, hogy egybeesnek (O és O' nem lehetnek harmónikusan konjugáltak AA' -ra nézve mert az O és O' pontok szerkesztéséből következik, hogy az $(A'B'C')$ sík elválasztja az A illetve O és O' pontokat).



Megjegyzés. Ha ABC és $A'B'C'$ egy síkban vannak a tételnek több bizonyítása is ismert (lásd pl. [3], vagy Menelaosz tételének sorozatos alkalmazásával). Vegyük észre, hogy a fenti bizonyításban használt érvek függetlenek a két háromszög síkja által meghatározott lapszög mértékétől (még a térbeli Menelaosz tételének alkalmazása is elkerülhető). Ha például az ABC háromszög síkját a közös MP egyenes körül addig forgatjuk, amíg az $A'B'C'$ háromszög síkjába kerül, állításaink érvényesek maradnak és a forgatás folytonossága következtében a fenti bizonyítás a síkbeli tulajdonság bizonyításának is tekinthető.

Desargues tételének analóg tétele Poncelet nevéhez fűződik.

Tétel. (Poncelet) Ha $ABCD$ és $A'B'C'D'$ tetraéderek esetén az AA', BB', CC', DD' egyenesek közös O pontban metszik egymást és $(BCD) \cap (B'C'D') = a$, $(ACD) \cap (A'C'D') = b$, $(ABD) \cap (A'B'D') = c$ illetve $(ABC) \cap (A'B'C') = d$, akkor az a , b , c és d egyenesek egy síkban vannak.

Bizonyítás. I. Ha $AB \cap A'B' = \{M\}$ akkor M rajta van az a , c , d egyenesek mindegyikén, tehát ezek az egyenesek egy síkban vannak. Ha a lehetetlenre való visszavezetés elve alapján b nincs a többi egyenes síkjában, akkor át kell mennie M -en ez azt jelentené, hogy M az $ABCD$ minden lapjának a síkján rajta van, ami lehetetlen. Tehát a négy egyenes egy síkban van.

II. Ha $AB \parallel A'B'$, akkor $c \parallel AB$ és $d \parallel AB$ azaz $c \parallel d$ vagyis c és d egy síkban vannak. Analóg beláthatjuk, hogy a négy egyenes páronként egy síkban van. Ekkor azonban ahhoz, hogy a feltétel ne teljesüljön (a lehetetlenre való visszavezetés elvét alkalmazzuk) $a \parallel b \parallel c \parallel d$ kell legyen. De ekkor $ABCD$ minden lapja párhuzamos kell legyen a -val és ennek következtében minden éle is, ami viszont lehetetlen, tehát a négy egyenes egy síkban van. Ezzel a tételt igazoltuk.

A Desargues (Poncelet) tételében szereplő háromszögeket (tetraédereket) homológikusoknak, a metszéspontok (síkok) által meghatározott egyenest (síkot) homológia tengelynek (síknak) nevezzük.

3.9. Steiner tétele

Steiner tételének kijelentéséhez szükségünk van az izogonális fogalmára síkban és térben egyaránt. Ismerkedjünk meg előbb a Ceva-egyenes (sík) fogalmával.

Értelmezés. Egy háromszög valamelyik csúcsán és a szemben fekvő oldal tartó egyenesének tetszőleges pontján áthaladó egyenest *Ceva-egyenesnek* nevezünk. Egy tetraéder valamelyik élén és a szemben fekvő oldal tartó egyenesének tetszőleges pontján áthaladó síkot *Ceva-síknak*

nevezünk (egy Ceva-egyenes (sík) lehet belső vagy külső annak függvényében, hogy az oldalt vagy annak meghosszabbítását metszi).

Értelmezés. Egy háromszögben két, egy csúcshoz tartozó Ceva-egyenes *izogonális* ha szimmetrikusak a szögfelezőre nézve. Egy tetraéderben két, egy csúcshoz tartozó Ceva-sík *izogonális* ha szimmetrikusak a szögfelezőre nézve.

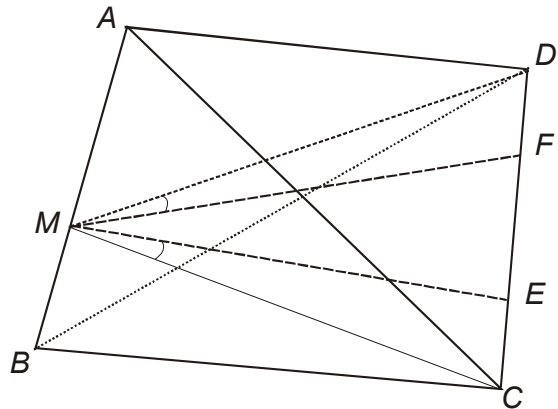
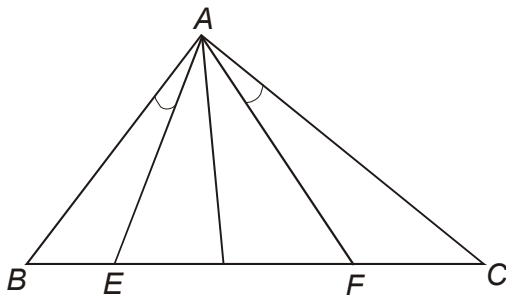
Tétel (Steiner)

a) Ha ABC háromszögben AE és AF izogonálisak, akkor

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{AF}{FB} = \left(\frac{AB}{AC} \right)^2.$$

b) Ha $ABCD$ tetraéderben (ABE) és (ABF) izogonálisok akkor

$$\frac{CE}{ED} \cdot \frac{CF}{FD} = \left(\frac{T(ABC)}{T(ABD)} \right)^2.$$



Bizonyítás. a) Az izogonálisok értelmezéséből adódik, hogy

$$m(ABF \sphericalangle) = m(AEC \sphericalangle) = A - \alpha.$$

Továbbá

$$\frac{AE}{EC} = \frac{T[ABE]}{T[AEC]} = \frac{AB \cdot AE \cdot \sin(\alpha)}{AE \cdot AC \cdot \sin(A - \alpha)} = \frac{AB \cdot \sin(\alpha)}{AC \cdot \sin(A - \alpha)}.$$

Hasonlóan

$$\frac{AF}{FC} = \frac{T[ABF]}{T[AFC]} = \frac{AB \cdot AF \cdot \sin(A - \alpha)}{AF \cdot AC \cdot \sin(\alpha)} = \frac{AB \cdot \sin(\alpha)}{AC \cdot \sin(A - \alpha)}.$$

Összeszorozva a kért összefüggést kapjuk.

b) Tetraéderben legyen M a CD -n át AB -re állított merőleges sík AB -vel való metszéspontja. Az izogonálisok értelmezéséből következik, hogy MCD háromszögben ME és MF izogonálisok, tehát alkalmazható a már

bizonyított tétel azaz $\frac{CE}{ED} \cdot \frac{CF}{FD} = \left(\frac{MB}{MC} \right)^2 = \left(\frac{MB \cdot AB}{MC \cdot AB} \right)^2 = \left(\frac{T[ABC]}{T[ABD]} \right)^2.$

3.10. Van Aubel tétele

Tétel. (Van Aubel)

a) Ha az ABC háromszögben $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = \{O\}$, ahol $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$ és $C_1 \in AB$, akkor $\frac{AO}{OA_1} = \frac{AC_1}{C_1B} + \frac{AB_1}{B_1C}$.

b) Ha az $ABCD$ tetraéderben $A_1 \in (BCD)$, $O \in AA_1$, $(BCO) \cap AD = \{D_1\}$, $(BDO) \cap AC = \{C_1\}$, $(CDO) \cap AB = \{B_1\}$, akkor

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{AB_1}{B_1B} + \frac{AC_1}{C_1C} + \frac{AD_1}{D_1D}.$$

Bizonyítás. a) Háromszögre, vegyük észre, hogy az AA_1C háromszögben B_1 , O , B kollineárisak, tehát Menelaosz tételéből

$$\frac{AO}{OA_1} \cdot \frac{BA_1}{BC} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1 \Rightarrow \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AO}{OA_1} \cdot \frac{BA_1}{BC}.$$

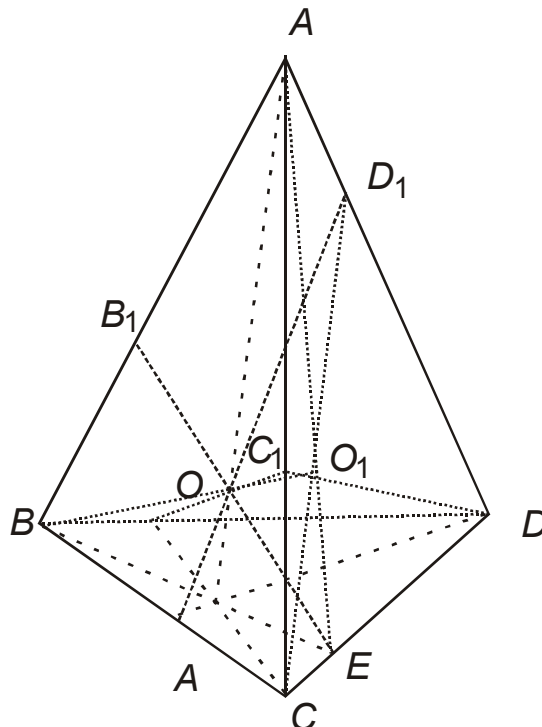
Hasonlóan az AA_1B háromszögben C_1 , O , C kollineárisak, tehát

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AO}{OA_1} \cdot \frac{CA_1}{BC}.$$

Összeadva ez utóbbi két összefüggést, kapjuk, hogy $\frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AO}{OA_1}$.

b) Legyenek $\{O_1\} = CD_1 \cap DC_1$ és $\{E\} = AO_1 \cap CD$. Az ACD háromszögben felírva Van Aubel tételét, kapjuk, hogy

$$\frac{AO_1}{O_1E} = \frac{AC_1}{C_1C} + \frac{AD_1}{D_1D} \quad (1).$$



A B , O és O_1 pontok kollineárisak, mert $B, O, O_1 \in (BCO)$ és $B, O, O_1 \in (BOD) \Rightarrow B, O, O_1 \in (BCO) \cap (BOD) = BO_1$. A B , A_1 és E pontok is kollineárisak, mert $A_1 \in$ és $B, E \in (ABE)$, továbbá $B, A_1, E \in (BCD) \Rightarrow B, A_1, E \in (ABE) \cap (BCD) = BE$.

Az ABE háromszögben felírva Van Aubel tételét kapjuk, hogy

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{AB_1}{B_1B} + \frac{AO_1}{O_1E} = \frac{AB_1}{B_1B} + \frac{AC_1}{C_1C} + \frac{AD_1}{D_1D}.$$

3.11. A Leibniz-reláció

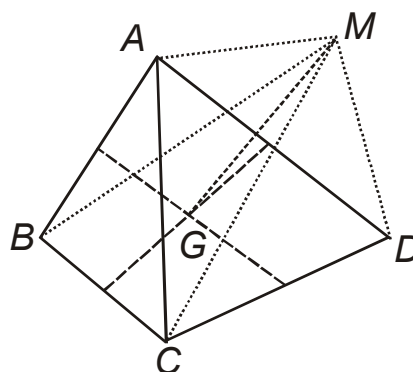
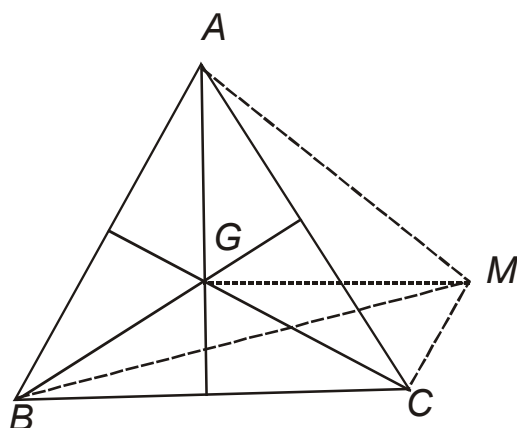
Tétel

a) Ha M egy tetszőleges pont a térben és G az ABC háromszög súlypontja, akkor

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

b) Ha G az $ABCD$ tetraéder súlypontja és M egy tetszőleges térbeli pont, akkor

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$$



Bizonyítás. Az $\overline{MA} = \overline{MG} + \overline{GA}$, $\overline{MB} = \overline{MG} + \overline{GB}$ és $\overline{MC} = \overline{MG} + \overline{GC}$ egyenlőségek mindkét oldalát önmagával szorozzuk skalárisan, és a megfelelő oldalakat összeadjuk:

$$MA^2 = MG^2 + GA^2 + 2\overline{MG} \cdot \overline{GA}$$

$$MB^2 = MG^2 + GB^2 + 2\overline{MG} \cdot \overline{GB}$$

$$\overline{MC} = MG^2 + GC^2 + 2\overline{MG} \cdot \overline{GC}$$

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overline{MG} \cdot (\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC})$$

Mivel $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = 0$, a kért egyenlőséget igazoltuk.

Megjegyzés. Könnyen belátható, hogy $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$,

tehát a Leibniz-reláció $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$

alakban is írható. Ebből következik, hogy $OG^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ és $OH^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$, ahol O az ABC háromszög köré írt kör középpontja, G az ABC háromszög súlypontja és H az ortocentruma.

b) Ha G az $ABCD$ tetraéder súlypontja, akkor bármely O térbeli pont

esetén $\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4}$ (1) és $\overrightarrow{GO} = \frac{\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO}}{4}$ (2).

Az $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}$ összefüggésből $MA^2 = MG^2 + GA^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA}$ (3).
Hasonlóan

$$MB^2 = MG^2 + GB^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} \quad (4)$$

$$MC^2 = MG^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GC} \quad (5)$$

$$MD^2 = MG^2 + GD^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GD} \quad (6)$$

A (3), (4), (5) és (6) összefüggéseket összeadva, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = \\ &= 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) \quad (7). \end{aligned}$$

A (2) összefüggésbe O helyett rendre A -t, B -t, C -t, illetve D -t helyettesítünk:

$$\overrightarrow{GA} = \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA}}{4}, \quad \overrightarrow{GB} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DB}}{4}$$

$$\overrightarrow{GC} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}}{4}, \quad \overrightarrow{GD} = \frac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD}}{4}$$

Ha összeadjuk az utóbbi négy egyenlőség megfelelő oldalait kapjuk, hogy $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$, tehát (7) éppen a keresett összefüggés.

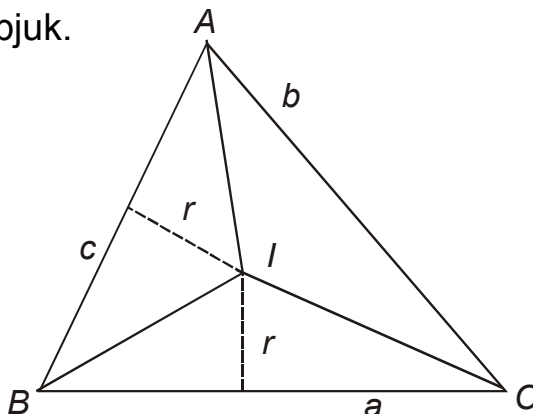
3.12. Metrikus relációk

Tétel. a) A háromszögbe írt kör sugara $r = \frac{2T}{a+b+c}$, ahol T a háromszög területe, a, b, c a háromszög oldalainak hossza.

b) A tetraéderbe írt gömb sugara $r = \frac{3V}{T_A + T_B + T_C + T_D}$, ahol V a tetraéder térfogata, T_A, T_B, T_C, T_D pedig a megfelelő csúccsal szemben fekvő oldallap területe.

Bizonyítás

a) $T[AB] + T[BC] + T[AC] = T[ABC]$, tehát $T = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2}$. Ebből r -et kifejezve az állítást kapjuk.



b) Hasonlóan a tetraédert az $IBCD$, $IABC$, $IDCA$ és $IABD$ tetraéderekre bontjuk fel. Ezeknek a tetraédereknek I -ből induló magassága a beírt gömb sugara. A

$$V[ABCD] = V[ABCI] + V[BCDI] + V[ABDI] + V[ACDI]$$

egyenlőség alapján

$$V = \frac{T_A \cdot r}{3} + \frac{T_C \cdot r}{3} + \frac{T_B \cdot r}{3} + \frac{T_D \cdot r}{3}, \text{ tehát}$$

$$r = \frac{3V}{T_A + T_B + T_C + T_D}.$$

Tétel. a) A háromszög hozzáírt köreinek sugarai $r_a = \frac{2T}{-a+b+c}$,

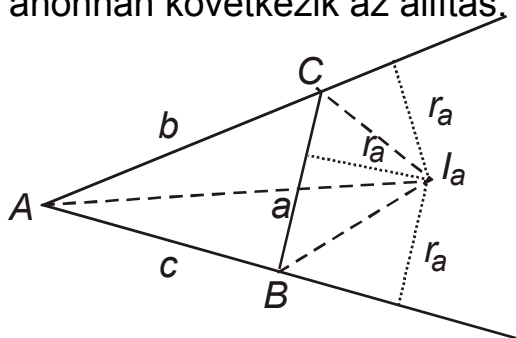
$r_b = \frac{2T}{a-b+c}$ és $r_c = \frac{2T}{a+b-c}$. (minden nevezőben az az oldal negatív előjelű, amelyikhez hozzá van írva a kör).

b) Tetraéderben $r_A = \frac{3V}{-T_A + T_B + T_C + T_D}$, $r_B = \frac{3V}{T_A - T_B + T_C + T_D}$ és

analógjaik (minden nevezőben annak az oldallapnak a területe negatív, amelyikhez hozzá van írva).

Bizonyítás. A rajz alapján $T[ABl_a] + T[ACl_a] - T[BCl_a] = T[ABC]$, tehát

$$\frac{cr_a}{2} + \frac{br_a}{2} - \frac{ar_a}{2} = T, \text{ ahonnan következik az állítás.}$$



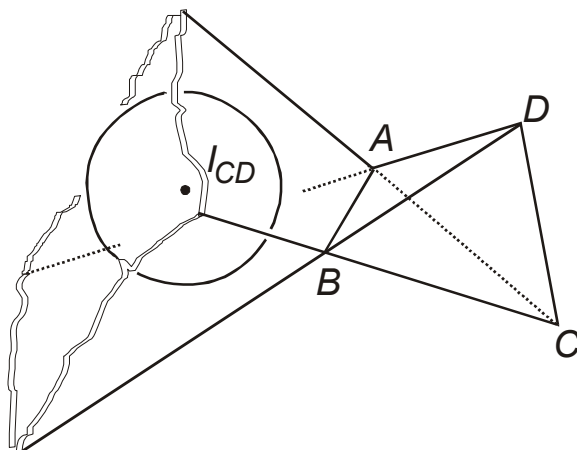
Tetraéderben analóg módon az $ABCI_A$, $ACDI_A$, $ABDI_A$ tetraéderek térfogatából kivonva a $BCDI_A$ tetraéder térfogatát az $ABCD$ tetraéder térfogatát kapjuk. Felírva a térfogatok képletét az összefüggésből kifejezhetjük r_A -t.

Tétel. A tetraéder három külső érintőgömb sugarának képlete:

$$r_{AB} = \frac{3V}{T_A + T_B - T_C - T_D}, \quad r_{AC} = \frac{3V}{T_A - T_B + T_C - T_D}, \quad r_{AD} = \frac{3V}{T_A - T_B + T_C - T_D}$$

amennyiben $T_A + T_B > T_C + T_D$, $T_A + T_C > T_B + T_D$ illetve $T_A + T_D > T_B + T_C$. (r_{AB} az A és B csúccsal szemben fekvő lapok síkját "belülről" a másik kettőt pedig "kivülről" érinti)

Bizonyítás. A külső érintőgömb az AB élhez kifelé csatlakozó lapsíkok által határolt térrészben van. Legyen a középpontja I_{AB} . A mellékelt ábrát nézve kiderül, hogy az $I_{AB}ABC$, $I_{AB}ABD$ és $ABCD$ tetraéderek térfogatainak összege pont az $I_{AB}BCD$, $I_{AB}ACD$ tetraéderek térfogatának összege, tehát $V = \frac{r_{AB}T_A}{3} + \frac{r_{AB}T_B}{3} - \frac{r_{AB}T_D}{3} - \frac{r_{AB}T_C}{3}$. Ebből következik az állítás. Nyilvánvaló az is, hogy $T_A + T_B > T_C + T_D$ mert ellenkező esetben a tört nem értelmezett illetve $r_{AB} < 0$.



Tétel. a) Háromszögben $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$,

b) tetraéderben $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}$,

ahol h_a -val az a oldalhoz tartozó magasságot, h_A -val a tetraéder A csúcsából húzott magasság hosszát jelöltük.

Bizonyítás. A háromszög területképletéből $h_a = \frac{2T}{a}$, $h_b = \frac{2T}{b}$, $h_c = \frac{2T}{c}$.

Ezeket összeadva $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a+b+c}{2T} = \frac{1}{r}$. Hasonlóan járunk el

tetraéder esetén is.

Tétel. a) Minden háromszögben $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$.

b) Minden tetraéderben $\frac{2}{r} = \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} + \frac{1}{r_D}$.

Bizonyítás. Tetraéder esetén a már bizonyított képletek segítségével

$$\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} + \frac{1}{r_D} = \frac{-T_A + T_B + T_C + T_D}{3V} + \frac{T_A - T_B + T_C + T_D}{3V} + \frac{T_A + T_B - T_C + T_D}{3V} + \frac{T_A + T_B + T_C - T_D}{3V} = \frac{2(T_A + T_B + T_C + T_D)}{3V} = \frac{2}{r}.$$

Megjegyzés: Az előbbi tételekből rögtön adódik, hogy

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

és térbeli analógja.

Tétel. a) Minden háromszögben $\frac{1}{r_a} = -\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$, $\frac{1}{r_b} = \frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ és

$$\frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}.$$

b) Minden tetraéderben

$$\frac{1}{r_A} = -\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}, \quad \frac{1}{r_B} = \frac{1}{h_A} - \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D},$$

$$\frac{1}{r_C} = \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} - \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D} \quad \text{és} \quad \frac{1}{r_D} = \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} - \frac{1}{h_D}.$$

Bizonyítás. A háromszög magasságképleteiből

$$-\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = -\frac{a}{2T} + \frac{b}{2T} + \frac{c}{2T} = \frac{-a + b + c}{2T} = \frac{1}{r_a}.$$

Hasonlóan bizonyítjuk a másik két összefüggést is. Tetraéder esetén a térfogat képletből indulunk ki, és analóg módon járunk el.

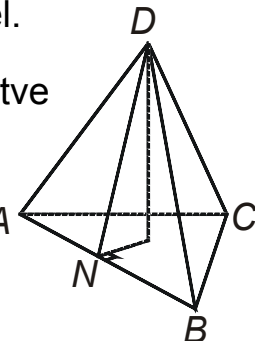
Tétel. a) A háromszög területképlete $T = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}$ (illetve

analógjai).

b) Ha az $ABCD$ tetraéderben $AB\angle$ -vel jelöljük az AB élű lapszög mértékét, M -mel és N -nel a D csúcs ABC síkra, illetve az AB oldalélre eső vetületét, akkor

$$V = \frac{1}{6} \cdot AB \cdot AC \cdot AD \cdot (\sin(AB\angle) \sin(DAN\angle) \sin(CAB\angle)),$$

(és még 3 analóg összefüggés).



Bizonyítás. A három merőleges tételének első fordított tétele alapján $MN \perp AB$, és a DNM szög mértéke az ADB és ABC síkok lapszögének mértéke. Az AND és DNM derékszögű háromszögben $DM = DN \cdot \sin(DNM)$ és $DN = DA \cdot \sin(DAN)$, tehát

$$V = \frac{1}{3} \cdot T[ABC] \cdot DM = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(CAB) \cdot DN \cdot \sin(DNM) = \\ = \frac{1}{6} \cdot AB \cdot AC \cdot AD \cdot \sin(DAN) \cdot \sin(CAB) \cdot \sin(AB).$$

Tétel (Dostor, 1867)

Az $ABCD$ tetraéder térfogata kifejezhető a $V = \frac{2}{3} \cdot \frac{T_C \cdot T_D \sin(AB)}{AB}$ összefüggéssel is.

Bizonyítás. Az előbbi feladat ábráját és jelöléseit használva:

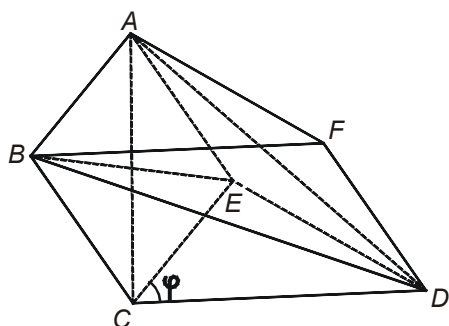
$$V = \frac{1}{3} \cdot T[ABC] \cdot DM = \frac{1}{3} \cdot T[ABC] \cdot DN \cdot \sin(AB) = \\ = \frac{1}{3} \cdot T[ABC] \cdot \frac{2}{AB} \cdot \frac{AB \cdot DN}{2} \cdot \sin(AB) = \frac{2}{3} \cdot \frac{T_D \cdot T_C}{AB} \sin(AB).$$

Ugyanígy bizonyítjuk a másik 3 analóg összefüggést is.

Tétel. Az $ABCD$ tetraéder térfogata kifejezhető a $V = \frac{1}{6} \cdot AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin \varphi$ egyenlőséggel is, ahol $d = d(AB, CD)$ és $\varphi = (AB, CD)$. (AB, CD) az AB és CD egyenesek szögét jelöli.

Bizonyítás. Az $ABCD$ tetraéder köré egy hasábot írunk. Felvesszük az E és F pontot úgy, hogy az $ABCE$ és $BCDF$ négyszögek paralelogrammák legyenek. Az AB és CD egyenesek által közrezárt szög éppen az ABF és ECD háromszög B , illetve C csúcsánál keletkező szög, tehát a hasáb alapterülete:

$$T[ECD] = \frac{CE \cdot CD \cdot \sin \varphi}{2} = \frac{AB \cdot CD \cdot \sin \varphi}{2}.$$



Az ABF és CED síkok távolsága éppen az AB és CD kitérő egyenesek távolságával egyenlő, ezért a hasáb térfogata

$$V_H = T[ECD] \cdot d = \frac{AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin \varphi}{2}.$$

De a hasáb felbontható az $ABCD$, $ABFD$ és $AECD$ tetraéderekre, és mivel ezek a tetraéderek azonos térfogatúak,

$$V = \frac{V_H}{3} = \frac{AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin \varphi}{6}.$$

Megjegyzések

1. A $\sigma_A = \sin(DAN\angle) \sin(CAB\angle) \sin(AB\angle)$ szorzat az A csúcsú triédert jellemzi, mert

$$\sigma_A = \sin(AC\angle) \sin(DAC\angle) \sin(BAC\angle) = \sin(AD\angle) \sin(BAD\angle) \sin(CAD\angle).$$

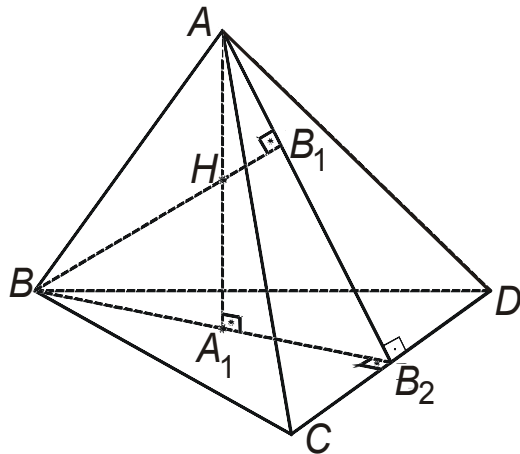
Ez a tulajdonság *Cristian von Standt*, német matematikus nevéhez fűződik. Belátható, hogy itt az analógia az oldal-oldalél, illetve szög-térszög analóg fogalmak közvetítésével valósult meg.

2. Az első feladatban levezetett képlet esetén az oldal-oldallap illetve szög- lapszög analógiák játszanak szerepet, de megfigyelhető bizonyos szerkezeti analóg is „objektum x objektum x közrezárt szög szinusza”. Természetes jelenség az is, hogy a nevezőben megjelenik az oldalhossz, hisz a „terület x terület” 4 dimenziós. A második feladat kapcsán is érzékelhető ez a jelenség „alapterület x magasság” formában amennyiben két egyenes közös merőlegesét a magassággal azonosítjuk.

IV. FEJEZET SPECIÁLIS TETRAÉDEREK

4.1. Ortocentrikus tetraéderek

Feladat. (L'Huilier, 1782) Bizonyítsuk be, hogy ha az $ABCD$ tetraéderben $AB \perp CD$, akkor az A és a B csúcsokhoz tartozó magasságok metszik egymást.



Megoldás. Jelöljük A_1 -gyel az A pont BCD síkra eső vetületét.

$$\left. \begin{array}{l} AA_1 \perp (BCD) \Rightarrow AA_1 \perp CD \\ AB \perp CD \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CD \perp (ABA_1) \Rightarrow CD \perp BA_1$$

Tehát BA_1 a BCD háromszög magassága. Jelöljük B_2 -vel ennek a magasságnak a talppontját és B_1 -gyel a B pont AB_2 egyenesre eső vetületét. A három merőleges tétele alapján $AB_2 \perp CD$, így a három merőleges

tételének második fordított tétele alapján $BB_1 \perp (ACD)$. Az ABB_2 háromszögben az AA_1 és BB_1 magasságok, tehát metszik egymást.

Feladat. Igaz-e az előbbi állítás fordítottja?

Megoldás. Ha B_1 a B pont (ACD) síkra eső vetülete, és A_1 az A pont (BCD) síkra eső vetület, akkor $BB_1 \perp CD$ és $AA_1 \perp CD$. Tehát $CD \perp (ABA_1B_1)$ (az A, A_1, B és B_1 pont egy síkban van). Az $AB_1 \cap CD$ és $BA_1 \cap CD$ metszéspontok az ABA_1B_1 sík CD egyenessel való metszetében vannak. A CD egyenes nincs az ABA_1B_1 síkban és nem is párhuzamos vele, tehát a CD és az (ABA_1B_1) metszete egy pontot tartalmaz. Ebből következik, hogy az AB_1 és a BA_1 a CD egyenesen metszik egymást (ezt a pontot jelöltük B_2 -vel). $CD \perp (ABA_1B_1)$ alapján $CD \perp AB$, tehát a tulajdonság fordítottja is igaz.

Az előbbi két feladat arra mutat rá, hogy a tetraéder magasságai nem mindig összefutók. Ezért nagyon sok, háromszögre vonatkozó tulajdonság nem általánosítható tetraéderekre. Ahhoz, hogy akár egyszerű síkbeli tulajdonságok térbeli analógiáról beszélhessünk, szükséges néhány speciális tetraéderosztály bevezetése. Ha a

magasságok összefutását tetraéderekre szeretnénk kiterjeszteni, az első két feladat alapján egy speciális tetraéderosztályt kapunk.

Értelmezés. (Steiner, 1827) Az $ABCD$ tetraédert ortocentrikusnak nevezzük, ha magasságai összefutó egyenesek.

Tétel. Az $ABCD$ tetraéderben a következő kijelentések egyenértékűek:

1. a tetraéder ortocentrikus;
2. $AB \perp CD$, $AC \perp BD$;
3. $AB \perp CD$, $AC \perp BD$ és $AD \perp BC$;
4. $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$; (Feuerbach, 1827)
5. Egy csúcs vetülete a szembefekvő lap ortocentrumába kerül;
6. Bármely csúcs szembefekvő lapra eső vetülete az illető lap ortocentruma.
7. A kettős élfelezők kongruensek.
8. Létezik olyan k_D állandó, amelyre

$$k_D = DA \cdot BD \cdot \cos(\angle ADB) = DB \cdot DC \cdot \cos(\angle BDC) = DA \cdot DC \cdot \cos(\angle CDA)$$

Bizonyítjuk a 8. tulajdonságot. A D -t tartalmazó oldallapokon felírjuk a koszinusz tételt.

$$2DA \cdot BD \cdot \cos(\angle ADB) = AD^2 + DB^2 - AB^2,$$

$$2DA \cdot DC \cdot \cos(\angle BDC) = DB^2 + DC^2 - BC^2 \text{ és}$$

$$2DC \cdot DA \cdot \cos(\angle CDA) = CD^2 + DA^2 - CA^2.$$

Másrészt az $AD^2 + BD^2 - AB^2 = BD^2 + DC^2 - BC^2$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$, vagyis ha $BD \perp CD$. Ez alapján az $ABCD$ tetraéder pontosan akkor ortocentrikus, ha az előbbi koszinusz tételekből származó egyenlőségek bal oldalán megjelenő kifejezések egyenlők.

Mivel a szorzatok előjele csak a megjelenő koszinusztól függ, igaz az alábbi következmény:

Következmény. Az $ABCD$ ortocentrikus tetraéder D csúcsára illeszkedő síkszögek vagy mind tompaszögek, vagy mind derékszögek, vagy mint hegyesszögek.

Tulajdonságok

1. Az $ABCD$ ortocentrikus tetraéderben O , G és H kollineárisak és G felezi OH -t.
2. Az $ABCD$ ortocentrikus tetraéderben az oldallapok súlypontjaiban a lapokra állított merőleges egyenesek egy Γ pontban metszik egymást, amely kollineáris O, G és H -val és $H\Gamma = 2\Gamma O$.
3. Az $ABCD$ ortocentrikus tetraéderben a négy lap Euler köre egy gömbön van, amelynek átmérői a kettős élfelezők (Voght, 1881)

4. Az $ABCD$ ortocentrikus tetraéderben a lapok magasságpontjai és súlypontjai egy gömbön vannak, melynek középpontja OH -n van és sugara $\frac{R}{3}$. Ez a gömb harmadolja az AH , BH , CH és DH szakaszokat.
5. Az $ABCD$ ortocentrikus tetraéderben az AH , BH , CH és DH szakaszok felezőpontjai egy E középpontú és $\frac{R}{2}$ sugarú gömbön vannak. (Jacobi, 1831)
6. Ha az $ABCD$ tetraéderben H az $ABCD$ ortocentruma, akkor D az $ABCH$ ortocentruma.
7. Ha az $ABCD$ tetraéderben a lapok ortocentrumaiban a lapokra emelt merőlegesek egy H pontban metszik egymást, akkor a tetraéder ortocentrikus.
8. Ha az $A_1A_2A_3A_4$ ortocentrikus tetraéderben α_i az A_i pontban a köréírt gömbhöz húzott érintő sík, G_i az A_i -vel szembefekvő lap súlypontja, ahol $i = \overline{1,4}$, akkor a G_i -ből az α_i -re bocsájtott merőlegesek összefutók.

4.2. Az egyenlő oldalú tetraéderek

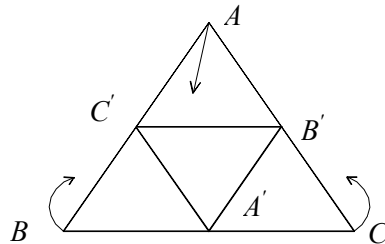
Ha az egyenlő oldalú háromszög térbeli megfelelőjét keressük, egy alapvető problémával találjuk magunkat szemben. Elvárjuk ugyanis, hogy a térbeli megfelelőnek (analógnak) hasonló tulajdonságai legyenek. Ezért felsorolunk néhány olyan tulajdonságot, amely az egyenlő oldalú háromszöget jellemzi:

1. oldalai kongruensek;
2. szögei kongruensek;
3. magasságai egyforma hosszúak;
4. az oldalfelezői magasságok;
5. a szögfelezői oldalfelezők;
6. egy belső pontnak az oldalaktól vett távolságai összege a háromszög magasságával egyenlő;
7. a beírt és köréírt körök középpontjai egybeesnek.

Már az első tulajdonság alapján sem egyértelmű a térbeli analóg, hisz a tetraéder gazdagabb, mint síkbeli társa, van oldaléle és oldallapja is. Ha az oldalélek egyenlőségét kérjük, akkor olyan tetraédert kapunk, amelynek minden lapja egyenlő oldalú háromszög. Ez rendelkezik a többi tulajdonság térbeli megfelelőjével is, de ezek a tulajdonságok ezt a tetraédert nem jellemzik, hisz ha a magasságok egyenlő hosszúak, akkor az oldallapok területei egyenlők kell, hogy legyenek ($V = \frac{1}{3} \cdot S_A \cdot h_A$)

stb.), és ilyen tetraéder bármely hegyesszögű háromszögből kiindulva szerkeszthető az alábbi módon:

Az ABC hegyesszögű háromszög alakú kartonlapot az $A'B'$, $B'C'$ és $C'A'$ középvonalai mentén megtűrtük.



Be kell látnunk azt, hogy az $AB'C'$, $BC'A'$ és $CA'B'$ háromszögek mozgathatók úgy, hogy az A , B és C csúcsok egy pontban találkozzanak (azaz, hogy egy tetraédert kapunk):

1. megoldás. Ha a $B'C'$ mentén tűrjük fel az $AB'C'$ háromszöget, és egy adott pillanatban az

$[AA']$ szakasz hossza megegyezik a $[B'C']$ szakasz hosszával, akkor éppen a keresett tetraédert kapjuk, mert ekkor $AA'B' \equiv CA'B'$ és $AC'A' \equiv BC'A'$. Nyilvánvaló, hogy a feltűrés folyamán az AA' szakasz hossza csökken. Legyen $A''C'B'$ az $AC'B'$ a feltűrés után. Észrevehető, hogy $AOC' \equiv A''OC' \Rightarrow AO = OA''$. Az $A'OA''$ háromszögben a háromszög egyenlőtlenségét felírva

$$\left. \begin{array}{l} A''O + OA' > A'A'' \\ A''O + OA' = AO + OA' = AA' \end{array} \right\} \Rightarrow AA' > A'A''.$$

Az AA' szakasz hossza akkor lesz a legrövidebb, ha visszatűrjük a síkba az $AB'C'$ -et. Az $[A'A'', AA']$ intervallumban bármilyen értéket felvehet az $A'A''$. Tehát annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy tetraédert kapjunk a három háromszög feltűrése után az, hogy $A'A''' \leq B'C' \leq AA'$.

Mivel $m(\sphericalangle A) < 90^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle AB'A') > 90^\circ \Rightarrow$ az $AC'A'B'$ paralelogrammában $AA' > B'C'$. Az $A'A''C'B'$ trapézban $m(\sphericalangle C'B'A') = m(\sphericalangle ABC) < 90^\circ \Rightarrow C'B' > A'A'''$.

Tehát fel lehet tűrni úgy a háromszöget, hogy egy tetraédert kapjunk.

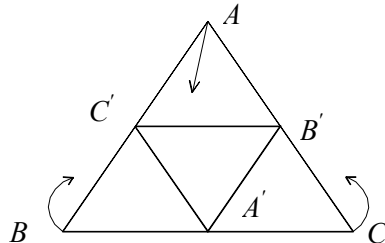
2. megoldás. Az A -nak az $A'B'C'$ síkra eső vetülete a mozgás ideje alatt az ABC háromszög A -ból húzott magasságán mozog. Elégséges azt igazolni, hogy az ABC háromszög H magasságpontja az $A'B'C'$ háromszög belsejében van és, hogy a feltűrés során, amikor A , B és C rákerül a H -ban ($A'B'C'$)-ra emelt merőlegesre, akkor ugyanabba a pontba kerülnek. Az $A''H$ szakasz hosszára érvényes az

$$A''H^2 = \left(\frac{h_a}{2}\right)^2 - \left(AH - \frac{h_a}{2}\right)^2 = AH \cdot HA_1 = 4R^2 \cos A \cos B \cos C$$

egyenlőség. Mivel ez a kifejezés szimmetrikus A , B és C -re nézve a feltűrés során tetraédert kapunk.

Feltehetjük a következő kérdést: *Mi történik ha tompaszögű háromszögből indulunk?*

Megoldás. Az előző feladat alapján, ha $m(\sphericalangle A) > 90^\circ$, akkor $AA' < C'B'$, tehát nem lehet feltűrni a háromszöget a kért módon.



Visszatérve előbbi fejtegetésünkre, az is látható, hogy az oldallapok területeinek egyenlősége elégséges ahhoz, hogy egy belső pont távolságainak összege a magasság hosszával legyen egyenlő. E tulajdonságok alapján látható, hogy a térbeli analóg nemcsak az alakzattól függ, hanem az alakzat konkrét tulajdonságaitól is, amelyek szerint az analógiát építjük. Ezért bevezetjük a következő tetraéderosztályt, és vizsgáljuk a tetraéderek tulajdonságait:

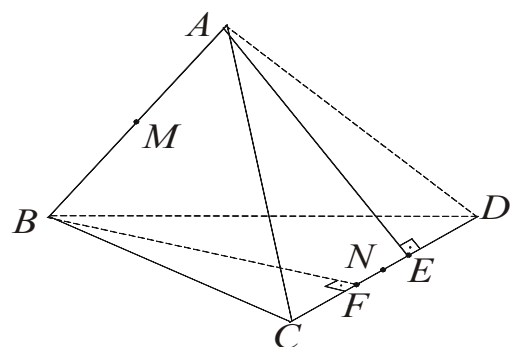
Értelmezés. Az $ABCD$ tetraédert egyenlő oldalúnak nevezzük, ha oldallapjai egyenlő területűek.

Az eddigi megfontolásaink alapján érvényes az alábbi tétel:

Tétel. Az $ABCD$ tetraéderben a következő állítások egyenértékűek:

1. $ABCD$ egyenlő oldalú.
2. A magasságok egyenlő hosszúságúak.
3. Három, nem egy csúcsból kiinduló él által meghatározott lapszögek szögfelezősíkjai felezik a szemközti élt.

Például, egyenlő oldalú tetraéder az előbbi eljárással szerkesztett tetraéder. Természetesen tevődik fel a kérdés, hogy az így szerkesztett tetraédernek egyéb tulajdonságai jellemzők-e az egyenlő oldalú tetraéderekre, illetve, hogy létezik-e olyan egyenlő oldalú tetraéder, amit nem a fent leírt módon szerkesztünk. Induljunk ki abból, hogy az ACD és a



BCD háromszög területe egyenlő. Mivel a két háromszög CD oldala közös, az AE és BF magasságok kongruensek. Ha M és N az AB és CD oldalélek felezőpontjai, akkor az EF szakasz az AB oldal CD -re eső vetülete, tehát $[EN] \equiv [NF]$. Ebből következik, hogy a BFN és AEN

derékszögű háromszögek megfelelő befogói kongruensek, tehát $AEN \equiv BFN$. Így $[BN] \equiv [AN]$, tehát az ANB egyenlő szárú háromszögben MN magasság. Hasonlóan belátható, hogy az MN kettős felező merőleges CD -re is, tehát a kettős felezők a hozzájuk tartozó oldalélpárok közös merőlegesei. Ha a BFC és AED derékszögű háromszögeket vizsgáljuk, láthatjuk, hogy $[BF] \equiv [AE]$ és $[CF] \equiv [ED]$, tehát $BFC \equiv AED$. Ebből következik, hogy $[AD] \equiv [BC]$. Tehát egy újabb tulajdonságot igazoltunk. Ezt a következő tételbe foglaltuk:

Tétel. Az $ABCD$ tetraéder akkor és csak akkor egyenlő oldalú, ha a következő tulajdonságok közül valamelyik teljesül:

4. a szembefekvő élpárok kongruensek;
5. a kettős felezők az általuk felezett élek közös merőlegesei.

Megjegyzés. Az előbbi bizonyításból kiderül, hogy az egyenlő oldalú tetraéder oldallapjai kongruens háromszögek. Érdekes megfigyelni, hogy az egyenlő oldalú tetraéder értelmezésében kerültük az oldallapok kongruenciájának használatát, bár kézenfekvő lett volna használni (egyenlő oldalú háromszögben az oldalak kongruensek, tehát egyenlő oldalú tetraéderben az oldallapok kongruensek). Ennek az oka az, hogy a háromszögek kongruenciája bizonyos mértékű kötöttséget rejt magában (megfelelő oldalak és szögek kongruensek), ami nem biztosítja az értelmezés kellő pontosságát és tömörségét. Másrészt a szakaszok kongruenciáját a szakaszok hossza segítségével értelmeztük, tehát ezt kiiktatva a hossz mérték – terület mérték analógia alapján az értelmezés sokkal „természetesebb” és ilyen szempontból összhangban van az egyenlő oldalú elnevezéssel úgy háromszög, mint tetraéder esetén.

Tulajdonságok

1. Az $ABCD$ tetraéder akkor és csak akkor egyenlő oldalú, ha térlapszögeik egyenlők.
2. Az $ABCD$ tetraéder akkor és csak akkor egyenlő oldalú, ha az O , G és I pontok közül legalább kettő egybeesik.
3. Az $ABCD$ egyenlő oldalú tetraéder éleinek felezőpontjai egy olyan oktaéder csúcsai, amelynek lapjai kongruens háromszögek.
4. Az $ABCD$ egyenlő oldalú tetraéder minden csúcsában a síkszögek mértékének összege 180° .
5. Ha az $ABCD$ tetraéderben három csúcsban a síkszögek mértékének összege 180° , akkor a tetraéder egyenlő oldalú.
6. Az $ABCD$ egyenlő oldalú tetraéderben a csúcsoknak a szembefekvő lapokra eső vetületei, a magasságok felezőpontjai és a lapok magasságpontjai egy gömbön vannak.

- Az $ABCD$ tetraéder akkor és csak akkor egyenlő oldalú, ha a hozzáírt gömbök sugarai egyenlők.
- Ha egy $ABCD$ tetraéderben létezik négy, nem egy síkban fekvő pont, amelyekre a csúcsoktól való távolságok összege ugyanaz, akkor a tetraéder egyenlő oldalú.

4.3. Derékszögletű tetraéderek

Értelmezés. Az $ABCD$ tetraédert A -ban derékszögletűnek nevezzük, ha AB , AC és AD élei páronként merőlegesek egymásra.

Tulajdonságok

Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$, A -ban derékszögletű tetraéderben

- az A -nak a BCD -re eső A' vetülete a BCD háromszög ortocentruma és a BCD háromszög hegyesszögű;
- $\frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}$;
- $\cos^2(A'AB) + \cos^2(A'AC) + \cos^2(A'AD) = 1$ (Tinseau, 1780);
- $\cos^2(BC\angle) + \cos^2(CD\angle) + \cos^2(DB\angle) = 1$;
- $T^2[ABC] = T[BCD] \cdot T[A'BC]$;
- $T^2[BCD] = T^2[ABC] + T^2[ADC] + T^2[ABD]$;
- $9V^2[ABCD] = 2T[ABC] \cdot T[ACD] \cdot T[ABD]$.

Bizonyítás

1. A mellékelt ábra jelöléseit használjuk. Az

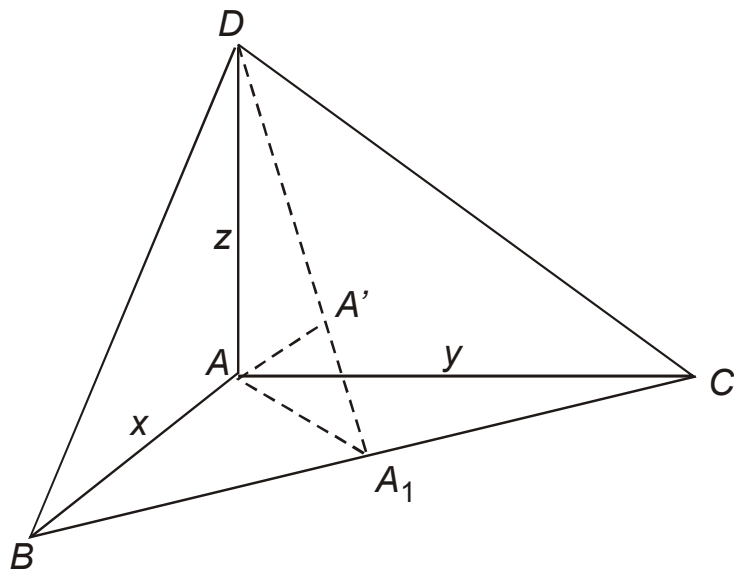
$$AA_1 \perp BC \text{ és}$$

$$AD \perp (BAC)$$

összefüggések és a három merőleges tétele alapján $DA_1 \perp BC$ és az A pontnak a BCD síkra eső vetülete az A_1D magasságon helyezkedik el.

Hasonlóan igazolható, hogy az A pontnak a

BCD síkra eső vetülete rajta van a BCD háromszög B illetve C csúcsából húzott magasságon is. Eszerint az A pontnak a BCD síkra eső vetülete éppen a BCD háromszög magasság-pontja.



2. Ha az AB , AC és AD szakaszok hosszát rendre x -szel, y -nal és z -vel jelöljük, akkor az ABC háromszögben az AA_1 magasságra

$$AA_1 = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ és az } AA_1D \text{ háromszögben}$$

$$AA' = \frac{AD \cdot AA_1}{\sqrt{AD^2 + AA_1^2}} = \frac{xyz}{\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}}.$$

Ebből következik, hogy $\frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}$.

3.-4. $m(A'AD\angle) = m(DA_1A\angle) = m(BC\angle)$, tehát

$$\cos^2(A'AD) = \cos^2(BC\angle) = \left(\frac{AA_1}{DA_1}\right)^2 = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}$$

Hasonló módon igazolható, hogy

$$\cos^2(A'AB\angle) = \cos^2(DC\angle) = \frac{z^2y^2}{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2} \text{ és}$$

$$\cos^2(A'AC\angle) = \cos^2(BD\angle) = \frac{z^2x^2}{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}, \text{ tehát}$$

$$\cos^2(A'AB\angle) + \cos^2(A'AC\angle) + \cos^2(A'AD\angle) = 1 \text{ és}$$

$$\cos^2(BC\angle) + \cos^2(CD\angle) + \cos^2(DB\angle) = 1.$$

5. A $T^2[ABC] = \frac{x^2y^2}{4}$, $T[BCD] = \frac{DA_1 \cdot BC}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}$ és

$$T[A'BC] = \frac{A'A_1 \cdot BC}{2} = \frac{1}{2} \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}} \text{ egyenlőségek alapján}$$

$$T^2[ABC] = T[BCD] \cdot T[A'BC].$$

Ez a befogó tétel analógja.

6. Az előbb igazolt egyenlőséget a tetraéder többi lapjára is felírjuk, majd összeadjuk a kapott egyenlőségeket.

$$T^2[ABC] + T^2[ADC] + T^2[ABD] = T[BCD] \cdot T[A'BC] +$$

$$+ T[BCD] \cdot T[A'DC] + T[BCD] \cdot T[A'BD] = T[BCD] \cdot T[BCD] = T^2[BCD].$$

7. A $V[ABCD] = \frac{xyz}{6}$, $T[ABC] = \frac{xy}{2}$, $T[ADC] = \frac{yz}{2}$ és $T[ABD] = \frac{zx}{2}$

egyenlőségek alapján következik, hogy

$$9V^2[ABCD] = 2T[ABC] \cdot T[ADC] \cdot T[ABD].$$

Tulajdonságok

1. A derékszögletű tetraéder Euler egyenese a derékszöglet csúcsából kiinduló súlyvonal.

2. Az A -ban derékszögletű tetraéderben

$$m_B^2 + m_C^2 + m_D^2 = 11m_A^2$$

(Ez a tulajdonság a derékszögű háromszögeket jellemző $m_b^2 + m_c^2 = 5m_a^2$ egyenlőség analogonja)

4.3. Szabályos tetraéderek

Értelmezés. Az $ABCD$ tetraédert szabályosnak nevezzük, ha minden oldaléle azonos hosszúságú.

Látható, hogy így bármely csúcsnak a szemben fekvő lapra eső vetülete az illető lap középpontjába (ortocentrumába) esik, tehát a szabályos tetraéder ortocentrikus is. Mivel az oldallapok kongruensek, a tetraéder egyenlő oldalú is.

Tétel. Ha valamely egyenlő oldalú tetraéder ortocentrikus, akkor szabályos.

Tulajdonságok

1. Ha az $ABCD$ tetraéder szabályos, akkor az O , I , G és H pontok egybeesnek.

2. Ha egy ortocentrikus tetraéderben az O , I , G és H pontok közül legalább kettő egybeesik, akkor az $ABCD$ szabályos.

3. Egy a oldalú szabályos tetraéderben $h = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, $V = \frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$,

$\cos \alpha = \frac{1}{3}$, ahol α a tetraéder lapszöge.

4. Ha β az a oldalú szabályos tetraéderben egyik élnek az egyik lappal bezárt szöge, akkor $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

5. Egy a oldalú szabályos tetraéderben két szembefekvő él távolsága $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

V. FEJEZET SPECIÁLIS ANALÓGIÁK

Ebben a fejezetben két előadás módszertanilag lebontott menetét ismertetjük, és további három analógiát mutatunk be. Az előadások tehetséggondozó táborokban hangzottak el, válogatott hallgatóság előtt és, egy hetes felkészítő program keretén belül. Éppen ezért a felhasznált tételek és fogalmak (Cauchy-Bunjakovszkij egyenlőtlenség, szimmediánok tulajdonságai, mértani helyek, súlypont értelmezése tetraéder esetén, Menealosz-tétel stb.) elő vannak készítve, tehát a feltételezzük, hogy a hallgatók (a Márton Áron Líceum, a Tamási Áron Líceum és a Báthory István Líceum 11. és 12. osztályos versenyző diákjai) ezekkel tisztában vannak. A tárgyalásmód eltér a hagyományos Értelmezés-Tétel-Bizonyítás stílustól, mert a foglalkozás a diákok munkáján alapszik, ők „fedezték fel”, hogy a tetraédernek is van Lemoine pontja illetve ők terjesztették ki a térre a szükséges tételeket stb. Ez a tárgyalásmód az analógiák felfedezésének egy jellemző tulajdonsága.

A foglalkozás öt részre tagolható:

1. a problémaszituáció megteremtése a síkbeli tulajdonság (és megoldás) ismertetésével;
2. a megoldás kielemezése, a fő ötletek azonosítása;
3. a használt tételek és fogalmak térbeli analogonjainak meg/(ki)találása;
4. a bizonyítás lépéseinek megisméltése a térben;
5. a térbeli tulajdonság megfogalmazása és a bizonyítás letisztázása.

A foglalkozások leírása nem tartalmazza a tévutakat, ezeket ugyanis a diákok menetközben vagy a bizonyítás letisztázása során kijavították. Ennek ellenére néhány helyen utalni fogunk a lehetséges hamis analógiákra. Az egyik legnehezebb lépés mindig a megfelelő térbeli alakzat azonosítása volt, a háromszög Ceva-egyenesei helyett ugyanis az első esetben Ceva-síkok jelennek meg (bár lehet kísérletezni Ceva-egyenesekkel is, de ez nem vezet eredményhez), míg a második esetben az alapra illeszkedő Ceva-egyenesek helyett Ceva-síkok, de a harmadik csúcsból kiinduló egyenes analogonja a térben is egy egyenes. Így ugyanannak a síkbeli ábrának a két esetben két különböző térbeli ábra az analogonja.

A dolgozat nem tartalmazza az 5. rész leírását, mert ez gyakorlatilag az öt megelőző részek összefoglalása lenne.

5.1. Tetraéder Lemoine pontjának értelmezése a minimumtulajdonság alapján

1. rész

Az ABC háromszögben egy tetszőleges M pontnak az oldalaktól való távolságait jelöljük rendre d_a , d_b és d_c -vel. A háromszög geometriájából ismert, hogy a Lemoine pont (a szimmediánok¹ összefutási pontja) rendelkezik a következő minimum tulajdonsággal:

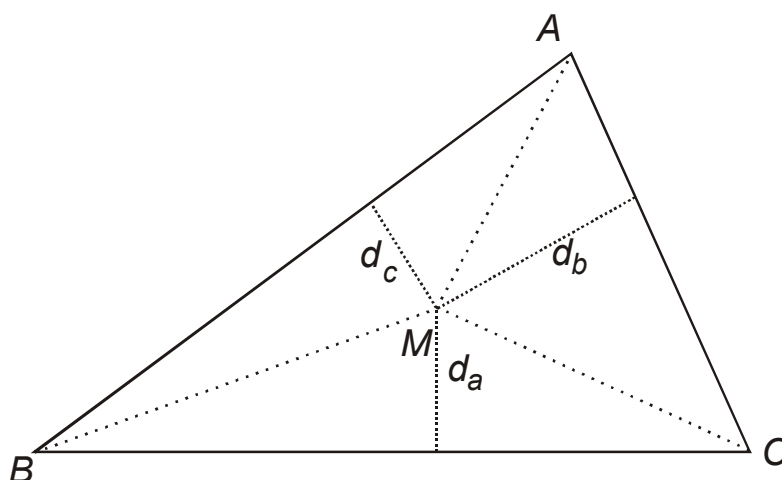
Tétel. Az ABC háromszögben a K Lemoine féle pontra az

$$S = d_a^2 + d_b^2 + d_c^2$$

összeg minimális.

Ebben a paragrafusban ebből a minimumtulajdonságból kiindulva értelmezzük a tetraéder Lemoine pontját. Ehhez előbb szükségünk van a síkbeli tulajdonság bizonyítására, mert az analógia forrása éppen ez a bizonyítás.

Bizonyítás. Az ABC háromszöglapot felbonthatjuk az AMB , BMC és CMA háromszöglapokra, tehát az AMB , BMC és CMA háromszögek területének az összege egyenlő az ABC háromszög területével.



A $T[ABC] = T[AMB] + T[BMC] + T[CMA]$ egyenlőségből következik, hogy
 $ad_a + bd_b + cd_c = 2T[ABC]$.

Így a Cauchy-Bunjakovszkij egyenlőtlenség alapján:

$$(ad_a + bd_b + cd_c)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2),$$

tehát

$$d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 \geq \frac{4T^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

¹ A szimmedián az oldalfelező szimmetrikusa a szögfelezőre nézve.

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\frac{d_a}{a} = \frac{d_b}{b} = \frac{d_c}{c}$. Igazoljuk, hogy pontosan egy olyan pont létezik, amelyre ezek az egyenlőségek teljesülnek. Ehhez szükségünk van a következő tulajdonságra:

Tulajdonság. Azon M pontok mértani helye, amelyekre $\frac{d_b}{d_c} = k$, ahol k

egy rögzített pozitív állandó két egyenes, amelyek áthaladnak az A csúcson. Ezek közül az egyik a BAC szög belsejében van és a másik a külső tartományában helyezkedik el.

Ebből a tulajdonságból (és a másik két tulajdonságra felírt hasonló tulajdonságokból) következik, hogy a háromszög belső tartományában pontosan egy olyan K pont létezik, amelyre

$$\frac{d_a}{d_b} = \frac{a}{b} \text{ és } \frac{d_b}{d_c} = \frac{b}{c}.$$

Erre a K pontra $\frac{d_a}{a} = \frac{d_b}{b} = \frac{d_c}{c}$. Megjegyezzük, hogy a $\frac{d_a}{d_b} = \frac{a}{b}$

egyenlőség az oldalfelezőnek a szögfelező szerinti szimmetrikusát jellemzi, tehát K pont a szimmediánok összefutási pontja (a síkgeometriában így értelmezzük általában a Lemoine pontot).

2. rész

A megoldás fő lépései:

- a távolságok, oldalhosszak és terület közti összefüggés;
- a Cauchy-Bunjakovszkij egyenlőtlenség alkalmazása;
- az egyenlőség feltételének vizsgálata (mértani hely);

Megjegyzés. A diákoknak a legnagyobb nehézséget a harmadik lépés okozta.

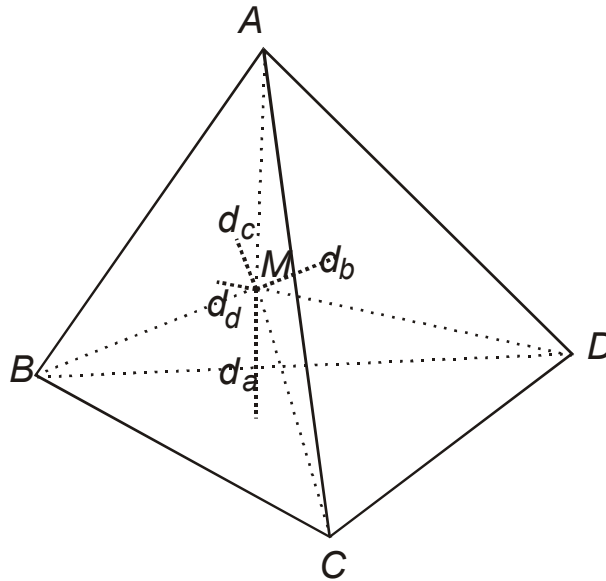
3. rész

A gondolatmenet kiterjeszthető a tetraéderre is. Ehhez az szükséges, hogy a bizonyítás kulcslépéseit tudjuk kiterjeszteni a tetraéderre is. Első lépés az $ad_a + bd_b + cd_c = 2T[ABC]$ azonosság térbeli analogonjának a megtalálása. Ezt az összefüggés levezetéséhez használt módszer kiterjesztésével érhetjük el. Tekintsük az $ABCD$ tetraédert és annak egy belső M pontját. A tetraéder felbontható az $MBCD$, $MACD$, $MABD$ és $MABC$ diszjunkt tetraéderekre, tehát

$$V[ABCD] = V[MBCD] + V[MACD] + V[MABD] + V[MABC]$$

Ebből következik, hogy

$$d_a T_A + d_b T_B + d_c T_C + d_d T_D = 3V[ABCD].$$



A Cauchy-Buniakovski egyenlőtlenség alapján

$$(d_a T_A + d_b T_B + d_c T_C + d_d T_D)^2 \leq (d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 + d_d^2)(T_A^2 + T_B^2 + T_C^2 + T_D^2),$$

tehát

$$d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 + d_d^2 \geq \frac{9V^2[ABCD]}{T_A^2 + T_B^2 + T_C^2 + T_D^2}.$$

Ebben az egyenlőtlenségben pontosan akkor van egyenlőség, ha

$$\frac{d_a}{T_A} = \frac{d_b}{T_B} = \frac{d_c}{T_C} = \frac{d_d}{T_D}.$$

A térben a $\frac{d_a}{d_b} = k$ egyenlőség két síkot értelmez, amelyeknek a közös egyenesé éppen a CD egyenes. Tehát a bizonyítás minden kulcslépése kiterjeszthető tetraéderre is.

4. rész

A $\frac{d_a}{d_b} = k$ egyenlőség által értelmezett két síkból az egyik metszi a

tetraéder belső tartományát és a másik nem. Tehát a síkbeli gondolatmenet kiterjeszthető, mert három ilyen sík metszete meghatároz egy pontot és ez a pont az összes feltételt teljesíti. Ugyanakkor az $\frac{d_a}{d_b} = \frac{T_A}{T_B}$ egyenlőség a CD -n áthaladó és AB -t felező síknak a CD élű

lapszög szögfelezősíkja szerinti szimmetrikusát jellemzi, tehát ezt a síkot nevezhetjük szimmedián síknak és az összefutási pontjukat a tetraéder Lemoine pontjának.

5.2. A súlypont egy tulajdonságának általánosítása

1. rész

Induljunk ki a következő tulajdonságból:

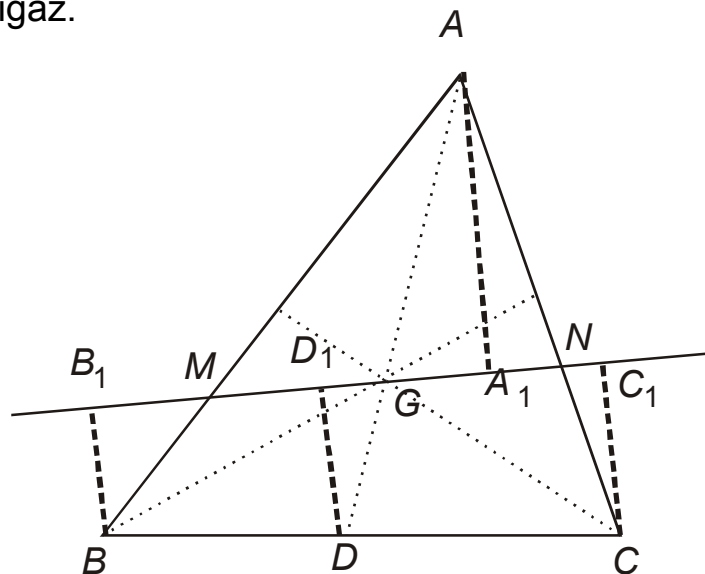
Tulajdonság. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszögben az $M \in (AB)$ és $N \in (AC)$ pontok által meghatározott egyenes pontosan akkor tartalmazza a háromszög G súlypontját ha $\frac{BM}{MA} + \frac{CN}{NA} = 1$.

Bizonyítás. Vetítsük le az A, B, C és D pontokat a d egyenesre. Az ábra jelöléseit használjuk és d_x -el jelöljük az X pont távolságát a d egyenestől. A d egyenes pontosan akkor halad át a G ponton, ha $\frac{d_A}{d_D} = 2$. Másrészt $d_B + d_C = 2d_D$, mert a BCC_1B_1 trapézban DD_1

középvonal és $\frac{d_B}{d_A} = \frac{BM}{MA}$ valamint $\frac{d_C}{d_A} = \frac{CN}{NA}$. Ezek alapján

$$\frac{2d_D}{d_A} = \frac{d_B + d_C}{d_A} = \frac{BM}{MA} + \frac{CN}{NA},$$

tehát a tulajdonság igaz.



A paragrafus célja ezt a tulajdonságot kiterjeszteni tetszőleges belső pont és tetraéder esetére. Ezt két lépésben végezzük el. Előbb megpróbáljuk a síkbeli tulajdonságot kiterjeszteni tetszőleges belső pont esetére, majd ezt terjesztjük ki térre. Az első lépés a bizonyítás kulcsfontosságú lépéseinek azonosításáért szükséges.

2. rész

Ha AD , BE és CF összefutó egyenesek és G -vel jelöljük az összefutási pontjukat, akkor a Van Aubel összefüggés alapján $\frac{AG}{GD} = \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC}$ és a d egyenes pontosan akkor tartalmazza a G

pontot, amikor $\frac{d_A}{d_D} = \frac{AG}{GD}$. A $\frac{d_B}{d_A} = \frac{BM}{MA}$ és $\frac{d_C}{d_A} = \frac{CN}{NA}$ egyenlőségek

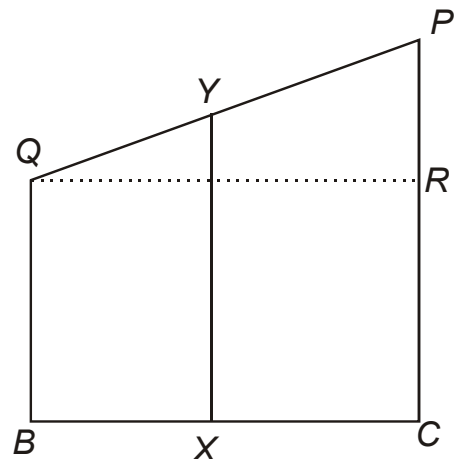
továbbra is igazak, tehát elégséges a d_D távolságot kifejezni a d_B és d_C távolságok függvényében. Ez azt jelenti, hogy a következő síkmértani feladatot kell megoldanunk:

Feladat. A $BCPQ$ trapézban az X és Y pontok a BC és QP szárakat ugyanolyan arányban osztják. Fejezzük ki a BQ és PC alapok függvényében és a $k = \frac{BX}{XC} = \frac{QY}{YP}$ arány függvényében az XY szakasz hosszát.

Megoldás. Felvesszük az $R \in (CP)$ pontot úgy, hogy a $BCRQ$ négyszög paralelogramma legyen. Ha $\{Z\} = XY \cap RQ$,

akkor $\frac{ZY}{PR} = \frac{QY}{QP} = \frac{k}{k+1}$, tehát

$$\begin{aligned} XY &= XZ + \frac{k}{k+1}(PC - QB) = \\ &= \frac{k \cdot PC + BQ}{k+1}. \end{aligned}$$



Ez alapján írhatjuk, hogy

$$d_D = \frac{\frac{BD}{DC} d_C + d_B}{\frac{BD}{DC} + 1} = \frac{BD \cdot d_C + DC \cdot d_B}{BC}, \text{ tehát}$$

$$\frac{d_D}{d_A} = \frac{BD}{BC} \frac{d_C}{d_A} + \frac{DC}{BC} \frac{d_B}{d_A} = \frac{BD}{BC} \frac{CE}{EA} + \frac{DC}{BC} \frac{BF}{FA}$$

és így a $\frac{d_D}{d_A} = \frac{GD}{AG}$ egyenlőség ekvivalens az

$$1 = \frac{AG}{GD} \frac{BD}{BC} \frac{CN}{NA} + \frac{AG}{GD} \frac{DC}{BC} \frac{BM}{MA}$$

összefüggéssel. Az ABD és ACD háromszögben a $B-G-E$ és $C-G-F$ szelőkre a Menelaosz tétel alapján

$$\frac{AG}{GD} \frac{BD}{BC} = \frac{AE}{EC} \quad \text{és} \quad \frac{AG}{GD} \frac{DC}{BC} = \frac{AF}{FB},$$

tehát a d egyenes pontosan akkor halad át a G ponton, ha

$$\frac{AF}{FB} \frac{BM}{MA} + \frac{AE}{EC} \frac{CN}{NA} = 1.$$

Kijelenthetjük tehát a következő tételt:

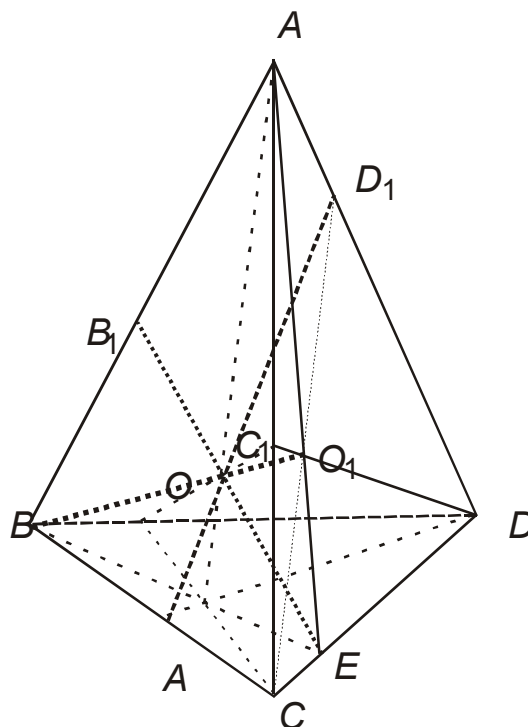
Tétel. Az ABC háromszögben az $M \in (AB)$ és $N \in (AC)$ pontok által meghatározott egyenes pontosan akkor tartalmazza az AD , BE és CF összefutó egyenesek közös pontját ($D \in (BC)$, $E \in (AC)$ és $F \in (AB)$), ha

$$\frac{AF}{FB} \frac{BM}{MA} + \frac{AE}{EC} \frac{CN}{NA} = 1.$$

Látható, hogy ez a tulajdonság általánosabb, mint a súlypontra vonatkozó eredeti tulajdonság. A következő lépésben ezt a tulajdonságot terjesztjük ki tetraéder és tetszőleges belső pont esetére.

3. rész

Az $ABCD$ tetraéder belsejében vegyünk fel egy tetszőleges O pontot és jelöljük B_1 , C_1 és D_1 -gyel az (OCD) , (OBD) és (OBC) síkoknak az AB , AC illetve AD egyenesekkel való metszetét. Ha $M \in AB$, $N \in AC$ és $P \in AD$, akkor az általuk meghatározott α sík pontosan akkor tartalmazza az O pontot, ha $\frac{d_{O_A}}{d_A} = \frac{O_A O}{OA}$, ahol $O_A = AO \cap (BCD)$ és a távolságokat az α síktól számítjuk.



Látható, hogy a következő problémát kell előbb megoldani (ez a bizonyítás részleteinek a kiterjesztése):

Feladat. Fejezzük ki a BCD háromszög belső X pontjának egy α síktól való távolságát a csúcsok távolságának és a D pont BCD -beli helyzetének függvényében.

Ez a tulajdonság a már bizonyított síkbeli tulajdonság térbeli analogonja. A síkbeli tulajdonság kétszeri alkalmazásával és a Van Aubel tétel segítségével igazolhatjuk, a következő tulajdonságot:

Tulajdonság. Ha X a BCD háromszög belső pontja, $B_1 = BX \cap CD$, $C_1 = CX \cap BD$ és $D_1 = DX \cap CB$, akkor

$$d_X = \frac{k_1 d_B + k_2 d_C + k_3 d_D}{k_1 + k_2 + k_3},$$

ahol $\frac{CB_1}{B_1D} = \frac{k_3}{k_2}$, $\frac{DC_1}{C_1B} = \frac{k_1}{k_3}$ és $\frac{BD_1}{D_1C} = \frac{k_2}{k_1}$.

4. rész

Ezeknek és az $\frac{AO}{OO_A} = k$ aránynak a jelölésével egyszerűen

levezethetjük az eredeti tulajdonság térbeli általánosítását. Ha az ABO_A háromszögben a $B_1 - O - E$ szelőre alkalmazzuk a Menelaosz tételt,

akkor az $\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{OA}{OO_A} \frac{EO_A}{BE} = \frac{kk_1}{k_1 + k_2 + k_3}$ egyenlőséghez jutunk.

Hasonlóan kapjuk az $\frac{AC_1}{C_1C} = \frac{kk_2}{k_1 + k_2 + k_3}$ és $\frac{AD_1}{D_1D} = \frac{kk_3}{k_1 + k_2 + k_3}$

egyenlőségeket. Ugyanakkor az α sík pontosan akkor tartalmazza az O pontot, ha

$$\frac{1}{d_A} \frac{k_1 d_B + k_2 d_C + k_3 d_D}{k_1 + k_2 + k_3} = \frac{1}{k}.$$

Ha behelyettesítjük a megfelelő arányokat kijelenthetjük a következő általános tételt (5. rész):

Tétel. (András Szilárd) Ha $ABCD$ egy tetraéder, O egy pont a térben, $(BCO) \cap AD = \{P_1\}$, $(BOD) \cap AC = \{N_1\}$ és $(OCD) \cap AB = \{M_1\}$, továbbá $M \in AB$, $N \in AC$ és $P \in AD$ tetszőleges pontok, akkor az O pontosan akkor van az (MNP) síkban, ha

$$\frac{BM}{MA} \cdot \frac{AM_1}{M_1B} + \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AN_1}{N_1C} + \frac{DP}{PA} \cdot \frac{AP_1}{P_1D} = 1.$$

5.3. Összefutó egyenesek egy tulajdonsága

E paragrafus célja megfogalmazni és bizonyítani a következő síkbeli tulajdonság térbeli analogonját:

Tétel. Ha az ABC háromszögben $M \in BC$, $N \in CA$, $P \in AB$ és $AM \cap BN \cap CP = \{O\}$, továbbá az A -n át a BC -hez húzott d párhuzamos az MN és MP egyeneseket az E és F pontokban metszi, akkor $AE \equiv AF$.

Bizonyítás. Az AEP és BMP háromszögek hasonlóak, tehát

$$\frac{AE}{BM} = \frac{AP}{PB}.$$

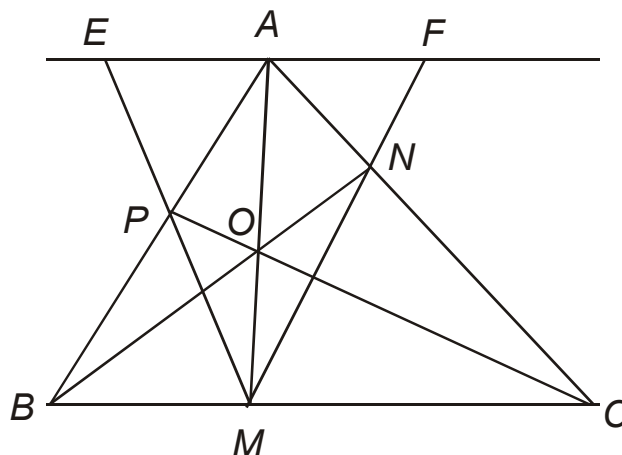
Az AFN és CMN háromszögek hasonlóságából

$$\frac{AE}{BM} = \frac{AP}{PB}.$$

Ha a két egyenlőség megfelelő oldalait elosztjuk, az

$$\frac{AE}{AF} = \frac{AP}{PB} \frac{BM}{MC} \frac{CN}{NA}$$

egyenlőséghez jutunk. A Ceva tétel alapján következik, hogy $AE \equiv AF$.



Megjegyzések

1. A bizonyításban megjelenő arányok akkor is ugyanazok maradnak, ha az ábra nem így néz ki (az összefutási pont tetszőlegesen helyezkedhet el a síkban).
2. A tulajdonság segítségével nagyon sok síkgeometriai feladatra egyszerű megoldás adható, ha a megfelelő segédszerkesztést elvégezzük. A továbbiakban egy ilyen alkalmazást mutatunk be és további néhányat kijelentünk.

Alkalmazás

Az ABC háromszögben $M \in (BC)$, $N \in (CA)$, $P \in (AB)$ úgy, hogy telebsüljenek a következő egyenlőségek:

$$BMP \sphericalangle \equiv CMN \sphericalangle, \quad CNM \sphericalangle \equiv ANP \sphericalangle \quad \text{és} \quad APN \sphericalangle \equiv BPM \sphericalangle.$$

Bizonyítsuk be, hogy az AM , BN és CP egyenesek magasságok.

Bizonyítás. Első lépésben igazoljuk, hogy az AM , BN és CP egyenesek összefutóak. Ezt a Ceva tétel és a szinusz tétel segítségével igazoljuk. Az ANP , BMP és CMN háromszögekben a $m(\angle BMP) = \alpha$, $m(\angle CNM) = \beta$ és $m(\angle APN) = \gamma$ jelölésekkel a szinusz tétel alapján:

$$\frac{AP}{AN} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}, \quad \frac{BM}{BP} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \quad \text{és} \quad \frac{CN}{CM} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Ezek alapján $\frac{AP}{PB} \frac{BM}{MC} \frac{CN}{NA} = 1$, tehát a pontok elhelyezkedése és a Ceva

tétel fordítottja alapján következik, hogy az AM , BN és CP egyenesek összefutóak. Ha d az A -n át a BC -hez húzott párhuzamos, $\{E\} = MN \cap d$ és $\{F\} = MP \cap d$, akkor a tétel alapján $AE = AF$, vagyis az EMF háromszögben az MA szakasz oldalfelező. Másrészt a feltételek alapján az EMF háromszögben $m(\angle MEF) = m(\angle MFE) = \alpha$, tehát a háromszög egyenlő szárú. Így MA magasság is. Mivel $d \parallel BC$, következik, hogy $AM \perp BC$. Hasonlóan igazolható, hogy BN és CP is magasságok.

Javasolt alkalmazások

1. Az ABC háromszögben $M \in BC$, $N \in CA$, $P \in AB$ és $AM \cap BN \cap CP = \{O\}$. Bizonyítsuk be, hogy ha O az MNP háromszög súlypontja, akkor AM , BN és CP az ABC háromszögben oldalfelezők.
2. Az ABC háromszögben $M \in BC$, $N \in CA$, $P \in AB$ és $AM \cap BN \cap CP = \{O\}$. Bizonyítsuk be, hogy ha O az MNP háromszögbe írható kör középpontja, akkor AM , BN és CP az ABC háromszögben magasságok.
3. Az ABC háromszögben az $M \in BC$, $N \in CA$, $P \in AB$ pontok a belső szögfelezők talppontjai. Bizonyítsuk be a következő ekvivalenciát

$$m(\angle BAC) = 120^\circ \Leftrightarrow m(\angle NMP) = 90^\circ$$

(Amerikai verseny)

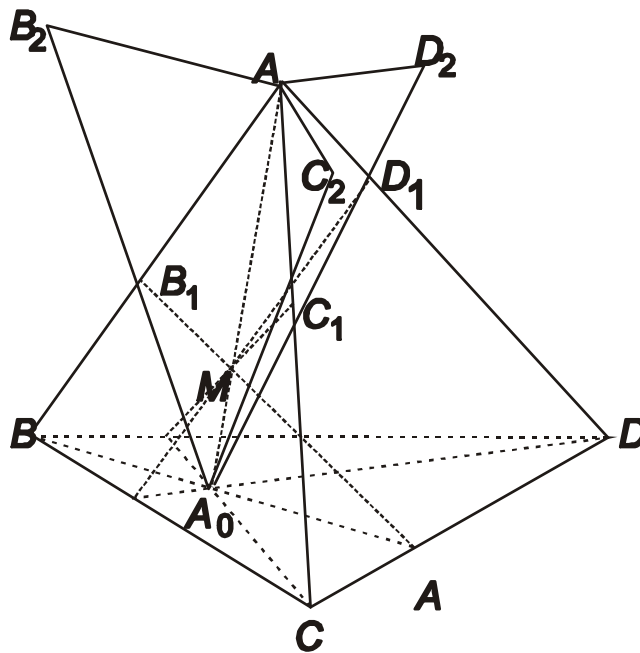
4. Az ABC háromszögben AM , BN és CP összefutó egyenesek és $\{Q\} = AM \cap NP$, ahol $M \in (BC)$, $N \in (CA)$, $P \in (AB)$. Bizonyítsuk be, hogy ha $m(\angle BQM) = m(\angle MQC)$, akkor $AM \perp NP$.

(X. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny, András Szilárd)

A tétel térbeli analogonja a következő:

Tétel. (András Szilárd) Az $ABCD$ tetraéder BCD lapjának tetszőleges A_0 pontja esetén vegyünk fel az AA_0 -n egy M pontot. A $(BCM) \cap AD$, $(BDM) \cap AC$ és $(CDM) \cap AB$ metszeteket jelöljük rendre D_1 , C_1 és B_1 -el. Az A -n át a (BCD) síkkal húzott párhuzamos α sík az A_0D_1 , A_0C_1 és A_0B_1 egyeneseket D_2 , C_2 illetve B_2 -ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy a $B_2C_2D_2$ háromszög súlypontja éppen A .

Bizonyítás. Tekintsük az A pontot egy koordinátarendszer kezdőpontjának. Bevezetjük a következő jelöléseket: $\vec{a}_0 = \overrightarrow{AA_0}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, stb.



Mivel $A_0 \in (BCD) \Rightarrow \vec{a}_0$ a \vec{b} , \vec{c} és \vec{d} vektorok konvex kombinációja, azaz $\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\alpha + \beta + \gamma = 1$ és $\vec{a}_0 = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c} + \gamma\vec{d}$.
 $M \in AA_0 \Rightarrow \vec{m} = \lambda\vec{a}_0 = \lambda\alpha\vec{b} + \lambda\beta\vec{c} + \lambda\gamma\vec{d}$. (Feltételezhetjük, hogy $\lambda \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, mert ellenkező esetben a $B_2C_2D_2$ háromszög egy ponttá zsugorodna, vagy nem léteznének a B_2 , C_2 , D_2 metszéspontok.)
 Ugyanakkor, mivel $D_1 \in AD$, következik, hogy $\vec{d}_1 = \mu\vec{d}$, $\mu \in \mathbb{R}$ (1).

De $D_1 \in (BMC)$, tehát

$$\begin{aligned} \vec{d}_1 &= \alpha_1\vec{b} + \alpha_2\vec{m} + (1 - \alpha_1 - \alpha_2)\vec{c} = \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2\lambda\alpha)\vec{b} + (\alpha_2\lambda\beta + 1 - \alpha_1 - \alpha_2)\vec{c} + \alpha_2\lambda\gamma\vec{d} \quad (2). \end{aligned}$$

Az (1) és (2) összefüggésekből következik, hogy

$$= (\alpha_1 + \alpha_2 \lambda \alpha) \vec{b} + (\alpha_2 \lambda \beta + 1 - \alpha_1 - \alpha_2) \vec{c} + (\alpha_2 \lambda \gamma - \mu) \vec{d} = \vec{0}.$$

Mivel \vec{b} , \vec{c} és \vec{d} nem koplanárisak, következik, hogy

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \lambda \alpha = 0 \\ \alpha_2 \lambda \beta + 1 - \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \text{ tehát} \\ \alpha_2 \lambda \gamma - \mu = 0 \end{cases}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{1 - \lambda(\alpha + \beta)} \quad (\text{a nevező nem lehet } 0, \text{ mert ellenkező esetben a}$$

$$0 \cdot \alpha_2 = 1 \quad \text{ellentmondáshoz jutnánk),} \quad \mu = \frac{\lambda \gamma}{1 - \lambda(\alpha + \beta)} \quad \text{és}$$

$$\vec{d}_1 = \frac{\lambda \gamma}{1 - \lambda(\alpha + \beta)} \vec{d}. \quad \text{Hasonlóan belátható, hogy} \quad \vec{b}_1 = \frac{\lambda \alpha}{1 - \lambda(\alpha + \beta)} \vec{b} \quad \text{és}$$

$$\vec{c}_1 = \frac{\lambda \beta}{1 - \lambda(\alpha + \beta)} \vec{c}.$$

$$\left. \begin{array}{l} (B_2 C_2 D_2) \parallel (BCD) \\ (B_2 C_2 D_2) \cap (ADA) = AD_2 \\ (BCD) \cap (ADA_0) = A_0 D \end{array} \right\} \Rightarrow AD_2 = A_0 D.$$

$$\text{Tehát } \vec{d}_2 = r \vec{A_0 D} = r(\vec{d} - \vec{a}_0), \text{ ahol } r \in \mathbb{R}.$$

Az $AD_1 D_2$ és $A_0 D D_1$ háromszögek hasonlóságából $\vec{AD}_1 = r \vec{D_1 D}$, tehát

$$\vec{d}_2 = r(\vec{d} - \vec{a}) \quad \text{és} \quad \vec{d}_1 = r(\vec{d} - \vec{d}_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{d}_1 = r \left(1 - \frac{\lambda \gamma}{1 - \lambda(\alpha + \beta)} \right) \vec{d} = r \frac{1 - \lambda(\alpha + \beta + \gamma)}{1 - \lambda(\alpha + \beta)} \vec{d} = \frac{r(1 - \lambda)}{1 - \lambda(\alpha + \beta)} \vec{d}.$$

$$\text{Ugyanakkor} \quad \vec{d}_1 = \frac{\lambda \gamma}{1 - \lambda(\alpha + \beta)} \vec{d}, \quad \text{tehát} \quad \lambda \gamma = r(1 - \lambda) \Rightarrow r = \frac{\lambda \gamma}{1 - \lambda}.$$

$$\text{Következésképpen} \quad \vec{d}_2 = \frac{\lambda \gamma}{1 - \lambda} (-\alpha \vec{b} - \beta \vec{c} + (1 - \gamma) \vec{d}).$$

$$\text{Hasonlóan} \quad \vec{b}_2 = \frac{\lambda \alpha}{1 - \lambda} ((1 - \alpha) \vec{b} - \beta \vec{c} - \gamma \vec{d}) \quad \text{és}$$

$$\vec{c}_2 = \frac{\lambda \beta}{1 - \lambda} (-\alpha \vec{b} + (1 - \beta) \vec{c} - \gamma \vec{d}).$$

A fentiekből következik, hogy $\vec{b}_2 + \vec{c}_2 + \vec{d}_2 = \vec{0}$, tehát $\vec{AB}_2 + \vec{AC}_2 + \vec{AD}_2 = \vec{0}$, és innen következik, hogy A a $B_2 C_2 D_2$ háromszög súlypontja.

Megjegyzések

1. A tulajdonság n dimenziós térben is igaz, ezt szintén András Szilárd közölte a *Nieuw Archief voor Wiskunde* (NAvW) folyóiratban.
2. Akárcsak a síkbeli változat esetén itt is igaz a tulajdonság az A_0 pont helyzetétől függetlenül, tehát A_0 nem kell a BCD lapon legyen, elégséges, ha a (BCD) síkban van.
3. A síkbeli tulajdonság alkalmazásainak analogonjait is megszerkeszthetjük. Így sok érdekes tulajdonsághoz jutunk (lásd például a 49. javasolt feladatot)

5.4. Osztópontok és térfogatok

Induljunk ki a következő síkgeometriai feladatból:

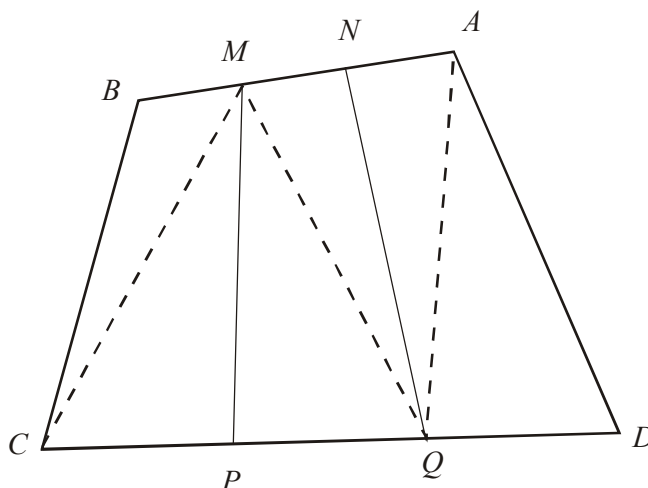
Feladat. Egy konvex négyszög két szemben fekvő oldalát osszuk fel n egyenlő részre, majd a megfelelő osztópontokat kössük össze (lásd a mellékelt ábrát). Bizonyítsd be, hogy az így kapott n diszjunkt belsővel rendelkező négyszög területe számtani haladványban van!

Megoldás. A feladatot elégséges $n=3$ -ra megoldani, hisz egy sorozat pontosan akkor számtani haladvány, ha bármely három egymás utáni tag számtani haladványban van. A mellékelt ábra jelölései szerint

$$T[BMC] = \frac{1}{3}T[ABC] \text{ és } T[AQD] = \frac{1}{3}T[ACD], \text{ tehát}$$

$$T[BMC] + T[AQD] = \frac{1}{3}(T[ABC] + T[ACD]) = \frac{1}{3}T[ABCD].$$

Ebből következik, hogy $T[AMCQ] = \frac{2}{3}T[ABCD]$. (1).



Másrészt $T[MPQ] = T[MCP]$ és $T[AQN] = T[MNQ]$, tehát

$$\begin{aligned} T[MCQA] &= T[MNPQ] + T[MPC] + T[ANQ] = \\ &= T[MNPQ] + T[MPQ] + T[MNQ] = 2T[MNPQ] \end{aligned} \quad (2).$$

Az (1) és (2) alapján $T[MNPQ] = \frac{1}{3}T[ABCD]$, tehát

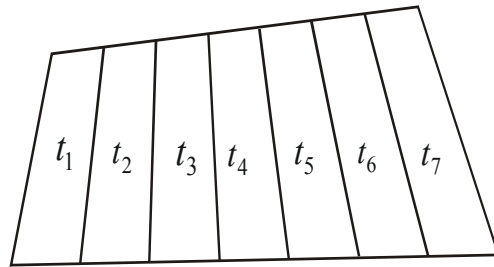
$$T[BMPC] + T[ANQD] = \frac{2}{3}T[ABCD]$$

és így

$$T[MNPQ] = \frac{T[BMPC] + T[ANQD]}{2}.$$

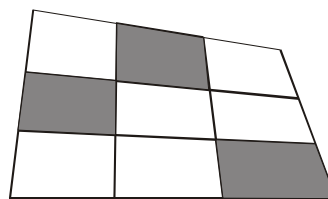
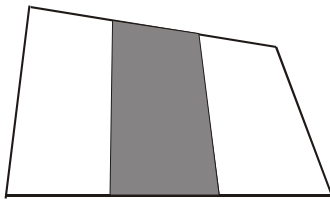
A jobb megértés céljából $n = 7$ -re is elvégezzük a bizonyítást (ugyanígy bármely n -re elvégezhető).

A bizonyított tulajdonság alapján $t_2 = \frac{t_1 + t_3}{2}$, $t_3 = \frac{t_2 + t_4}{2}$, $t_4 = \frac{t_3 + t_5}{2}$, $t_5 = \frac{t_4 + t_6}{2}$, és $t_6 = \frac{t_5 + t_7}{2}$, tehát a $(t_k)_{k=1,7}$ számok számtani haladványban vannak.

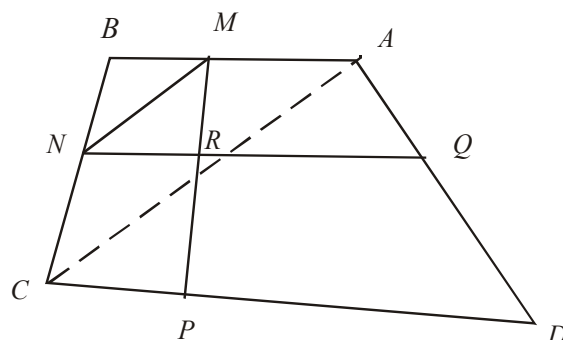


Ennek a tulajdonságnak egy alkalmazása a következő feladat:

Feladat. Egy konvex négyszög minden oldalát osszuk fel n egyenlő részre, majd a szemben fekvő oldalak megfelelő osztópontjait kössük össze (lásd a mellékelt ábrát). Az így keletkezett n^2 négyszög közül válassz n darabot úgy, hogy a kiválasztott négyszögek közt ne legyen kettő, amely ugyanahhoz a „sávhoz” tartozik („sáv”-nak nevezzük a 34-es feladatbeli négyszögeket; mivel mind a négy oldalt felosztottuk összesen $2n$ darab sáv van; a mellékelt ábrán beszíneztünk egy sávot és egy lehetséges választásnak megfelelő három négyszöget). Bizonyítsuk be, hogy a kiválasztott négyszögek területének összege az eredeti négyszög területének az n -ed része! (Kömal)



Megoldás. Előbb megvizsgáljuk, hogy a belső metszéspontok milyen



arányban osztják a megfelelő szakaszokat.

A mellékelt ábrán $\frac{BM}{AB} = \frac{CP}{CD} = k$ és $\frac{BN}{BC} = \frac{AQ}{AD} = l$.

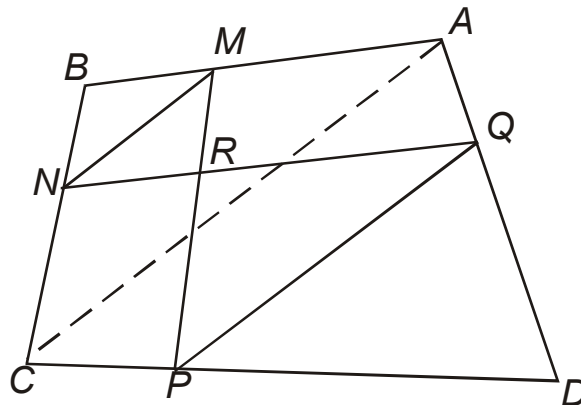
Ha $k = l$, akkor $MN \parallel AC$ és $\frac{MN}{AC} = k$, valamint $PQ \parallel AC$ és $\frac{PQ}{AC} = 1 - k$,

tehát $MN \parallel PQ$ és $\frac{MN}{PQ} = \frac{k}{1-k}$. Ebből következik, hogy $\frac{MR}{MP} = \frac{NR}{NQ} = k$.

Ha $k \neq l$, akkor jelöljük X_1 -el és X_2 -vel az $MN \cap AC$ és $PQ \cap AC$ metszéspontokat (lásd az I.7. ábrát). Az ABC háromszögben az MX_1

szelőre a Ceva tétel alapján $\frac{X_1A}{X_1C} = \frac{1-k}{k} \cdot \frac{l}{1-l}$.

Az ACD háromszögben a PQX_2 szelőre $\frac{X_2A}{X_2C} = \frac{1-k}{k} \cdot \frac{l}{1-l}$, tehát a két



metszéspont egybeesik. Jelöljük a továbbiakban X -el ezt a két metszéspontot.

Az MPX háromszögben az NRQ szelőre alkalmazott Menelaosz tétel értelmében $\frac{MN}{NX} \cdot \frac{XQ}{QP} \cdot \frac{PR}{RM} = 1$. A PQD háromszögben az XAC szelőre

ismét Menelaosz tételét írjuk fel: $\frac{CP}{CD} \cdot \frac{DA}{AQ} \cdot \frac{QX}{XP} = 1$, tehát

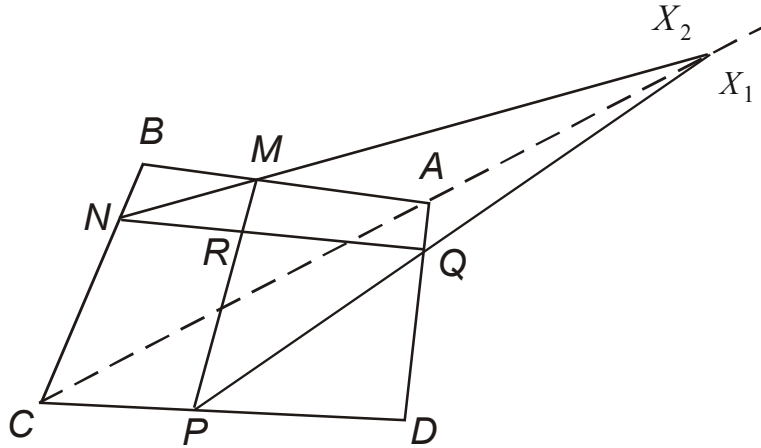
$\frac{QX}{XP} = \frac{AQ}{AD} \cdot \frac{CD}{CP} = \frac{l}{k}$ és így $\frac{QX}{QP} = \frac{l}{k-l}$. Másrészt $\frac{NX}{MX} \cdot \frac{MA}{AB} \cdot \frac{BC}{CN} = 1$, tehát

$\frac{NX}{MX} = \frac{1-l}{1-k}$ és így $\frac{MN}{NX} = \frac{k-l}{1-k}$. Ebből következik, hogy $\frac{MR}{RP} = \frac{l}{1-l}$.

Hasonlóan igazolható, hogy $\frac{NR}{RQ} = \frac{k}{1-k}$, tehát

$$\frac{NR}{NQ} = \frac{BM}{AB} = \frac{CP}{CD} \text{ és } \frac{MR}{MP} = \frac{BN}{BC} = \frac{AQ}{AD}.$$

Eszerint a megfelelő osztópontokat összekötő szakaszokon keletkező metszéspontok az illető szakaszt n egyenlő részre osztják(*). Az AB és



CD oldalak megfelelő metszéspontjai által meghatározott sávokat nevezzük függőlegesnek, míg a BC és AD osztópontjai által meghatározott sávokat vízszintesnek. Ha t_{ij} -vel jelöljük az i -edik vízszintes és j -edik függőleges sáv közös részének területét, akkor a paragrafus első feladata és (*) alapján $(t_{ij})_{j=1,n}$ és $(t_{ij})_{i=1,n}$ számtani haladványok. A továbbiakban igazoljuk, hogy a $(t_{ij})_{j=1,n}$ haladványok állandó különbsége ugyanaz a szám minden $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén.

Vizsgáljuk előbb $n = 3$ esetén.

$$T[BMN] = \frac{1}{9}T[ABC] \text{ és } T[PDQ] = \frac{1}{9}T[ABC], \text{ tehát}$$

$$T[BMN] + T[PDQ] = \frac{1}{9}T[ABCD].$$

Továbbá $T[MNU] = T[UTR]$ és $T[TRS] = T[SQP]$, tehát

$$T[MUN] + T[SQP] + T[RSTU] = 2T[RSTU].$$

$$\text{Másképp } T[RSTU] = \frac{1}{3}T[MXPY] = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}T[ABCD]\right) = \frac{1}{9}T[ABCD],$$

tehát

$$\begin{aligned} T[BMUN] + T[UTRS] + T[SQPD] &= \\ &= 2 \cdot \frac{1}{9}T[ABCD] + \frac{1}{9}T[ABCD] = \frac{1}{3}T[ABCD]. \end{aligned}$$

Egy egyszerű következmény az is, hogy páratlan n esetén a középső tartomány területe a teljes terület $\frac{1}{n^2}$ -ed része.

A paragrafus további részében ennek a tulajdonságnak egy térbeli analogonját fogalmazzuk meg és bizonyítjuk be. Ez a tulajdonság világosan mutatja, hogy itt a tetraéder a négyszög analogonja és nem a háromszögnek. Az előbbi tulajdonságokból adódó további analóg tulajdonságok felfedezését és igazolását nem végezzük el, mert nagyon megnövelné a dolgozat terjedelmét.

Tétel. (Simon József) Egy $ABCD$ tetraéder AB , BC , CD és DA éleit osszuk fel $n = 2k + 1$ egyenlő részre, ahol $k \in \mathbb{N}^*$. Legyen A_k és A_{k+1} , B_k és B_{k+1} , C_k és C_{k+1} valamint D_k és D_{k+1} a k -adik és $k + 1$ -edik osztópont az előbbi éleken az adott sorrendben. Ha tekintjük az $a = A_k C_{k+1}$, $b = A_{k+1} C_k$, $c = B_k D_{k+1}$ és $d = B_{k+1} D_k$ egyeneseket, akkor érvényesek a következő tulajdonságok:

1. az (a, c) , (a, d) , (b, c) és (b, d) egyenespárok metsző egyenesek és négy olyan síkot határoznak meg, amelyek egy tetraédert zárnak közre;
2. az előbbi tetraéder és az eredeti tetraéder térfogatának aránya $\frac{1}{n^4}$.

Bizonyítás. 1) Első lépésben igazoljuk, hogy $A_k D_{k+1} \parallel B_k C_{k+1}$. Ebből következik, hogy az a és c egyenesek egy síkban vannak, tehát létezik az $\{M\} = a \cap c$ pont.

Az ABD háromszögben

$$\frac{AA_k}{AB} = \frac{AD_{k+1}}{AD} = \frac{k}{2k+1}, \text{ tehát } A_k D_{k+1} \parallel BD.$$

A BCD háromszögben

$$\frac{CB_k}{CB} = \frac{CC_{k+1}}{CD} = \frac{k+1}{2k+1}, \text{ tehát } B_k C_{k+1} \parallel BD.$$

Az előbbi két összefüggés alapján $A_k D_{k+1} \parallel B_k C_{k+1}$. Hasonlóan $a \cap d = \{Q\}$, $b \cap c = \{N\}$ és $b \cap d = \{P\}$, tehát az egyenespárok metsző egyenesek és az $MNPQ$ tetraédert zárják közre.

2) A bizonyítás több lépésből áll. Előbb igazoljuk, hogy $MA_k = kMQ$, $NB_k = kMN$, $PC_k = kNP$ és $QD_k = kPQ$, majd az 1. és 2. segédtételek segítségével kiszámítjuk az $MNPQ$ és $A_k B_k C_k D_k$ illetve az $A_k B_k C_k D_k$ és $ABCD$ tetraéderek térfogatának arányát.

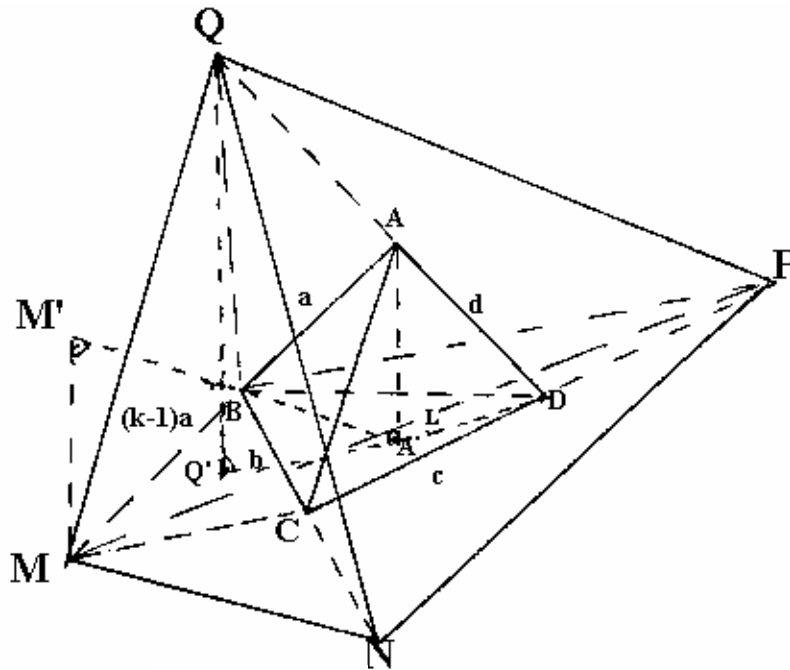
1. Segédteétel. (Simon József) Ha $ABCD$ tetraéder AB , BC , CD és DA éleit meghosszabbítjuk az $MA = k \cdot AB$, $NB = k \cdot BC$, $PC = k \cdot CD$ és $QD = k \cdot DA$ szakaszokkal, akkor

$$\frac{V[MNPQ]}{V[ABCD]} = k^4 - (k-1)^4.$$

Bizonyítás. Az $MNPQ$ tetraédert felbontjuk a $QBNP$, $MBNP$, $BMNQ$ és $BMPQ$ tetraéderekre, majd ezeknek a térfogatait összehasonlítjuk az $ABCD$ tetraéder térfogatával.

$$T[BNP] = k \cdot T[BCP] = k^2 \cdot T[BCD].$$

$$\frac{QQ'}{AA'} = \frac{QD}{AD} = k \Rightarrow \frac{V[QBNP]}{V[ABCD]} = \frac{T[BNP] \cdot QQ' \cdot \frac{1}{3}}{T[BCP] \cdot AA' \cdot \frac{1}{3}} = k \cdot k^2 = k^3$$



Hasonlóan

$$\frac{V[MBNP]}{V[ABCD]} = \frac{T[BNP]}{T[BCD]} \cdot \frac{MM'}{AA'} = k^2 \cdot \frac{MB}{AB} = \underline{k^2(k-1)}$$

$$\begin{aligned}\frac{V[BMNQ]}{V[ABCD]} &= \frac{T[BMN]}{T[ABC]} \cdot \frac{d[Q,(ABC)]}{d[D,(ABC)]} = \frac{k \cdot T[BMC]}{T[ABC]} \cdot \frac{QA}{DA} = \\ &= \frac{k \cdot (k-1) \cdot T[ABC]}{T[ABC]} \cdot (k-1) = k \cdot (k-1)^2 \\ \frac{V[BMPQ]}{V[ABCD]} &= \frac{T[QBM]}{T[ABD]} \cdot \frac{d[P,(ABD)]}{d[C,(ABD)]} = \frac{(k-1) \cdot T[QAB]}{T[ABD]} \cdot \frac{PD}{CD} = \\ &= \frac{(k-1)^2 \cdot T[ABD]}{T[ABD]} \cdot (k-1) = \underline{(k-1)^3}.\end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned}\frac{V[MNPQ]}{V[ABCD]} &= \frac{V[QBNP]}{V[ABCD]} + \frac{V[MBNP]}{V[ABCD]} + \frac{V[MNBQ]}{V[ABCD]} + \frac{V[BMPQ]}{V[ABCD]} = \\ &= k^3 + k^2(k-1) + k(k-1)^2 + (k-1)^3 = \\ &= k^4 - (k-1)^2(k^2 - 2k + 1) = k^4 - (k-1)^4\end{aligned}$$

2. Segédteétel. Ha egy $ABCD$ tetraéder (AB) , (BC) , (CD) és (DA) élein felvesszük fel az M , N , P és Q pontokat úgy, hogy fennálljanak az $\frac{AM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{CP}{CD} = \frac{DQ}{DA} = k$ egyenlőségek, $k \in (0,1)$, akkor

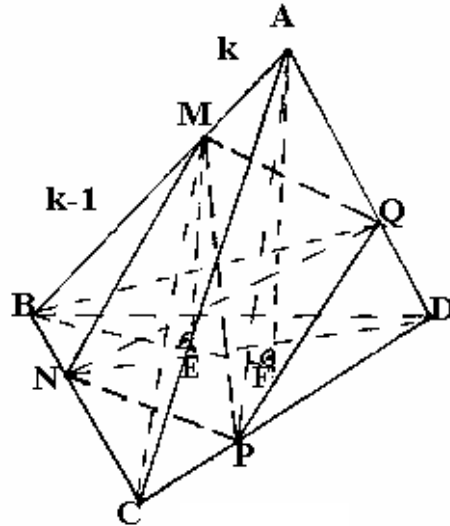
$$\frac{V[MNPQ]}{V[ABCD]} = \left| k^4 - (k-1)^4 \right|.$$

Bizonyítás. Legyen $k \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$. Az $ABCD$ tetraédert 7 tetraéderre bontjuk

fel, amelyek közül az egyik éppen az $MNPQ$ tetraéder, a többi pedig az $MNCP$, $PMAQ$, $NPDQ$, $QMBN$ valamint az $AMCP$ és $BNDQ$ tetraéderek.

A $\frac{V[MNPQ]}{V[ABCD]}$ arányt úgy kapjuk meg, hogy kiszámítjuk az utóbbi 6 tetraéder és az $ABCD$ tetraéder térfogatának arányát, majd ezek összegét kivonjuk 1-ből.

$$\begin{aligned}\frac{AM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{CP}{CD} = \frac{DQ}{DA} = k \Rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{CN}{BC} = \frac{DP}{CD} = \frac{AQ}{DA} = 1-k. \\ \frac{V[MNCP]}{V[ABCD]} = \frac{T[NCP] \cdot ME \cdot \frac{1}{3}}{T[BCD] \cdot AF \cdot \frac{1}{3}} = \frac{CN \cdot CP \cdot ME}{BC \cdot CD \cdot AF} = (1-k) \cdot k \cdot \frac{BM}{BA} = k(1-k)^2.\end{aligned}$$



A $\frac{V[MNPQ]}{V[ABCD]}$ arányt úgy kapjuk meg, hogy kiszámítjuk az utóbbi 6 tetraéder és az $ABCD$ tetraéder térfogatának arányát, majd ezek összegét kivonjuk 1-ből.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{CP}{CD} = \frac{DQ}{DA} = k \Rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{CN}{BC} = \frac{DP}{CD} = \frac{AQ}{DA} = 1 - k.$$

$$\frac{V[MNCP]}{V[ABCD]} = \frac{T[NCP] \cdot ME \cdot \frac{1}{3}}{T[BCD] \cdot AF \cdot \frac{1}{3}} = \frac{CN \cdot CP \cdot ME}{BC \cdot CD \cdot AF} = (1-k) \cdot k \cdot \frac{BM}{BA} = k(1-k)^2.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy $\frac{V[PMAQ]}{V[ABCD]} = \frac{V[NPDQ]}{V[ABCD]} = \frac{V[QMBN]}{V[ABCD]} = k \cdot (1-k)^2$.

$$\frac{V[AMCP]}{V[ABCD]} = \frac{T[ACP] \cdot d[M, (ACD)] \cdot \frac{1}{3}}{T[ACD] \cdot d[B, (ACD)] \cdot \frac{1}{3}} = \frac{CP}{CD} \cdot \frac{AM}{AB} = k^2, \quad \frac{V[BNDQ]}{V[ABCD]} = k^2.$$

$$\begin{aligned} \frac{V[MNPQ]}{V[ABCD]} &= 1 - 4k \cdot (1-k)^2 - 2k^2 = (k^4 - 2k^2 + 1) - 4k(k-1)^2 - k^4 = \\ &= (k^2 - 1)^2 - 4k(k-1)^2 - k^4 = \\ &= (k-1)^2 [(k+1)^2 - 4k] - k^4 = (k-1)^4 - k^4. \end{aligned}$$

$k = \frac{1}{2}$ -re az arány értéke 0, mert az M, N, P és Q koplanáris pontok. Ha

$k \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, akkor az ábra átalakul, az MP helyett az NQ lesz a látható él,

a számítások szempontjából a k és $(1-k)$ mindenütt helyet cserél. Így

$$\frac{V[MNPQ]}{V[ABCD]} = 1 - 4(1-k)k^4 - 2(1-k)^2 = k^4 - k^4 + 1 - 4(1-k)k^2 - 2(1-k)^2 =$$

$$= k^4 + (1-k^2)(1+k^2) - 4(1-k)k^2 - 2(1-k)^2 =$$

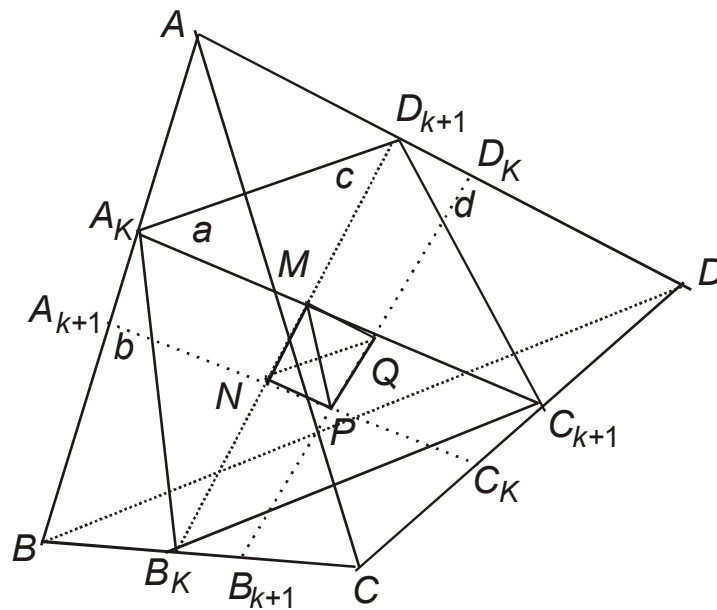
$$= k^4 + (1-k)(1+k^2+k+k^3-4k^2) - 2(1-k)^2 =$$

$$= k^4 + (1-k)(1-3k^2+k+k^3-2+2k) =$$

$$= k^4 + (1-k)(k^3-3k^2+3k-1)$$

Ez alapján írhatjuk, hogy $\frac{V[MNPQ]}{V[ABCD]} = k^4 - (k-1)^4$, tehát

$$\frac{V[MNPQ]}{V[ABCD]} = |k^4 - (k-1)^4|.$$



Az a) alpont igazolásánál használt egyenlőségek alapján $\frac{A_k D_{k+1}}{B_k C_{k+1}} = \frac{k}{k+1}$.

$A_k D_{k+1} \parallel B_k C_{k+1}$, tehát az $A_k M D_{k+1}$ háromszög hasonló a $B_k M C_{k+1}$

háromszöghöz és így $\frac{A_k M}{M C_{k+1}} = \frac{k}{k+1}$. Ez alapján

$$\frac{A_k M}{A_k C_{k+1}} = \frac{k}{2k+1}. \quad (*)$$

Hasonlóan a DAC háromszögben $D_k C_{k+1} \parallel AC$, a BAC háromszögben $A_k B_{k+1} \parallel AC$, tehát $D_k C_{k+1} \parallel A_k B_{k+1}$. Ebből következik, hogy az $C_{k+1} Q D_k$ háromszög hasonló az $A_k Q B_{k+1}$ háromszöghöz és így

$$\frac{C_{k+1} Q}{A_k C_{k+1}} = \frac{k}{2k+1}. \quad (**)$$

A (*) és (**) alapján $\frac{MQ}{A_k C_{k+1}} = \frac{1}{2k+1}$, tehát $MA_k = k \cdot MQ$. Hasonlóan igazolható, hogy $NB_k = k \cdot MN$, $PC_k = k \cdot NP$ és $QD_k = k \cdot PQ$. Az 1. segédtétel alapján

$$\frac{V[MNPQ]}{V[A_k B_k C_k D_k]} = \frac{1}{(2k+1)(2k^2+2k+1)}.$$

A 2. segédtétel alapján

$$\frac{V[A_k B_k C_k D_k]}{V[ABCD]} = \frac{k^2 + (k+1)^2}{(2k+1)^3},$$

tehát írhatjuk, hogy

$$\frac{V[MNPQ]}{V[ABCD]} = \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{1}{n^4}.$$

5.5. Talpponti alakzatok súlypontja

Jelöljük P_1, P_2 és P_3 -mal az $A_1A_2A_3$ egyenlő oldalú háromszög belső P pontjának a vetületét az A_2A_3 , A_3A_1 és A_1A_2 oldalakra. V. Prasolov a Kvant folyóiratban (M805) a következő tulajdonság bizonyítását tűzte ki:

A $P_1P_2P_3$ háromszög súlypontja az OP szakasz felezőpontja, ahol O az $A_1A_2A_3$ háromszög középpontja.

Ebből kiindulva kiterjesztjük a tulajdonságot sokszögekre és szabályos szimplexekre.

Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy az $A_1A_2A_3$ háromszög köré írható kör sugara 1. A koordinátatengelyeket úgy választjuk meg, hogy O legyen az origó és az OA_1 egyenes az Ox tengely. Így az A_1 , A_2 és A_3 csúcsok affixumai² $a_1 = 1$, $a_2 = \varepsilon$ és $a_3 = \varepsilon^2$, ahol $\varepsilon^3 = 1$ és $\varepsilon \neq 1$. Feltételezéseink alapján p_1 azonnal kiszámítható, mert a valós része $-\frac{1}{2}$ és az imaginárius része ugyanaz, mint a p

imaginárius része. Így $p_1 = -\frac{1}{2} + \frac{p - \bar{p}}{2}$. A p_2 kiszámításához forgassuk

el a háromszöget az óramutatók járásával megegyező irányban $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

szöggel (a háromszög csúcsai trigonometrikus irányban vannak számozva). Így a P_2 pont vetületét a $Q(\varepsilon^2 \cdot p)$ pontba transzformáljuk,

tehát $p_2 \cdot \varepsilon^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon^2 \cdot p - (\overline{\varepsilon^2 \cdot p})}{2}$. Ebből következik, hogy

$p_2 = -\frac{1}{2} \cdot \varepsilon + \frac{p - \varepsilon^2 \cdot \bar{p}}{2}$. Hasonló megfontolás alapján állíthatjuk, hogy

$p_3 = -\frac{1}{2} \cdot \varepsilon^2 + \frac{p - \varepsilon \cdot \bar{p}}{2}$. Ezekből az egyenlőségekből következik, hogy

$\frac{p_1 + p_2 + p_3}{3} = \frac{p}{2}$, tehát a $P_1P_2P_3$ háromszög súlypontja az OM szakasz

középpontja. A bizonyítás alapján megpróbálhatjuk igazolni a következő tulajdonságot:

Tétel. Ha $P_i (i = \overline{0, n-1})$ a P pont merőleges vetülete az $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}$ n oldalú szabályos sokszög $A_iA_{i+1} (i = \overline{0, n-1}, A_n = A_0)$,

² a továbbiakban minden pont affixumát a pontot jelölő betűnek megfelelő kisbetűvel jelöljük

akkor a $P_0P_1P_2\dots P_{n-1}$ sokszög súlypontja az OP szakasz felezőpontja, ahol O az $A_0A_1A_2\dots A_{n-1}$ középpontja.

Bizonyítás. Az előbbi bizonyításhoz hasonló gondolatmenetet alkalmazunk. Előbb vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor n páratlan. A sokszög csúcspontjainak affixuma $a_j = \varepsilon^j = \cos \frac{2j\pi}{n} + i \sin \frac{2j\pi}{n}$ $j = \overline{0, n-1}$.

Ha $n = 2k + 1$, akkor $A_k A_{k+1} \parallel Oy$, tehát $p_k = \cos \frac{2k\pi}{2k+1} + \frac{p - \bar{p}}{2}$.

Forgatásokat használva következik, hogy

$$p_j \cdot \varepsilon^{k-j} = \cos \frac{2k\pi}{2k+1} + \frac{p \cdot \varepsilon^{k-j} - (\overline{p \cdot \varepsilon^{k-j}})}{2} \text{ ha } j = \overline{0, k} \text{ és}$$

$$p_j \cdot \overline{\varepsilon^{j-k}} = \cos \frac{2k\pi}{2k+1} + \frac{p \cdot \overline{\varepsilon^{j-k}} - (\overline{p \cdot \varepsilon^{j-k}})}{2} \text{ ha } j = \overline{k+1, 2k}.$$

De $\bar{\varepsilon} = \varepsilon^{2k} = \varepsilon^{-1}$, tehát

$$p_j = \varepsilon^{k+j+1} \cos \frac{2k\pi}{2k+1} + \frac{p - \varepsilon^{2j+1} \cdot \bar{p}}{2} \text{ ha } j = \overline{0, k-1} \text{ és}$$

$$p_j = \varepsilon^{k+j+1} \cos \frac{2k\pi}{2k+1} + \frac{p - \varepsilon^{2(j-k)} \cdot \bar{p}}{2} \text{ ha } j = \overline{k+1, 2k}.$$

Másrészt $\sum_{v=0}^{n-1} \varepsilon^v = 0$, tehát $\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} p_j = \frac{p}{2}$ és ebből következik a tétel állítása.

Ha n páros ($n = 2k$), akkor a koordinátatengelyeket úgy választjuk meg, hogy a sokszögnek legyen két Oy -nal párhuzamos oldala. Így

$$a_j = z_0 \varepsilon^j = z_0 \left(\cos \frac{2j\pi}{n} + i \sin \frac{2j\pi}{n} \right), \quad j = \overline{0, n-1},$$

ahol $z_0 = \cos \frac{\pi}{2k} + i \sin \frac{\pi}{2k}$. Ebből következik, hogy

$$p_{k-1} = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2k} + \frac{p - \bar{p}}{2},$$

$$p_j \cdot \varepsilon^{k-j-1} = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2k} + \frac{p \cdot \varepsilon^{k-j-1} - (\overline{p \cdot \varepsilon^{k-j-1}})}{2}, \text{ ha } j = \overline{0, k-1} \text{ és}$$

$$p_{k+j} \cdot \overline{\varepsilon^{j+1}} = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2k} + \frac{p \cdot \overline{\varepsilon^{j+1}} - (\overline{p \cdot \varepsilon^{j+1}})}{2}, \text{ ha } j = \overline{k, 2k-1}.$$

Az előbbi egyenlőségek alapján $\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} p_j = \frac{p}{2}$, tehát a sokszög

súlypontja ismét az OP szakasz középpontja.

Megjegyzés. Ha $n = 2k$, akkor a $\frac{\rho_j + \rho_{j+k}}{2}$ komplex számoknak megfelelő pontok az $A_j A_{j+1}$ oldallal párhuzamos szimmetriatengelyen vannak. Tehát a tételben megfogalmazott tulajdonságot az $\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \rho_j = \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\rho_j + \rho_{j+k}}{2} = \frac{\rho}{2}$ egyenlőség alapján a következőképpen fogalmazhatjuk át:

A P pontnak a sokszög szimmetriatengelyeire eső vetületei által meghatározott sokszög súlypontja az OP szakasz felezőpontja.

Ez a tulajdonság úgy is felfogható, mintha egy 0 átmérőjű szabályos sokszögre alkalmaztuk volna a bizonyított tételt (az irányok megőrzésével). Az átfogalmazott tulajdonság igaz páratlan n esetén is. A bizonyítás az előbbi tétel bizonyításához hasonló, ezért nem részletezzük.

Tétel. (András Szilárd) Egy szabályos n oldalú sokszög belső P pontjának a sokszög szimmetriatengelyeire eső vetületei egy olyan sokszöget határoznak meg, amelynek a súlypontja az OP szakasz felezőpontja, ahol O az eredeti sokszög középpontja.

A térbeli általánosításhoz más eszközökre van szükségünk, mert a térgeometriában nem használhatjuk a komplex számokat. Előbb kijelentjük az általános tételt n dimenziós euklideszi térre, majd igazoljuk $n = 3$ esetén az analitikus geometria segítségével. A tétel általános bizonyítása a szabályos n szimplex forgáscsoportjának tulajdonságait használja, ezért ezt nem részletezzük.

Tétel. (András Szilárd) Ha G_k -val jelöljük egy tetszőleges P pontnak az $A_0 A_1 A_2 \dots A_{n-1}$ n dimenziós szimplex k dimenziós lapjaira eső vetületei által meghatározott test súlypontját, akkor $G_k \in OP$ és $\frac{OG_k}{OP} = \frac{k}{n}$, ahol $k \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$.

Ez alapján térben érvényes a következő tulajdonság:

Tétel. Ha $A_1 A_2 A_3 A_4$ egy szabályos tetraéder és $P_i (i = \overline{1,4})$ egy tetszőleges P pontnak a lapokra eső vetületei valamint $Q_i (i = \overline{1,6})$ az élekre eső vetületek, akkor

a) A $P_1P_2P_3P_4$ tetraéder G_2 súlypontja az OP szakaszon helyezkedik el és $\frac{OG_2}{OP} = \frac{2}{3}$;

b) A $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ pontrendszer G_1 súlypontja az OP szakaszon helyezkedik el és $\frac{OG_1}{OP} = \frac{1}{3}$.

Bizonyítás. A paragrafus első tétele alapján

$$\frac{\overline{OO_1} + \overline{OP_1}}{2} = \frac{\overline{OQ_4} + \overline{OQ_5} + \overline{OQ_6}}{3}, \quad \frac{\overline{OO_2} + \overline{OP_2}}{2} = \frac{\overline{OQ_4} + \overline{OQ_1} + \overline{OQ_2}}{3},$$

$$\frac{\overline{OO_3} + \overline{OP_3}}{2} = \frac{\overline{OQ_3} + \overline{OQ_5} + \overline{OQ_2}}{3} \quad \text{és} \quad \frac{\overline{OO_4} + \overline{OP_4}}{2} = \frac{\overline{OQ_1} + \overline{OQ_3} + \overline{OQ_6}}{3},$$

ahol $Q_1 \in A_1A_3, Q_2 \in A_1A_4, Q_3 \in A_1A_2, Q_4 \in A_4A_3, Q_5 \in A_2A_4, Q_6 \in A_2A_3$, és O_j az A_j csúccsal szembefekvő lap középpontja. Ezekből az

egyenlőségekből következik, hogy $\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^4 \overline{OP_i} = \frac{2}{3} \cdot \sum_{i=1}^6 \overline{OQ_i}$ (mert

$\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^4 \overline{OO_i} = 0$), tehát $\frac{1}{2} \cdot \overline{OG_2} = \overline{OG_1}$. Ez az összefüggés mutatja, hogy a tételbeli két tulajdonság egyenértékű, tehát elégséges az egyiket igazolni.

Tekintsük az $A_1\left(0,0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $A_2\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{6}}{6},0\right)$, $A_3\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{6}}{6},0\right)$ és

$A_4\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$ pontok által meghatározott szabályos tetraédert. Ebben a

tetraéderben a lapok egyenletei:

$$A_1A_2A_3: -2\sqrt{3}y + \sqrt{3}z - \sqrt{2} = 0,$$

$$A_1A_2A_4: 3\sqrt{2}x - \sqrt{6}y - \sqrt{3}z + \sqrt{2} = 0,$$

$$A_1A_3A_4: 3\sqrt{2}x + \sqrt{6}y + \sqrt{3}z - \sqrt{2} = 0 \quad \text{és}$$

$$A_3A_2A_4: z = 0.$$

Ugyanakkor az (x_0, y_0, z_0) pont $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ egyenletű síkra

eső vetületének az abszcisszája $x = x_0 - A \cdot \frac{A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$,

tehát ha x_j a P_j pont abszcisszája, akkor

$$x_1 = x_4 = x_0,$$

$$x_2 = x_0 - 3\sqrt{2} \cdot \frac{3\sqrt{2} \cdot x_0 + \sqrt{6} \cdot y_0 + \sqrt{3} \cdot z_0 - \sqrt{2}}{27} \text{ és}$$

$$x_3 = x_0 - 3\sqrt{2} \cdot \frac{3\sqrt{2} \cdot x_0 - \sqrt{6} \cdot y_0 - \sqrt{3} \cdot z_0 + \sqrt{2}}{27}.$$

Ezekből az egyenlőségekből következik, hogy $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{2x_0}{3}$.
Hasonló összefüggés vezethető le az y és z koordinátákra is, tehát G_2 az OP szakasz P -hez közelebb eső harmadolópontja.

VI. FEJEZET

Javasolt feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéderben a beírt gömb középpontja, a köré írt gömb középpontja és a súlypont közül kettő egybeesik, akkor mind a három egybeesik. (J. Rosenbaum, AMM 3671)
2. Szerkesszünk tetraédert ha ismerjük az éleinek felezőpontját. (N.A. Court, AMM, 3768)
3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéderben G a súlypont és a $GABC$ tetraéder G csúcsú síkszögei derékszögek, akkor igazak a következő állítások:
 - a) $2(AB^2 + AC^2) = BC^2 + AD^2$;
 - b) a DA , DB és DC élek egyenlők az ABC háromszög antikomplementárisának oldalfelezőjével ($A_2B_2C_2$ az ABC antikomplementárisa ha A_2B_2 átmegy a C -n és párhuzamos AB -vel) és a $DA_2B_2C_2$ tetraéder szembenfekvő élei egyenlők;
 - c) az $ABCD$ súlyvonalalaival szerkesztett paralelepipedon téglatest;
 - d) a $GABC$ köré írható gömb középpontja az $ABCD$ köré írható gömbön van;
 - e) az $AB^2 + BC^2 + CA^2$ összeg egyenlő az $ABCD$ köré írható gömb sugarának és a D csúcsból húzott magasságnak a szorzatával. (V. Thébault, AMM, 3699, 3759)
4. Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ tetraéderben a csúcsok hatványainak összege a GE átmérőjű gömbre nézve, ahol G a súlypont és E a Monge-féle pont egyenlő az élfelezők négyzetének összegével.
5. Bizonyítsuk be, hogy egy ortocentrikus tetraéderben a súlypont negyedeli az köréírt kör középpontja és az ortocentrum által meghatározott szakaszt. (V. Thébault, AMM, 3757)
6. Az O középpontú gömbön felvesszük az A_1, A_2, A_3, A_4 és A_5 pontokat. Jelöljük E_i -vel az $(A_j)_{\substack{j=\overline{1,5} \\ j \neq i}}$ pontok által meghatározott tetraéder Monge pontjait és M_i -vel az OE_i szakaszokat k arányba osztó pontokat ha $i = \overline{1,5}$. Bizonyítsuk be, hogy az A_iM_i egyenesek összefutóak. Általánosítás! (V. Thébault, AMM, 3846)
7. Határozzuk meg azokat a térbeli M pontokat, amelyeknek egy rögzített $ABCD$ tetraéder csúcsától való távolságainak összege minimális. (J. Rosenbaum, AMM, 3860)
8. Bizonyítsuk be, hogy minden tetraéderben létezik olyan síkmetszet, amely két egyenlő térfogatú és egyenlő oldalfelszínű testre bontja a tetraédert! (J. Rosenbaum, AMM, 3879)

9. Az $ABCD$ tetraéder M potra vonatkozó antipodális tetraéderének nevezzük az A, B, C és D pontokon át az MA, MB, MC és MD szakaszokra bocsájtott merőleges síkok által meghatározott tetraédert. Jelöljük az $ABCD$ tetraéder G szerinti antipodális tetraéderének térfogatát V_g -vel, a $GBCD$, $GACD$, $GABD$ és $GABC$ tetraéderek A, B, C és D pontok szerinti antipodális tetraédereinek térfogatát pedig rendre V_a , V_b , V_c és V_d -vel. Bizonyítsuk be, hogy

$$V_g = 4V_a = 4V_b = 4V_c = 4V_d.$$

(V. Thébault, AMM, 3934)

10. Határozzuk meg azon pontok mértani helyét, amelyeknek az élekre, mint átmérőkre szerkesztett gömbök szerinti (előjeles) hatványainak összege 0.

(V. Thébault, AMM, 3963)

11. Bizonyítsuk be, hogy egy tetraéder súlyvonalainak négyzetösszege az élek négyzetösszegének $\frac{4}{9}$ -e.

(J. Rosenbaum, AMM, E66)

12. Bizonyítsuk be, hogy minden tetraéderben létezik olyan csúcs, amelyben a síkszögek mind hegyesszögek.

(W. P. Udinski, AMM, E141)

13. Egy tetraéderben élfelező háromszögnek nevezzük azokat a háromszögeket, amelyeket egy él és a szembefekvő él felezőpontja határoz meg. Bizonyítsuk be, hogy az élfelező háromszögek területének összege nagyobb mint a tetraéder felülete és ennek $\frac{3}{2}$ -énél kisebb.

(Roy MacKay, AMM, E174)

14. Bizonyítsuk be, hogy egyenlő oldalú tetraéderben az élek négyzetének összege egyenlő a köréje írható gömb átmérőjének négyszeresével!

(J. Rosenbaum, AMM, E245)

15. Vetítsük egy rögzített α síkra egy tetraéder éleinek felezőpontjait. Bizonyítsuk be, hogy a vetületekből a megfelelő élekre bocsájtott merőleges síkok összefutóak.

(N. A. Court, AMM, E247)

16. Az $ABCD$ tetraéder M belső pontján át párhuzamos síkokat húzunk a tetraéder BCD , ACD , ABD és ABC lapjaival. Bizonyítsuk be, hogy ha ezek a síkok a tetraéder AG , BG , CG és DG súlyvonalait a P , Q , R és S pontokban metszik, akkor

$$\frac{GP}{GA} + \frac{GQ}{GB} + \frac{GR}{GC} + \frac{GS}{GD} = 0,$$

ahol irányított szakaszokat tekintünk.

(N. A. Court, AMM, E252)

17. Az ABC háromszögben az $S = a + b + c$ és $T = ab + bc + ca$ kifejezésekre igazak a $3T \leq S^2 < 4T$ egyenlőtlenségek. Írjuk fel ezek egy térbeli analogonját!

(F. E. Wood, AMM, E345)

18. Bizonyítsuk be, hogy egy rögzített gömb köré írható tetraéderek közül a szabályosnak a legkisebb az átmérője!

(J. Fickett, AMM, E2848)

19. Bizonyítsuk be, hogy egy tetraéder élfelezőinek négyzetösszege egyenlő az élek négyzetösszegének egy negyedével.
(G. Y. Sosnow, AMM, GE 522)
20. Bizonyítsuk be, hogy egy tetraéder szembefekvő éleinek összegei teljesítik a háromszög egyenlőtlenséget!
(M. S. Klamkin, AMM, S12)
21. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéderben a beírt gömb három lapot az illető lap ortocentrumában érint, akkor a tetraéder szabályos.
(Bulgár versenyfeladat, 1981)
22. Az $ABCD$ tetraéder C és D csúcsának a szembefekvő lapra eső vetülete az illető lap beírt körének középpontja és $AB = BD$. Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder szabályos.
(Bulgár versenyfeladat, 1984)
23. Az $ABCD$ tetraéderbe írható gömb középpontja az AB és CD felezőpontja által meghatározott szakaszon helyezkedik el. Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder köré írt gömb középpontja ugyanezen az egyenesen helyezkedik el.
(Bulgár versenyfeladat, 1985)
24. Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ ortocentrikus tetraéderben $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OH}$, ahol O a tetraéder köré írt gömb középpontja és H az ortocentruma.
(Kömal, F2385)
25. a) Az ABC háromszög BC , CA és AB oldalán vegyük fel az A_1 , B_1 és C_1 pontokat úgy, hogy az AA_1 , BB_1 és CC_1 egyenesek összefutóak legyenek. Bizonyítsuk be, hogy $T[A_1B_1C_1] \leq \frac{1}{4}T[ABC]$.
- b) Az $ABCD$ tetraéder BCD , CAD és ABC oldallapjain vegyük fel az A_1 , B_1 , C_1 és D_1 pontokat úgy, hogy az AA_1 , BB_1 , CC_1 és DD_1 egyenesek összefutóak legyenek. Bizonyítsuk be, hogy $V[A_1B_1C_1D_1] \leq \frac{1}{27}V[ABCD]$.
(R. P. Ushakov, Kvant M805)
26. Az $ABCD$ tetraéder B , C és D csúcsaiból merőlegeseket bocsátunk a szembefekvő lapok BCD síkon kívüli éleire. Bizonyítsuk be, hogy a vetületek által meghatározott szakaszok párhuzamos síkokban helyezkednek el.
(I. F. Sharygin, Kvant, M868)
27. Egy a és b oldalhosszúságú téglalapot az ABC háromszögbe írtuk (a téglalap minden csúcsa a háromszög oldalain van). Bizonyítsuk be, hogy ha a_1 és b_1 a háromszögnek a téglalap oldalával párhuzamos egyenesekre eső vetületének hossza, akkor $\frac{a}{a_1} + \frac{b}{b_1} = 1$. Fogalmazz meg és bizonyítsd be ennek a tulajdonságnak egy térbeli analogonját.
(V. N. Dubrovski, Kvant, M954)
28. Az $A_1A_2A_3A_4$ tetraéder A_i csúcsának a szembefekvő lap szerinti szimmetrikusát jelöljük B_i -vel. Igaz-e, hogy ha $B_1B_2B_3B_4$ szabályos, akkor $A_1A_2A_3A_4$ is szabályos?
(O. Bottema, NavW, 596)

29. Bizonyítsuk be. hogy ha az $ABCD$ tetraéderbe írható gömb az oldallapokat azok súlypontjában érinti, akkor a tetraéder szabályos.

(Parabola, Q497)

30. Bizonyítsuk be. hogy ha P az $ABCD$ tetraéder egy tetszőleges belső pontja, akkor a $PBCD$, $PABC$, $PCDA$ és $PDAB$ tetraéderek súlypontjai által meghatározott tetraéder térfogata az $ABCD$ térfogatának $1/64$ -ed része.

(Lengyel versenyfeladat, 1985)

31. Bizonyítsuk be. hogy ha M az $ABCD$ tetraéder egy tetszőleges belső pontja és az M -en át a DA , DB és DC szakaszokkal húzott párhuzamos egyenesek a DBC , DCA és DAB síkokat rendre a P , Q és R pontban metszik, akkor

$$\frac{MP}{DA} + \frac{MQ}{DB} + \frac{MR}{DC} = 1.$$

(M. H. Preyedye)

32. Az $ABCD$ tetraéder köré írt gömböt az AM , BM , CM és DM egyenesek másodszor az A_1 , B_1 , C_1 és D_1 pontokban metszik (M az $ABCD$ tetraéder tetszőleges belső pontja). Határozd meg azon M pontok mértani helyét, amelyekre

$$\frac{AM}{MA_1} + \frac{BM}{MB_1} + \frac{CM}{MC_1} + \frac{DM}{MD_1} = 4.$$

(Z. A. Skopets)

33. Rögzített $ABCD$ tetraéder esetén határozd meg azt az M pontot, amelyre az $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ összeg minimális.

34. Az $ABCD$ tetraéder minden élén vegyünk fel egy-egy pontot. Bizonyítsuk be. hogy ha minden csúcs esetén megszerkesztjük az adott csúcs és a belőle kiinduló éleken felvett pontok által meghatározott tetraéder köré írt gömböt, akkor a négy gömbnek van egy közös pontja.

(A. Gordon)

35. Jelöljük O , R , I és r -el egy tetszőleges n -szimplex köré írható n -dimenziós gömb középpontját és sugarát illetve a beléje írható gömb középpontját és sugarát. Bizonyítsuk be. hogy

$$R^2 \geq n^2 r^2 + OI^2.$$

(M.S. Klamkin, Siam 85-26)

36. Bizonyítsd be, hogy ha egy tetraéder hat lapszöge kongruens, akkor a tetraéder szabályos. Igaz-e a következmény, ha öt lapszög egybevágó?

(Amerikai versenyfeladat 1978)

37. Bizonyítsuk be. hogy egy szabályos tetraéderben az éleket érintő gömb sugara a beírt és a köréje írható gömb sugarának számtani középárányosa.

38. Határozd meg azt az M pontot, amelyre az $AM + BM + CM + DM$ összeg minimális, ha $ABCD$ szabályos tetraéder.

39. Az $ABCD$ tetraéderben O a tetraéder köré írt gömb középpontja. Az AO , BO , CO és DO félegyenesek a tetraéder lapjait másodszor az A_1 , B_1 , C_1 és D_1 pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1 \geq \frac{16}{3}R$$

(I.A. Kushnir)

40. Az M pont mozog az $ABCD$ szabályos tetraéder BCD lapján. Határozzuk meg az M pontnak az AB , AC és AD egyenesekre eső vetületei által meghatározott háromszög súlypontjának mértani helyét.

41. A $KLMN$ tetraéder az $ABCD$ tetraéderbe van írva és O egy rögzített pont a térben. Bizonyítsuk be, hogy ha az AP , BQ , CR és DS egyenesek rendre párhuzamosak az OK , OL , OM és ON egyenesekkel és P , Q , R illetve S a BCD , ACD , ABD , ABC lapon helyezkedik el, akkor

$$\frac{OK}{AP} + \frac{OL}{BQ} + \frac{OM}{CR} + \frac{ON}{DS} = 1.$$

(N. A. Court, AMM, E318)

42. Bizonyítsuk be, hogy ha M egy tetszőleges pont az $ABCD$ tetraéder belsejében, az AM , BM , CM egyenesek a BCD , ACD illetve ABD lapokat a P , Q és R pontokban metszi és a DM , DP , DQ és DR egyenesek a BCD lapot rendre az S , X , Y és Z pontokban metszik, akkor

$$\frac{DM}{MS} = \frac{1}{2} \left(\frac{DP}{PX} + \frac{DQ}{QY} + \frac{DR}{RZ} \right).$$

(N. A. Court, AMM, E394)

43. a) Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ tetraéderben

$$OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2}{16},$$

ahol O a tetraéder köré írt kör középpontja, G a súlypont és a , b , c , d , e illetve f a tetraéder éleinek hossza.

- b) Bizonyítsuk be, hogy ha a , b , c , d , e , f és a_1 , b_1 , c_1 , d_1 , e_1 , f_1 rendre az $ABCD$ és $A_1B_1C_1D_1$ tetraéder éleinek hossza, akkor

$$aa_1 + bb_1 + cc_1 + dd_1 + ee_1 + ff_1 \leq 16(R \cdot R_1 - OG \cdot OG_1),$$

ahol O , O_1 , G és G_1 rendre az $ABCD$ és $A_1B_1C_1D_1$ tetraéder köré írható gömb középpontja illetve súlypontja és R , R_1 a két gömb sugara.

(András Szilárd)

44. Az $A_1A_2A_3A_4$ tetraéderben G_i -vel jelöljük az A_i csúccsal szembefekvő lap súlypontját. Bizonyítsuk be, hogy ha $3MG_i \leq MA_i$, $i = \overline{1,4}$, akkor M az $ABCD$ tetraéder súlypontja.

Megjegyzések

1. A feladat egy változatát András Szilárd és Tuzson Zoltán javasolta az V. Nemzetközi Magyar Matematika Versenyen 1996-ban.

2. A tulajdonság szimplexekre is kiterjeszthető.

45. Egy $ABCD$ tetraéder (AB) , (BC) , (CD) és (DA) élein vegyük fel az M , N , P és Q pontokat úgy, hogy teljesüljenek az $\frac{AM}{AB} = k$, $\frac{BN}{BC} = l$, $\frac{CP}{CD} = m$, és $\frac{DQ}{DA} = n$ egyenlőségek. Igazoljuk, hogy

$$\frac{V[MNPQ]}{V[ABCD]} = |klmn - (k-1) \cdot (l-1) \cdot (m-1) \cdot (n-1)|.$$

(Simon József)

46. Egy $ABCD$ tetraéder AB , BC , CD és DA éleit meghosszabbítjuk az $MA = k \cdot AB$, $NB = l \cdot BC$, $PC = m \cdot CD$ és $QD = n \cdot DA$ szakaszokkal.

Igazoljuk, hogy $\frac{V[MNPQ]}{V[ABCD]} = klmn - (k-1)(l-1)(m-1)(n-1)$.

(Simon József)

47. Az $ABCD$ tetraéderben $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$, $Q \in (DA)$, G_1 az $ABCD$ súlypontja, G_2 az $MNPQ$ súlypontja és G_3 a CDM , ADN , ABP és BCQ síkok által közrezárt tetraéder súlypontja. Bizonyítsuk be, hogy a következő kijelentések egyenértékűek:

a) $G_1 = G_2$; b) $G_2 = G_3$; c) $G_3 = G_1$;

d) $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PD} = \frac{DQ}{QA}$.

(András Szilárd)

Megjegyzés. A feladat síkbeli analogonját András Szilárd és Deneş Carol javasolta a III. Wildt József versenyen.

48. Az $A_1A_2A_3A_4$ tetraéderben G_i -vel jelöljük az A_i csúccsal szembefekvő lap súlypontját és tetszőleges M belső pont esetén H_i -vel az A_iM szakasz M -hez közelebb eső harmadolópontját. Bizonyítsuk be, hogy a G_iH_i , $i = \overline{1,4}$ egyeneseknek van egy közös pontja és a G_i , H_i , $i = \overline{1,4}$ pontok pontosan akkor vannak egy gömb felületén, amikor M a tetraéder antientruma

(András Szilárd)

49. Az $ABCD$ tetraéderben M egy tetszőleges belső pont és A_1 , B_1 , C_1 illetve D_1 rendre a BCD , MCD , MBD és MBC síkoknak az AM , AB , AC és AD egyenesekkel való metszéspontjai. Bizonyítsuk be, hogy M pontosan akkor súlypontja az $A_1B_1C_1D_1$ tetraédernek, ha A_1 a BCD

háromszög súlypontja és $\frac{MA_1}{MA} = \frac{5}{3}$.

(VII. Wildt József Verseny, 1997., András Szilárd)

50. Az $ABCD$ tetraéderben $A' \in [DA]$, $B' \in [DB]$ és $C' \in [DC]$ tetszőleges pontok. A $P_c \in [AB]$, $P_a \in [BC]$, $P_b \in [AC]$, $P'_c \in [A'B']$, $P'_a \in [B'C']$ és $P'_b \in [A'C']$ pontokra teljesülnek a következő egyenlőségek:

$$\frac{P_c A}{P_c B} = \frac{P'_c A'}{P'_c B'} = \frac{AA'}{BB'}, \quad \frac{P_a B}{P_a C} = \frac{P'_a B'}{P'_a C'} = \frac{BB'}{CC'} \quad \text{és} \quad \frac{P_b C}{P_b A} = \frac{P'_b C'}{P'_b A'} = \frac{CC'}{AA'}.$$

Bizonyítsuk be, hogy

- az AP_a , BP_b és CP_c egyenesek összefutók (P -ben);
- az $A'P'_a$, $B'P'_b$ és $C'P'_c$ egyenesek összefutók (P' -ben);
- $\frac{PC}{PP_c} = \frac{P'C'}{P'P'_c}$;
- a PP' egyenes iránya független az A' , B' és C' pontok megválasztásától.

(Országos olimpia, 1998, Mihai Miculița)

Szakirodalom

1. András Szilárd, About the centroid of podar polygons, *Octogon*, 9(2001):2, 864-867
2. András Szilárd, Problemă propusă, *Gazeta Matematică*
3. Dan Brânzei, C. Cocea, S. Anița, Planul și spațiul euclidian, Akadémiai Kiadó, Bukarest, 1986
4. H.S.M. Coxeter, A geometriák alapjai, Műszaki Kiadó, Budapest, 1973
5. Caius Iacob, Matematică aplicată și mecanică, Akadémiai Kiadó, Bukarest, 1989
6. Fitos László, Analóg tételek és feladatok a sík és térgeometriában, Tankönyvkiadó, Budapest, 1984
7. M. Ganga, Teme și probleme de matematică, Technikai Kiadó, Bukarest, 1991
8. M. Golu, Principii de psihologie cibernetică, Ed. Șt. 1975
9. J. Hadamard, Lecții de geometrie elementară, I. kötet, Technikai Kiadó, Bukarest, 1960
10. Hársing László, Tudományos érvelés logikája, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1981
11. Nicholas D. Kazarinoff, Geometriai egyenlőtlenségek, Gondolat Kiadó, Budapest, 1980
12. Lénárd Ferenc, A problémamegoldó gondolkodás, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1978
13. Mihai Miculița, Introducere în geometria tetraedrului, Minied Kiadó, Iași, 1994
14. Liviu Nicolescu, Vladimir Boskoff, Probleme practice de geometrie, Technikai Kiadó, Bukarest, 1990
15. Pólya György, A plauzibilis következtetés, Gondolat Kiadó, Budapest, 1989
16. Pólya György, Indukció és analógia, Gondolat Kiadó, Budapest, 1989
17. Pólya György, A gondolkodás iskolája, Typotex Kiadó, Budapest, 1994
18. Reiman István, A geometria és határterületei, Gondolat Kiadó, Budapest, 1986
19. Sándor József, Geometriai egyenlőtlenségek, Antenna Kiadó, Kolozsvár, 1988
20. I.F. Sharygin, Problems in solid geometry, Mir Kiadó, Moszkva, 1986
21. Simon József, Tetraédert közrezáró metszősíkok, Matlap
22. Tuzson Zoltán, Analógiák a matematikában, I. fokozati dolgozat, 1992

- 23.** Kömal adatbázis
- 24.** Matlap 1995-1997
- 25.** Gazeta Matematică, (A és B) 1990-2000
- 26.** Mathpro Online adatbázis (AMM, Kvant, NAvW)