GYÖRFI JENŐ
ANDRÁS SZILÁRD

A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS ÉS A LINEÁRIS PROGRAMOZÁS. A JÁTÉKELMÉLET ALAPJAI

SAPIENTIA ERDÉLYI MAGYAR TUDOMÁNYEGYETEM
GAZDASÁG- ÉS HUMÁNTUDOMÁNYOK KAR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA TANSZÉK

A kiadvány megjelenését a Sapientia Alapítvány támogatta.

GYÖRFI JENŐ
ANDRÁS SZILÁRD

A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS ÉS A LINEÁRIS PROGRAMOZÁS. A JÁTÉKELMÉLET ALAPJAI

Scientia Kiadó
Kolozsvár·2007

Lektor:
dr. Balázs Márton (Kolozsvár)

Sorozatborító:
Miklósi Dénes

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
GYÖRFI JENŐ, ANDRÁS SZILÁRD
A valószínűségszámítás és a lineáris programozás. A játékelmélet alapjai /
Györfi Jenő, András Szilárd. – Cluj-Napoca: Scientia, 2007.
Bibliogr.
ISBN 978-973-7953-86-5

TARTALOM

Előszó 9

1. Bevezetés a valószínűségszámításba 11
1.1. Valószínűségszámítási alapfogalmak 11
1.2. Eseményalgebra, Boole-algebra 15
1.3. Teljes eseményrendszer 17
1.4. Események, valószínűség 18
1.4.1. Gyakoriság, relatív gyakoriság 18
1.4.2. A valószínűség matematikai fogalma 20
1.5. Kombinatorikus, klasszikus valószínűségszámítás 22
1.6. Visszatevés nélküli mintavétel 30
1.7. Visszatevéses mintavétel 31
1.8. Valószínűségi modellek 32
1.8.1. Poisson-féle modell 32
1.8.2. Bernoulli-féle modell 34
1.8.3. Maxwell–Boltzmann-modell 34

2. Feltételes valószínűség, események függetlensége 36
2.1. Feltételes valószínűség 36
2.2. A valószínűségek szorzási szabálya 38
2.3. Események függetlensége 40
2.4. A teljes valószínűség tétele. Bayes tétele 42

3. Diszkrét valószínűségi változók és jellemzőik 50
3.1. Diszkrét valószínűségi változók eloszlása 51
3.2. Diszkrét valószínűségi változók eloszlásfüggvénye 55
3.3. Műveletek diszkrét valószínűségi változókkal 57
3.4. Diszkrét valószínűségi változók várható értéke 58
3.4.1. A várható érték tulajdonságai 58

3.5. Diszkrét valószínűségi változó szórása, szórásnégyzete 59

4. Folytonos valószínűségi változók és jellemzőik 63
4.1. Az eloszlásfüggvény tulajdonságai 63
4.2. Folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye 64
4.3. Folytonos valószínűségi változó várható értéke, szórása és szórásnégyzete 65
4.4. Fontosabb folytonos eloszlások 68

5. Nagy számok törvénye 76
5.1. Markov-féle egyenlőtlenség 76
5.2. Csebisev-egyenlőtlenség 77
5.3. Nagy számok törvénye 79
5.4. Markov tétele 82
5.5. Bernoulli és Poisson tétele 83
5.6. A Kolmogorov-egyenlőtlenség 85
5.7. A nagy számok törvényének erős alakja 87
5.8. Glivenko–Cantelli tétele 91

6. Kétdimenziós diszkrét valószínűségi vektorok és jellemzőik 94
6.1. Diszkrét valószínűségi vektorváltozók eloszlása 94
6.2. Kétdimenziós valószínűségi vektor eloszlásfüggvénye 96
6.3. Kétdimenziós valószínűségi vektor peremeloszlása 97
6.4. Kétdimenziós valószínűségi vektorváltozó feltételes eloszlásai 98
6.5. Együttes eloszlás várható értéke 100
6.6. A peremeloszlások várható értéke 101
6.7. Feltételes eloszlások várható értéke 101
6.8. A kétdimenziós valószínűségi vektor komponenseinek függetlensége 102

7. Kétdimenziós folytonos valószínűségi vektorok és jellemzőik 106
7.1. Kétdimenziós folytonos valószínűségi vektorok 106

7.2. Sűrűségfüggvény 107
7.3. Feltételes eloszlás- és sűrűségfüggvény 110
7.4. Várható értékek 113
7.5. A peremeloszlások várható értéke 114
7.6. Feltételes eloszlások várható értéke 115

8. Kovariancia, korrelációs együttható és regresszióanalízis 117
8.1. A kovariancia (együttváltozás) 117
8.2. A korrelációs együttható 118
8.3. Regresszióanalízis 120

9. A lineáris algebra elemei 131
9.1. Vektorok, mátrixok, determinánsok 132
9.1.1. Műveletek vektorokkal 132
9.1.2. Mátrixok 134
9.1.3. Determinánsok 138
9.1.3.1. Determinánsok tulajdonságai 139
9.1.3.2. Mátrixok inverze 140
9.1.3.3. Az inverz mátrix tulajdonságai 140
9.2. Lineáris egyenletrendszerek 141
9.2.1. Gauss–Jordan-féle elemcsere-eljárás 143

10. Lineáris programozás geometriai megoldása 149
10.1. Alapfogalmak 149
10.2. A kétváltozós lineáris programozási feladat grafikus megoldása (Optimalizálás grafikus módszerrel) 152

11. Szimplex algoritmus és alkalmazása normál Lp feladatok megoldására 160

12. Optimális gazdálkodás változó erőforrások esetében. Duál feladat 173

13. A játékelmélet elemei 180
13.1. Játék, stratégia 180
13.2. Kétszemélyes nullaösszegű játékok 181
13.3. A minimax elv 183
13.4. Nyeregpontos játékok 183
13.5. Nyeregpont nélküli játékok $\mathbf{2}\times\mathbf{2}$-es mátrixjátékok esetében 186

14. Kétszemélyes nem konstans összegű játékok 193
14.1. Benzinkutasok problémája 193
14.2. Bimátrixjátékok kevert egyensúlypontjainak meghatározása 196

Szakirodalom 205

ELŐSZÓ

Egyetemi jegyzetünk ismeretanyagát a matematikai tudományok három nagy fejezetéből válogattuk ki az EMTE Csíkszeredai Karán tartott Matematika II. előadás tematikájának megfelelően.

*A valószínűségszámítás elemei*nek tárgyalását az indokolja, hogy ma már a valószínűségszámítás a gyakorlati élet különböző problémáinak megfigyelésében és megoldásában jelen van. A legtöbb gazdasági, sőt már társadalomtudományi tárgyú tanulmány valószínűségszámítási módszereket is fölhasznál egy vizsgált jelenség értelmezésére vagy előrejelzésére. A valószínűségszámításban tapasztalati és matematikai gondolatmenetek fonódnak össze.

A matematikának ez az ága a véletlen tömegjelenségekre vonatkozó törvényszerűségek megállapításával foglalkozik. Ezek a törvényszerűségek statisztikai jellegűek, vagyis átlagosan érvényes törvények, és nagy számban egyszerre végbemenő jelenségekre vagy többször megismételhető jelenségekre vonatkoznak.

A lineáris programozás elemei a matematikai programozás fontos részét képezik, amely a leggyakrabban alkalmazott módszer gazdasági folyamatok modellezésére. A lineáris programozás alapvetően a lineáris egyenletrendszerek elméletén alapszik, tehát a középiskolai ismeretekre építünk. A gazdasági folyamatok optimalizálásának egyes módszereit tanulmányozzuk.

A játékelmélet alapjainak megismerése jól hasznosítható konfliktushelyzetek matematikai modellezésében, optimális cselekvések, stratégiák meghatározásában. A játékelmélet azt vizsgálja, hogy különböző döntési helyzetekben, amelyekben az egyik résztvevő döntésére hatással van a másik résztvevő döntése, mi lehet az ésszerű viselkedés alapja. Megismerkedünk a játékelmélet alapfogalmaival, és tanulmányozunk néhány feldolgozott játékhelyzetet.

Az elméleti anyag megértését, a fogalmak közötti összefüggések megértését segítik a kidolgozott és magyarázatokkal ellátott példák és gyakorló feladatok.

A gyakorlati életre utaló példákat úgy lehet megoldani, hogy a példában szereplő adatokhoz meg kell keresni a megfelelő elméleti

ismereteket. Ez a jegyzet tartalmazza azokat az elméleti résznek tekintett összefüggéseket, amelyek a példák adataihoz kapcsolva elvezetnek a megoldáshoz.

Az elméleti ismeretek kiválasztásában és a példaanyag összeállítása során tanulmányoztuk a mi egyetemünk képzési irányaival összeegyeztethető hazai és külhoni felsőfokú intézmények híressé vált oktatási anyagait.

Szeretnénk köszönetet mondani a szaklektornak, dr. Balázs Márton ny. egyetemi professzornak hasznos tanácsaiért, a kézirat többszörös precíz kijavításáért, valamint mindazoknak, akik hozzájárultak a könyv megjelenéséhez.

A szerzők

1. FEJEZET

BEVEZETÉS A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSBA

A matematikatörténet a valószínűségelmélet első komoly elméleti eredményeit a XVII. századra teszi, amikor B. Pascal (1623–1662) és P. Fermat (1601–1665) a szerencsejátékok gyakorlatából adódó feladatokra matematikai módszert nyújtott, összefüggést teremtve a véletlen bizonytalanságai és a matematikai bizonyítások között. Nem sokkal később J. Bernoulli (1654–1705) utalt arra, hogy az új matematikai elmélet alapvető fontosságú a tömegjelenségek vizsgálatában. Egyik nevezetes tételében, az ún. „nagy számok törvényében" Bernoulli megállapítja a gyakoriság és valószínűség matematikai kapcsolatát nagyszámú kísérlet esetén.

Laplace (1741–1827) már alkalmazta a valószínűségszámítást a demográfiában, csillagászatban.

A modern valószínűségelmélet megteremtői a P. L. Csebisev (1821–1894) vezette szentpétervári iskola tagjai voltak. Az ide tartozó A. N. Kolmogorov (1903–1987) nevéhez fűződik a valószínűségszámítás axiomatikus elmélete, ami által a valószínűségszámítás a matematikai tudományok szerves része lett.

A valószínűségelméletnek egyre kiterjedtebb alkalmazása újabb tudományágak megjelenéséhez vezetett, mint például az információelmélet és a megbízhatósági elmélet.

A valószínűségszámítás módszerei ma már használatosak a műszaki tudományok, a temészettudományok, az orvostudományok, a közgazdaságtan különböző területein.

1.1. Valószínűségszámítási alapfogalmak

A valószínűségszámítás tárgya: olyan nagy számban előforduló vagy sokszor megismételhető, *véletlen kimenetelű kísérletek (folyamatok)*, amelyeknek lehetséges kimenetelei ismertek. A valószínűségszámítás a véletlen kimenetelű tömegjelenségeket tanulmányozza. A véletlen

kimenetelű kísérletek, folyamatok színtere lehet az egyszerű játékok világa (pénzfeldobás, kockadobás), a természet, a társadalom, a gazdasági élet stb.

Megjegyzés. A jelenségek megfigyelése előtt el kell dönteni, hogy mit tekintünk lehetséges kimenetelnek. A pénzérme feldobása esetében lehetséges kimenetelek a fej, illetve az írás megjelenése.

A valószínűségszámításban a kísérlet szót a szokásosnál általánosabb értelemben használjuk. Nemcsak egy jelenség mesterséges előállítását nevezzük kísérletnek, hanem bármely jelenség megfigyelését, függetlenül, hogy milyen okok hozzák létre.

1.1. értelmezések.

1. Kísérlet. A *kísérlet* olyan jelenség létrehozása vagy megfigyelése, amely sokszor megismételhető (megismétlődik) azonos feltételek között.

Példa. A pénzérme feldobása, kockadobás, golyó kihúzása egy urnából stb.

2. Elemi esemény. A kísérlet során csak egyféleképpen megvalósulható kimeneteleket *elemi eseményeknek* tekintjük. Az elemi események halmazát E-vel és az elemi eseményeket általában $E_1, E_2, \ldots$ szimbólumokkal jelöljük.

Példák.

1. A pénzérme feldobása esetén $E = \{\text{fej}, \text{írás}\}$, vagy írhatjuk, hogy $E = \{0, 1\}$, ha a fej megjelenését a 0-nak, az írás megjelenését az 1-nek feleltetjük meg, vagy fordítva.

2. Kockadobás esetén, amely nyilvánvalóan akárhányszor *megismételhető,* az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ kimenetelek alkotják az *elemi eseményeket,* tehát írhatjuk, hogy $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Természetesen ez már az eredmények absztrakt kezelését jelenti, mert választhatnánk akármilyen hatelemű halmazt is E-nek, például az

$$E = \{\boxdot, \boxdot, \boxdot, \boxdot, \boxdot, \boxdot\}$$

halmaz is megfelelne.

Megjegyzés. Általában nehéz eldönteni, hogy mit nevezünk elemi eseménynek.

3. Esemény. Az elemi események halmazának bármely részhalmazát *eseménynek* nevezzük, így az események halmaza a $P(E)$ halmaz (az E összes részhalmazának halmaza). Az események jelölésére az ábécé nagybetűit használjuk. A $P(E)$ halmazt eseménytérnek nevezzük.

Példák.

1. Kockadobáskor az elemi események halmazának $2^6 = 64$ részhalmaza van:

$$P(E) = \{\{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots, \{1,2,3\}, \ldots, \{1,2,3,4,5,6\}\}.$$

Az elemi események $E_1 = \{1\}$, $E_2 = \{2\}$, $E_3 = \{3\}$, $E_4 = \{4\}$, $E_5 = \{5\}$ és $E_6 = \{6\}$. A páratlan szám megjelenésének megfelelő esemény az $A = \{1,3,5\}$, és a páros szám megjelenésének megfelelő esemény a $B = \{2,4,6\}$. Ezeket természetesen jelölhettük volna az

$$A = \{\boxdot, \boxdot, \boxdot\}, \quad \text{illetve a} \quad B = \{\boxdot, \boxdot, \boxdot\}$$

halmazokkal, ha az eseményeket is így jelöljük.

Megjegyzés. Ha az elemi események halmazának számossága n, akkor az események halmazának számossága 2^n, vagyis ha $|E| = n$, akkor $|P(E)| = 2^n$.

3.1. Események osztályozása

1.2. értelmezések.

a) Azt az eseményt, amely minden kísérletnél bekövetkezik, *biztos eseménynek* nevezzük és E-vel jelöljük.

b) Az elemi események halmazának üres részhalmazát *lehetetlen eseménynek* nevezzük és $\emptyset$-vel jelöljük. A lehetetlen esemény azt jelenti, hogy a kísérlet során sohasem következik be.

c) Az A esemény *komplementerét az E biztos eseményre nézve* $\bar{A}$ (A felülvonással) vagy $C_E A$–val jelöljük. $\overline{A}$ pontosan akkor következik be, ha az A esemény nem következik be.

d) Az A és B események *kizáró események*, ha a kísérletek során nem valósulhatnak meg egyszerre. Tehát az A és B események nem tartalmaznak közös elemi eseményt.

e) Az A és B események *összeférhetők* (*kompatibilisek*), ha egy kísérlet alkalmával együttesen is bekövetkezhetnek, vagyis ha van legalább egy közös elemük.

f) Azokat az eseményeket, amelyek egynél több elemi eseményt tartalmaznak, *összetett eseményeknek* nevezzük.

Példák. A kockadobás esetén a biztos esemény az $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ halmazzal azonosítható, ennek a komplementere az $\emptyset$ (és fordítva, a lehetetlen esemény komplementere a biztos esemény). Az $A = \{1,3,5\}$

és $B = \{2, 4, 6\}$ események kizáró események is és komplementer események is (az eredmény vagy páros vagy páratlan, és nem lehet egyszerre páros is meg páratlan is). A $C = \{1, 2\}$, $D = \{2, 3, 4\}$, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $F = \{1, 5, 6\}$ és $G = \{4, 5\}$ események esetén E a biztos esemény, D és F komplementer események, C és D összeférhetőek, míg A és G kizáró események.

Megjegyzések.

1. A lehetetlen esemény nem elemi esemény és nem is összetett esemény.

2. Az esemény lehet *diszkrét*, illetve *folytonos*. Az esemény diszkrét, ha a számossága legfeljebb megszámlálható (véges vagy végtelen) és folytonos, ha nem megszámlálható végtelen (kontinuum).

Példa. Egy tárgy tömegének mérési eredménye folytonos esemény:

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid \quad a \leqslant x \leqslant b\}.$$

3. A halmazelméletben szokásos terminológiát használjuk eseményekre is, így az A és a B halmaz egyenlő egymással, ha az A és B halmaz elemei azonosak. Jelölése $A = B$. Ha az A eseménnyel megjelenik a B esemény is, akkor az A esemény magában foglalja a B eseményt, $A \subseteq B$. A halmazelméletben szokásos műveletek is értelmezhetők eseményekre is:

$$A \cup B = \{e \in E \mid e \in A \text{ vagy } e \in B\} \text{ az } A \text{ és } B \text{ esemény egyesítése;}$$
$$A \cap B = \{e \in E \mid e \in A \text{ és } e \in B\} \text{ az } A \text{ és } B \text{ esemény metszete;}$$
$$A \backslash B = \{e \in E \mid e \in A \text{ és } e \notin B\} \text{ az } A \text{ és } B \text{ események különbsége.}$$

Példa. Kockadobás esetén tekintsük az $A = \{1, 2, 3\}$ és $B = \{1, 2, 3, 6\}$ eseményeket. Nyilvánvaló, hogy $A \subseteq B$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 6\}$, $A \cap B = \{1, 2, 3\}$ és $B \backslash A = \{6\}$. Az A véletlen eseményt akkor tekintjük bekövetkezettnek, ha a kísérlet eredményeként megjelenő elemi esemény eleme az A részhalmaznak ($A \subseteq P(E)$). Általában $A \subseteq A$, $A \subseteq E$, $\emptyset \subseteq A$, $A \cup B = B \cup A$ stb.

4. A részhalmaz-reláció tranzitív tulajdonságú, vagyis ha $A \subset B$ és $B \subset C$, akkor $A \subset C$.

A valószínűségszámításban gyakran van szükség arra, hogy az eseményeket egyszerűbb események segítségével előállítsuk, ezért fontos megvizsgálni, hogy az eseményekhez rendelt valószínűségek hogyan viszonyulnak a műveletekhez. Ezt úgy érjük el, hogy előbb a műveletek tulajdonságait vizsgáljuk meg alaposabban (ez a következő paragrafus

tárgya), majd értelmezzük a valószínűség fogalmát és végül megvizsgáljuk a valószínűségnek és a műveleteknek a kapcsolatát.

1.2. Eseményalgebra, Boole-algebra

1.3. értelmezés. *Eseményalgebra, Boole-algebra* az olyan

$$\{P(E), \cap, \cup, \neg, \emptyset, E\},$$

két bináris $(\cap, \cup)$ és egy unáris $(\neg)$ művelettel, valamint két univerzális korláttal $(\emptyset, E)$ ellátott halmaz, amelyre érvényesek a következő műveleti szabályok (1.1. táblázat).

1.1. táblázat. *Műveleti szabályok*

	Metszet	Egyesítés	Művelet elnevezése
1.	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$	Idempotencia
2.	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$	Kommutativitás
3.	$(A \cap B) \cap C = = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = = A \cup (B \cup C)$	Asszociativitás
4.	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$	Elnyelés
5.	$A \cap (B \cup C) = = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	A metszet disztributív az egyesítésre nézve, és az egyesítés disztributív a metszetre nézve.
6.	$A \cap \phi = \phi$, $A \cap E = A$	$A \cup \phi = A$, $A \cup E = E$	Univerzális korlátok
7.	$A \cap \overline{A} = \phi$	$A \cup \overline{A} = E$	Komplementumok
8.		$\overline{\overline{A}} = A$	Involúció
9.	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	de Morgan relációk

Megjegyzések.

1. Mivel az események az elemi események halmazának részhalmazai, a halmazalgebra műveleti szabályai érvényesek az eseményekkel

végzett algebrai műveletekre is. Így az eseményekkel végzett műveleteket az algebrai műveletek jeleivel jelöljük. A *halmazalgebra* műveleti szabályai változatlanul átvehetők, illetve megtarthatók az események algebrájában is.

A táblázatban szereplő A és B két tetszőleges eseményt jelöl. Az eseményekkel való műveletek egyszerűbb jelölésére szokás az *egyesítésre* a $+$ jelet, a *metszetre* pedig a szorzás $(\cdot)$ jelét használni.

Így ha az A-val és B-vel egy kísérlethez tartozó eseményhalmaz két tetszőleges eseményét jelöljük, akkor az $A \cup B$, továbbiakban az $A + B$ összeg az az esemény, amely pontosan akkor következik be, ha az A és B közül legalább az egyik bekövetkezik. Általánosabban: $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ azt az eseményt jelöli, amely pontosan akkor következik be, ha az $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ események közül legalább egy bekövetkezik.

Az A és B események *metszetén* vagy *szorzatán*, az AB eseményen, azt az eseményt értjük, amely akkor és csak akkor következik be, ha A is és B is bekövetkezik (AB ekvivalens az $A \cap B$ jelöléssel). Általánosabban: $A_1\, A_2 \ldots A_n$ azt az eseményt jelöli, amely pontosan akkor következik be, amikor az $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ események egyszerre következnek be.

Az $A - B$ eseményen azt értjük, hogy A teljesül, de B nem. Ezt úgy is kifejezhetjük, hogy $A - B = A\bar{B}$.

Példa. Hozzuk egyszerűbb alakra az $(A + B)(B + C)$ kifejezést, ha $A \subset B$ és $B \subset C$.

Megoldás. Ha $A \subset B$, akkor $A + B = B$. Ugyanúgy, ha $B \subset C$, akkor $B + C = C$. Tehát $(A + B)(B + C) = B \cdot C = B$.

Gyakorlat. A hadosztály és a főhadiszállás között három különböző telefonvonalat létesítettek. Jelöljük ezeket a vonalakat az 1-es, 2-es és 3-as számokkal. Az ellenség persze egyfolytában igyekszik megsemmisíteni ezeket a telefonvonalakat. Jelöljük A-val, B-vel és C-vel az 1-es, 2-es, illetve a 3-as vonal meghibásodását jelentő eseményt. (Ezek elemi eseményeknek számítanak, ha a kísérlet a telefonvonalak működésének ellenőrzését jelenti.) Fejezzük ki elemi események segítségével a következő eseményeket:

a) csak az első vonal hibás;
b) az első két vonal hibás, a harmadik nem;
c) legalább az egyik vonal hibás;
d) mindhárom vonal hibás;
e) pontosan egy vonal hibás;
f) pontosan két vonal hibás;
g) egyik vonal sem hibás;

h) legfeljebb egy vonal hibás;
i) legfeljebb két vonal hibás.

Megoldás. Néhány esemény a következő módon fejezhető ki:

a) Ha csak az első vonal hibás, akkor ez azt jelenti, hogy az A teljesül és nem teljesül sem a B, sem a C, tehát a kívánt esemény: $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.
b) Ha az első két vonal hibás és a harmadik nem, akkor az A, a B és a $\overline{C}$ eseményeknek egyidejűleg kell teljesülniük, tehát a kívánt esemény: $A \cap B \cap \overline{C}$.
h) Ha legfeljebb egy vonal hibás, akkor vagy pontosan egy vonal hibás, vagy egyik sem hibás. Eszerint a vizsgált esemény: $\left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right)$.

1.3. Teljes eseményrendszer

1.4. értelmezés. Egy kísérlethez tartozó $A_1, A_2, \ldots, A_n$ véges számú események halmaza *teljes eseményrendszert* alkot, ha:

a) összegük a biztos eseményt alkotja és
b) páronként kizárják egymást, vagyis
a) $\sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = E$ (biztos esemény),
b) $A_i \cdot A_j = \emptyset$, ha $i \neq j$ (páronként egymást kizáró események).

1.5. tétel. Ha egy kísérlethez véges sok elemi esemény (E_1, E_2, ..., E_n) tartozik, akkor az elemi események teljes eseményrendszert alkotnak.

A teljes eseményrendszer egy fontos tulajdonságát és alkalmazhatóságát fejezi ki a következő tétel.

1.6. tétel. Ha az E eseménytérben az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ véges számú események *teljes eseményrendszert* alkotnak, akkor bármely B esemény felbontható az egymást páronként kizáró $A_1B, A_2B, \ldots, A_nB$ események összegére, azaz

$$B = \sum_{i=1}^{n} A_iB = A_1B + A_2B + \ldots + A_nB. \tag{1.1}$$

Valamely B eseménynek ily módon való felírását *bázisos előállításnak* nevezzük.

Bizonyítás. Az a) és a disztributív tulajdonságokat felhasználva írhatjuk:

$$B = E \cdot B = (A_1 + A_2 + \ldots + A_n)B = A_1B + A_2B + \ldots + A_nB.$$

Az A_iB és A_jB, $i \neq j$ események pedig egymást páronként kizárják, mivel a b) tulajdonság alapján

$$A_i \cdot B \cdot A_j \cdot B = A_i \cdot A_j \cdot B \cdot B = \emptyset \cdot B = \emptyset.$$

1.7. tétel. Ha n számú elemi esemény alkotja az E eseményteret, akkor az összes lehetséges esemény száma 2^n.

Bizonyítás. Valóban, ha az E halmaz n elemi eseményéhez még hozzászámítjuk az $(n+1)$-edik lehetetlen eseményt – ami se nem elemi, se nem összetett esemény, mivel nem írható fel elemi események összegeként –, akkor az összes esemény számának megállapításához összegeznünk kell az n elemből alkotható $0, 1, 2, \ldots, (n-1)$, n-ed osztályú kombinációk számát. Tehát az n elemi eseményt tartalmazó eseménytérben az összes események száma:

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n.$$

1.4. Események, valószínűség

A köznapi gondolkodásban szokatlan, hogy a „véletlennek" is lehetnek törvényszerűségei, de ami kisszámú esetben véletlen, nagy számok esetén lehet törvényszerű. Például egy családban a gyerekek nemének aránya véletlen, de több és több családot tekintve egyre inkább törvényszerű. Az ilyen és ehhez kapcsolódó törvényszerűségeknek a felfedezése, értelmezése és alkalmazása a valószínűségszámítás egyik tárgya.

Most azt vizsgáljuk meg, hogy valamely kísérlet esetében hogy lehet egy A esemény bekövetkezésének lehetőségét, valószínűségét egy 0 és 1 közti valós számmal megadni.

1.4.1. Gyakoriság, relatív gyakoriság

Tegyük fel, hogy egy bizonyos kísérletnek véletlen okok miatt többféle kimenetele lehetséges. Jelöljük a kísérlethez tartozó eseményrendszer

(eseményalgebra) egyik véletlen eseményét A-val, $A \in P(E)$, és ismételjük meg n-szer a kísérletet. Ha az n-szer elvégzett kísérletben az A esemény k_A-szor következik be, akkor azt mondjuk, hogy az A esemény *abszolút gyakorisága* k_A-val egyenlő. A $\frac{k_A}{n}$ hányadost az A esemény *relatív gyakoriságának* nevezzük és p_A-val jelöljük.

Mivel az A bekövetkezéseinek száma $k_A \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, ezért a

$$0 \leqslant \frac{k_A}{n} \leqslant 1 \tag{1.2}$$

egyenlőtlenség teljesül a relatív gyakoriságra.

A kísérlet többszöri elvégzése után észlelhető, hogy a relatív gyakoriság egy bizonyos szám körül ingadozik, az n növekedésével pedig ez az ingadozás mind kisebb és kisebb, és egy viszonylagos stabilitás következik be.

1.8. értelmezés. Azt a számértéket, amely körül valamely A esemény relatív gyakoriságának ingadozása viszonylagosan stabil, az esemény *valószínűségének* nevezzük és $P(A)$-val jelöljük.

Minden $A \in P(E)$ eseménynek megfeleltetünk az előbbiek szerint értelmezett valós számot, így definiálunk egy $P : P(E) \to [0, 1]$ *halmazfüggvényt*, amelynek a $P(A)$ helyettesítési értéke adja az A esemény valószínűségét. (A $P(E)$ függvényérték nem tévesztendő össze az E részhalmazainak $P(E)$ halmazával, általában a szövegkörnyezetből egyértelműen látszik, hogy melyikről van szó.)

A relatív gyakoriság (1.2) egyenlősége alapján az A esemény valószínűségére is teljesül a $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ egyenlőtlenség. Ha az A biztos esemény, azaz E, akkor $k_E = n$, tehát $P(E) = 1$. A lehetetlen eseményre $k_\emptyset = 0$, így a lehetetlen esemény valószínűsége $P(\emptyset) = 0$. Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ egymást páronként kizáró események, akkor

$$k_{A_1+A_2+\ldots+A_n} = k_{A_1} + k_{A_2} + \ldots + k_{A_n}.$$

Ezért

$$p_{A_1+A_2+\ldots+A_n} = \frac{k_{A_1+A_2+\ldots+A_n}}{n} = \frac{k_{A_1}}{n} + \frac{k_{A_2}}{n} + \ldots + \frac{k_{A_n}}{n},$$

amelyből következik, hogy

$$P(A_1 + A_2 + \ \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ \ldots + P(A_n).$$

Megjegyzés. Az előbbi egyenlőség két oldalán a + szimbólum két különböző műveletet jelöl, a jobb oldalon valós számokat adunk össze, a bal oldalon az egyesítésre vonatkozik.

1.4.2. A valószínűség matematikai fogalma

A relatív gyakoriságra érvényes összefüggések alapján állapította meg A. N. Kolmogorov a $P(A)$ valószínűségre érvényes alapkövetelményeket (axiómákat).

1. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;
2. $P(E) = 1$;
3. ha $A \cdot B = \emptyset$, akkor $P(A + B) = P(A) + P(B)$;
4. ha $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ egymást páronként kizáró események, azaz $A_i A_j = \emptyset$, ha $i \neq j$, akkor

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) + \ldots$$

Az axiómák alapján igazolhatók a valószínűségszámítás következő tételei.

1.9. tétel. Ha az A esemény valószínűsége $P(A)$, akkor az $\overline{A}$ (ellentétes esemény) valószínűsége $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Bizonyítás. Mivel $A \cap \overline{A} = \emptyset$ és $A \cup \overline{A} = E$, ezért a 3. axiómát alkalmazva

$$P(E) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}).$$

Viszont a 2. axióma szerint $P(E) = 1$, ezáltal $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Következmény. A lehetetlen esemény valószínűsége 0.

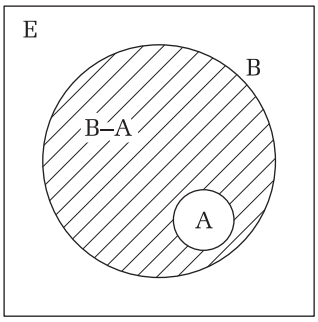
Valóban, $P(\emptyset) = P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - 1 = 0$.

1.10. tétel. Ha $A \subset B$, akkor $P(A) \leqslant P(B)$.

Bizonyítás. A $P(E)$ eseménytér A és $B - A$ eseményei egymást kölcsönösen kizárják és $B = A + (B - A)$ (1.1. ábra). Így a 3. axióma szerint $P(B) = P(A) + P(B - A)$. Mivel $P(B - A) \geqslant 0$, ebből következik, hogy $P(A) \leqslant P(B)$.

1.11. tétel. Ha A és B két tetszőleges esemény, akkor

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cdot B).$$

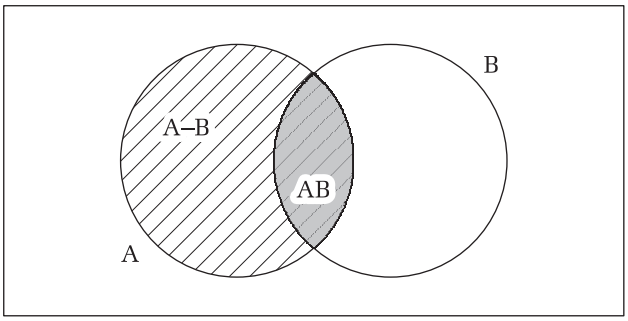


1.1. ábra.

Bizonyítás. Mivel a $P(E)$ eseménytér $A-B$ és $A\cdot B$ eseményei egymást kölcsönösen kizárják (1.2. ábra) és $A=(A-B)+A\cdot B$, így a 3. axióma szerint

$$P(A)=P(A-B)+P(A\cdot B),$$

és ebből következik, hogy $P(A-B)=P(A)-P(A\cdot B)$.



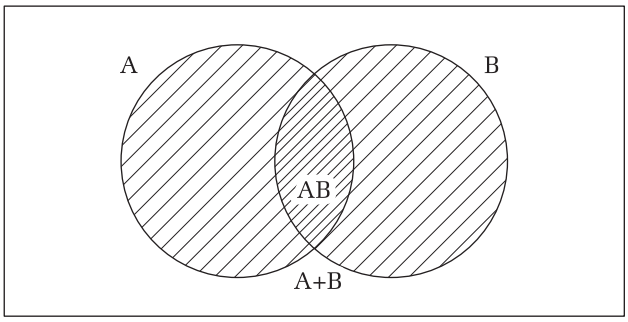
1.2. ábra.

1.12. tétel. Ha az A és B két tetszőleges esemény (1.3. ábra), akkor

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B). \tag{1.3}$$

Bizonyítás. Az $A+B$ és B eseményeket felírjuk külön-külön két-két diszjunkt esemény összegeként: $A+B=A+\left(\overline{A}\cdot B\right)$ és $B=AB+\bar{A}\cdot B$. Ezekre a diszjunkt eseményekre alkalmazzuk Kolmogorov 3. axiómáját:

$$P\left(A+B\right)=P\left(A\right)+P\left(\overline{A}\cdot B\right),\qquad P\left(B\right)=P\left(A\cdot B\right)+P\left(\overline{A}\cdot B\right).$$



1.3. ábra.

Ha a második azonosságból kifejezzük a $P\left(\overline{A}\cdot B\right)$-t, és ezt behelyettesítjük az előző összefüggésbe, akkor a $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ egyenlőséghez jutunk.

Következmény (Poincaré tétele). Hasonlóan bizonyítható, hogy ha A, B és C tetszőleges események, akkor:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

1.5. Kombinatorikus, klasszikus valószínűségszámítás

Kísérleti úton közelítő pontossággal meghatározhatjuk egy esemény valószínűségét, az esemény relatív gyakorisága segítségével, úgy, ahogy az 1.4.1. paragrafusban láttuk. Vannak azonban olyan módszerek is, amelyek lehetővé teszik, hogy megfelelő feltevések teljesülése esetén a valószínűséget logikai úton, közvetlen kísérletekre való támaszkodás nélkül meghatározhassuk. A megfelelő feltevések a következők:

- a kísérletek kimenetelei véges számúak;
- minden esemény elemi vagy véges számú elemi esemény összegére bontható;
- az elemi események valószínűségei egyenlők.

1.13. értelmezések. Egy teljes eseményrendszer eseményei a hozzátartozó valószínűségekkel alkotják a *valószínűségi mezőt*:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots, & A_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}.$$

Ez a jelölés azt jelenti, hogy minden $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén az A_j esemény valószínűsége p_j. Ha $p_1 = p_2 = p_3 = \ldots = p_n$, akkor klasszikus valószínűségi mezőről beszélünk, tehát a klasszikus valószínűségi mező

$$\begin{pmatrix} E_1 & E_2 & \cdots, & E_n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

alakú. Ilyen valószínűségi mező esetén bármely esemény valószínűsége kiszámítható a kombinatorika segítségével, a valószínűségszámítás klasszikus képlete alkalmazásával. Azt is mondjuk, hogy az

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots, & A_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

egy diszkrét valószínűségi változó eloszlása.

1.14. tétel. Legyen a $P(E)$ eseménytér elemi eseményeinek száma n, és tegyük fel, hogy minden elemi esemény egyenlő valószínűséggel következhet be. Ha egy A esemény k elemi esemény összegeként írható, akkor

$$P(A) = \frac{k}{n}, \tag{1.4}$$

vagyis az A esemény valószínűsége a „kedvező elemi események" és az „összes elemi események" számának hányadosával egyenlő.

Megjegyzés. Az (1.4) képlet korábban a valószínűség definíciójául is szolgált, és Abraham de Moivre (1667–1754) francia matematikustól származik (1711).

Bizonyítás. A kísérlet elemi eseményei legyenek $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Feltevés szerint

$$P(E_1) = P(E_2) = \ldots = P(E_n).$$

Mivel az elemi események egymást páronként kizárják, írhatjuk, hogy

$$P(E_1 + E_2 + \ldots + E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n) = 1,$$

tehát $P(E_i) = \frac{1}{n}$, ha $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Ha az A eseményt az $E_1, E_2, \ldots, E_k$ elemi események összege alkotja (az elemi események számozása tetszőleges), akkor $A = E_1 + E_2 + \ldots + E_k$, és így a

$$P(A) = P(E_1 + E_2 + \ \ldots + E_k) = P(E_1) + P(E_2) + \ \ldots + P(E_k) = k \cdot \frac{1}{n}$$

összefüggést kapjuk. Az A eseményt alkotó elemi eseményeket *kedvező eseteknek* szokás nevezni.

A klasszikus valószínűségszámítás képletében szereplő k és n számok meghatározásában fontos szerepet játszik a kombinatorika. Tekintsük át nagyon röviden a középiskolában tanult legfontosabb kombinatorikai alapfogalmakat.

a) Permutáció (ismétlés nélküli)

n *különböző* elem egy bizonyos sorrendben való elhelyezését az „n elem egy permutációjának" nevezzük. Két permutációt akkor nevezünk különbözőnek, ha az egyik permutáció sorrendje különbözik a másiktól. A lehetséges permutációk száma

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Itt emlékeztetünk arra, hogy megállapodás szerint $1! = 1$ és $0! = 1$.

b) Ismétléses permutáció

Legyen adva r különböző elem, amelyeknek az előfordulási száma rendre $k_1, k_2, \ldots, k_r$ (vagyis a j-edik elemből pontosan k_j darab van) és $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$. Az előbbi n elem egy sorrendjét *ismétléses permutációnak* nevezzük. Az n elemből képezhető összes, egymástól különböző „ismétléses permutációk" száma ($k_1, k_2, \ldots, k_r$ rögzített)

$$P_{n,\ ism} = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_r!}.$$

c) Variáció (ismétlés nélküli)

Egy n elemű halmaz k elemű rendezett részhalmazait „k-ad osztályú variációknak" nevezzük. Két variációt akkor nevezünk különbözőnek, ha különböznek az elemekben vagy az elemek sorrendjében. Az n elemből képezhető összes különböző k-ad osztályú variáció száma

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

$k = n$ esetén $V_n^n = n! = P_n$.

d) Ismétléses variáció

Ha egy n elemű halmazból kiválasztunk k elemet úgy, hogy az eredeti halmaz elemeit többször is kiválaszthatjuk, akkor egy *„k-ad osztályú ismétléses variáció"*-t hozunk létre. Az n elemből képezhető összes különböző k-ad osztályú ismétléses variáció száma

$$V^k_{n,\ ism} = n^k.$$

e) Kombináció (ismétlés nélküli)

Ha n számú, egymástól különböző elemből k elemet kiválasztunk $(k < n)$ és az elemek sorrendjétől eltekintünk, akkor egy *„k-ad osztályú (ismétlés nélküli) kombinációt"* kapunk. Két kombinációt akkor tekintünk különbözőnek, ha elemeikben különböznek. Az n elemből képezhető összes (különböző) k-ad osztályú kombináció száma

$$C^k_n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

f) Ismétléses kombináció

Ha egy k-ad osztályú kombinációban az egyes elemek ismétlődését is megengedjük (legfeljebb k-szor!), akkor *„k-ad osztályú ismétléses kombinációról"* beszélünk. Az n elemből képezhető összes (különböző) k-ad osztályú ismétléses kombináció száma

$$C^k_{n,\ ism} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Megjegyzés. Mind az ismétlés nélküli, mind pedig az ismétléses permutációknál, ill. variációknál az egyes elemeknek a helye, azaz az elemek sorrendje (egymásutánisága) a különbözőség jele, míg a kombinációk esetén az elemek sorrendjének nincs ilyen jelentősége.

A kombinatorikát gyakran a véges számosságú halmazok elméletének is szokás nevezni. A végtelen (számosságú) halmazok elmélete lényegesen különbözik a kombinatorikától. A permutációk, variációk és kombinációk áttekintését könnyíti meg az 1.2. táblázat.

1.2. táblázat.

Elem-kombinációk	Különböző elemek száma az egyes csoportokban	A csoportok száma	Elemek előfordulásának száma a csoportokban
Permutáció (ism. nélkül)	n	$P_n = n!$	Minden elem pontosan egyszer
Ismétléses permutáció	r	$P_{n,\ ism} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!}$	Az egyes elemek pontosan $k_1, k_2, \ldots, k_r$-szer
Variáció (ism. nélkül)	$k < n$	$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	Minden elem legfeljebb egyszer
Ismétléses variáció		$V_{n,\ ism}^k = n^k$	Minden elem legfeljebb k-szor
Kombináció (ism. nélküli)	$k < n$	$C_n^k = \binom{n}{k}$	Minden elem legfeljebb egyszer
Ismétléses kombináció		$C_{n,\ ism}^k = \binom{n+k-1}{k}$	Minden elem legfeljebb k-szor

Megoldott feladatok

1. Egy 22-es összlétszámú osztályban 12 lány és 10 fiú van. Az osztályban kisorsolnak két színházjegyet úgy, hogy mindenki felírja a nevét egy kis papírdarabra, majd a papírkákat egy sapkában összekeverik és valaki kihúz két papírt. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a két jegy közül az egyiket fiú, a másikat pedig lány kapja?

Megoldás. A 22 diák közül kettőt $C_{22}^2 = 231$ különböző módon lehet kiválasztani, tehát a kísérletnek összesen 231 kimenetele lehetséges. Ezek a kimenetelek azonos valószínűségűek, hisz semmi okunk feltételezni, hogy a húzások nem véletlenszerűek. A kedvező esetek száma $12 \cdot 10 = 120$, mert 120 olyan párt tudunk képezni, amelynek az egyik tagja fiú és a másik lány. Így a vizsgált esemény valószínűsége

$$\frac{120}{231} = \frac{40}{77} \cong 0,5194.$$

2. Egy pénzérmét többször feldobunk. Jelöljük A-val azt az eseményt, amely pontosan akkor következik be, ha négy dobásból három fej, és jelöljük B-vel azt az eseményt, amely pontosan akkor következik be, ha nyolc dobásból öt fej. Hasonlítsuk össze a két esemény valószínűségét!

Megoldás. Mivel minden dobás eredménye fej vagy írás (a többi dobástól függetlenül, hisz az érmének nincs memóriája, és nem tudhatja, hogy a többi dobás eredménye mi volt vagy lesz), összesen $2^4 = 16$ különböző, négy hosszúságú dobássorozat létezik. Így négy dobás esetén a kísérletnek 16 lehetséges kimenetele van, és ezeket tekinthetjük azonosan valószínűnek. A kedvező kimenetelekben pontosan három dobás fej és a negyedik írás. Ilyen dobássorozat $C_4^3 = 4$ darab létezik, tehát

$$P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Hasonló gondolatmenettel nyolc dobás esetén az összes lehetőség száma $2^8 = 256$, ebből $C_8^5 = 56$ kedvező, tehát

$$P(B) = \frac{56}{256} = \frac{7}{32} \cong 0,218.$$

Az előbbiek alapján $P(A) > P(B)$.

3. *Bolyongási feladat a számegyenesen.* Egy automata utasítási rendszerében az olvasó(író)fej egységnyi ugrásokat tesz meg a számegyenes mentén (pozitív, illetve negatív irányban). Hány különböző útvonalon juthat az origóból n lépés után a k abszcisszájú pontba?

Megoldás. Jelöljük a jobbra megtett lépések számát x-szel és a balra megtett lépések számát y-nal. A feladat feltételei szerint $x + y = n$ és $x - y = k$. Az egyenletrendszer megoldása:

$$x = \frac{n+k}{2}, \quad y = \frac{n-k}{2}.$$

Mivel $x, y \in \mathbb{N}$, az n és a k paritása azonos kell hogy legyen, vagy mind a kettő páros, vagy mind a kettő páratlan. Függetlenül a haladási irányok sorrendjétől, a kedvező esetek száma

$$C_n^{\frac{n+k}{2}} = C_n^{\frac{n-k}{2}}.$$

Számpélda. Abban az esetben, ha $n = 3$ és $k = 1$, akkor a lehetséges utak száma $C_3^1 = 3$. A lehetséges utak $-1, 0, 1$; $1, 0, 1$; $1, 2, 1$.

Megjegyzés. A probléma általánosítható két- vagy háromdimenziós rácspontok esetében.

4. Bridzsjátékhoz az 52 lapos kártyacsomagot a négy játékos között egyenlően osztják szét (a csomag négyfajta – pikk, kőr, káró és treff – lapot tartalmaz, mindegyik fajtából 13–13 darabot). Mennyi a valószínűsége annak, hogy az egyik előre kiválasztott játékoshoz éppen k darab ($k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 13\}$) káró kerül?

Megoldás. Feltételezhetjük, hogy osztáskor nem csalnak, tehát minden lap azonos valószínűséggel kerül az egyes játékosokhoz. Így a lehetséges kimenetelek száma C_{52}^{13}, mert az 52 lapos csomag bármely 13 lapot tartalmazó részhalmaza a kiválasztott játékoshoz kerülhet. Másrészt, ha pontosan k darab káró lapja van a játékosnak, akkor ez $C_{13}^k \cdot C_{39}^{13-k}$ különböző módon lehetséges (mert a k darab káró a 13 káró közül és a többi $13 - k$ darabot a 39 nem káró lapok közül kapja). Így a keresett valószínűség

$$P(A) = \frac{C_{13}^k \cdot C_{39}^{13-k}}{C_{52}^{13}}.$$

5. Egy dobozban 8 piros és 4 fekete golyó van. Egyenként húzunk találomra golyókat. A kihúzott golyó színét rendre feljegyezzük, majd a golyót visszadobjuk. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy az n-edik húzáskor jelenik meg k-adik alkalommal piros golyó!

Megoldás. Ha az n-edik kihúzott golyó a k-adik piros, akkor a húzássorozat pontosan k darab piros és $n - k$ darab fekete golyó kihúzását jelenti, ahol az utolsó golyó piros. Tehát az első $n - 1$ húzásból meg kell jelölnünk $n - k$ húzást (a feketéket). Ezt C_{n-1}^{n-k} különböző módon tehetjük meg. A piros golyókat a 8 piros golyó közül húzhatjuk ki, a fekete golyókat pedig a 4 fekete golyó közül, tehát a kedvező esetek száma $C_{n-1}^{n-k} \cdot 8^k \cdot 4^{n-k}$. Másrészt n húzás esetén összesen 12^n a lehetséges húzások száma, tehát a keresett valószínűség:

$$P(A) = C_{n-1}^{n-k} \left(\frac{8}{12}\right)^k \cdot \left(\frac{4}{12}\right)^{n-k} = C_{n-1}^{n-k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} = \frac{2^k C_{n-1}^{n-k}}{3^n}.$$

6. Bizonyítsuk be, hogy ha az X kísérletre vonatkozó A eseménynek a valószínűsége $P(A)$, és ha egy ettől független Y kísérletre vonatkozó B

esemény valószínűsége $P(B)$, akkor annak a valószínűsége, hogy az A is és a B is bekövetkezik $P(A) \cdot P(B)$! Általánosítsuk ezt a tulajdonságot!

Bizonyítás. Jelöljük az X és Y kísérlet lehetséges kimeneteleinek számát x-szel, illetve y-nal, az A-nak, illetve a B-nek kedvező esetek számát a-val, illetve b-vel. Tehát az X és az Y kísérletnek $x \cdot y$ lehetséges kimenetele van (és mivel a kísérletek között nincs összefüggés, ezek egyforma valószínűséggel rendelkeznek). A kedvező eset azt jelenti, hogy az X kísérletben az A-nak, míg az Y kísérletben a B-nek kedvező a kimenetel, tehát a kedvező esetek száma $a \cdot b$ (minden A-nak kedvező eset társítható egy-egy B-nek kedvező esettel). Ebből következik, hogy az A és a B események együttes bekövetkezésének valószínűsége

$$\frac{a \cdot b}{x \cdot y} = \frac{a}{x} \cdot \frac{b}{y} = P(A) \cdot P(B).$$

Ez a gondolatmenet több halmazra is kiterjeszthető, tehát ha az X_i kísérletekre vonatkozó A_i esemény valószínűsége $P(A_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, akkor a kísérletek együttes végrehajtásakor az A_i események együttes bekövetkeztének valószínűsége

$$\prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

7. Annak valószínűsége, hogy egy számítógép processzora áramerősség-ingadozáskor (vagy áramszünetkor) kiég, $0,0001$. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a tízezredik bekapcsoláskor kiég a gép processzora?

Megoldás. Ahhoz, hogy pontosan a tízezredik bekapcsoláskor égjen ki a processzor az kell, hogy az első 9999 bekapcsoláskor ne égjen ki és a tízezredik bekapcsoláskor kiégjen. Ha A_k-val jelöljük azt az eseményt, hogy a k-adik bekapcsoláskor nem ég ki a processzor, akkor a vizsgált esemény $\overline{A_{10000}} \cap \bigcap_{k=1}^{9999} A_k$ alakban írható, tehát az előbbi feladat szerint a keresett valószínűség $P(A) = 0,0001 \cdot 0,9999^{9999} \approx 3,67 \cdot 10^{-5}$, mert annak a valószínűsége, hogy egy bekapcsoláskor a processzor nem ég ki $0,9999$.

1.6. Visszatevés nélküli mintavétel

A gyakorlatban, különösen a minőségellenőrzés során, sokszor találkozunk a következő típusú problémával.

Legyen adott egy N elemű termékhalmaz, amelyek közül s selejtes van. Vegyünk ki a halmazból egy n elemű *mintát*, és feltételezzük, hogy a minták valószínűsége ugyanaz, vagyis bármely n elemű mintát és bármely terméket azonos valószínűséggel emelhetjük ki (klasszikus valószínűségi mező!). Mekkora annak a valószínűsége, hogy a minta pontosan k selejtes terméket tartalmaz? Oldjuk meg a feladatot *visszatevéses* és *visszatevés nélküli* mintavétel feltételezésével.

Ha a minta minden darabját egyszerre emeljük ki, vagy (ami ugyanazt jelenti) a minta darabjait egymás után vesszük ki, de *egyiket sem tesszük vissza*, akkor *visszatevés nélküli* mintavételről beszélünk. Ezzel az eljárással a selejtes termékek *arányára* vonatkozóan szerezhetünk információt.

1.15. tétel. Ha N számú termék között s számú selejtes, akkor annak a valószínűsége, hogy egy n elemű visszatevés nélküli mintában k ($k \leqslant s$) számú selejtes legyen:

$$P = \frac{C_s^k \cdot C_{N-s}^{n-k}}{C_N^n}. \tag{1.5}$$

Bizonyítás. A kísérlet lehetséges kimeneteleinek a száma C_N^n. A kedvező eseteket azok az n elemű minták fogják alkotni, amelyekben pontosan k számú selejtes darab van. Az s számú selejtes termék közül k számú selejtes C_s^k-féleképpen választható ki. Továbbá minden egyes ilyen kiválasztáshoz az $N-s$ hibátlan termék közül a még hiányzó $n-k$ számú hibátlan terméket C_{N-s}^{n-k}-féleképpen választhatjuk ki. Ezek a kiválasztások egymástól függetlenek, vagyis a C_s^k számú eset bármelyike megvalósulhat a C_{N-s}^{n-k} számú eset bármelyikével, tehát a kedvező esetek száma $C_s^k \cdot C_{N-s}^{n-k}$. Így a keresett valószínűség éppen $P = \frac{C_s^k \cdot C_{N-s}^{n-k}}{C_N^n}$.

Megjegyzés. Egyes szerzők a C_n^k (n elem k-ad osztályú kombinációinak a száma) jelölésére az $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ szimbólumot használják (ezt „n alatt a k"-nak olvassuk).

Számpéldák.

a) $N = 11$, $s = 3$, $n = 2$, $k = 0$ és

$$P(A) = \frac{\binom{3}{0}\binom{11-3}{2-0}}{\binom{11}{2}} = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}}{\frac{11\cdot 10}{1\cdot 2}} =$$

$$= \frac{8\cdot 7}{11\cdot 10} = \frac{4\cdot 7}{11\cdot 5} = \frac{28}{55} \cong 0,51.$$

b) $N = 11$, $s = 3$, $n = 3$, $k = 1$, így

$$P(B) = \frac{\binom{3}{1}\binom{11-3}{3-1}}{\binom{11}{3}} = \frac{3\cdot 28}{165} \cong 0,51.$$

Megjegyzés. A $p = \frac{s}{N}$ hányadost szokás *selejtaránynak* is nevezni. A nem selejtes termékek aránya ekkor $q = \frac{N-s}{N} = 1-p$. Ezzel a jelöléssel az (1.5) képlet így írható:

$$P = \frac{\binom{s}{k}\binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{pN}{k}\binom{qN}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

1.7. Visszatevéses mintavétel

1.16. tétel. Ha N számú termék között s számú selejtes van, akkor annak a valószínűsége, hogy egy n elemű visszatevéses mintában k számú selejtes legyen

$$P = \binom{n}{k}\frac{s^k(N-s)^{n-k}}{N^n}. \tag{1.6}$$

Bizonyítás. Egy-egy elemi esemény itt is n számú termék kiválasztásából áll. A visszatevés miatt itt az is előfordulhat, hogy ugyanazt a terméket többször is kivesszük. Így a lehetséges esetek száma az N számú termék n-ed osztályú ismétléses variációinak a száma, N^n.

A kedvező eseteknél az első k számú kiemelés eredménye selejtes, a többi $n-k$ számú kiemelés hibátlan termék. Így az s számú selejtesből alkotható k-ad osztályú ismétléses variációk számát szorozzuk az $N-s$

számú jó darabból kiemehető $(n-k)$-ad osztályú ismétléses variációk számával, tehát $s^k(N-s)^{n-k}$.

Természetesen a k számú selejtest nemcsak az első k kiemeléssel kaphatjuk meg, hanem az n kiemelés során bármely k számú selejtes kiemelése is kedvező esetnek számít. Azoknak az elemi eseményeknek a száma, melyek éppen a rögzített helyeken tartalmazzák a selejtes termékeket, egyenlő $\binom{n}{k}$-val. Így az összes kedvező elemi események száma $\binom{n}{k} s^k(N-s)^{n-k}$. Tehát $P = \binom{n}{k} \frac{s^k(N-s)^{n-k}}{N^n}$.

1.8. Valószínűségi modellek

A klasszikus valószínűségszámításhoz tartozó különféle típusú modellek tárgyaknak különböző osztályok közti elosztásaként fogalmazhatók meg, és egymástól az elosztás feltételeiben, illetve az egyenlő valószínűségi események megadásában különböznek.

1.8.1. Poisson-féle modell

Példa. Ha $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ és A_n egymástól független események, akkor fejezzük ki ezek függvényében azt az A eseményt, amely akkor és csak akkor következik be, ha az előbbi események közül pontosan k darab következik be (tehát k darab bekövetkezik, és $n-k$ nem következik be), majd írjuk fel az A valószínűségét az $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ és A_n események valószínűségének függvényében!

Megoldás. Azt, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$ és A_k események bekövetkeznek és a többi esemény nem következik be, az $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap \overline{A_{k+1}} \cap \overline{A_{k+2}} \cap \ldots \cap \overline{A_n}$ metszettel írhatjuk le. Ezt a k darab bekövetkező esemény minden lehetséges megválasztására meg kell ismételnünk, és a kapott C_n^k metszetet egyesítenünk kell. A kívánt esemény tehát

$$A = \bigcup_{\substack{H \subseteq X \\ |H=k|}} \left(\left(\bigcap_{j \in H} A_j \right) \cap \left(\bigcap_{j \notin H} \overline{A_j} \right) \right), \text{ ahol } X = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}.$$

Ha az A_k esemény valószínűsége p_k, akkor $P\left(\overline{A_k}\right) = 1 - p_k$, tehát az A kifejezésében szereplő metszetek valószínűsége $p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot p_{i_3} \cdot \ldots \cdot p_{i_k} \cdot$

$q_{i_{k+1}} \cdot q_{i_{k+2}} \cdot \ldots \cdot q_{i_n}$ alakú, ahol $q_v = 1 - p_v$, $1 \leqslant v \leqslant n$ és $i_1, i_2, \ldots, i_n$ az első n természetes szám egy tetszőleges sorrendje. Ebből következik, hogy az A esemény valószínűsége $\sum p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_k} \cdot q_{i_{k+1}} \cdot \ldots \cdot q_{i_n}$ alakú, ahol az összegzést az X halmaznak a k elemű $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ indexhalmazai szerint végezzük. Belátható, hogy ez az összeg éppen a $(p_1x + q_1) \cdot (p_2x + q_2) \cdot \ldots \cdot (p_nx + q_n)$ polinom x^k tagjának az együtthatója, tehát érvényes a következő tétel:

1.17. tétel. Ha az A_k esemény valószínűsége p_k, és $q_k = 1 - p_k$, ahol $1 \leqslant k \leqslant n$, valamint ezek az események páronként függetlenek, akkor annak a valószínűsége, hogy az A_1, $A_2, \ldots,$ A_{n-1} és A_n események közül pontosan k darab következzen be, a $(p_1x + q_1) \cdot (p_2x + q_2) \cdot \ldots \cdot (p_nx + q_n)$ polinom x^k-t tartalmazó tagjának az együtthatója.

Példa. Három urna közül az elsőben 4 piros és 6 fekete, a másodikban 4 piros és 1 fekete, a harmadikban pedig 3 piros és 2 fekete golyó van. Mindegyik urnából kihúzunk egy-egy golyót. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 2 piros és 1 fekete golyót húzzunk?

Megoldás. Jelöljük A_k-val azt az eseményt, hogy a k-adik urnából kihúzott golyó piros. A feladatban kért esemény akkor és csakis akkor teljesül, ha az A_k események közül pontosan kettő teljesül. A feltételek alapján $P(A_1) = \frac{2}{5}$, $P(A_2) = \frac{4}{5}$ és $P(A_3) = \frac{3}{5}$. A tétel értelmében a keresett valószínűség éppen az

$$F(x) = \left(\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{4}{5}x + \frac{1}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}\right)$$

polinom x^2-es tagjának együtthatója. Számolással ellenőrizhető, hogy a keresett együttható éppen $\frac{58}{125} = 0,464$.

Azokról az eseményekről, amelyek néhány független esemény közül rögzített számú esemény bekövetkeztével azonosíthatók, azt mondjuk, hogy a *Poisson-féle modellt* követik. Tehát a Poisson-féle modell esetében van n különböző összetételű osztály (csomag). Például az A_i osztályban a „jó" tárgyak aránya p_i, míg a selejtes tárgyak aránya q_i. A kérdés az, hogy ha mindenik osztályból kiemelünk egy tárgyat, akkor mi a valószínűsége annak, hogy az n tárgy közül k legyen „jó" és $n - k$ selejtes.

Példa. Három falu legelőjén öt-öt forrásnál lehet itatni. Az A falu legelőjén az 5 forrásból egynek a vize szennyezett, a B falu határában az 5 forrás közül kettőnek a vize szennyezett, és a C falu legelőjén az 5 forrás közül háromnak a vize szennyezett. A pásztor háromszor találomra itat

rendre a három falu legelőjén. Mi a valószínűsége annak, hogy két falu határában tiszta forrásokból itasson?

Megoldás. Tekintsük a következő független eseményeket:

A_1 : „az első falu" határában tiszta forrásból itatott;

A_2 : „a második falu" határában tiszta forrásból itatott;

A_3 : „a harmadik falu" határában tiszta forrásból itatott.

Tehát azt kell meghatározni, hogy mi a valószínűsége annak, hogy a három esemény közül kettő bekövetkezik. A Poisson-modellt alkalmazzuk a következő adatokkal:

$$n = 3, \quad k = 2, \quad p_1 = P(A_1) = \frac{4}{5}, \quad p_2 = P(A_2) = \frac{3}{5}, \quad p_3 = P(A_3) = \frac{2}{5}.$$

A keresett valószínűség a $\left(\frac{4}{5}x + \frac{1}{5}\right)\left(\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}\right)$ polinom másodfokú tagjának együtthatójával egyenlő, tehát

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{36 + 16 + 6}{125} = \frac{58}{125}.$$

1.8.2. Bernoulli-féle modell

Ha a Poisson-féle modellben szereplő független események A_1, A_2, ..., A_n egyenlően valószínűek, tehát $p_i = p$, $q_i = q = 1 - p$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, akkor annak a valószínűségét, hogy az n eseményből pontosan k következik be, a $(px + q)^n$ polinomból az x^k együtthatója adja, vagyis

$$P(A) = C_n^k \cdot p^k q^{n-k}.$$

A Poisson-modellnek ezt a sajátos esetét nevezzük Bernoulli-modellnek. Leggyakrabban egy kísérlet többszöri elvégzésekor kapott eredmények vizsgálatára alkalmazhatjuk.

Példa. Mi a valószínűsége annak, hogy egy pénzérme négyszeri feldobása után egyszer jelenjék meg a fej?

Megoldás. A modell paraméterei: $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 4$, $k = 1$ és

$$P_{4,\,2} = C_4^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 4 \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{1}{4}.$$

1.8.3. Maxwell–Boltzmann-modell

Ebben az esetben m számú egymástól megkülönböztethető tárgyat r osztályban helyezünk el, oly módon, hogy minden tárgy véletlenszerűen, tehát egyenlő valószínűséggel kerüljön valamelyik osztályba. Jelölje

$A_{l_1,l_2,\ldots,l_r}$ azt az eseményt, hogy az első osztályba l_1, a másodikba l_2, az r-edikbe l_r tárgy (megszámozott) kerül. Természetesen $l_1+l_2+\ldots+l_r = m$.

r osztályt m tárgyhoz r^m-en féleképpen lehet hozzárendelni, ami azt mutatja, hogy melyik tárgy melyik dobozba kerül. A lehetséges esetek számát r osztálynak m elemű ismétléses variációi adják. Kedvezők azok a véges sorozatok, amelyekben az első osztály pontosan l_1-szer, a második l_2-ször, az r-edik l_r-szer jelenik meg, amelyeknek száma $k = P_m^{l_1,\,l_2,\,\ldots,\,l_r} = \frac{m!}{l_1!\,l_2!\,\ldots\,l_r!}$. Tehát a vizsgált esemény valószínűsége

$$P(A_{l_1,\,l_2,\,\ldots,\,l_r}) = \frac{m!}{l_1!\,l_2!\ldots l_r!}\cdot\frac{1}{r^m}.$$

Példák.

1. Egy tehervonat 3 kocsijára 6 egyforma ládát kell felrakni. A ládák szétosztása tetszőleges. Mi a valószínűsége, hogy a kocsik közül az elsőbe 1, a másodikba 2, a harmadikba 3 láda kerül? Mindegyik ládát véletlenszerűen rakják fel a három kocsi egyikére.

Megoldás. A kiválasztás módszeréből következik, hogy a Maxwell–Boltzmann-modell alapján kell számolni. A vizsgált eseményt A-val jelöljük. A ládák száma $m = 6$, a kocsik száma $r = 3$. A kocsikra rendre $l_1 = 1$, $l_2 = 2$, $l_3 = 3$ láda kerül. Tehát az esemény valószínűsége

$$P(A) = \frac{m!}{l_1!\,l_2!\,l_3!}\cdot\frac{1}{r^m} = \frac{6!}{1!\,2!\,3!}\cdot\frac{1}{3^6} \cong \frac{1}{1458}.$$

2. Három diák lakcíme azonos. Egy napon a postás 5 levelet hoz erre a címre. Mi a valószínűsége annak, hogy mind az 5 levél egyazon diák nevére érkezzen?

Megoldás. Ebben a feladatban Maxwell–Boltzmann-modellről van szó. Három különböző megoszlása a leveleknek kedvező esetnek számít: az összes levelet az első, második vagy a harmadik diák kapja, egyforma valószínűséggel. Tehát

$$P(A) = 3\cdot\frac{5!}{5!\cdot 0!\cdot 0!}\cdot\frac{1}{3^5} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}.$$

2. FEJEZET

FELTÉTELES VALÓSZÍNŰSÉG, ESEMÉNYEK FÜGGETLENSÉGE

A feltételes valószínűség fogalma lehetővé teszi a kísérletek kölcsönhatásainak vizsgálatát, a teljes valószínűség tételének és a Bayes-tétel bizonyítását, valamint az események függetlenségének a tanulmányozását.

2.1. Feltételes valószínűség

Példa. Egy dobozban 12 piros és 8 fekete golyó található. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy a harmadik húzáskor piros golyót veszünk ki, ha az első két húzáskor fekete golyót vettünk ki (véletlenszerűen) és egyik golyót sem tettük vissza.

Megoldás. Ha már kihúztunk két fekete golyót, akkor a dobozban 12 piros és 6 fekete golyó maradt, tehát annak a valószínűsége, hogy pirosat húzunk $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

Példa. Jelöljünk A-val és B-vel két eseményt, amelyek valamely véges sok, azonos valószínűségű kimenettel rendelkező kísérletre vonatkoznak. Ha a B eseménynek k eset kedvez, és ezek közül m kedvez A-nak is, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy bekövetkezik az A, ha a B már bekövetkezett? Fejezzük ki az eredményt a $P(B)$ és $P(A \cap B)$ valószínűségek segítségével!

Megoldás. Ha a B esemény bekövetkezett, akkor az A vizsgálatakor a lehetséges esetek csak a B-nek kedvezőek, tehát a lehetséges esetek száma k. Ezek közül az A-nak is kedvező esetek száma m, tehát a keresett valószínűség $\frac{m}{k}$. Ha n az összes lehetőségek száma, akkor ez $\frac{\frac{m}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ alakban is írható, mert m tulajdonképpen az $A \cap B$ eseménynek kedvező esetek száma.

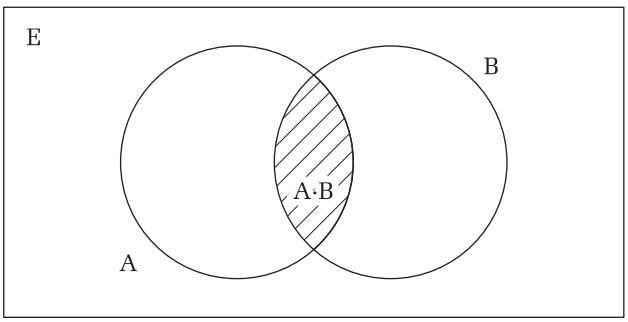
Megjegyzés. Látható, hogy nem az A esemény valószínűségét számoltuk ki, hanem az A esemény valamilyen feltételre (a B eseményre) vonatkozó bekövetkezésének a valószínűségét. A továbbiakban az

ilyen jellegű valószínűségeket *feltételes valószínűségeknek* nevezzük. Általában az A eseménynek a B eseményre vonatkozó valószínűségét $P(A \mid B)$-vel jelöljük, és az előbbi feladat alapján $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Legyen E egy kísérlethez tartozó elemi események halmaza. Ezen halmaz részhalmazai alkotják a $P(E)$-vel jelölt *eseményteret.* Legyen A és B a $P(E)$ két tetszőleges eseménye. Ha a tekintett kísérlet során feltételezzük, hogy bekövetkezik elsőként (a priori) a B esemény, akkor az a kérdés, hogy ez az *információ* hogyan befolyásolja az A esemény valószínűségét. Hogy erre a kérdésre választ tudjunk adni, meg kell határozni, hogy mekkora lesz az A esemény valószínűsége, ha az A eseménynek csak azokkal az elemi eseményeivel számolunk, amelyek a B eseménynek is elemei. Tehát tulajdonképpen új eseményről van szó. Az A esemény kedvező eseteinek száma egyenlő az A és B események szorzata (metszete) elemi eseményeinek számával. Az A eseménynek a B feltétellel való leszűkítését $A|B$-vel szokás jelölni.

2.1. értelmezés. Valamely A eseménynek a B eseményre vonatkozó $P(A|B)$ *feltételes valószínűsége* a két esemény együttes bekövetkezéséhez tartozó $P(A \cdot B)$ valószínűségnek és a B esemény $P(B) \neq 0$ valószínűségének hányadosa (2.1. ábra).

$$P(A/B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0. \tag{2.1}$$



2.1. ábra. *Venn-diagram:* $\frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$ *szemléltetése*

A feltételes valószínűség esetén tulajdonképpen az E eseménytér szerepét annak egy szűkített része, a B esemény elemi eseményeinek a halmaza veszi át. Természetesen a szűkítéssel nem lehet $P(B) = 0$-ig menni.

Példa. Két nem egyforma kockával dobott számok összege 7. Mekkora annak valószínűsége, hogy legalább az egyik kockán 6-os szerepel?

Megoldás. Jelentse A azt az eseményt, hogy legalább az egyik kockán 6-os van, B pedig azt, hogy a dobott számok összege 7. Meg kell határozni a $P(A\,|B\,)$ valószínűséget. A (2.1) képlettel számolunk. Most az elemi eseményeket a 36 számpár alkotja, és a kedvező esetek az $(1,6)$; $(2,5)$; $(3,4)$; $(4,3)$; $(5,2)$; $(6,1)$ számpárok. Így a klasszikus képlet szerint

$$P(B) = \frac{6}{36}.$$

Az $A \cdot B$ esemény bekövetkezésére két lehetőség van, az $(1,6)$ és $(6,1)$ számpár, így

$$P(A \cdot B) = \frac{2}{36}.$$

A keresett feltételes valószínűség tehát

$$P(A\,|B\,) = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{3}.$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha figyelembe vesszük, hogy a B eseményt alkotó elemi események száma 6 és ezekből „kedvező" 2, így

$$P(A\,|B\,) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

2.2. A valószínűségek szorzási szabálya

A feltételes valószínűség fontos következménye az ún. *szorzási szabály,* vagyis a (2.1) képlet alapján

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A\,|B\,). \tag{2.2}$$

Megjegyzés. A (2.2) képlet jobb oldala A-ban és B-ben nem szimmetrikus, de az A és B szerepe értelemszerűen felcserélhető és így

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B\,|A\,). \tag{2.3}$$

A szorzási tétel tetszőleges számú $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményekre is kiterjeszthető a teljes indukció alkalmazásával.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1)P(A_2\,|A_1\,)P(A_3\,|A_1A_2\,)\ldots P\,(A_n\,|A_1A_2\ldots A_{n-1}\,)\,. \tag{2.4}$$

Példák.

1. 100 darab alkatrészből, melyek között a selejtarány 0,04, egymás után kiveszünk két alkatrészt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az első mintavétel selejtes (A esemény), a második pedig nem (B esemény), ha

a) visszatevés nélküli mintavételt használunk;

b) visszatevéses mintavételt használunk?

Megoldás.

a) A selejtaránynak megfelelően $P(A) = \frac{4}{100} = 0,04$. Mivel a következő húzásnál a visszatevés nélküli esetben már csak 99 alkatrészből választhatunk, de ezek között 96 a kedvező, ezért $P(B\,|A) = \frac{96}{99} \cong 0,(96)$ és így

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B\,|A) = 0,04 \cdot 0,(96) = 0,03\,(78)\,.$$

b) Visszatevéses mintavétel esetén is $P(A) = 0,04$. A következő húzásnál azonban ismét 100-ból választunk. Így a kedvező esetek száma 96 és így

$$P(B\,|A) = \frac{96}{100} = 0,96.$$

Végeredményben $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B\,|A) = 0,04 \cdot 0,96 = 0,0384$.

Megjegyzés. Ha a visszatevés nélküli mintavétel esetén nem kötjük ki, hogy a két kivett alkatrészből az *első* legyen selejtes, és csak azt a feltételt szabjuk meg, hogy a két kivett alkatrészből az „egyik legyen selejtes", akkor a megoldás módosul. Általában, ha N a termékek száma, s a selejtes termékek száma, n a kivett termékek száma és k a kivett termékekből a selejtes termékek száma, akkor ennek az X eseménynek a valószínűsége

$$P(X) = \frac{\binom{s}{k}\binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}. \tag{2.5}$$

Az előbbi esetben $N = 100$, $s = 4$, $n = 2$ és $k = 1$, így

$$P = \frac{\binom{4}{1}\binom{96}{1}}{\binom{100}{2}} = \frac{4.96}{100.99} = 0,0768.$$

A visszatevéses minta esetén, ha nem kötjük ki, hogy a kiválasztott alkatrészekből melyek a selejtesek, csak a selejtesek számát tudjuk, akkor az eseménynek a valószínűsége

$$P = \binom{n}{k} \frac{s^k (N-s)^{n-k}}{N^n}. \tag{2.6}$$

Jelen esetben $P = \binom{2}{1} \frac{4^1 . 96^1}{100^1} = 0,0768$.

2. Egy urnában 7 fehér és 5 fekete golyó van. Egymás után kihúzunk három golyót, visszatevés nélkül. Mi a valószínűsége annak, hogy az elsőnek kihúzott golyó fekete, a másik kettő pedig fehér legyen?

Megoldás. Az elsőnek kihúzott golyó fekete eseményt jelöljük A_1-gyel. A_2: a másodiknak kihúzott golyó fehér; A_3: a harmadiknak kihúzott golyó fehér.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 \,|A_1\,) \cdot P(A_3 \,|A_1 A_2\,) = \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{7}{44}.$$

2.3. Események függetlensége

Két esemény *függetlenségét* a feltételes valószínűség segítségével értelmezzük.

2.2. értelmezés. Legyen A és B két tetszőleges véletlen esemény. Az A és B egymástól *független események*, ha

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B), \tag{2.7}$$

vagyis a két esemény szorzatának a valószínűsége egyenlő a két esemény valószínűségének a szorzatával.

A (2.1)-ből következik, hogy ha $P(B) > 0$, akkor $P(A\,|B\,) = P(A)$, vagyis az A feltételes valószínűsége a B feltétel mellett egyenlő az A valószínűségével, azaz a B esemény bekövetkezése nem változtatja meg az A bekövetkezésének valószínűségét.

A független események lényeges tulajdonsága az, hogy ha A és B függetlenek, akkor az A és $\bar{B}$ is függetlenek. Valóban,

$$P(\bar{B}\,|A) = \frac{P(A\cdot\bar{B})}{P(A)} = \frac{P(A)-P(A\cdot B)}{P(A)} =$$
$$= 1 - \frac{P(A)\cdot P(B)}{P(A)} = 1 - P(B) = P(\bar{B}).$$

Általában, *n eseményt ($n \geqslant 2$) függetlennek* nevezünk, ha tetszőleges számú eseményt kiválasztva közülük, azok együttes bekövetkezésének valószínűsége egyenlő valószínűségeinek szorzatával. Ebben az esetben az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események *teljesen függetlenek.*

Példák.

1. Tekintsük a játékkockával való kísérletet és a következő eseményeket:

$$E = \{1,2,3,4,5,6\}, \quad A = \{1,2\}, \quad B = \{2,3,4,5,6\}.$$
$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{5}{6}, \quad P(\bar{A}) = \frac{2}{3}, \quad P(\bar{B}) = \frac{1}{6}$$
$$P(A\,|B) = \frac{1}{5}, \quad P(A\,|\bar{B}) = 1, \quad P(B\,|A) = \frac{1}{2}, \quad P(B\,|\bar{A}) = 1.$$

Ezek a valószínűségek azt mutatják, hogy ha információt kapunk a B esemény bekövetkezéséről, akkor az A esemény valószínűsége megváltozik és $\frac{1}{3}$-ból $\frac{1}{5}$ lesz, ha viszont azt tudjuk meg, hogy B nem következett be, akkor ez a valószínűség 1 lesz. Hasonlóképpen, a B valószínűsége $\frac{5}{6}$, ha azonban A már bekövetkezett, akkor ez a valószínűség $\frac{1}{2}$-re változik. Belátható, hogy az A és B események valószínűségei módosulnak egymás bekövetkezésének vagy be nem következésének függvényében. Következésképpen azt mondjuk, hogy A és B egymástól függő események. Látható, hogy $P(A\cdot B) \neq P(A)\cdot P(B)$, mert $A\cdot B = \{2\}$, $P(A\cdot B) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{18}$.

2. Tanulmányozzuk a dobókockával való kísérletezéshez kapcsolódó A és B események függetlenségét, ha:

a) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4,5\}$;

b) $A = \{1,3,5\}$, $B = \{2,4,6\}$.

Megoldás.

a) $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $P(A\,|B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $P(B\,|A) = \frac{2}{3}$, $P(A\,|\bar{B}) = \frac{1}{2}$, $P(B\,|\bar{A}) = \frac{2}{3}$.
Az A és B események közül egyiknek a valószínűsége sem módosul a másik bekövetkezésének vagy be nem következésének függvényében. Tehát az események függetlenek és a (2.7) teljesül, $A\cdot B = \{2,3\}$, $P(A\cdot B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

b) Páros és páratlan szám dobása egyszerre nem következhet be, tehát A és B egymást kizáró események, vagyis $P(A \cdot B) = 0$. Az A és B események bekövetkezésének valószínűsége $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, tehát $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4}$. Mivel $0 = P(A \cdot B) \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4}$, a (2.7) feltétel nem teljesül, ezért az A és B események egymástól függő események.

3. Két urna van egymás mellett. Az egyikben 3 fehér és 5 piros golyó van, a másikban pedig 4 fehér és 6 piros. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két urnából egyszerre egy-egy piros golyót húzunk ki?

Megoldás. Jelöljük A_1-gyel azt az eseményt, hogy az első urnából egy piros golyót húzunk ki, $P(A_1) = \frac{5}{8}$. Jelöljük A_2-vel azt az eseményt, hogy a második urnából piros golyót húzunk ki, $P(A_2) = \frac{6}{10}$. Jelöljük A-val azt az eseményt, hogy a két urnából egyszerre egy-egy piros golyót húzunk ki. Mivel az A_1 és A_2 események egymástól független események,

$$P(A) = P(A_1). \quad P(A_1)P(A_2) = \frac{5}{8} \cdot \frac{6}{10} = \frac{3}{8} = 0,375.$$

2.4. A teljes valószínűség tétele. Bayes tétele

2.3. tétel (A teljes valószínűség tétele). Ha a $P(E)$ eseménytérben az A_1, A_2, ..., A_n események teljes eseményrendszert alkotnak, akkor az eseménytér bármely B eseményének valószínűsége:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B\,|A_1) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B\,|A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B\,|A_i) \tag{2.8}$$

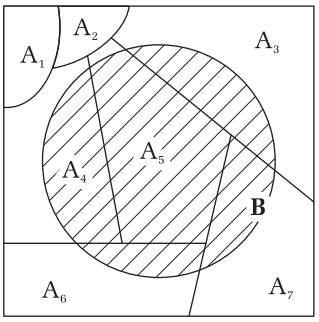
Bizonyítás. Az 1.6. tétel alapján felírjuk a B esemény bázisos előállítását:

$$B = \sum_{i=1}^{n} A_i B = A_1 B + A_2 B + \ldots + A_n B,$$

ahol az $A_i B$, $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, egymást kölcsönösen kizáró események (2.2. ábra), így

$$P(B) = P(A_1 B) + P(A_2 B) + \cdots + P(A_n B).$$

A valószínűségek szorzási szabálya szerint $P(B)$ a (2.2) alakban írható.



2.2. ábra.

2.4. tétel (Bayes tétele). Ha a $P(E)$ eseménytérben az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak, akkor az eseménytér bármely B eseményére, amelyre $P(B) > 0$, érvényes a következő összefüggés:

$$P(A_k \,|B\,) = \frac{P(A_k) \cdot P(B\,|A_k\,)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B\,|A_i\,)}. \tag{2.9}$$

Bizonyítás. A feltételes valószínűség értelmezése szerint

$$P(A_k \,|B\,) = \frac{P(A_k \cdot B)}{P(B)}.$$

Ha a számlálót a (2.2) szorzási szabály alapján, a nevezőt a teljes valószínűség tétele alapján helyettesítjük be, akkor a bizonyítandó egyenlőséghez jutunk.

Gyakorlatok.

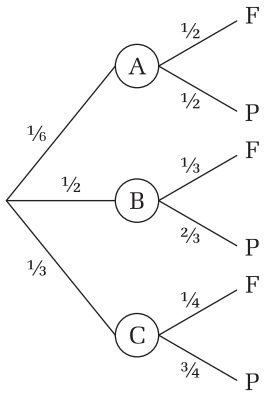
1. Adott három urna, amelyeket A-val, B-vel és C-vel jelölünk. Mindegyikben van egy fehér golyó. Ezenkívül az A urnában egy, a B urnában két, a C urnában három piros golyó van. Az urnák kiválasztásának valószínűsége rendre $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$, illetve $\frac{1}{3}$. Véletlenszerűen kiválasztunk egy urnát és abból kihúzunk egy golyót. Mennyi a valószínűsége annak, hogy piros golyót húztunk?

Megoldás. A feladatnak a mellékelt fadiagram felel meg (2.3. ábra). Ha az A urnát választjuk, akkor a piros golyó kiemelésének valószínűsége $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$. Ha a B urnát választjuk, akkor a piros golyó kiemelésének valószínűsége $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Ha a C urnát választjuk, akkor a piros golyó kiemelésének valószínűsége $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. Így egy piros golyó kiemelésének

valószínűségét a három út valószínűségének az összege adja:

$$P(\text{ piros golyó}) = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3},$$

mivel a piros golyókhoz három kölcsönösen független út vezet.



2.3. ábra.

2. Egy tudományos konferencián 60 nő és 20 férfi vesz részt. A nők közül 15-en kék szeműek, a férfiak közül 5-en. Mi a valószínűsége annak, hogy a véletlenszerűen interjúra felkért nő kék szemű lesz?

Megoldás. Jelöljük A-val azt az eseményt, hogy a kiválasztott személy kék szemű és B-vel azt, hogy a választott személy nő. Annak a valószínűsége, hogy ha a találomra kiválasztott személy nő, akkor az kék szemű, az A esemény B-re vonatkozó feltételes valószínűségével egyenlő.

$$P(A\,|B) = \frac{P(A.B)}{P(B)} = \frac{\frac{15}{80}}{\frac{60}{80}} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

3. Egy üzemben bizonyos termékeket 3 egyforma gépen állítanak elő: az összes termék 25%-át az elsőn, 35%-át a másodikon, 40%-át a harmadikon. A selejtarány a megfelelő sorrendben 2%, 3%, 5%. A minőségellenőrzés két tipikus kérdése: a legyártott termékeket egy helyen tárolva és közülük egyet véletlenszerűen kiválasztva,

a) mi a valószínűsége, hogy a választott termék selejtes?
b) ha ez a termék selejtes, mi a valószínűsége, hogy a második gép gyártotta ?

Megoldás. Jelöljük A_j-vel azt az eseményt, hogy a kiválasztott terméket a j-edik gép gyártotta. Így $P(A_1) = 0,25$, $P(A_2) = 0,35$, $P(A_3) = 0,40$

és A_1, A_2, A_3 teljes eseményrendszert alkotnak, mivel $A_iA_j = \emptyset$, ha $i \neq j$ és $\sum_{i=1}^{n} A_i = E$. Jelöljük a selejtes termék kiválasztásának megfelelő eseményt B-vel. A feltételek alapján $P(B|A_1) = 0,02$, $P(B|A_2) = 0,03$ és $P(B|A_3) = 0,05$. Ezekkel a jelölésekkel

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3) =$$
$$= 0,25 \cdot 0,02 + 0,35 \cdot 0,03 + 0,4 \cdot 0,05 = 0,0355$$

és

$$P(A_2/B) = P(A_2)\frac{P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{0,35.0,03}{0,0355} = 0,295.$$

4. Az évfolyam agrár- és élelmiszeripari gazdaság szakos hallgatóinak 26%-a, a könyvelés- és gazdálkodási informatika szakos hallgatóinak 52%-a és az általános közgazdaság szakos hallgatók 57%-a szerezte meg a 30 kreditpontot. A fenti szakos hallgatók aránya rendre 32%, 35%, illetve 33%.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy találomra kiválasztott hallgató megszerezte a 30 kreditpontot?

b) Mi a valószínűsége annak, hogy a 30 kreditpontot szerzett hallgatók közül találomra kiválasztott diák agrár szakos?

Megoldás.

a) Legyen B a kérdéses esemény. Az A_1 esemény jelentse azt, hogy a kiválasztott hallgató agrár- és élelmiszeripari gazdaság szakos hallgató, A_2 azt, hogy könyvelés- és gazdálkodási informatika szakos a kiválasztott hallgató, és A_3 azt, hogy általános közgazdaság szakos a kiválasztott hallgató. Így a feltételek alapján:

$$P(A_1) = \frac{32}{100}, \quad P(A_2) = \frac{35}{100}, \quad P(A_3) = \frac{33}{100}.$$

A B esemény A_1-re vonatkozó feltételes valószínűsége

$$P(B|A_1) = \frac{26}{100},$$

és hasonlóan,

$$P(B|A_2) = \frac{52}{100}, \quad P(B|A_3) = \frac{57}{100}.$$

A teljes valószínűség tétele alapján

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)\cdot P(B\,|A_1) + P(A_2)\cdot P(B\,|A_2) + \\ &\quad + P(A_3)\cdot P(B\,|A_3) = \\ &= \frac{32}{100}\cdot\frac{26}{100} + \frac{35}{100}\cdot\frac{52}{100} + \frac{33}{100}\cdot\frac{57}{100} = 0,4533. \end{aligned}$$

b) Annak a valószínűsége, hogy a 30 kredit pontot elért hallgató éppen agrár- és élelmiszeripari gazdaság szakos hallgató legyen

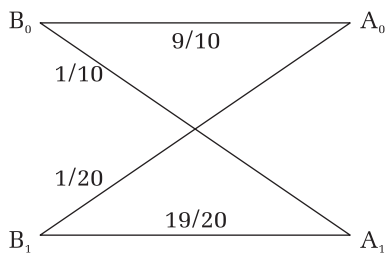
$$P(A_1\,|B) = \frac{P(A_1)\cdot P(B\,|A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{32}{10}\cdot\frac{26}{100}}{0,4533} = \frac{0,0832}{0,4533} = 0,1835.$$

Hasonlóan

$$\begin{aligned} P(A_2\,|B) &= \frac{P(A_2)\cdot P(B\,|A_2)}{P(B)} = \frac{\frac{35}{100}\cdot\frac{52}{100}}{0,4533} = 0,4015 \\ P(A_3\,|B) &= \frac{P(A_3)\cdot P(B\,|A_3)}{P(B)} = 0,4149. \end{aligned}$$

5. A hírközlő csatornán a 0-k $\frac{1}{10}$-e egyessé torzul, míg az egyesek $\frac{1}{20}$-a nullává torzul. A leadott jelek közül a 0-k és 1-ek aránya 5 : 4. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy ha a vevő oldalon 0-t kapnak, akkor az adó 0-t továbbított.

Megoldás. Jelölje A_0 azt az eseményt, hogy a vevő 0-t észlel, A_1 azt, hogy a vevő 1-et észlel, B_0, hogy az adó 0-t küld, illetve B_1, hogy az adó 1-et küld. Elkészítjük a mellékelt diagramot.



2.4. ábra.

A feltételek alapján $P(B_0) = \frac{5}{9}$, $P(B_1) = \frac{4}{9}$, tehát

$$P(B_0\,|A_0\,) = \frac{P(B_0)\cdot P(A_0\,|B_0\,)}{P(B_0)P(A_0\,|B_0\,) + P(B_1)P(A_0\,|B_1\,)} =$$
$$= \frac{\frac{5}{9}\cdot\frac{9}{10}}{\frac{5}{9}\cdot\frac{9}{10}+\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{20}} = 0,865.$$

6. Egy raktárba az A_1, A_2 és A_3 gyümölcsösökből szállítottak almát. A raktár készletének 25%-a az A_1 gyümölcsösből, 35%-a az A_2 gyümölcsösből és 40%-a az A_3 gyümölcsösből érkezett. Az általános tapasztalat szerint az A_1 gyümölcsösből szállított alma 10%-a férges. Az A_2 gyümölcsös esetében a selejtarány 15%-os, és az A_3 gyümölcsös esetében 20%-os a selejt.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a raktárból egy találomra kivett alma férges legyen?

b) Mi a valószínűsége, hogy a selejtes alma rendre az A_1, A_2, vagy az A_3 gyümölcsösből származik?

Megoldás.

a)

$$P\,(B) = P\,(A_1)\cdot P\,(B\,|A_1\,) + P\,(A_2)\cdot P\,(B\,|A_2\,) +$$
$$+\,P\,(A_3)\cdot P\,(B\,|A_3\,) =$$
$$= \frac{25}{100}\cdot\frac{10}{100} + \frac{35}{100}\cdot\frac{15}{100} + \frac{40}{100}\cdot\frac{20}{100} = 0,1575.$$

b)

$$P\,(A_1\,|B\,) = \frac{P(A_1)\cdot P(B\,|A_1\,)}{P(B)} = \frac{\frac{25}{100}\cdot\frac{10}{100}}{0,1575} = 0,1587,$$
$$P(A_2\,|B\,) = \frac{0,0525}{0,1575} = 0,(3) \quad \text{és} \quad P(A_3\,|B\,) = 0,5079.$$

7. Egy vizsgán a 45 vizsgatétel között 10 „jó" tétel van (vagyis mindenki ebből a tízből szeretne húzni). Mennyi a valószínűsége annak, hogy az első diák nem húz „jó" tételt, a második „jó" tételt húz és a harmadik nem húz „jó" tételt? (Megjegyzés: a kihúzott tételeket nem teszik vissza.)

Megoldás. Jelöljük A_1-gyel, A_2-vel és A_3-mal a következő eseményeket:

A_1 : az első diák nem húz „jó" tételt;

A_2 : a második diák „jó" tételt húz;

A_3 : a harmadik diák nem húz „jó" tételt.

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \quad \text{és} \quad P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)},$$

tehát

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot P(A_1 \cap A_2) = \\ &= P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_1). \end{aligned}$$

De $P(A_1) = \frac{35}{45} = \frac{7}{9}$, $P(A_2|A_1) = \frac{10}{44} = \frac{5}{22}$ és $P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{9}{43}$, mert az A_1 bekövetkezése után a 44-ből 10 „jó" tétel marad, és az A_1 és A_2 bekövetkezése után a 43 tételből pontosan 9 „jó" tétel marad. Eszerint mindhárom esemény bekövetkezésének a valószínűsége

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{9}{43} \cdot \frac{5}{22} \cdot \frac{7}{9} = \frac{35}{946} \cong 0,037.$$

8. 32-lapos magyar kártyából 3 lapot húzunk egymás után, visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az első kihúzott lap alsó, a második felső és a harmadik ismét alsó?

Útmutatás. Alkalmazzuk a valószínűségek szorzási szabályát. Az előírt feltételek $\frac{1}{620}$ valószínűséggel teljesülnek.

9. Egy egyetemi vizsgán az A-szakos hallgatók 70%-a vizsgázik sikeresen, a B-szakos hallgatóknak pedig 45%-a. Az A-szakos hallgatók az évfolyam 60%-át teszik ki. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy találomra kiválasztott hallgató sikeresen vizsgázik?

Útmutatás. Alkalmazzuk a teljes valószínűség tételét. A találomra kiválasztott hallgató $\frac{3}{5}$-öd valószínűséggel vizsgázik sikeresen.

10. Két dobozban azonos fajta áru van. Az első dobozban 30, a másodikban 15 darab van. Mindkét dobozban egy-egy hibás darab van. Az első dobozból véletlenszerűen kiesik egy darab, és azt átteszik a másodikba. Ezután a második dobozból választunk találomra egyet és ezt megvizsgáljuk. Mi a valószínűsége annak, hogy ez a darab selejtes?

Felelet. Alkalmazzuk a teljes valószínűség tételét. Annak a valószínűsége, hogy a második dobozból selejtest veszünk ki $\frac{31}{480} \simeq 0,06$.

11. Egy cukrászati laborban készült sütemények 96%-a felel meg a súlyszabványnak. A minőségellenőrzés során az elkészült sütemények egy részét megvizsgálják, a súly szempontjából szabványos darabok 98%-a bizonyul alakra jónak, a nem szabványos súlyú darabokból pedig

5%-ot nyilvánítanak alakra jónak. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy adag sütemény, amely a minőségellenőrzésen alakra jónak bizonyul, megfelel a súlyszabványnak?

Útmutatás. A-val jelöljük azt az eseményt, hogy egy sütemény alakra jónak bizonyult a minőségellenőrzésen, és B az az esemény, hogy a darab súlya szabványos, $\overline{B}$ pedig azt jelenti, hogy a sütemény súlya nem szabványos. A $P(B|A) \simeq 0,998$ feltételes valószínűséget Bayes tételével számítjuk ki.

12. 10 azonos alakú doboz közül az első 9-ben 4–4 korondi tányér van, mégpedig 2 zöld és 2 kék. A tizedik dobozban 5 zöld és 1 kék tányér van. Az egyik találomra választott dobozból véletlenszerűen kiveszünk egy tányért. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ez a tizedik dobozból való, ha a kivett tányér zöld?

Útmutatás. Jelöljük A-val azt az eseményt, hogy zöldet veszünk ki. Legyen B_j az az esemény, hogy a j-edik dobozból választottuk. Annak a valószínűsége, hogy egy zöld tányért éppen a tizedik dobozból húzunk ki, Bayes tételével számítható ki: $P(B_{10}|A) = \frac{5}{32}$.

3. FEJEZET

DISZKRÉT VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK ÉS JELLEMZŐIK

Kockadobás esetén minden elemi eseményhez hozzárendelhető 1-től 6-ig egy természetes szám, ha az emberek testmagasságát vizsgáljuk, akkor a lehetséges esetek szintén számokkal fejezhetők ki. Másrészt viszont vizsgálhatunk olyan eseményeket, amelyek nem mennyiségi ismérvekhez kapcsolódnak, például, ha azt szeretnénk leírni, hogy bolygónk lakosságának hány százaléka nő és hány százaléka férfi. Ebben az esetben is a lehetséges esetekhez hozzárendelhetünk számokat, az egyszerűbb kezelés (illetve adatfeldolgozás) céljából. Így gyakorlatilag az eseménytér minden elemi eseményéhez valós számokat rendelünk hozzá. Vannak kísérletek, amelyeknél nem elégséges csak számokat rendelni az elemi eseményekhez, hanem számpárokat, számhármasokat vagy általában szám n-eseket rendelünk hozzájuk.

3.1. értelmezés. A $P(E)$ eseménytér egy teljes eseményrendszerének mindegyik eseményéhez hozzárendelhetünk egy $\mathbb{R}^d$-beli elemet. Az így értelmezett függvényt *valószínűségi változónak* nevezzük és X-szel jelöljük.

Ha $d = 1$, akkor *egydimenziós valószínűségi változóról* beszélünk és általában d dimenziós valószínűségi változóról. A továbbiakban csak akkor lesz szó többdimenziós valószínűségi változókról, ha ezt kihangsúlyozzuk, különben a valószínűségi változó kifejezésen egydimenziós valószínűségi változót értünk.

3.2. értelmezés. Ha az X valószínűségi változó értékkészlete véges vagy megszámlálhatóan végtelen halmaz $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, akkor az X-et *diszkrét valószínűségi változónak* nevezzük.

3.1. Diszkrét valószínűségi változók eloszlása

3.3. értelmezés. Legyen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ egy kísérlet teljes eseményrendszere. Ha az A_i eseményhez az $x_i = X(A_i)$ számot rendeljük hozzá és az A_i esemény valószínűsége $P(A_i) = p_i$, akkor az X valószínűségi változó *eloszlása* az

$$X \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}.$$

Tehát a felső sor a valószínűségi változó lehetséges értékeit tartalmazza, és minden érték alá azt a valószínűséget írjuk, amellyel az X felveszi az illető értékét.

Mivel az $X = x_1, X = x_2, \ldots, X = x_n$ események páronként kizárják egymást, de egyikük mindenképpen bekövetkezik, felírhatjuk, hogy

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \ldots + P(X = x_n) = 1,$$

vagyis

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} P(X = x_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = 1.$$

Általában a teljes eseményrendszerhez tartozó valószínűségek összességét *valószínűség-eloszlásnak* nevezzük.

Példák a gyakorlati életben előforduló valószínűségi változókra: egy adott áru szabadpiaci ára; színházi előadáson a nézők száma; valamelyik úton adott idő alatt áthaladó kocsik száma; egy hektárnyi földön termő burgonya mennyisége; egy város napi kenyérfogyasztása stb.

Példa. A játékkocka esetében a kísérlet hat azonos valószínűségű elemi eseményt eredményez, ami egyben egy teljes eseményrendszert is képez. Legyen a valószínűségi változó értéke a kocka felső lapján lévő pontszám. Ábrázoljuk a valószínűségi változó eloszlását.

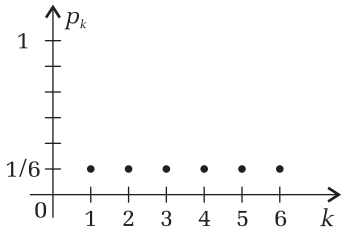
Megoldás. Az X valószínűségi változó a k ($k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) értékeket a következő valószínűséggel veszi fel:

$$p_k = P(X = k) = \frac{1}{6}, \quad k \in \{1, 2, \ldots, 6\}.$$

Az X eloszlása

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Ennek az ábrázolása látható a 3.1. ábrán.



3.1. ábra. *Egyenletes eloszlás grafikus képe*

A játékkockával való kísérletezés során az $A_1 = \{1, 3, 5\}$ és $A_2 = \{2, 4, 6\}$ szintén egy teljes eseményrendszert képez. Ha A_1-hez hozzárendeljük az 1-et és A_2-höz a 0-t, akkor az így kapott Y valószínűségi változó eloszlása

$$Y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

A gyakorlatban különféle valószínűségeloszlások fordulnak elő. Ezek közül a legjelentősebbek a következők:

1. Karakterisztikus eloszlás (vagy *indikátoreloszlás*) lehetséges értékei az 1 és a 0, valószínűségeloszlása pedig:

$$X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Tehát $p = P(X = 1)$, ha az A esemény következik be, $1 - p = P(X = 0)$, ha az $\bar{A}$ esemény következik be.

2. Egyenletes eloszlás. Olyan kísérletek leírására használjuk, amelyeknél az elemi események egyenlő valószínűségűek. A valószínűségi változó eloszlása

$$X \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

3. Geometriai eloszlás. Tegyük fel, hogy egy kísérletet addig ismétlünk, amíg a kísérlethez rendelt p valószínűségű A esemény bekövetkezik. Ha az ismétlések számát tekintjük valószínűségi változónak, akkor az így kapott valószínűségi változót nevezzük geometriai eloszlásúnak. A valószínűségi változó eloszlása

$$X \begin{pmatrix} k \\ p_k \end{pmatrix}, \quad k \geqslant 1, \quad \text{ahol} \quad p_k = (1-p)^{k-1} \cdot p.$$

4. Az X **hipergeometrikus eloszlású**, ha lehetséges értékei a $0, 1, 2, \dots, n$ számok és valószínűségeloszlása

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ p_0 & p_1 & \dots & p_k & \dots & p_n \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

ahol

$$p_k = P(X = k) = \frac{\begin{pmatrix} s \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-s \\ n-k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Bizonyítható, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} s \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-s \\ n-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix},$$

ahonnan következik, hogy $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k = 1$.

Megjegyzés. Ha egy urnában N tárgy található, amelyek közül s darab valamilyen kitüntetett tulajdonsággal rendelkezik, és kiveszünk n tárgyat az urnából, akkor a kivett tárgyak közt megjelenő kitüntetett tulajdonságúak számának mint valószínűségi változónak az eloszlása hipergeometrikus.

5. Binomiális eloszlás. Tekintsünk egy kísérlethez kapcsolódó A eseményt, amelynek a valószínűsége p. Ha a kísérletet n-szer megismételjük, és az A esemény megjelenésének a számát tekintjük X_n valószínűségi változónak, akkor az X_n eloszlása

$$X_n\begin{pmatrix} k \\ C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \end{pmatrix}_{0 \leqslant k \leqslant n}. \tag{3.3}$$

Könnyen belátható, hogy $\sum\limits_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1$.

Példák.

1. A születések statisztikai vizsgálata szerint fiú születésének a valószínűsége $0,51$. Nyilvánvalóan egy újszülött neme független a többi gyermek nemétől. Mi a valószínűsége, hogy egy családban 6 gyermek közül 4 fiú legyen?

Megoldás. A fiúk száma binomiális eloszlású. Így

$$P(X = 4) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} 0,51^4 \cdot 0,49^2 \simeq 0,24.$$

2. Határozzuk meg, hogy binomiális eloszlás esetén a $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ valószínűség ($q = 1-p$) milyen k-ra lesz maximális.

Megoldás. A valószínűségek diszkrét sorozatában vizsgáljuk két egymás utáni valószínűség hányadosát:

$$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} = \left(\frac{n+1}{k} - 1\right)\frac{p}{q}.$$

Ha $(n+1)p > k$, akkor $x_k > x_{k-1}$, míg ha $(n+1)p < k$, akkor $x_k < x_{k-1}$, tehát $k = [(n+1)p]$-nél van az egyetlen maximum, ha $(n+1)p \notin \mathbb{N}$ és $(n+1)p \in \mathbb{N}$ esetén az $(n+1)p - 1$ és $(n+1)p$-nek megfelelő valószínűségek egyenlők.

6. Poisson-eloszlás. A $\lambda > 0$ paraméterű X valószínűségi változót *Poisson-féle eloszlásúnak* nevezzük (*a gyakorlat egyik legfontosabb eloszlása*), ha a valószínűségi változó eloszlása

$$X_n \begin{pmatrix} x_k \\ p_k \end{pmatrix}, \quad p_k = P(X_n = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k \geqslant 0. \tag{3.4}$$

Igazoljuk, hogy a (3.4)-re jogos az „eloszlás" elnevezés, mivel az ott szereplő valószínűségek összege 1. Valóban,

$$\sum P(X=k) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1.$$

(Figyelembe vettük, hogy $e^{\lambda} = 1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots + \frac{\lambda^k}{k!} + \ldots$ éppen az e^x függvény mindenütt konvergens hatványsorának $x = \lambda$ helyen vett értéke.)

Bizonyítható, hogy a binomiális eloszlás aszimptotikusan tart a Poisson-eloszláshoz, ha $n \to \infty$, $p \to 0$ és $np = \lambda$ (állandó). Valóban, $P(n,k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ felírható a következőképpen:

$$P(n,k) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$
$$= \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k},$$

tehát $\lim\limits_{n\to\infty} P(n,k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

Példa. Valamely szövőgépnél $5 \cdot 10^{-3}$ annak a valószínűsége, hogy T idő alatt 1 szál elszakad.

a) Ha 800 szál van, hány szakadás a legvalószínűbb T idő alatt? (Az egyes szálak szakadása független egymástól.)

$$P(X = k) = \binom{800}{k} \left(5 \cdot 10^{-3}\right)^k \left(1 - 5 \cdot 10^{-3}\right)^{800-k}, \ 0 \leqslant k \leqslant 800.$$

A valószínűség maximális, ha $k = [(n+1)p] = 801 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = [4,005] = 4$. Megjegyezzük, hogy $\lambda = n \cdot p \simeq 4$.

b) Mi a valószínűsége legfeljebb 10 szakadásnak?

$$P(X \leqslant 10) = e^{-4} \sum_{k=0}^{10} \frac{\lambda^k}{k!} \simeq 0,99.$$

Megjegyzés. Ha ismerjük egy diszkrét valószínűségi változó eloszlását, akkor az erre vonatkozó feladatok megoldása általában már könnyű. A gyakorlatban ugyanis legtöbbször az $X < a$, vagy $b \leqslant X < c$, vagy $X > d$ alakú események valószínűségét kell meghatározni. Ezeket pedig – ha $x_1, x_2, \ldots$ az X lehetséges értékeit jelölik – a következőképpen számíthatjuk ki:

$$P(X < a) = \sum_{x_i < a} P(X = x_i)$$

$$P(b \leqslant X < c) = \sum_{b \leqslant x_i < c} P(X = x_i),$$

$$P(X > d) = \sum_{x_i > d} P(X = x_i).$$

3.2. Diszkrét valószínűségi változók eloszlásfüggvénye

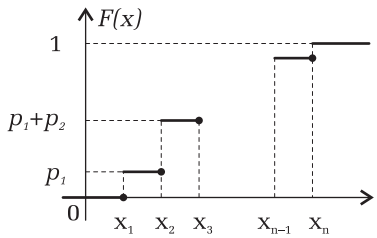
3.4. értelmezés. Az X diszkrét valószínűségi változó esetében az $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, $F(x) = P(X < x)$ függvényt az X *eloszlásfüggvény*ének nevezzük.

Ha $X \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}$ az X eloszlása, akkor

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

ahol az összegezést elvégezzük mindazon i-kre, amelyekre $x_i < x$. Így az $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$ diszkrét valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvénye a következő:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqslant x_1 \\ p_1, & \text{ha } x_1 < x \leqslant x_2 \\ p_1 + p_2, & \text{ha } x_2 < x \leqslant x_3 \\ \vdots & \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_k, & \text{ha } x_k < x \leqslant x_{k+1} \\ 1, & \text{ha } x > x_n \end{cases}$$



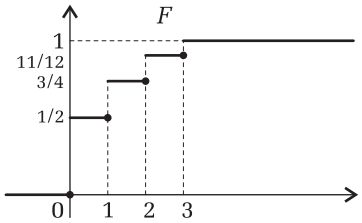
3.2. ábra.

Példa. Egy útkereszteződésnél az évi balesetek száma az alábbi eloszlás szerint történik:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

Ábrázoljuk az eloszlásfüggvényt.

Az értelmezés alapján $F(x) = 0$, ha $x \leqslant 0$, $F(x) = \frac{1}{2}$, ha $0 < x \leqslant 1$, $F(x) = \frac{3}{4}$, ha $1 < x \leqslant 2$, $F(x) = \frac{11}{12}$, ha $2 < x \leqslant 3$ és $F(x) = 1$, ha $3 < x$. Az F grafikus képe a mellékelt ábrán látható.



3.3. ábra.

Megjegyzés. Diszkrét valószínűségi változók eloszlásfüggvénye növekvő és balról folytonos, a $-\infty$-ben a határértéke 0 és $+\infty$-ben a határértéke 1.

3.3. Műveletek diszkrét valószínűségi változókkal

Tekintsük az $X\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$ és $Y\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_m \end{pmatrix}$ valószínűségi változókat. Az X-et és Y-t függetlennek nevezzük, ha értékeiket egymástól függetlenül veszik fel, vagyis ha minden $1 \leqslant i \leqslant n$ és $1 \leqslant j \leqslant m$ esetén az $X = x_i$ és $Y = y_j$ események függetlenek. Ez pontosan azt jelenti, hogy minden $1 \leqslant i \leqslant n$ és $1 \leqslant j \leqslant m$ esetén teljesül a

$$P\left(X = x_i \text{ és } Y = y_j\right) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) = p_i q_j$$

egyenlőség. Ha X és Y függetlenek, akkor értelmezzük az $X + Y$ ($X \cdot Y$, X/Y stb.) valószínűségi változókat, és ezeknek ki tudjuk számítani az eloszlását, mert az $x_i + y_j$ összeg megjelenésének valószínűsége $p_i q_j$, tehát írhatjuk, hogy $X + Y$ eloszlása $X + Y\begin{pmatrix} x_i + y_j \\ p_i q_j \end{pmatrix}_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}}$. Hasonlóan, az $X \cdot Y$ eloszlása $XY\begin{pmatrix} x_i y_j \\ p_i q_j \end{pmatrix}_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}}$, az X/Y eloszlása $X/Y\begin{pmatrix} x_i/y_j \\ p_i q_j \end{pmatrix}_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}}$, ha $y_j \neq 0$, $1 \leqslant j \leqslant m$ esetén. Természetesen, ha az $x_i + y_j$ alakú eredmények közt vannak azonosak, akkor a nekik megfelelő valószínűségeket összeadjuk.

Példa. Tekintsük az $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ és $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ valószínűségi változókat. Írhatjuk, hogy

$$X + Y = \begin{pmatrix} -1+1 & -1+0 & 0+1 & 0+0 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$X \cdot Y = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 & -1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 & 0 \cdot 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Ha a változók nem függetlenek, akkor nem ennyire egyszerű az eredmény eloszlásának meghatározása, de a műveleteket azért értelmezhetjük. Sőt

egy vagy akár több tetszőleges valószínűségi változó segítségével függvényeket is értelmezhetünk (egy- vagy többváltozós függvényeket).

Példa. Ha X eloszlása $X\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, akkor $X^2 - X$ eloszlása $X^2 - X\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, mert az $X = 1$ és $X = 0$ esetekben $X^2 - X$ mindig 0.

3.4. Diszkrét valószínűségi változók várható értéke

Legyen X olyan diszkrét valószínűségi változó, amely csak az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ értékeket veheti fel, rendre $p_1, p_2, \ldots, p_n$ valószínűséggel. A kérdés a következő: mi az X által felvett értékek „átlaga", ha az X-re vonatkozó kísérletet „elég sokszor" elvégezzük? Tegyük fel, hogy az X-re vonatkozóan összesen N számú kísérletet végzünk. Ha e kísérletek során az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ értékek rendre $N_1, N_2, \ldots, N_n$-szer következnek be, akkor a valószínűségi változó értékeinek az átlaga

$$M(x) = \frac{N_1x_1 + N_2x_2 + \ldots + N_nx_n}{N_1 + N_2 + \ldots + N_n} = \frac{N_1}{N}x_1 + \frac{N_2}{N}x_2 + \ldots + \frac{N_n}{N}x_n. \quad (3.6)$$

Korábbi feltevéseink szerint az $\frac{N_i}{N}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ relatív gyakoriságok, elég nagyszámú kísérletet feltételezve, tetszőleges pontossággal megközelítik a megfelelő p_i valószínűségeket. Ennek következtében a (3.6) egyenlőségben kapott súlyozott számtani közép is egy meghatározott M^* számérték körül ingadozik, és *várható*, hogy a ténylegesen megvalósult $x_1, x_2, \ldots, x_n$ értékek súlyozott átlaga az M^* értéket jól megközelíti.

3.5. értelmezés. Legyenek az X valószínűségi változó lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ és a megfelelő valószínűségek rendre $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Ekkor az

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{k=1}^{n} x_kp_k \quad (3.7)$$

kifejezést X *várható értékének* nevezzük.

3.4.1. A várható érték tulajdonságai

A várható érték tulajdonságai

a) $M(c) = c$, ha $c \in \mathbb{R}$ (itt c egyszerre jelöl egy valós számot is és azt a valószínűségi változót is, amely csak a c értéket veheti fel);

b) $M(cX) = cM(X)$ (hasonlóságinvariancia);
c) $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$;
d) $M(X - M(X)) = 0$.

Bizonyítás.

a) Ha X csak a c értéket veszi fel, akkor $P(X = c) = 1$ és ekkor $M(c) = 1 \cdot c = c$.

b) Írhatjuk, hogy $M(cX) = \sum_{k=1}^{n} cx_k p_k = c \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = cM(X)$.

c)

$$M(X+Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i + y_j)p_i q_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i p_i q_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j q_j p_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \left(\sum_{j=1}^{m} q_j\right) + \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\sum_{j=1}^{m} y_j q_j\right) = M(X) + M(Y),$$

mert $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ és $\sum_{j=1}^{m} q_j = 1$.

d) $M(X - M(X)) = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0$.

3.5. Diszkrét valószínűségi változó szórása, szórásnégyzete

Gyakorlati és elméleti alkalmazások szempontjából egyaránt fontos kérdés, hogy az X valószínűségi változó a várható érték körül milyen ingadozást mutat. Az előbbi paragrafusban láttuk, hogy az átlagtól való eltérések átlaga mindig 0, ezért az ingadozás mérésére valami más mutatóra van szükség. *Az ingadozás* mértékéről a valószínűségi változó szórása nyújt tájékoztatót.

3.6. értelmezés. Az X valószínűségi változó *szórásnégyzete* az $[X - M(X)]^2$ változó várható értéke, azaz

$$D^2(X) = M\left([X - M(X)]^2\right),$$

szórása pedig

$$D(X) = \sqrt{M\left([X - M(X)]^2\right)}.$$

Az értelmezés alapján láthatjuk, hogy

$$D^2(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (x_i - M(X))^2.$$

A szórás, illetve a szórásnégyzet kiszámítását megkönnyítik a következő tételek.

3.7. tétel. Bármely X valószínűségi változóra

$$D^2(X) = M(X^2) - M^2(X), \tag{3.8}$$

ha a jobb oldalon lévő várható értékek léteznek.

Bizonyítás. Az értelmezés alapján

$$D^2(X) = M\left[(X - M(X))^2\right] = M\left[X^2 - 2XM(X) + M^2(X)\right].$$

Mivel $M(X)$ konstans, következik, hogy

$$D^2(X) = M\left(X^2\right) - 2M(X) \cdot M(X) + M(X)^2 = M\left(X^2\right) - M^2(X).$$

Megjegyzés. A szórást a várható érték kiszámítására vezethetjük vissza.

3.8. tétel. Ha $a \neq 0$ és $b \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós szám, akkor

$$D(aX + b) = |a| \cdot D(X).$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} D^2(aX+b) &= M\left[(aX+b)^2\right] - M(aX+b)^2 = \\ &= a^2 M\left(X^2\right) + 2abM(X) + b^2 - [aM(X) + b]^2 = \\ &= a^2\left[M\left(X^2\right) - M^2(X)\right] = a^2 \cdot D(X)^2, \end{aligned}$$

ahonnan négyzetgyökvonás után kapjuk a tétel állítását.

Példa. Számítsuk ki az $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$ karakterisztikus eloszlású valószínűségi változó szórását.

Megoldás. $M(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$, $M(X^2) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) = p$. Tehát $D^2(X) = M(X^2) - M^2(X) = p - p^2 = p(1-p) = p.q$, és innen

$$D(X) = \sqrt{pq}.$$

Megjegyzések.

1. *A medián fogalma.* Azt az x számot, amelyre $F(x) = \frac{1}{2}$, az X valószínűségi változó *mediánjának* nevezzük (feltéve, hogy ilyen x létezik). Abban az esetben, ha több megoldása van az $F(x) = \frac{1}{2}$ egyenletnek, akkor a megoldások halmaza egy intervallum (mert F növekvő), és ilyenkor ennek az intervallumnak a középpontját tekintjük mediánnak.

2. *A módusz fogalma.* Ha az X diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots, x_n$, és a $p_i = P(X = x_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ valószínűségek között p_k a *legnagyobb*, akkor az x_k számot a valószínűségi változó *móduszának* nevezzük. Ha csak egy ilyen x_k van, akkor *unimodális* eloszlásról beszélünk, ellenkező esetben az eloszlást *plurimodális*nak nevezzük.

3.1. táblázat. *Eloszlásmodellek diszkrét eloszlású valószínűségi változók esetében*

A valószínűségi változók eloszlása	**Várható értéke**	**Szórása**
1. Karakterisztikus eloszlás		
$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$	$M(X) = 1 \cdot p$	$D(X) = \sqrt{pq}$
$D^2(X) = M\left(X^2\right) - M(X)^2 = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q - p^2 = p(1-p) = p \cdot q$		
Mikor alkalmazzuk az adott eloszlásmodellt? A valószínűségi változó csak a 0 és az 1 értéket veszi fel.		
2. Egyenletes eloszlás		
$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$	$M(X) = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$	$D^2(X) = = M\left(X^2\right) - (M(X))^2$
$D^2(X) = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^2$		
Mikor alkalmazzuk az adott eloszlásmodellt? Az elemi események egyenlő valószínűségűek.		
3. Geometriai eloszlás		
$X = \begin{pmatrix} k \\ p_k \end{pmatrix}_{k \geqslant 1}$, ahol $p_k = (1-p)^{k-1} \cdot p$	$M(X) = \frac{1}{p}$	$D(X) = \frac{\sqrt{q}}{p}$, $q = 1 - p$
$m = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k \cdot p(1-p)^{k-1} = p \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dq}(q)^k = p \frac{d}{dq} \sum\limits_{k} (q)^k = p \frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right) = p \frac{1-q+q}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$		
Mikor alkalmazzuk az adott eloszlásmodellt? Azt vizsgáljuk, hogy egy esemény hányadik alkalommal következik be először.		

A valószínűségi változók eloszlása	**Várható értéke**	**Szórása**

4. Hipergeometriai eloszlás

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ p_0 & p_1 & \dots & p_k = \dfrac{\binom{s}{k}\binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}} & \dots & p_n \end{pmatrix} \quad M(X) = np, \quad p = \tfrac{s}{N} \qquad D^2(X) = npq\tfrac{N-n}{N-s}$$

$$M(X) = \sum_{k=0}^{n} k \frac{\binom{s}{k} \cdot \binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{s}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{n} \binom{s-1}{k-1} \binom{N-s}{n-k} =$$

$$= \frac{s}{\binom{N}{n}} \cdot \binom{N-1}{s-1} = s \cdot \tfrac{n}{N} = n \cdot p.$$

Felhasználtuk a következő azonosságot: $\sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \binom{N-s}{n-k} = \binom{N}{n}$, vagyis az $(1+x)^s(1+s)^{N-s} = (1+x)^N$ egyenletnek mindkét oldalán x^n együtthatói egyenlők.

Mikor alkalmazzuk az adott eloszlásmodellt?
Egy dobozban N tárgy van, köztük s hibás, $s \leqslant N$. Visszatevés nélkül kiválasztunk n tárgyat és a hűselejtesek számát tekintjük valószínűségi változónak.

5. Binomiális eloszlás

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ p_0 & p_1 & \dots & p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} & \dots & p_n \end{pmatrix} \quad M(X) = np \qquad D(X) = \sqrt{npq}$$

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p^k \cdot q^{n-k} = \tfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ ha } np = \lambda > 0$$

$$\tfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \tfrac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \tfrac{\lambda}{n}\right)^n \tfrac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} \to \tfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

Mikor alkalmazzuk az adott eloszlásmodellt?
Egy K kísérletet n-szer megismétlünk és egy p valószínűségű A esemény megjelenésének a számát tekintjük valószínűségi változónak.

6. Poisson-eloszlás

$$X = \begin{pmatrix} k \\ \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{pmatrix}_{k \geqslant 0} \qquad M(X) = \lambda \qquad D(X) = \sqrt{\lambda}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1,$$

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \tfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda.$$

Mikor alkalmazzuk az adott eloszlásmodellt?
A binomiális eloszlás határesete, amikor $n \to \infty$ és np állandó.

4. FEJEZET

FOLYTONOS VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK ÉS JELLEMZŐIK

A diszkrét valószínűségi változóhoz hasonlóan akkor is értelmezhetjük az eloszlásfüggvényt, ha a változó megszámlálhatatlanul sok értéket vesz fel (például egy intervallumban tetszőleges értéket).

4.1. értelmezés. Ha X egy tetszőleges valószínűségi változó, akkor az

$$F : \mathbb{R} \to [0,1], \quad F(x) = P(X < x)$$

összefüggéssel értelmezett függvényt az X eloszlásfüggvényének nevezzük.

4.2. értelmezés. Azokat a valószínűségi változókat, melyekhez rendelt eloszlásfüggvény folytonos és majdnem mindenütt deriválható, *folytonos valószínűségi változóknak* nevezzük (ez az értelmezés többrendbeli pontatlanságot tartalmaz, de a mi céljainknak megfelel).

Példák.

1. A villanyégő meghibásodásának pillanata $t \in [0, 10000]$ óra $(41,6$ nap).
2. A Duna vízállása Giurgiunál.

4.1. Az eloszlásfüggvény tulajdonságai

1. F növekvő függvény.

Bizonyítás. Valóban, ha $a < b$, akkor az $X < a$ eseményből következik az $X < b$ esemény is, vagyis $P(X < a) \leqslant P(X < b)$, tehát $F(a) \leqslant F(b)$.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ és $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Bizonyítás. Mivel $X < -\infty$ lehetetlen esemény, következik, hogy $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$. Hasonlóan, mivel X értékei csak véges számok lehetnek, következik, hogy $X < \infty$ biztos esemény, tehát $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$.

3. $P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a)$.

Bizonyítás. Valóban, az $X < a$, $a \leqslant X < b$, $X < b$ események között fennáll a következő összefüggés: $(X < a) + (a \leqslant X < b) = X < b$, ahonnan következik, hogy

$$P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a).$$

4.2. Folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

4.3. értelmezés. Legyen az X folytonos valószínűségi változónak F az eloszlásfüggvénye. Az F függvény deriváltját az X *sűrűségfüggvényének* nevezzük és f-fel jelöljük (feltételezhetjük, hogy ez a függvény az egész $\mathbb{R}$-en értelmezett).

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A gyakorlatban előforduló folytonos valószínűségi változók nagy része olyan, hogy eloszlásfüggvényük deriválható és a derivált $F' = f(x)$ folytonos függvény. A sűrűségfüggvény értelmezéséből következik, hogy

$$F(x) - F(-\infty) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

ami lehetőséget ad a sűrűségfüggvényről az eloszlásfüggvényre való átmenetre. Az eloszlásfüggvény és a sűrűségfüggvény közötti kapcsolatból következnek a sűrűségfüggvény tulajdonságai is.

4.4. tétel. Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, akkor

a) $f(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

b) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$;

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$;

d) $P(a \leqslant X < b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$;

e) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Bizonyítás.

a) Valóban, mivel az F növekvő függvény, következik, hogy deriváltja nem negatív.

b) A sűrűségfüggvény értelmezéséből következik.

c) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, mert $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$.

d) $P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ (a Newton–Leibniz képlet alapján).

e) Ez a tulajdonság a c) következménye, mivel ellenkező esetben $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ nem lenne konvergens.

Példa.

a) Milyen A mellett lehet sűrűségfüggvény az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 2 \\ \frac{A}{(1-x)^4}, & \text{ha } x \geqslant 2 \end{cases}$$

függvény?

b) Számítsuk ki a $P\,(2 \leqslant X \leqslant 3)$ valószínűséget.

c) Írjuk fel X eloszlásfüggvényét.

Megoldás.

a) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\,(x)\,dx = \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{A}{(1-x)^4} dx = 1$, tehát $A = 3$.

b) $P(2 \leqslant X \leqslant 3) = 3\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{(1-x)^4} = 3 \cdot \frac{1}{3(1-x)^3}\Big|_2^3 = -\frac{1}{8} + 1 = \frac{7}{8}$.

c) $F(x) = \begin{cases} 3\int\limits_{2}^{x} \frac{dt}{(1-t)^4} = \frac{1}{(1-t)^3}\Big|_2^x = 1 + \frac{1}{(1-x)^3}, & \text{ha } x \geqslant 2 \\ 0, & \text{ha } x < 2. \end{cases}$

4.3. Folytonos valószínűségi változó várható értéke, szórása és szórásnégyzete

A folytonos valószínűségi változó várható értékét az f sűrűségfüggvény segítségével a következőképpen értelmezzük.

4.5. értelmezés. Ha az X valószínűségi változó folytonos és sűrűségfüggvénye f, akkor X *várható értéke* az

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

improprius integrál, feltéve, hogy az abszolút konvergens.

Példa. Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} A(1+x^2), & \text{ha } 2 < x < 3 \\ 0, & \text{ha } x \notin (2,3) \end{cases}$$

a) Mennyi A értéke?
b) Számítsuk ki X várható értékét.

Megoldás.

a)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = A \int_{2}^{3} (1+x^2)dx = A\left(x + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_2^3 =$$

$$= A\left[3 + 9 - \left(2 + \frac{8}{3}\right)\right] = A\left(12 - \frac{14}{3}\right) = A \cdot \frac{22}{3} = 1$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{3}{22}.$$

Tehát X sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{22} \cdot (1+x^2), & \text{ha } 2 < x < 3 \\ 0, & \text{ha } x \notin (2,3). \end{cases}$$

b)

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \frac{3}{22} \int_{2}^{3} (x + x^3)dx = \frac{3}{22}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right)\Big|_2^3 =$$

$$= \frac{3}{22}\left[\frac{9}{2} + \frac{81}{4} - (2+4)\right] = \frac{3}{22}\left(\frac{99}{4} - 6\right) = \frac{3}{22} \cdot \frac{75}{4} = \frac{225}{88}.$$

4.6. értelmezés. Ha az X folytonos eloszlású valószínűségi változónak f a sűrűségfüggvénye, akkor *szórásnégyzete*

$$D^2(X) = M\left((X - M(X))^2\right),$$

ha létezik a megfelelő várható érték.

A diszkrét esethez hasonlóan itt is érvényes a következő tétel:

4.7. tétel. Ha az X folytonos valószínűségi változónak is és a négyzetének is létezik várható értéke, akkor X-nek létezik szórásnégyzete és

$$D^2(X) = M(X^2) - (M(X))^2 .$$

Megjegyzés. Az X valószínűségi változónak a szórásán a

$$D(X) = \sqrt{D^2(X)}$$

számot értjük (ha létezik).

Példa. Legyen az X folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2, & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Határozzuk meg

a) a $P\,(1 \leqslant X \leqslant 2)$ valószínűséget,
b) X várható értékét,
c) X szórásnégyzetét és szórását.

Megoldás.

a) Annak valószínűsége, hogy X az $[1, 2]$ intervallumba vesz fel értéket:

$$P(1 \leqslant X \leqslant 2) = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{9}\int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{9} \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_1^2 =$$
$$= \frac{1}{9}\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{27}.$$

b) A várható érték:

$$m = M\,(X) = \int_a^b x f\,(x)\,dx = \frac{1}{9}\int_0^3 x^3 dx = \frac{1}{9} \cdot \frac{x^4}{4}\bigg|_0^3 = \frac{9}{4} = 1\frac{5}{4}.$$

c) A szórást X^2 várható értéke segítségével határozzuk meg:

$$M\left(X^2\right) = \int_a^b x^2 f(x)dx = \frac{1}{9}\int_0^3 x^4 dx = \frac{1}{9} \cdot \frac{x^5}{5}\bigg|_0^3 = \frac{27}{5}.$$

Tehát a szórásnégyzet

$$D^2(X) = M\left(X^2\right) - m^2 = \frac{27}{5} - \frac{81}{16} = \frac{27}{80} = 0,3375$$

és a szórás

$$D(X) = \sqrt{\frac{27}{80}} = 0,5809.$$

4.4. Fontosabb folytonos eloszlások

1. Egyenletes eloszlás. Olyan kísérletek leírására használják, amelyeknél a valószínűségi változó értékei egy korlátos intervallum elemei, és annak valószínűsége, hogy a valószínűségi változó ennek egy részintervallumában veszi fel az értékét, csak a részintervallum hosszától függ. Sűrűségfüggvénye

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } x \in (a,b] \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases},$$

eloszlásfüggvénye

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqslant a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{ha } x \in (a,b] \\ 1, & \text{ha } x > b \end{cases}.$$

Várható értéke és szórása:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{a+b}{2},$$

$$D^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f(x) dx = \frac{1}{b-a}\frac{1}{3}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3\Bigg|_a^b =$$

$$= \frac{1}{3(b-a)}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^3\right] =$$

$$= \frac{1}{3(b-a)} 2\frac{(b-a)^3}{8} = \frac{1}{12}(b-a)^2.$$

2. Exponenciális eloszlás. Akkor alkalmazzuk, ha a valószínűségi változó *„örökifjú"* tulajdonságú, vagyis tetszőleges t esetén a

$$P(X < t + t_0 | X > t)$$

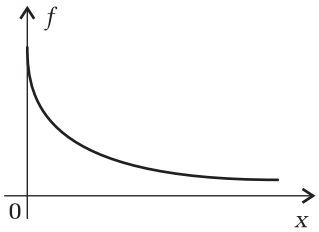
valószínűség csak t_0-tól függ. Ilyen tulajdonsággal rendelkezik például a radioaktív bomlás. Sűrűségfüggvénye az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x \leqslant 0 \end{cases}$$

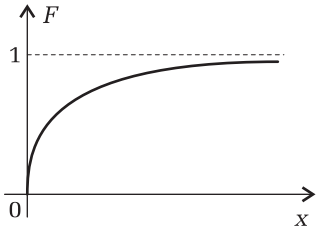
függvény, ahol $\lambda > 0$.

Igazoljuk, hogy ez egy sűrűségfüggvény, vagyis $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ és f nem negatív. Valóban,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = -\lambda \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = 1.$$



4.1. ábra. *Exponenciális eloszlású változó sűrűségfüggvénye*



4.2. ábra. *Exponenciális eloszlású változó eloszlásfüggvénye*

Az eloszlásfüggvény előállítható a sűrűségfüggvény improprius integráljaként:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = -\left. e^{-\lambda t}\right|_0^x = 1 - e^{-\lambda x},$$

tehát

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x \leqslant 0 \end{cases}.$$

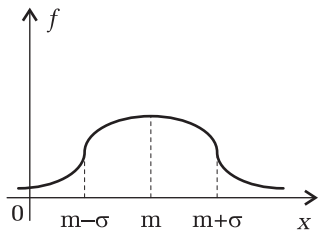
Ennek alapján a várható értéke és szórása:

$$M(X) = \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx = \lambda \left(-x \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx \right) =$$

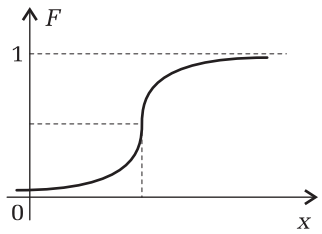
$$= -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}.$$

$$D^2(X) = M\left(X^2\right) - M^2(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \text{ tehát } D(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

3. Normális eloszlás. Akkor alkalmazzuk, ha a kísérlet véletlentől függő kimenetele sok független esemény következménye.



4.3. ábra. *Normális eloszlás sűrűségfüggvénye*



4.4. ábra. *Normális eloszlásfüggvény*

Sűrűségfüggvény:

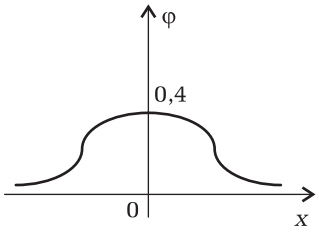
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

Eloszlásfüggvény:

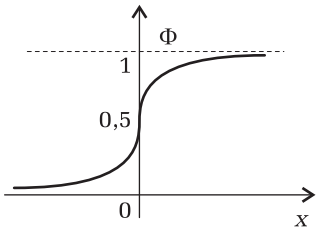
$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt \tag{4.2}$$

Várható értéke $M(X) = m$ és szórása $D(X) = \sigma$.

4. Standard normális eloszlás. Az előbbi sajátos esete $m = 0$ és $\sigma = 1$. Akkor alkalmazzuk, ha a kísérlet véletlentől függő kimenetele sok független esemény következménye.



4.5. ábra. *Standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye*



4.6. ábra. *Standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye*

Sűrűségfüggvény:

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{4.3}$$

Eloszlásfüggvény:

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \tag{4.4}$$

Várható értéke $M(X) = 0$ és szórása $D(X) = 1$.

A standard normális eloszlás (4.3) és (4.4) függvényének segítségével kifejezhetők a (4.1) és (4.2) függvények:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right); \tag{4.5}$$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right); \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{4.6}$$

Mivel a normális eloszlás sűrűségfüggvénye szimmetrikus a várható értékre nézve, ezért

$$\varphi(-x) = \varphi(x), \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x). \tag{4.7}$$

A (4.7)-ből a standard normális eloszlásra a következő összefüggést kapjuk:

$$P(-x < X \leqslant x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) = 2\Phi(x) - 1. \tag{4.8}$$

A (4.7) és (4.8) összefüggések lehetővé teszik, hogy standard normál eloszlás sűrűségfüggvényére és eloszlásfüggvényére vonatkozó értéktáblázatokban csak pozitív x esetén adjuk meg a függvényértékeket (1. számú melléklet). Ezek segítségével kiszámolhatjuk $\Phi(-x)$és a $\varphi(-x)$ függvényértékeket.

Példa. A zárthelyi dolgozatok során $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ pontot lehet szerezni. Az elért pontszámok átlaga $m = 5,5$, szórása $\sigma = 1,75$ és a jegyek normális eloszlásúak.

a) A hallgatók hány százaléka ért el pontosan 5 pontot?
b) Mennyi lehetett a hallgatók leggyengébb 10%-ának a felső ponthatára?
c) Mennyi lehetett a hallgatók legjobb 10%-ának az alsó ponthatára?

Megoldás.

a) Legyen az X valószínűségi változó standardizáltja X^*, melynek várható értéke $M(X^*) = 0$ és szórása $D(X^*) = 1$. Ha az X

valószínűségi változó $N(m,\sigma)$ eloszlású, akkor az $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$ standardizáltja standard normál eloszlású. Ez alapján

$$\begin{aligned} P(4,5 < X < 5,5) &= P\left(\frac{4,5-5,5}{1,75} < X^* < 0\right) = \\ &= P\left(-0,571 < X^* < 0\right) = \Phi(0) - \Phi(-0,571) = \\ &= \frac{1}{2} - [1 - \Phi(0,571)] = \frac{1}{2} - 1 + 0,7157 = \\ &= 0,2157 \cong 20\%. \end{aligned}$$

b) $P(X < \text{felső határ}) = P\left(X^* < \frac{\text{fh}-5,5}{1,75}\right) = 0,1$, tehát $\Phi\left(\frac{\text{fh}-5,5}{1,75}\right) = 0,1$. De $\text{fh} - 5,5 < 0$, tehát

$$\Phi\left(\frac{5,5-\text{fh}}{1,75}\right) = 1-0,1 = 0,9 \quad \Rightarrow \quad \frac{5,5-\text{fh}}{1,75} = \Phi^{-1}(0,9) = 1,29$$

és így $\text{fh} = 5{,}5 - 2,26 = 3,24$.

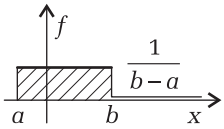
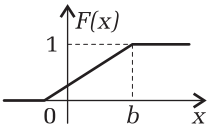
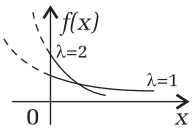
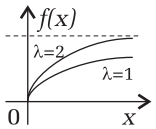
c) A legjobb hallgatók 10%-ának alsó ponthatárát a következőképpen kapjuk:

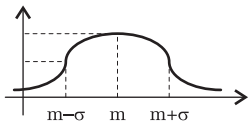
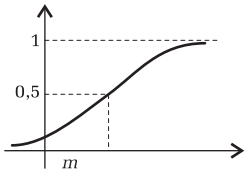
$$P(X > \text{ah}) = 1 - P(X < \text{ah}) = 1 - P\left(X^* < \frac{\text{ah}-5,5}{1{,}75}\right) = 0,1,$$

vagyis $\Phi\left(\frac{\text{ah}-5,5}{1,75}\right) = 0,9$.

Ha a Φ függvény inverzét jelöljük Φ^{-1}-nel, akkor $\frac{\text{ah}-5,5}{1,75} = \Phi^{-1}(0,9) = 1,29$, ahonnan $\text{ah} = 2,2575 + 5,5 = 7,75$, tehát az alsó határ $7,75$.

4.1. táblázat. *Eloszlásmodellek a folytonos eloszlású valószínűségi változók esetében*

Sűrűségfüggvény	Eloszlásfüggvény	Várható értéke	Szórása
1. Egyenletes eloszlás			
$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } x \in (a,b] \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$ 	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqslant a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{ha } x \in (a,b] \\ 1, & \text{ha } x > b \end{cases}$ 	$M(X) = \frac{a+b}{2}$	$D(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$
$M(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b x dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big\|_a^b = \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{a+b}{2};$ $D^2(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f(x)dx = \frac{1}{b-a}\frac{1}{3}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\Big\|_a^b = \frac{1}{3(b-a)}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^3\right] =$ $= \frac{1}{3(b-a)}2\frac{(b-a)^3}{8} = \frac{1}{12}(b-a)^2$			
Mikor alkalmazzuk az adott eloszlásmodellt? A részintervallumba való esés valószínűsége csak a részintervallum hosszától függ.			
2. Exponenciális eloszlás			
$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x \leqslant 0 \end{cases}$ 	$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x \leqslant 0 \end{cases}$ 	$M(X) = \frac{1}{\lambda}$	$D(X) = \frac{1}{\lambda}$
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lambda\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx = -\lambda\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big\|_0^{\infty} = 1; F'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $M(X) = \lambda\int\limits_0^{\infty} x e^{-\lambda x}dx = \lambda\left(-x\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big\|_0^{\infty} + \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx\right) = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big\|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$			
Mikor alkalmazzuk az adott eloszlásmodellt? Akkor alkalmazzuk, ha a valószínűségi változó „örökifjú" tulajdonságú.			

Sűrűségfüggvény	**Eloszlásfüggvény**	**Várható értéke**	**Szórása**
3. Normális eloszlás			
$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$ 	$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$ 	$M(X) = m$	$D(X) = \sigma$
$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right); \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$			
4. Standard normális eloszlás ($m = 0$, $\sigma = 1$)			
$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ *Megj.* A függvényértékek a 2. sz. mellékletben találhatók.	$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ *Megj.* A függvényértékek a 2. sz. mellékletben találhatók.	$M(X) = 0$	$D(X) = 1$

5. FEJEZET

NAGY SZÁMOK TÖRVÉNYE

A nagy számok *tapasztalati* (*empirikus*) törvénye az esemény relatív gyakoriságának stabilitását jelenti. Most olyan tételekkel foglalkozunk, amelyek ezt a tapasztalati törvényt matematikai képletekben fejezik ki. A nagy számok törvénye rámutat a relatív gyakoriság stabilitási fokára, és azt fejezi ki, hogy a relatív gyakoriság annál jobban megközelíti egy kimenetel valószínűségét, minél nagyobb számú kísérletet végzünk.

5.1. Markov-féle egyenlőtlenség

5.1. tétel. Ha X olyan tetszőleges nem negatív valószínűségi változó, melynek van várható értéke és c egy tetszőleges pozitív szám, akkor

$$P(X \geqslant c) \leqslant \frac{M(X)}{c}. \tag{5.1}$$

Bizonyítás. Elsősorban feltételezzük, hogy X diszkrét és

$$X \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & & p_n \end{pmatrix}$$

az eloszlása, ahol $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$. Ha X várható értékéből néhány tagot elhagyunk, akkor azt kapjuk, hogy

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k \geqslant \sum_{x_k \geqslant c} p_k x_k \geqslant \sum_{x_k \geqslant c} c \cdot p_k = c \sum_{x_k \geqslant c} p_k = cP(X \geqslant c),$$

tehát $M(X) \geqslant c \cdot P(X \geqslant c) \quad \Rightarrow \quad P(X \geqslant c) \leqslant \frac{M(X)}{c}$.

Megjegyzés. Ha X folytonos valószínűségi változó és sűrűségfüggvénye f, akkor hasonló módon bizonyítjuk a kért egyenlőtlenséget.

Példa. Egy útkereszteződésnél az évi balesetek száma az alábbi eloszlást követi:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

Adjunk egy felső korlátot a $P(X \geqslant 2)$ és a $P(X \geqslant 3)$ valószínűségekre.

Megoldás. A valószínűségi változó várható értéke $M(X) = \frac{5}{6}$, és így alkalmazhatjuk Markov tételét $c = 2$, illetve $c = 3$ esetén:

$$P(X \geqslant 2) \leqslant \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12} \quad \text{és} \quad P(X \geqslant 3) \leqslant \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{18}.$$

5.2. Csebisev-egyenlőtlenség

A *Markov-egyenlőtlenség*ből következik a *Csebisev-egyenlőtlenség*, amely azt fejezi ki, hogy a valószínűségi változónak a várható érték körüli ingadozásai a szóráshoz képest nem lehetnek túl nagyok.

5.2. tétel. Ha az X valószínűségi változónak van várható értéke és szórása, és k tetszőleges pozitív szám, akkor

$$P\left(|X - M(X)| \geqslant kD(X)\right) \leqslant \frac{1}{k^2}. \tag{5.2}$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a Markov-egyenlőtlenséget az $(X - M(X))^2$ valószínűségi változóra és a $c = k^2D^2(X)$ állandóra. Így a

$$P\left((X - M(X))^2 \geqslant k^2D^2(X)\right) \leqslant \frac{M\left((X - M(X))^2\right)}{k^2D^2(X)} = \frac{1}{k^2} \tag{5.3}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Az $(X - M(X))^2 \geqslant k^2D^2(X)$ egyenlőtlenség ekvivalens a $|X - M(X)| \geqslant kD(X)$ egyenlőtlenséggel, tehát következik az (5.2) összefüggés.

Megjegyzések.

1. Ha az (5.2)-es összefüggésben $kD(X)$-et ε-nal jelöljük, akkor a Csebisev-egyenlőtlenség a következő formában jelenik meg:

$$P\left(|X - M(X)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}. \tag{5.4}$$

2. A Csebisev-egyenlőtlenség segítségével meg lehet határozni, hogy az X mekkora valószínűséggel esik egy adott intervallumba vagy

egy adott intervallumon kívül, abban az esetben, ha az X eloszlása nem ismert, de ki tudjuk számítani $M(X)$-et és $D(X)$-et (vagy legalább egy becslést ismerünk). Ennek megfelelő egyenlőtlenséget úgy kapunk az (5.2)-ből, ha az (5.3)-ban szereplő esemény komplementerét írjuk. Tehát

$$P\left(|X - M(X)| < kD(X)\right) = \\ = 1 - P\left(|X - M(X)| \geqslant kD(X)\right) \geqslant 1 - \frac{1}{k^2}$$

egyenlőtlenséget kapjuk, amely azt fejezi ki, hogy annak a valószínűsége, hogy az X az $M(X)$-nek $kD(X)$ sugarú környezetébe esik, nem kisebb $1 - \frac{1}{k^2}$-nél.

Példák.

1. Zárthelyi dolgozat alkalmával a dolgozatok pontszámátlaga $M(X) = 75$ és a szórása $D(X) = 5$. Milyen becslést adhatunk arra, hogy egy véletlenszerűen kiemelt dolgozat pontszáma 65 és 85 között van?

Megoldás. $P(65 < X < 85) = P(75 - 10 < X < 75 + 10)$.

A $kD(X) = 10$ egyenlet esetén $k = 2$ és a Csebisev-egyenlőtlenség alapján:

$$P\left(65 < X < 85\right) \geqslant 1 - \frac{1}{4} = 0,75.$$

Tehát legalább $0,75$ a valószínűsége a becslésünknek.

2. Legyen egy pozitív valószínűségi változó várható értéke $M(X) = 10$ és szórása $D(X) = 3$ (tapasztalati adatokból). Milyen becslést tudunk adni a $P(2 < X < 18)$ valószínűségre, ha

a) X eloszlása nem ismeretes;

b) X eloszlása binomiális;

c) X eloszlása normális?

Megoldás.

a)

$$P(2 < X < 18) = P\left(10 - \frac{8}{3} \cdot 3 < X < 10 + \frac{8}{3} \cdot 3\right) \geqslant \\ \geqslant 1 - \frac{1}{\left(\frac{8}{3}\right)^2} = 1 - \frac{9}{64} = 1 - 0,1406 = 0,8594.$$

b) Binomiális eloszlás esetén $M(X) = np$ és $D^2(X) = npq$, tehát $np = 10$ és $npq = 9$, tehát $q = \frac{9}{10}, p = \frac{1}{10}, n = 100$. A keresett valószínűség

$$P(2 < X < 18) = \sum_{k=3}^{17} \binom{100}{k} \left(\frac{1}{10}\right)^k \left(\frac{9}{10}\right)^{100-k} = 0,98805.$$

c) Ha X normális eloszlású, akkor

$$\begin{aligned} P(2 < X < 18) &= F(18) - F(2) = \Phi\left(\frac{8}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{8}{3}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{8}{3}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{8}{3}\right)\right) = 2\Phi\left(\frac{8}{3}\right) - 1 = \\ &= 2 \cdot 0,9961 - 1 = 0,9922. \end{aligned}$$

5.3. Nagy számok törvénye

A valószínűségszámításban *nagy számok törvényének* nevezzük a tételek azon csoportját, amelyek a valószínűségi változók és azok m várható értéke közötti sztochasztikus konvergenciára vonatkoznak.

5.3. értelmezés. Az $(X_n)_{n\in N}$ valószínűségi változósorozat sztochasztikusan konvergál az X valószínűségi változóhoz, ha bármely $\varepsilon > 0$ számra

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| < \varepsilon\right) = 1.$$

5.4. tétel (Nagy számok gyenge törvénye). Ha az $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ugyanazon az esménytéren értelmezett, független valószínűségi változók várható értéke m és szórása σ, akkor az $\bar{X}_n = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$ számtani közép sztochasztikusan konvergál az m várható értékhez, amikor n tart a végtelenhez. Jelöléseink alapján

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\bar{X}_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

A komplementer esemény segítségével ez felírható

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\bar{X}_n - m\right| \leqslant \varepsilon\right) = 1$$

alakban is.

Bizonyítás. Mivel $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független változók, ezért

$$M\left(\bar{X}_n\right) = \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n} = \frac{n \cdot m}{n} = m \quad \text{és}$$

$$D^2\left(X_1 + X_2 + \ldots + X_n\right) = D^2(X_1) + D^2(X_2) + \ldots + D^2(X_n) = n \cdot \sigma^2,$$

tehát

$$D^2(\bar{X}_n) = D^2\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} D^2\left(X_1 + X_2 + \ldots + X_n\right) =$$
$$= \frac{1}{n^2}\left(n\sigma^2\right) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

A Csebisev-egyenlőtlenség (5.4)-es alakját használva írhatjuk, hogy

$$P\left(\left|\bar{X}_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) < \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2},$$

amelyből mivel $n \to \infty$ esetén a jobb oldal tart a 0-hoz, következik a tétel állítása.

Megjegyzések[1]. Ha n független kísérletet végzünk egy A esemény megfigyelésére, és e kísérletek során az A esemény k-szor következik be, akkor a $\frac{k}{n}$ relatív gyakoriság az A esemény $P(A) = p$ valószínűségét 1-hez tetszőlegesen közeli valószínűséggel, bármilyen kicsiny $\varepsilon > 0$-nál kisebb hibával megközelíti, ha n elég nagy.

Ha alkalmazzuk a Csebisev-egyenlőtlenséget a *binomiális eloszlásra*, akkor a nagy számok úgynevezett *Bernoulli-féle törvényét* kapjuk:

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) < \frac{p \cdot q}{\varepsilon^2 \cdot n},$$

ahol $p = P(A)$, $q = P(\bar{A}) = 1 - p$ és $\frac{k}{n}$ az A esemény relatív gyakorisága.

Valóban, a Csebisev-egyenlőtlenség binomiális eloszlás esetén a következő:

$$P\left(|k - np| \geqslant \lambda\sqrt{npq}\right) < \frac{1}{\lambda}.$$

Ha a zárójelben lévő tagokat elosztjuk n-nel és az $\varepsilon = \lambda\sqrt{\frac{pq}{n}}$ jelölést használjuk, előbb a $P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \geqslant \lambda\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \leqslant \frac{1}{\lambda^2}$, majd a $P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{pq}{n \cdot \varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}$ egyenlőtlenséghez jutunk, mivel $pq \leqslant \frac{1}{4}$.

Példa. Számítsuk ki legalább $0,9$ valószínűséggel annak a valószínűségét, hogy milyen intervallumba esik egy berendezés meghibásodásainak száma az egyéves garanciaidő alatt, ha tudjuk, hogy a berendezés $0,03$ valószínűséggel hibásodik meg 1 nap alatt.

1 Obádovics J. Gyula: *Valószínűségszámítás és matematikai statisztika.* Scolar Kiadó, Budapest, 2001.

Megoldás. Alkalmazzuk a Bernoulli-tételt.

$$P\left(\left|\frac{k_{365}}{365} - 0,03\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{0,03 \cdot 0,97}{\varepsilon^2 \cdot 365} = 0,9.$$

Az egyenlőtlenségből adódik, hogy $\varepsilon = 0,0282$, tehát $\left|\frac{k_{365}}{365} - 0,03\right| < 0,0282$, ami az $1 < k_{365} < 21$ egyenlőtlenségeket adja.

Gyakorlatok.

1. Hány kísérletet kell elvégezni az érmedobással, hogy a fejek számának relatív gyakorisága legalább $0,9$ valószínűséggel $0,2$-nél kisebb eltéréssel közelítse meg a fejek megjelenésének valószínűségét?

Megoldás. Az A esemény jelentse azt, hogy fejet dobunk. Ennek valószínűsége p, tehát a nagy számok Bernoulli-féle törvénye alapján:

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant 0,2\right) \leqslant \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{0,2^2 \cdot n}.$$

A bal oldalon álló valószínűségnek $0,2$-nél kisebbnek kell lennie ahhoz, hogy a vizsgált – ezzel ellentétes – esemény legalább $0,9$ valószínűséggel következzék be.

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right| \leqslant 0,2\right) \geqslant 1 - \frac{\frac{1}{4}}{0,04 \cdot n} = 0,9.$$

Tehát $\frac{1}{4 \cdot 0,04 \cdot n} < 0,1$, ahonnan $n \geqslant 63$. Az érmével legalább 63 dobást kell végezni.

2. Hány kísérletet kell elvégezni kockadobással, hogy a 6-os dobás relatív gyakorisága $0,8$ valószínűséggel $0,1$-nél kisebb eltéréssel közelítse meg a hatos dobás valószínűségét?

Megoldás. Jelentse az A esemény a 6-os dobását. Az A és $\bar{A}$ események valószínűsége p, illetve $1 - p = q$. A Bernoulli-féle törvény értelmében felírhatjuk, hogy

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - \frac{1}{6}\right| \geqslant 0,1\right) \leqslant \frac{1}{4 \cdot 0,1^2 \cdot n}.$$

Tehát $\frac{1}{4 \cdot 0,1^2 \cdot n} < 0,2$, ahonnan $n \geqslant 5^3 = 125$.

Megjegyzés. Az előbbi két feladatban az elméleti valószínűséget nem kell ismernünk, tehát ilyen módszerrel ellenőrizhető, hogy a pénzérme, illetve a kocka szabályos-e vagy sem.

3. Feltételezzük, hogy a $0,95$-nél nagyobb valószínűségű eseményeket tekintjük „gyakorlatilag biztosaknak". Hány darabot kell valamilyen készáruból megvizsgálnunk ahhoz, hogy ebben az értelemben „gyakorlatilag biztos" legyen, hogy a selejtesek relatív gyakorisága és a selejt valószínűsége legfeljebb $\pm 0,01$-gyel tér el egymástól?

Megoldás. A feltétel szerint

$$P\left[\left(\frac{k}{n}-p\right)<0,01\right]\geqslant 1-\frac{1}{4n\cdot\varepsilon^2}>0,95.$$

Az utolsó egyenlőtlenség a következő alakba írható $\frac{1}{4n\cdot\frac{1}{10^4}}<0,05$, ahonnan a megvizsgálandó darabszám $n>50\,000$.

5.4. Markov tétele

5.5. tétel. Ha $(X_n)_{n\geqslant 1}$ egy valószínűségi változókból álló sorozat, amelyek szórásnégyzeteire teljesül a $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}D^2\left(\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\right)=0$ összefüggés, akkor bármely $\varepsilon>0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M(X_k)\right|<\varepsilon\right)=1 \quad \text{és}$$

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M(X_k)\right|\geqslant\varepsilon\right)=0.$$

Bizonyítás. Az előbbi tétel bizonyításához hasonlóan

$$1\geqslant P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M(X_k)\right|<\varepsilon\right)\geqslant$$
$$\geqslant 1-\frac{D^2(Y_n)}{\varepsilon^2}=1-\frac{1}{n^2\varepsilon^2}D^2\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right),$$

ahonnan a feltételből, a fogó tétel alapján, következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-m\right|<\varepsilon\right)=1.$$

5.5. Bernoulli és Poisson tétele

5.6. tétel (Bernoulli). Ha A egy kísérlet, A egy $p = P(A)$ valószínűséggel megjelenő esemény és $f_n(A)$ az A esemény relatív gyakorisága a kísérlet n-szeri elvégzése során, akkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|f_n(A) - p| < \varepsilon\right) = 1.$$

Bizonyítás. Ha n rögzített, és ω az A esemény abszolút gyakorisága a kísérlet n-szeri ismétlése alatt, akkor ω tekinthető egy Ω binomiális eloszlású diszkrét valószínűségi változó értékének, mert annak a valószínűsége, hogy az A esemény pontosan k-szor következzen be $p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. Az $f_n(A) = \frac{\omega}{n}$ relatív gyakoriságot is tekinthetjük az $\frac{1}{n}\Omega$ valószínűségi változó értékének. Az $M(\Omega) = n \cdot p$ és $D^2(\Omega) = np(1-p)$ összefüggések alapján

$$M(f_n(A)) = M\left(\frac{1}{n}\Omega\right) = p \quad \text{és}$$
$$D^2(f_n(A)) = D^2\left(\frac{1}{n}\Omega\right) = \frac{1}{n^2}D^2(\Omega) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

Ha az $\frac{1}{n}\Omega$ valószínűségi változóra alkalmazzuk a Csebisev-egyenlőtlenséget, a

$$P\left(|f_n(A) - p| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

egyenlőtlenséghez jutunk. De $p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$, mivel $p \in [0,1]$ és így

$$1 \geqslant P\left(|f_n(A) - p| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

A fogó tétel alapján következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(|f_n(A) - p| < \varepsilon\right) = 1$.

Megjegyzés. A Bernoulli-tétel nem azt jelenti, hogy a relatív gyakoriságok sorozata a klasszikus analízis értelmében tart az esemény valószínűségéhez (ezt egyébként biztosan konvergáló eseménysorozatnak nevezik, és ilyet Octav Onicescu, Gheorghe Mihoc és Vasile Urseanu szerkesztett), hanem azt, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén annak a valószínűsége tart 0-hoz, hogy a relatív gyakoriság és a valószínűség közti eltérés nagyobb legyen, mint ε (lásd a Csebisev-egyenlőtlenség után megoldott feladatot).

A kísérlet elvégzése megváltoztathatja a vizsgált esemény valószínűségét (gondoljunk például a visszatevés nélküli urnamodellre), erre az esetre vonatkozik a következő tétel:

5.7. tétel (Poisson). Ha A egy kísérlet, A egy esemény, amelynek a valószínűsége változik $(p_1, p_2, \ldots p_n)$ a kísérlet n-szeri egymástól független végrehajtása során és $f_n(A)$ az A esemény relatív gyakorisága a kísérlet n-szeri elvégzésére vonatkozóan, akkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|f_n(A) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Bizonyítás. Tekintsük az $(X_k)_{k=\overline{1,n}}$, $X_k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p_k & p_k \end{pmatrix}$ valószínűségi változókat, ahol p_k annak a valószínűsége, hogy a k-adik kísérletben bekövetkezik az A esemény. Ezekre a változókra $M(X_k) = p_k$ és $D^2(X_k) = p_k(1-p_k)$, ha $k = \overline{1,n}$. Ugyanakkor az n végrehajtás során az A esemény abszolút gyakorisága az $\Omega = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ valószínűségi változó értéke, tehát

$$M(\Omega) = M\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} M(X_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k \quad \text{és}$$
$$D^2(\Omega) = D^2\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} D^2(X_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k(1-p_k),$$

mert a kísérletek egymástól függetlenek. Ez alapján az $f_n(A)$ relatív gyakoriság az $\frac{1}{n}\Omega$ valószínűségi változó értékének tekinthető, tehát az $M\left(\frac{1}{n}\Omega\right) = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k}{n}$ és $D^2\left(\frac{1}{n}\Omega\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} p_k(1-p_k)$ egyenlőségek és a Csebisev-egyenlőtlenség alapján

$$1 \geqslant P\left(\left|f_n(A) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k(1-p_k)}{n^2 \cdot \varepsilon^2} \geqslant 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Ebből a fogó tétel alapján következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|f_n(A) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

5.6. A Kolmogorov-egyenlőtlenség

5.8. tétel. Ha $(X_k)_{k\geqslant 1}$ egy független valószínűségi változókból álló sorozat és $M(X_k) = m_k \in \mathbb{R}$, valamint $D^2(X_k) = \sigma_k^2 \in \mathbb{R}$, $\forall\, k \geqslant 1$, akkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$P\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{k}(X_j - m_j)\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2.$$

Bizonyítás. A vizsgálandó eseményt diszjunkt részeseményekre bontjuk. Jelöljük A_k-val azt az eseményt, amikor $\left|\sum\limits_{j=1}^{k}(X_j - m_j)\right| \geqslant \varepsilon$ és $\left|\sum\limits_{j=1}^{i}(X_j - m_j)\right| < \varepsilon$, ha $1 \leqslant i \leqslant k-1$ (vagyis, hogy a k a legkisebb olyan természetes szám, amelyre $\left|\sum\limits_{j=1}^{k}(X_j - m_j)\right| \geqslant \varepsilon$). Tehát

$$A = \left\{e : \max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{k}(X_j(e) - m_j)\right| \geqslant \varepsilon\right\} \quad \text{és}$$

$$A_k = \left\{e : \left|\sum_{j=1}^{k}(X_j(e) - m_j)\right| \geqslant \varepsilon,\right.$$
$$\left.\left|\sum_{j=1}^{i}(X_j(e) - m_j)\right| < \varepsilon, \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant k-1\right\}.$$

Világos, hogy $A_i \cap A_j = \emptyset$, ha $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $i \neq j$ és $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = A$, tehát írhatjuk, hogy

$$P\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{k}(X_j - m_j)\right| \geqslant \varepsilon\right) = P(A) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

Ha $Z_k = \sum\limits_{j=1}^{k}(X_j - m_j)$, $k = \overline{1,n}$, akkor $M(Z_n) = \sum\limits_{j=1}^{k} M(X_j) - \sum\limits_{j=1}^{k} m_j = 0$ és így $D^2(Z_k) = M\left(Z_k^2\right) - \left(M(Z_k)\right)^2 = M\left(Z_k^2\right)$. De

$$Z_k^2 = \sum_{j=1}^{k}(X_j - m_j)^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}(X_i - m_i)(X_j - m_j),$$

tehát az $(X_k)_{k\geqslant 1}$ változók függetlensége és az átlag tulajdonságai alapján

$$M\left(Z_k^2\right) = \sum_{j=1}^{k} M\left((X_j - m_j)^2\right) + \\ + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} M(X_i - m_i)\cdot M(X_j - m_j) = \sum_{j=1}^{k}\sigma_j^2,$$

mert $M\left(X_j - m_j\right) = 0$ és $M\left((X_j - m_j)^2\right) = D^2(X_j) = \sigma_j^2$.

Ha tekintjük az $A_0 = \overline{A}$ eseményt, akkor az $\{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ eseményrendszer egy teljes eseményrendszer és így $Z_n^2 = \bigcup\limits_{j=0}^{n}(Z_n^2 \cap A_j)$, tehát $M\left(Z_k^2\right) = \sum\limits_{j=0}^{n} P(A_j)M(\,Z_k^2|\,A_j)$. Ebből és az előbbi összefüggésekből következik, hogy

$$\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 = D^2\left(Z_n\right) = M\left(Z_n^2\right) = \sum_{j=0}^{n} P(A_j)\cdot M(\,Z_n^2|\,A_j) \geqslant \\ \geqslant \sum_{j=1}^{n} P(A_j)\cdot M(\,Z_n^2|\,A_j).$$

Másrészt $Z_n = Z_k + \sum\limits_{j=k+1}^{n}(X_j - m_j)$ és így

$$Z_n^2 = Z_k^2 + \sum_{i=k+1}^{n}(X_i - m_i)^2 + 2\sum_{i=k+1}^{n} Z_k\left(X_i - m_i\right) + \\ + 2\sum_{k<i<j\leqslant n}\left(X_i - m_i\right)\left(X_j - m_j\right),$$

tehát

$$M\left(Z_n^2|\,A_j\right) = M\left(Z_k^2|\,A_j\right) + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} M\left((X_j - m_j)^2\middle|\,A_j\right)}_{\geqslant 0} + \\ + 2\sum_{i=k+1}^{n} M(\,Z_k(X_i - m_i)|\,A_j) + 2\sum_{k<i<l\leqslant n} M(\,(X_i - m_i)\,(X_l - m_l)|\,A_j).$$

De az $(X_k)_{k\geqslant 1}$ változók függetlenek, tehát a Z_k és $X_i - m_i$, illetve $X_i - m_i$ és $X_l - m_l$ párok is függetlenek, tehát

$$M(\,Z_k(X_i - m_i)|\,A_j) = M(\,Z_k|\,A_j)\cdot M\,(\,X_i - m_i|\,A_j) = 0, \quad \text{ha } i > k \quad \text{és}$$

$$\sum_{k<i<l\leqslant n} M(\,(X_i - m_i)\,(X_l - m_l)|\,A_j) =$$
$$= \sum_{k<i<l\leqslant n} M(\,(X_i - m_i)|\,A_j)M(\,(X_l - m_l)|\,A_j) = 0$$

(mindkét esetben az $M\,(\,X_i - m_i|\,A_j) = 0$, $i > k$ összefüggést használtuk, és ez igaz, mert az A_j teljesülése az $X_1, X_2, \ldots, X_j$ értékeiről ad információt, és $i > j$ esetén X_i ezektől független, tehát $M\,(\,X_i - m_i|\,A_j) = M\,(X_i - m_i) = 0$). Ugyanakkor $M\,(\,Z_k^2|\,A_k) \geqslant \varepsilon^2$, tehát $M\,(\,Z_n^2|\,A_k) \geqslant \varepsilon^2$, ha $k = \overline{1,n}$ és így $\sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_j^2 \geqslant \varepsilon^2 \sum\limits_{j=1}^{n} P(A_j) = \varepsilon^2 P(A)$, ami éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség.

5.7. A nagy számok törvényének erős alakja

5.9. tétel. Ha az $(X_k)_{k\geqslant 1}$ valószínűségi változók teljesítik a következő feltételeket:

a) az $(X_k)_{k\geqslant 1}$ valószínűségi változók függetlenek;
b) $M\,(X_k) = 0$, $\forall\, k \geqslant 1$;
c) a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} D^2(X_n)$ sor konvergens,

akkor a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k$ sor majdnem biztos, hogy konvergens (1 annak a valószínűsége, hogy a sor konvergens).

Bizonyítás. Ha $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, $\forall\, n \geqslant 1$, $Y_m(e) = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}^*} |S_{m+k}(e) - S_m(e)|$ és $Y(e) = \inf\limits_{m\in\mathbb{N}^*} Y_m(e)$. A sorok konvergenciájára vonatkozó általános Cauchy-féle kritérium alapján a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k$ sor majdnem biztos konvergenciájához szükséges és elégséges feltétel az $Y(e) = 0$ feltétel, esetleg egy nulla valószínűségű esemény kivételével. A Kolmogorov-egyenlőtlenség alapján

$$P\left(\sup_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{k}[X_j(e)-M(X_j)]\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{j=1}^{n}D^2\left(X_j\right),$$

tehát az adott feltételek alapján

$$P\left(\sup_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{k}X_j(e)\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{j=1}^{n}D^2\left(X_j\right).$$

Így a Kolmogorov-egyenlőtlenség alapján

$$P\left(Y_m(e)\geqslant\varepsilon\right)=P\left(e:\sup|X_{m+1}(e)+\ldots+X_{m+k}(e)|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{j=m+1}^{k}D^2\left(X_j\right).$$

Ebből következik, hogy

$$P\left(Y(e)\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{j=m+1}^{\infty}D^2\left(X_j\right).$$

A c) feltétel és a Cauchy-féle általános konvergencia kritérium alapján tetszőleges $\varepsilon_1>0$ esetén létezik olyan $m(\varepsilon_1)\in\mathbb{N}^*$, amelyre $\sum\limits_{j=m+1}^{\infty}D^2(X_j)<\varepsilon_1$, ha $m\geqslant m(\varepsilon_1)$. Mivel ε_1 tetszőlegesen megválasztható, következik, hogy $P(Y(e)=0)=1$, tehát a $\sum\limits_{k=1}^{\infty}X_k$ sor majdnem biztosan konvergens ($P(\exists\ \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k)=1$).

5.10. tétel (Kolmogorov). Ha az $(X_k)_{k\geqslant1}$ valószínűségi változók teljesítik a következő feltételeket:

a) az $(X_k)_{k\geqslant1}$ valószínűségi változók függetlenek;

b) $D^2\left(X_n\right)\in\mathbb{R}$, $\forall\, n\geqslant1$;

c) a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{D^2(X_n)}{n^2}$ sor konvergens,

akkor $P\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\left(X_j-M(X_j)\right)=0\right)=1.$

Felhasználjuk a következő segédtételeket:

5.11. segédtétel (A Cesaro–Stolz-kritérium következménye[2]). Ha az $(x_n)_{n\geqslant 1}$ sorozat konvergens és határértéke l, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = l$.

5.12. segédtétel. Ha az $(x_n)_{n\geqslant 1}$ sorozat esetén a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$ sor konvergens, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 0$.

Az 5.12. segédtétel bizonyítása. Ha $s_0 = 0$, $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k}$ és $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, $\forall\, n \geqslant 1$, akkor $s_k - s_{k-1} = \frac{x_k}{k}$, tehát $x_k = k\,(s_k - s_{k-1})$. Ez alapján

$$\begin{aligned}
t_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} x_k = \sum_{k=1}^{n+1} k\,(s_k - s_{k-1}) = \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k\cdot s_k - \sum_{k=1}^{n} s_k + \sum_{k=1}^{n} s_k - \sum_{k=1}^{n+1} k\cdot s_{k-1} = \\
&= (n+1)s_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} s_k + \left(\sum_{k=1}^{n}(k+1)s_k - \sum_{k=1}^{n+1} k s_{k-1}\right) = \\
&= (n+1)s_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} s_k.
\end{aligned}$$

Tehát

$$\frac{t_{n+1}}{n+1} = s_{n+1} - \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k\right).$$

Az 5.11. segédtétel alapján $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} s_k = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ és így

$$\lim_{n\to\infty} s_{n+1} - \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k\right) = s - s = 0,$$

tehát $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{t_n}{n} = 0$.

Az 5.10. tétel bizonyítása. Megszerkesztjük az $\widetilde{X}_n = X_n - M(X_n)$ és $Y_n = \frac{1}{n}\widetilde{X}_n$, $n \geqslant 1$ valószínűségi változókat. Az $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ valószínűségi

2 Lásd András Szilárd–Balázs Vilmos–Csapó Hajnalka–Szilágyi Jutka: *Matematika a XI. osztály számára* című könyv 57. oldalán.

változók az a) feltétel alapján függetlenek. Ugyanakkor

$$M(Y_n) = \frac{1}{n}M(\widetilde{X}_n) = \frac{1}{n}M(X_n - M(X_n)) = 0 \quad \text{és}$$
$$D^2(Y_n) = D^2\left(\frac{1}{n}\widetilde{X}_n\right) = \frac{1}{n^2}D^2(X_n - M(X_n)) = \frac{1}{n^2}D^2(X_n),$$

tehát

$$\sum_{k=1}^{\infty} D^2(Y_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^2(X_n)}{n^2},$$

és ez a sor konvergens a tétel c) feltétele alapján. Így alkalmazhatjuk az előbbi tételt az $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ valószínűségi változókra. Tehát a $\sum\limits_{k=1}^{n} Y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{X_n - M(X_n)}{n}$ sor majdnem biztos, hogy konvergens. De az 5.12. segédtétel alapján majdnem biztos, hogy teljesül a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - M(X_k)) = 0$ egyenlőség. Így

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - M(X_k)) = 0\right) = 1.$$

Következmény. Ha $(X_n)_{n\geqslant 1}$ egy független valószínűségi változókból álló sorozat, amelyek szórásnégyzetei majorálhatók egy $C > 0$ állandóval, akkor a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{C}{k^2}$ sor konvergens és így

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - M(X_k)) = 0\right) = 1.$$

Megjegyzés. Akárcsak a Bernoulli-tétel esetében, itt is megfogalmazható egy tulajdonság a gyakoriságok segítségével:

Ha A egy kísérlet, A egy $p = P(A)$ valószínűséggel megjelenő esemény és $f_n(A)$ az A esemény relatív gyakorisága a kísérlet n-szeri elvégzése során, akkor

$$P\left(\lim_{n\to\infty} |f_n(A) - p| = 0\right) = 1.$$

(Vagyis a relatív gyakoriságok majdnem biztos, hogy tartanak a valószínűséghez.)

5.8. Glivenko–Cantelli tétele

Ha $X_1, X_2, \ldots, X_n$ egy tetszőleges statisztikai minta, és $X_1^* < X_2^* < \ldots < X_n^*$ a belőlük képezhető növekvő sorrendbe rendezett minta, akkor az

$$F_n : \mathbb{R} \to [0,1], \quad F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant X_1^* \\ \frac{k}{n}, & X_k^* < x \leqslant X_{k+1}^* \\ 1, & x > X_n^* \end{cases}$$

függvényt *empirikus eloszlásfüggvénynek* nevezzük. Ha az

$$I_{\{X_k < x\}} = \begin{cases} 1, & X_k < x \\ 0, & X_k \geqslant x \end{cases}$$

függvényeket használjuk, akkor az empirikus eloszlásfüggvényt $F_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} I_{\{X_i < x\}}$ alakban írhatjuk.

Ha a minta egy $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ eloszlásfüggvénnyel rendelkező változóból származik, akkor az empirikus eloszlásfüggvény 1 valószínűséggel egyenletesen konvergál az elméleti eloszlásfüggvényhez, amikor $n \to \infty$.

5.13. tétel. Legyen $X_1, X_2, X_3, \ldots X_n, \ldots$ statisztikai minta. Ha F a minta eloszlásfüggvénye és F_n az empirikus eloszlásfüggvény, akkor

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x) - F_n(x)| = 0\right) = 1.$$

Bizonyítás. Felhasználjuk a következő tulajdonságot:

Tulajdonság. Ha $(A_n)_{n\geqslant 1}$ egy eseménysorozat és $P(A_n) = 1, \ \forall\, n \geqslant 1$, akkor az $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ esemény valószínűsége is 1.

Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ és $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges számokat és szerkesszük meg az $m > \frac{2}{\varepsilon}$ természetes számhoz tartozó

$$x_k^{(m)} = \inf_{x\in\mathbb{R}} \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, F(x) \leqslant \frac{k}{m} \leqslant F(x+0) \right\}, \quad k = \overline{1, m-1}$$

osztópontokat. Így az $x_0^{(m)} = -\infty$ és $x_m^{(m)} = +\infty$ jelöléssel írhatjuk, hogy a $J_k = (x_k^{(m)}, x_{k+1}^{(m)}]$, $k = \overline{0, m-1}$ intervallumok az $\mathbb{R}$ egy felbontását adják (folytonos F esetén ez azt jelenti, hogy a $[0,1]$ intervallumot m egyenlő részre osztottuk és ezt a felosztást az F grafikus képéről visszavetítjük

az Ox tengelyre, ha F nem folytonos, akkor a vágóegyeneshez tartozó bal oldali pontot vetítjük vissza). Ha tekintjük a $B_{m,k} = \left(X < x_k^{(m)}\right)$ eseményeket, akkor

$$P\left(B_{m,k}\right) = P\left(X < x_k^{(m)}\right) = F(x_k^{(m)}) \quad \text{és}$$
$$F_n\left(x_k^{(m)}\right) = \frac{\left|\left\{X_i \middle| X_i < x_k^{(m)}, \quad i = \overline{1,n}\right\}\right|}{n}$$

az empirikus eloszlásfüggvény értelmezése alapján, tehát $F_n\left(x_k^{(m)}\right)$ a $B_{m,k}$ esemény relatív gyakorisága és így a nagy számok erős törvénye utáni megjegyzés alapján

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\left|F_n(x_k^{(m)}) - F(x_k^{(m)})\right| = 0\right) = 1, \quad \forall\, k = \overline{1,m}.$$

Ha $A_{m,k}$-val jelöljük a $\lim\limits_{n\to\infty}\left|F_n(x_k^{(m)}) - F(x_k^{(m)})\right| = 0$ eseményt, akkor $P(A_{m,k}) = 1$ és így a bizonyítás kezdetén említett tulajdonság alapján az $A_m = \bigcap\limits_{k=1}^{m} A_{m,k}$ esemény valószínűsége is 1. Az A_m esemény jelentése $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\max\limits_{k=\overline{1,m}}\left|F_n\left(x_k^{(m)}\right) - F(x_k^{(m)})\right|\right) = 0$. Hasonlóan alkalmazzuk a nagy számok erős törvényét a $C_{m,j} = \left(X \leqslant x_j^{(m)}\right)$ eseményekre. Tehát ha $D_{m,j}$-vel jelöljük a $\lim\limits_{n\to\infty}\left|F_n(x_j^{(m)} + 0) - F(x_j^{(m)} + 0)\right| = 0$ eseményeket, akkor a $D_m = \bigcap\limits_{j=1}^{m} D_{m,j}$ esemény valószínűsége 1, vagyis a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\max\limits_{j=\overline{1,m}}\left|F_n\left(x_j^{(m)} + 0\right) - F(x_j^{(m)} + 0)\right|\right) = 0$ esemény (D_m) majdnem biztos. Így a

$$\lim_{n\to\infty}\left(\max_{k,j=\overline{1,m}}\left\{\left|F_n\left(x_k^{(m)}\right) - F(x_k^{(m)})\right|, \right.\right.$$
$$\left.\left.\left|F_n\left(x_j^{(m)} + 0\right) - F(x_j^{(m)} + 0)\right|\right\}\right) = 0$$

esemény valószínűsége is 1 (ez az esemény az $E_m = D_m \cap A_m$). A segédtulajdonság alapján megszerkeszthetjük az $E = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} E_m$ eseményt,

amelynek a valószínűsége szintén 1. Ennek alapján

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{m\in\mathbb{N}^*}\max_{k,j=\overline{1,m}}\left\{\left|F_n\left(x_k^{(m)}\right)-F(x_k^{(m)})\right|,\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left|F_n\left(x_j^{(m)}+0\right)-F(x_j^{(m)}+0)\right|\right\}\right)=0\right)=1.$$

A továbbiakban igazoljuk, hogy ha E teljesül, akkor

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\left|F_n\left(x\right)-F(x)\right|\right)=0$$

és így következik a tétel állítása.

Az eloszlásfüggvény tulajdonságai (növekvő és balról folytonos) és az osztópontok értelmezése alapján:

$$\left.\begin{array}{l} F\left(x_k^{(m)}\right)\leqslant\dfrac{k}{m}\leqslant F\left(x_k^{(m)}+0\right)\\ F\left(x_{k-1}^{(m)}\right)\leqslant\dfrac{k-1}{m}\leqslant F\left(x_{k-1}^{(m)}+0\right)\end{array}\right\}\quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad F\left(x_k^{(m)}\right)\leqslant\frac{k}{m}\leqslant F\left(x_{k-1}^{(m)}+0\right)+\frac{1}{m}.$$

Ha $x\in J_k$, akkor $x_k^{(m)}<x\leqslant x_{k+1}^{(m)}$ és így az előbbi egyenlőtlenségek és az eloszlásfüggvény tulajdonságai alapján írhatjuk, hogy

$$F_n(x)-F(x)\leqslant F_n(x_{k+1}^{(m)})-F(x_k^{(m)}+0)\leqslant F_n(x_{k+1}^{(m)})-F(x_{k+1}^{(m)})+\frac{1}{m}\quad\text{és}$$
$$F_n(x)-F(x)\geqslant F_n(x_k^{(m)}+0)-F(x_{k+1}^{(m)})\geqslant F_n(x_k^{(m)}+0)-F(x_k^{(m)}+0)-\frac{1}{m}.$$

Ebből következik, hogy $|F_n(x)-F(x)|\leqslant\varepsilon,\ \forall x\in\mathbb{R}$, ha teljesül E, tehát a bizonyítás teljes.

6. FEJEZET

KÉTDIMENZIÓS DISZKRÉT VALÓSZÍNŰSÉGI VEKTOROK ÉS JELLEMZŐIK

Ebben a fejezetben csak a *kétdimenziós* diszkrét valószínűségi vektorokat tárgyaljuk, de az eredmények többdimenziós vektorokra is kiterjeszthetők. Kétdimenziós valószínűségi vektor (vagy változó) alatt egy (X, Y) alakú vektort értünk, ahol X és Y egydimenziós valószínűségi változók.

6.1. értelmezés. Az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi vektort *diszkrét valószínűségi vektorváltozónak* nevezzük, ha az általa felvehető (x_i, y_k) számpárok véges vagy megszámlálhatóan végtelen halmazt alkotnak.

6.1. Diszkrét valószínűségi vektorváltozók eloszlása

Az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi vektor eloszlását a

$$p_{ik} = P(X = x_i, Y = y_k), \quad i \geqslant 1 \text{ és } k \geqslant 1$$

valószínűségek összessége adja. Az $(X = x_i, Y = y_k)$, $i \geqslant 1$ és $k \geqslant 1$ események egy teljes eseményrendszert alkotnak és így

$$\sum_i \sum_k p_{ik} = 1.$$

Az előbbi összegek lehetnek végesek vagy végtelenek (külön-külön), végtelen összegek esetén az előbbi összefüggés azt jelenti, hogy a sorok konvergensek és az összegük 1.

Vizsgáljuk meg, hogy az (X, Y) vektor eloszlásából kiszámítható-e az X vagy az Y eloszlása. Az $X = x_i$ esemény tetszőleges $Y = y_k$ esemény mellett bekövetkezhet és így $P(X = x_i) = \sum_k p_{ik}$. Ezt nevezzük az X valószínűségi változó eloszlásának, és azt mondjuk, hogy ez a vektorváltozó

egy *perem-* vagy *vetületeloszlása*. Hasonló módon a $P(Y = y_k) = \sum_i p_{ik}$ valószínűségek az Y *perem-* vagy *vetületeloszlását* adják.

Ha mindkét változó (X és Y) véges sok értéket vehet fel, akkor az (X, Y) eloszlását a következő könnyen áttekinthető táblázatban foglalhatjuk össze:

6.1. táblázat.

X	Y: y_1	y_2	$\dots$	y_m	X perem-eloszlása
x_1	p_{11}	p_{12}		p_{1m}	$p_1 = \sum_j p_{1j}$
x_2	p_{21}	p_{22}		p_{2m}	$p_2 = \sum_j p_{2j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_n	p_{n1}	p_{n2}		p_{nm}	$p_n = \sum_j p_{nj}$
Y perem-eloszlása	$q_1 = \sum_i p_{i1}$	$q_2 = \sum_i p_{i2}$	$\dots$	$q_m = \sum_i p_{im}$	1

Példa. A diákmenza egyik napi fogyasztása alapján egy közgazdász hallgató elkészítette az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi vektor eloszlását (6.2. táblázat).

6.2. táblázat.

X	Y: fasírt 5	pörkölt 6	rántott szelet 10	Y perem-eloszlása
gombaleves 2	$\frac{12}{90}$	$\frac{16}{90}$	$\frac{12}{90}$	$p_1 = \frac{40}{90}$
meggyleves 3	$\frac{15}{90}$	$\frac{20}{90}$	$\frac{15}{90}$	$p_2 = \frac{50}{90}$
X perem-eloszlása	$q_1 = \frac{27}{90}$	$q_2 = \frac{36}{90}$	$q_3 = \frac{27}{90}$	1

6.2. Kétdimenziós valószínűségi vektor eloszlásfüggvénye

6.2. értelmezés. Az (X, Y) valószínűségi vektor *eloszlásfüggvényének* vagy *együttes eloszlásának* nevezzük az

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad F(x, y) = P(X < x, Y < y)$$

függvényt.

Diszkrét valószínűségi vektor esetén az eloszlás könnyen kiszámítható, hisz

$$P\left(X < x, Y < y\right) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} p_{ij}, \quad x \in (-\infty, \infty)\,,\ y \in (-\infty, \infty)\,,$$

tehát az eloszlásfüggvény a

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad F(x, y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} p_{ij}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

kétváltozós függvény.

Példa. Az előbbi paragrafus példája alapján

$$F\left(3, 10\right) = P\left(X < 3, Y < 10\right) = \frac{12}{90} + \frac{16}{90} = \frac{28}{90} = \frac{14}{45}.$$
$$F\left(1, 10\right) = 0, \quad F\left(3, 6\right) = \frac{12}{15}.$$

Az egydimenziós esethez hasonlóan fejezzük ki az $P(x_1 \leqslant X < x_2, y_1 \leqslant Y < y_2)$ alakú valószínűségeket az eloszlásfüggvény segítségével. Feltételezzük, hogy $x_1 < x_2$ és $y_1 < y_2$. Tekintsük a következő eseményeket:

$$A_1 = \left(X < x_2, Y < y_2\right), \quad A_2 = \left(X < x_1, Y < y_2\right),$$
$$A_3 = \left(X < x_1, Y < y_1\right), \quad A_4 = \left(X < x_2, Y < y_1\right)$$

és

$$A = \left(x_1 \leqslant X < x_2, y_1 \leqslant Y < y_2\right).$$

Világos, hogy $A_1 = (A_2 \cup A_4) \cup A$ és $A \cap (A_2 \cup A_4) = \emptyset$, tehát

$$P(A) = P(A_1) - P(A_2 \cup A_4).$$

Másrészt $P(A_2 \cup A_4) = P(A_2) + P(A_4) - P(A_2 \cap A_4)$ és $A_2 \cap A_4 = A_3$, tehát

$$P(A) = P(A_1) - P(A_2) - P(A_4) + P(A_3).$$

De $P(A_1) = F(x_2, y_2)$, $P(A_2) = F(x_1, y_2)$, $P(A_3) = F(x_1, y_1)$ és $P(A_4) = F(x_2, y_1)$, tehát érvényes a következő tétel:

6.3. tétel. Ha $x_1 \leqslant x_2$ és $y_1 \leqslant y_2$ és F az (X, Y) valószínűségi vektor eloszlásfüggvénye, akkor

$$P\left(x_1 \leqslant X < x_2, y_1 \leqslant Y < y_2\right) = \\ = F\left(x_2, y_2\right) - F\left(x_2, y_1\right) - F\left(x_1, y_2\right) + F\left(x_1, y_1\right).$$

Példa. Az előbbi paragrafus példája esetén számítsuk ki a

$$P\left(1 \leqslant X < 4, 6 \leqslant Y < 11\right)$$

valószínűséget.

Megoldás. A táblázat alapján a keresett valószínűség

$$\frac{16}{90} + \frac{12}{90} + \frac{20}{90} + \frac{15}{90} = \frac{63}{90} = \frac{7}{10}.$$

Másrészt $F(4, 11) = 1$, $F(4, 6) = \frac{27}{90} = \frac{3}{10}$, $F(1, 11) = 0$ és $F(1, 6) = 0$, tehát a keresett valószínűség $1 - \frac{3}{10} - 0 + 0 = \frac{7}{10}$.

6.3. Kétdimenziós valószínűségi vektor peremeloszlás-függvénye

Már láttuk, hogy az (X, Y) vektorváltozó eloszlásából meghatározható az X és az Y eloszlása (azaz a peremeloszlások). Így az is világos, hogy az X, illetve Y változó eloszlásfüggvényét is kiszámíthatjuk. A

$$p_i = \sum_j P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_j p_{ij} \quad \text{és}$$
$$q_j = \sum_i P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_i p_{ij}$$

számok megadják az X, illetve Y eloszlását, tehát a peremeloszlás-függvények az

$$F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \sum_{x_i < x} p_i = \sum_{x_i < x} \sum_j p_{ij} \quad \text{és}$$
$$F_Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_Y(y) = \sum_{y_j < y} q_j = \sum_{y_j < y} \sum_i p_{ij}$$

függvények.

Példa. A 6.1. paragrafus példája alapján számítsuk ki a $p_1 = P(X = 2)$ és a $q_2 = P(Y = 6)$ valószínűségeket, ami megadja a gombaleves, illetve a pörkölt napi választásának relatív gyakoriságát (valószínűségét).

Megoldás. A táblázat alapján $p_1 = \frac{12}{90} + \frac{16}{90} + \frac{12}{90} = \frac{4}{9}$ és $q_2 = \frac{16}{90} + \frac{20}{90} = \frac{2}{5}$.

Látható, hogy (X, Y) kétdimenziós valószínűségi vektorváltozónak az X-hez tartozó peremeloszlása a 6.2. táblázat sorösszegei, az eloszlásfüggvényének értékei pedig a sorösszegek halmozott összegei. Hasonlóképpen az Y-hoz tartozó peremeloszlást az oszlopösszegek adják és a megfelelő eloszlásfüggvény értékeit ezeknek az oszlopösszegeknek a halmozott összegei. Másrészt az is belátható, hogy a peremeloszlás-függvények értelmezhetők az

$$F_X(x) = P(X < x) = P(X < x, Y < \infty) = F(x, \infty), \quad \text{illetve}$$
$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(X < \infty, Y < y) = F(\infty, y)$$

összefüggések segítségével is. Folytonos valószínűségi vektorokra ezeket az összefüggéseket használjuk.

A 6.1. ábrán láthatjuk a 6.1. paragrafus példájához tartozó peremeloszlás-függvények grafikus képét.

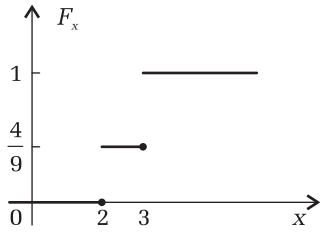
6.4. Kétdimenziós valószínűségi vektorváltozó feltételes eloszlásai

Akárcsak az egydimenziós valószínűségi változók esetén, itt is értelmezhetjük a feltételes valószínűségeket, és ezeknek megfelelően létrehozhatunk különböző valószínűségi változókat. Így beszélhetünk a

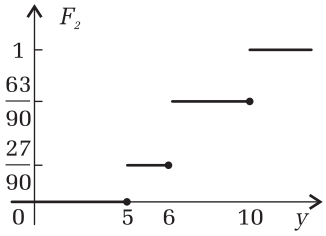
$$X < x \,|Y = y_j, \quad X < x \,|Y < y_j, \quad X < x \,|y_1 \leqslant Y < y_2, \quad X < x \,|y < Y$$

típusú feltételes valószínűségekről, az ezekből létrehozható valószínűségi változók eloszlásáról, illetve eloszlásfüggvényéről. A feltételes valószínűség értelmezése alapján adódnak a következő összefüggések:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 2 \\ \frac{4}{9}, & 2 < x \leqslant 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$



$$F_2(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 5 \\ \frac{27}{90}, & 5 < y \leqslant 6 \\ \frac{63}{90}, & 6 < y \leqslant 10 \\ 1, & 10 < y. \end{cases}$$



6.1. ábra.

$$P(X < x_i \,|Y = y_j) = \frac{P(X < x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{\sum\limits_{k<i} p_{kj}}{q_j},$$

$$P(X = x_i \,|Y < y_j) = \frac{P(X = x_i, Y < y_j)}{P(Y < y_j)} = \frac{\sum\limits_{l<j} p_{il}}{\sum\limits_{k<j} q_k},$$

$$P(X = x_i \,|a \leqslant Y < b) = \frac{P(X = x_i, a \leqslant Y < b)}{P(a \leqslant Y < b)} = \frac{\sum\limits_{a \leqslant y_l < b} p_{il}}{\sum\limits_{a \leqslant y_l < b} q_l},$$

$$P(X = x_i \,|y < Y) = \frac{P(X = x_i, y < Y)}{P(y < Y)} = \frac{\sum\limits_{y < y_l} p_{il}}{\sum\limits_{y < y_l} q_l}.$$

Ezeknek megfelelően értelmezhetjük a feltételes eloszlásfüggvényeket is a következő összefüggésekkel:

$$F(x \,|Y = y_j) = P(X < x \,|Y = y_j) = \frac{P(X < x, Y = y_j)}{P(Y = y_j)},$$

$$F(x \,|Y < y) = P(X < x \,|Y < y) = \frac{P(X < x, Y < y)}{P(Y < y)} = \frac{F(x, y)}{F_Y(y)},$$

$$F(x\,|a \leqslant Y < b) = P(X < x\,|a \leqslant Y < b) = \frac{P(X < x, a \leqslant Y < b)}{P(a \leqslant Y < b)},$$
$$F(x\,|Y \geqslant y) = P(X < x\,|Y \geqslant y) = \frac{P(X < x, Y \geqslant y)}{P(Y \geqslant y)}.$$

Y-ra hasonló feltételes eloszlásfüggvények adhatók meg, ha a feltétel X-re vonatkozik.

6.5. Együttes eloszlás várható értéke

Az (X, Y) vektorváltozó várható értékén az

$$M(X, Y) = \sum_i \sum_j (x_i, y_j) p_{ij}$$

vektort értjük. Az X és Y valószínűségi változók értékkészletét jelöljük C_X-szel, illetve C_Y-nal. Ha a $t_{1,2} : D \to \mathbb{R}$ kétváltozós valós értékű függvények értelmezési tartománya tartalmazza a $C_X \times C_Y$ halmazt, akkor az $U = t_1(X, Y)$ és $V = t_2(X, Y)$ egyenlőségekkel értelmezett U és V szintén valószínűségi változó. Az így értelmezett (U, V) vektorváltozót az (X, Y) vektorváltozó *transzformáltjának* nevezzük. Hasonlóan, ha csak egy $t : D \to \mathbb{R}$ függvényt használunk, akkor az (X, Y) vektorváltozóból előállíthatjuk a $t(X, Y)$ egydimenziós változót is, ez gyakorlatilag annyi, mintha az X-szel és az Y-nal valamilyen műveletet végeznénk. Például, ha $t(X, Y) = X + Y$, akkor az $X + Y$ összegváltozót állítottuk elő. A $t(X, Y)$ vektorváltozó várható értéke

$$M(t(X, Y)) = \sum_i \sum_j t(x_i, y_j) p_{ij},$$

míg a transzformált változó várható értéke

$$M(U, V) = \sum_i \sum_j (t_1(x_i, y_j), t_2(x_i, y_j)) p_{ij}.$$

Példa. Számítsuk ki a 6.1. paragrafus példájában szereplő X és Y esetén a $t(X, Y) = X + Y$ valószínűségi változó várható értékét.

Megoldás.

$$M(X+Y) = (2+5)\cdot\frac{12}{90} + (2+6)\cdot\frac{16}{90} + (2+10)\cdot\frac{12}{90} +$$
$$+ (3+5)\cdot\frac{15}{90} + (3+6)\cdot\frac{20}{90} + (3+10)\cdot\frac{15}{90} = \frac{851}{90} \cong 9,46.$$

Tehát egy ebéd átlagos ára $9,46$ lej és a napi átlagbevétel 851 lej.

6.6. A peremeloszlások várható értéke

A 6.2. táblázat szerint az X valószínűségi változó lehetséges értékei $x_1 = 2, \quad x_2 = 3$, az Y változóé pedig $y_1 = 5$, $y_2 = 6$, $y_3 = 10$. A megfelelő peremeloszlások $p_1 = \frac{40}{90}$, $p_2 = \frac{50}{90}$, $q_1 = \frac{27}{90}$, $q_2 = \frac{36}{90}$, $q_3 = \frac{27}{90}$. Így a peremeloszlások várható értéke rendre

$$M(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i p_i = 2\cdot\frac{40}{90} + 3\cdot\frac{50}{90} = \frac{23}{9} \cong 2,56, \quad \text{illetve}$$

$$M(Y) = \sum_{j=1}^{3} y_j q_j = 5\cdot\frac{27}{90} + 6\cdot\frac{36}{90} + 10\cdot\frac{27}{90} = \frac{621}{90} = 6,9.$$

6.7. Feltételes eloszlások várható értéke

Szintén a 6.2. táblázat adatait véve alapul, az X valószínűségi változó lehetséges értékei $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, az Y változóé pedig $y_1 = 5$, $y_2 = 6$, $y_3 = 10$ és akkor az

$$M(X\,|Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i\,|Y = y_j) = \frac{1}{q_j}\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_{ij}$$

összeg az X valószínűségi változó $Y = y_j$ feltétel melletti *feltételes várható értéke.*

Példa. Számítsuk ki az $M(X\,|Y = 5)$ várható értéket.

Megoldás. $M(X\,|Y = 5) = \frac{90}{27}\left(2\cdot\frac{12}{90} + 3\cdot\frac{15}{90}\right) = \frac{69}{27} \cong 2,56.$

Hasonlóan $M(Y\,|X = x_i) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} y_j P(Y = y_j\,|X = x_i) = \frac{1}{p_i}\sum\limits_{j=1}^{\infty} y_j p_{ij}$.

Példa. Számítsuk ki az $M(Y\,|X = 3)$ várható értéket.

Megoldás. $M(Y\,|X = 3) = \frac{90}{50}\left(5\cdot\frac{15}{90} + 6\cdot\frac{15}{90} + 10\cdot\frac{15}{90}\right) = \frac{315}{50} = 6,3.$

6.8. A kétdimenziós valószínűségi vektor komponenseinek függetlensége

Ha a két komponensű (X, Y) valószínűségi változó X és Y komponensei nem befolyásolják egymást, akkor mondhatjuk, hogy az X és Y változók függetlenek.

6.4. értelmezés. Az X és Y valószínűségi változók akkor és csak akkor függetlenek, ha minden értékpárra érvényes a következő egyenlőség:

$$P(X < x, Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y). \tag{6.1}$$

A (6.1) egyenlőség a peremeloszlás-függvények segítségével felírható az

$$F(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$$

alakban, ahol $F(x, y)$ az (X, Y) együttes eloszlásfüggvénye, $F_X(x)$ és $F_Y(y)$ a megfelelő peremeloszlás-függvények.

6.5. tétel. Ha az (X, Y) valószínűségi vektor komponensei *függetlenek*, akkor bármely $x_1 < x_2$ és bármely $y_1 < y_2$ esetén

$$P(x_1 \leqslant X < x_2, y_1 \leqslant Y < y_2) = P(x_1 \leqslant X < x_2) \cdot P(y_1 \leqslant Y < y_2).$$

Bizonyítás. Az eloszlásfüggvényre felírt feltételt használjuk:

$$\begin{aligned}
&P(x_1 \leqslant X < x_2,\, y_1 \leqslant Y < y_2) = \\
&\quad = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) = \\
&\quad = F_X(x_2)F_Y(y_2) - F_X(x_1)F_Y(y_2) - F_X(x_2)F_Y(y_1) + F_X(x_1)F_Y(y_1) = \\
&\quad = (F_X(x_2) - F_X(x_1))\,(F_Y(y_2) - F_Y(y_1)) = \\
&\quad = P(x_1 \leqslant X < x_2) \cdot P(y_1 \leqslant Y < y_2).
\end{aligned}$$

Példa. A 6.2. táblázatban szereplő két komponensű (X, Y) valószínűségi változó X és Y komponensei függetlenek, mivel

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) = p_i \cdot q_j, \quad \text{ha } i \in \{1, 2\} \text{ és } j \in \{1, 2, 3\}.$$

Gyakorlatok.

1. Legyen az (X, Y) együttes eloszlása a következő:

6.3. táblázat.

X	Y: 0	1	2	X perem-eloszlása
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{12}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{7}{18}$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{36}$
Y perem-eloszlása	$\frac{15}{36}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	1

Számítsuk ki:

a) a $t(X, Y) = X + Y$ valószínűségi változó várható értékét;

b) (X, Y) peremeloszlásainak várható értékét;

c) az $M(X\,|Y = 2)$ és $M(Y\,|X = 1)$ várható értékeket.

Megoldás.

a)

$$\begin{aligned} M(X+Y) = (0+0)\cdot\frac{1}{6} + (0+1)\cdot\frac{1}{3} + (0+2)\cdot\frac{1}{12} + \\ + (1+0)\cdot\frac{2}{9} + (1+1)\cdot\frac{1}{6} + (1+2)\cdot 0 + \\ + (2+0)\cdot\frac{1}{36} + (2+1)\cdot 0 + (2+2)\cdot 0 = \frac{12}{9}. \end{aligned}$$

b)

$$M(X) = 0\cdot\frac{7}{12} + 1\cdot\frac{7}{18} + 2\cdot\frac{1}{36} = \frac{4}{9},$$
$$M(Y) = 0\cdot\frac{15}{36} + 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{12} = \frac{2}{3}.$$

c)

$$M(X\,|Y = 2) = 0\cdot\frac{1}{12} + 1\cdot 0 + 2\cdot 0 = 0 \quad \text{és}$$
$$M(Y\,|X = 1) = \frac{18}{7}\left(0\cdot\frac{2}{9} + 1\cdot\frac{1}{6} + 1\cdot 0\right) = \frac{3}{7}.$$

2. Egy 100 fős juhállománynak a gyapjú- és tejhozamát a 6.4. táblázatban foglaltuk össze, ahol X jelöli a juhonkénti gyapjúhozamot és Y a tejhozamot.

6.4. táblázat.

T_1	T_2							összesen
	$y_1 = 4$	$y_2 = 5$	$y_3 = 6$	$y_4 = 7$	$y_5 = 8$	$y_6 = 9$	$y_7 = 10$	
$x_1 = 4$	5	2	1					8
$x_2 = 5$	4	4	0	2				10
$x_3 = 6$		5	9	0	2			16
$x_4 = 7$		4	10	20	7	1		42
$x_5 = 8$			5	4	0	2		11
$x_6 = 9$			1	2	3	0	1	7
$x_7 = 10$					2	1	3	6
összesen	9	15	26	28	14	4	4	100

a) Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott juh 6 kg gyapjút ad.
b) Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott juh 9 liter tejet ad.
c) Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott juh 6 kg gyapjút és 9 liter tejet ad.
d) Számítsuk ki a gyapjúhozam és a tejhozam átlagát.

Megoldás.

a) 100 juh közül négyre teljesül a feltétel, tehát

$$p_3 = P(X = x_3) = P(X = 6) = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}.$$

b) Hasonlóan adhatjuk meg annak valószínűségét, hogy egy juh $x_3 = 9$ liter tejet ad.

$$q_6 = P\left(Y = y_6\right) = P\left(Y = 9\right) = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}.$$

c) Annak az „együttes" eseménynek a valószínűsége, hogy egy juh 7 kg gyapjút és $y_6 = 9$ liter tejet ad

$$p_{46} = P(X = x_4, Y = y_6) = P(X = 7, Y = 9) = \frac{1}{100}.$$

d) A gyapjúhozam átlaga:

$$H(X) = 8 \cdot \frac{4}{100} + 5 \cdot \frac{10}{100} + 6 \cdot \frac{16}{100} + 7 \cdot \frac{42}{100} + 8 \cdot \frac{11}{100} + \\ + 9 \cdot \frac{7}{100} + 10 \cdot \frac{6}{100} = 6,83$$

$$H(Y) = 4 \cdot \frac{9}{100} + 5 \cdot \frac{15}{100} + 6 \cdot \frac{26}{100} + 7 \cdot \frac{28}{100} + 8 \cdot \frac{14}{100} + \\ + 9 \cdot \frac{4}{100} + 10 \cdot \frac{4}{100} = 6,51.$$

A p_{ij}, p_i, q_j valószínűségeket a következő táblázat tartalmazza:

6.5. táblázat.

X	Y: $y_1 = 4$	$y_2 = 5$	$y_3 = 6$	$y_4 = 7$	$y_5 = 8$	$y_6 = 9$	$y_7 = 10$	$\sum_j p_{ij} = P(X = x_i)$
$x_1 = 4$	$\frac{5}{100}$	$\frac{2}{100}$	$\frac{1}{100}$	0	0	0	0	$p_1 = \frac{4}{25}$
$x_2 = 5$	$\frac{4}{100}$	$\frac{4}{100}$	0	$\frac{2}{100}$	0	0	0	$p_2 = \frac{1}{10}$
$x_3 = 6$	0	$\frac{5}{100}$	$\frac{9}{100}$	0	$\frac{2}{100}$	0	0	$p_3 = \frac{4}{25}$
$x_4 = 7$	0	$\frac{4}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{7}{100}$	$\frac{1}{100}$	0	$p_4 = \frac{21}{50}$
$x_5 = 8$	0	0	$\frac{5}{100}$	$\frac{4}{100}$	0	$\frac{2}{100}$	0	$p_5 = \frac{11}{100}$
$x_6 = 9$	0	0	$\frac{1}{100}$	$\frac{2}{100}$	$\frac{3}{100}$	0	$\frac{1}{100}$	$p_6 = \frac{7}{100}$
$x_7 = 10$	0	0	0	0	$\frac{2}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{3}{100}$	$p_7 = \frac{6}{100}$
$\sum_i p_{ij} = P(Y = y_j)$	$\frac{9}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{26}{100}$	$\frac{28}{100}$	$\frac{14}{100}$	$\frac{4}{100}$	$\frac{4}{100}$	1

7. FEJEZET

KÉTDIMENZIÓS FOLYTONOS VALÓSZÍNŰSÉGI VEKTOROK ÉS JELLEMZŐIK

Csak *kétdimenziós* valószínűségi vektorokkal foglalkozunk, de az eredmények többdimenziós vektorváltozóra is kiterjeszthetők.

7.1. Kétdimenziós folytonos valószínűségi vektorok

Legyen X és Y két folytonos valószínűségi változó. Az (X, Y) valószínűségi vektort folytonos valószínűségi vektornak nevezzük, és a lehetséges értékeinek megfeleltethetjük az xOy sík pontjait.

7.1. értelmezés. Az (X, Y) valószínűségi vektor eloszlásfüggvényének (együttes eloszlásfüggvénynek) nevezzük az

$$F : \mathbb{R}^2 \to [0, 1], \quad F(x, y) = P(X < x, Y < y) \tag{7.1}$$

függvényt.

Annak a valószínűsége, hogy (X, Y) vektornak megfelelő pont az $x_1 \leqslant X \leqslant x_2$, $y_1 \leqslant Y < y_2$ téglalapba kerül, kifejezhető az együttes eloszlásfüggvénynek a téglalap csúcsaiban felvett négy értékével (a bizonyítás ugyanaz, mint diszkrét esetben):

$$P(x_1 \leqslant X < x_2, y_1 \leqslant Y < y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1). \tag{7.2}$$

Az egydimenziós eloszlásfüggvényhez hasonlóan igazolhatjuk, hogy teljesülnek a következő tulajdonságok:

1. Ha $x_1 \leqslant x_2$ és $y_1 \leqslant y_2$, akkor $F(x_1, y_1) \leqslant F(x_2, y_2)$, azaz az együttes eloszlásfüggvény mindkét változója szerint növekedő.
2. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} F(x, y) = 1, \quad \lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to-\infty}} F(x, y) = 0, \quad \lim\limits_{\substack{x\to-\infty \\ y\to\infty}} F(x, y) = 0.$
3. $F(x, y)$ mindkét változója szerint balról folytonos.

Példa. Legyen az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3}xy\,(2x+y)\,, & \text{ha } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Számítsuk ki a $P\left(X < \frac{1}{3}, Y < \frac{1}{2}\right)$ valószínűséget.

Megoldás. $P\left(X < \frac{1}{3}, Y < \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{108}$.

7.2. Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók sűrűségfüggvénye

7.2. értelmezés. Az (X,Y) folytonos valószínűségi vektor F eloszlásfüggvényének másodrendű vegyes parciális deriváltját az (X,Y) folytonos vektorváltozó sűrűségfüggvényének nevezzük és f-fel jelöljük. Tehát

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F\,(x,y)}{\partial x \partial y} = F''_{xy}(x,y). \tag{7.3}$$

Ha h és k elég kicsi, akkor

$$f(x,y) = \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{P(x \leqslant X < x+h, y \leqslant Y < y+k)}{hk},$$

vagyis a sűrűségfüggvény jó közelítésben a területegységre eső valószínűség.

Az értelmezés alapján következik, hogy

$$P(X < x, Y < y) = F(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv.$$

Figyelembe véve az eloszlásfüggvény tulajdonságait írhatjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1,$$

és általában annak a valószínűsége, hogy a vektorváltozónak megfelelő pont az xOy sík egy D tartományában van

$$P((X,Y) \in D) = \iint_D f(x,y)dxdy. \tag{7.4}$$

Ha ismert X és Y együttes eloszlása, akkor az együttes eloszlásfüggvényből vagy sűrűségfüggvényből meghatározható külön-külön X, illetve Y eloszlása. Ezeket nevezzük *perem- vagy vetületi eloszlásfüggvények*nek.

$$F_1(x) = P(X < x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x} f(u, v) du dv,$$

$$F_2(y) = P(Y < y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) du dv.$$

Ha az f folytonos sűrűségfüggvény, akkor az előbbi egyenlőségekből x, illetve y szerinti deriválással kapjuk a peremsűrűség-függvényeket:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \quad \text{és} \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$

Megjegyzés. Felhasználtuk a következő tételt: ha $f(x, y)$ folytonos a D-ben, akkor $F(x, y) = \int_a^x du \int_b^y f(u, v)\, dv$ elsőrendű parciális deriváltjai folytonosak a D-ben és

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_b^y f(x, v)\, dv \quad \text{és} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \int_b^x f(u, y)\, du.$$

Példák.

1. Legyen az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3} xy (2x + y), & \text{ha } 0 < x < 1, 0 < y < 1; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Számítsuk ki a sűrűségfüggvényt!

Megoldás. Ki kell számítani a $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$-t. Először az $F(x, y)$-t deriváljuk x szerint, majd a kapott függvényt y szerint:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{3} [y (2x + y) + 2xy],$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{1}{3} (4x + 2y) = \frac{2}{3} (2x + y).$$

Tehát

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(2x+y), & \text{ha } 0 < x < 1, 0 < y < 1; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

2. Számítsuk ki az előbbi példa sűrűségfüggvényével adott eloszlás esetén a $P\left(0 < X < \frac{1}{3}, \frac{1}{3} < Y < \frac{1}{2}\right)$ valószínűséget.

Megoldás. A (7.4) képlet alapján írhatjuk, hogy

$$P\left(0 < X < \frac{1}{2}, \frac{1}{3} < Y < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{3}} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{2}{3}(2x+y)\,dxdy =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{3}} \left(\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} (2x+y)\,dy\right) dx = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{3}} \left(\left[2xy + \frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\right) dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{x}{3} + \frac{5}{72}\right) dx = \frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{6} + \frac{5}{72}x\right)\Bigg|_{\frac{1}{3}}^{0} = \frac{1}{36}.$$

Megjegyzés. A $P\left(0 < X < \frac{1}{3}, \frac{1}{3} < Y < \frac{1}{2}\right)$ valószínűséget a (7.2) képlet segítségével is kiszámíthatjuk:

$$\begin{aligned} &P(x_1 \leqslant X < x_2, y_1 \leqslant Y < y_2) = \\ &\quad = F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1) = \\ &\quad = F\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right) - F\left(0,\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) + F\left(0,\frac{1}{3}\right) = \\ &\quad = \frac{7}{108} - 0 - \frac{1}{27} + 0 = \frac{1}{36}. \end{aligned}$$

3. Határozzuk meg A értékét úgy, hogy az

$$f(x,y) = \begin{cases} A(2x+y), & \text{ha } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény egy valószínűségi vektor sűrűségfüggvénye legyen.

Megjegyzés. Ahhoz, hogy $f(x,y)$ sűrűségfüggvény legyen, teljesülnie kell az alábbi két feltételnek:

a) $f(x,y) \geqslant 0$,

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$.

Megoldás.

a) Belátható, hogy $2x+y$ az adott tartományban pozitív, ezért A-nak pozitívnak kell lennie.

b)

$$A\int_0^1\left(\int_0^1 (2x+y)\,dy\right)dx = A\int_0^1\left[2xy+\frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_0^1 dx =$$

$$= A\int_0^1\left(2x+\frac{1}{2}\right)dx = A\left(x^2+\frac{1}{2}\Bigg|_1^0\right) = A\cdot\frac{3}{2} = 1,$$

ahonnan $A=\frac{2}{3}$.

4. Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(2x+y), & \text{ha } 0<x<1, 0<y<1; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg a peremsűrűség-függvényeket.

Megoldás. $f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 \frac{2}{3}(2x+y)dy = \frac{1}{3}(4x+1)$, azaz

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(4x+1), & \text{ha } x\in(0,1); \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Hasonló módon $f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \frac{2}{3}\int_0^1 (2x+y)dx = \frac{2}{3}(y+1)$, azaz

$$f_2(y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(1+y), & \text{ha } y\in(0,1); \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

7.3. Feltételes eloszlás- és sűrűségfüggvény

7.3. értelmezés. Folytonos valószínűségi változók esetében az X valószínűségi változónak az $Y=y$ feltételre vonatkoztatott feltételes eloszlásfüggvényét az

$$F(x\,|y) = P(X<x\,|Y<y) = \frac{P(X<x, Y<y)}{P(Y<y)} = \frac{F(x,y)}{F_2(y)}$$

egyenlőséggel definiáljuk. Hasonlóan

$$F(x\,|y_1 \leqslant Y < y_2) = P(X < x\,|y_1 \leqslant Y < y_2) = \\ = \frac{P(X < x, y_1 \leqslant Y < y_2)}{P(y_1 \leqslant Y < y_2)} = \frac{F(x, y_2) - F(x, y_1)}{F_2(y_2) - F_2(y_1)}. \tag{7.5}$$

$$F(x\,|Y \geqslant y) = P(X < x\,|Y \geqslant y) = \\ = \frac{P(X < x, Y \geqslant y)}{P(Y \geqslant y)} = \frac{F_1(x) - F(x, y)}{1 - F_2(y)}. \tag{7.6}$$

Az $F(x\,|y)$ eloszlásfüggvény a (7.5) képlet segítségével felírható a következőképpen is:

$$F(x\,|y) = F(x\,|Y = y) = \lim_{k\to 0} F(x\,|y \leqslant Y < y + k) = \\ = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{F(x,y+k)-F(x,y)}{k}}{\frac{F_2(y+k)-F_2(y)}{k}} = \frac{F'_y(x, y)}{f_2(y)}. \tag{7.7}$$

Hasolóan $F\,(y\,|x) = \frac{F'_x(x,y)}{f_1(x)}$.

A (7.7)-nek x szerinti parciális deriváltja adja meg a feltételes sűrűségfüggvényt:

$$f_{1|2}\,(x\,|y) = \frac{F''_{yx}(x, y)}{f_2(y)}. \tag{7.8}$$

A (7.8) képlet a $P(A\,|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ feltételes valószínűség kiterjesztése folytonos változókra. Az $f(x, y) = f_{1|2}\,(x\,|y) \cdot f_2(y)$ mindkét oldalának y szerinti integrálásával kapjuk, hogy

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{1|2}\,(x\,|y) \cdot f_2(y)dy. \tag{7.9}$$

A (7.8) képlet a $P(A) = \sum_i P(A\,|B_i)P(B_i)$ teljes valószínűség tételének általánosítása folytonos változókra. Hasonlóképpen történik a Bayes-tétel általánosítása diszkrét eseményekről folytonos valószínűségi változókra:

$$P(\,A_i|\,B) = \frac{P(B\,|A_i)P(A_i)}{\sum_i P(B\,|A_i)P(A_i)} \quad \to \\ \to \quad f_{1/2}(x\,|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \frac{f_{2/1}(y\,|x) \cdot f_1(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{2/1}(y\,|x) \cdot f_1(x)dx}.$$

Az X és Y valószínűségi változók függetlenek, ha

$$P(X < x, Y < y) = F(x, y) = P(X < x) \cdot P(Y < y) = F_1(x) \cdot F_2(y).$$

A feltételes sűrűségfüggvény képletéből következik az alábbi tétel:

7.4. tétel. Az X és Y folytonos valószínűségi változók akkor és csak akkor *függetlenek*, ha a sűrűségfüggvényekre fennáll az

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

összefüggés.

Példa. Az (X, Y) sűrűségfüggvénye a következő:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(2x + y), & \text{ha } 0 < x < 1, 0 < y < 1. \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

a) Határozzuk meg a feltételes eloszlásfüggvényeket!
b) Írjuk fel az $f_{1|2}(x|y)$ és $f_{2|1}(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvényeket!
c) Állapítsuk meg, függetlenek-e az X és Y valószínűségi változók!
d) Számítsuk ki a $P\left(0 < X < \frac{1}{2} \middle| Y = \frac{1}{2}\right)$ valószínűséget!

Megoldás.
a) Az (X, Y) eloszlásfüggvénye

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3}xy(2x + y), & \text{ha } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

A feltételes eloszlásfüggvények meghatározására használjuk a következő képleteket:

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \begin{cases} \frac{\frac{2}{3}(2x+y)}{\frac{2}{3}(1+y)} = \frac{2x+1}{1+y}, & \text{ha } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \begin{cases} \frac{\frac{2}{3}(2x+y)}{\frac{1}{3}(4x+1)} = \frac{4x+2y}{4x+1}, & \text{ha } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

b) Mivel $f(x, y) \neq f_1(x) \cdot f_2(y)$, ezért az X és Y nem függetlenek.
c) A keresett valószínűség:

$$P\left(0 < X < \frac{1}{2} \middle| Y = \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} f_{1|2}\left(x \middle| \frac{1}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} (2x+1)\, dx = \frac{2}{3}\left(x^2 + x\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

7.4. Várható értékek

Legyen az X, Y együttes sűrűségfüggvénye $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Az (X, Y) vektor várható értékét az

$$(m_1, m_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_1, x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

integrállal értelmezzük. Ha $t : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ egy függvény, amelynek az értelmezési tartománya tartalmazza az X és Y értékkészletének Descartes-szorzatát, akkor $t(X, Y)$ is egy valószínűségi változó és a várható értéke

$$M(t(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t(x, y) f(x, y) dx dy.$$

Példa. Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(2x + y), & \text{ha } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Számítsuk ki az $X + Y$ és $X \cdot Y$ várható értékét.

Megoldás.

$$M(X + Y) = \frac{2}{3}\int_0^1\int_0^1 (x + y)(2x + y) dx dy =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1\int_0^1 (2x^2 + 3yx + y^2) dx dy = \frac{2}{3}\int_0^1 \left(\int_0^1 (2x^2 + 3yx + y^2) dx\right) dy =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}yx^2 + y^2x\right)\Big|_0^1 dy = \frac{2}{3}\int_0^1 \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2}y + y^2\right) dy =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}y + \frac{3}{4}y^2 + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{6}.$$

$$M(X \cdot Y) = \frac{2}{3}\int_0^1\int_0^1 xy(2x+y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 (2x^2y + xy^2)dx\right) dy =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 \left(\frac{2x^3}{3}y + \frac{x^2}{2}y^2\right)\Big|_0^1 dy = \frac{2}{3}\int_0^1 \left(\frac{2y}{3} + \frac{y^2}{2}\right) dy =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{y^2}{3} + \frac{y^3}{6}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}.$$

7.5. A peremeloszlások várható értéke

Ha f_1 az X változó peremsűrűség-függvénye és f_2 az Y változóé, akkor az

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)dx \quad \text{és} \quad M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y)dy$$

összefüggések segítségével számítjuk ki a peremeloszlások várható értékét.

Példa. Legyen az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(2x+y), & \text{ha } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Számítsuk ki a peremeloszlások várható értékét.

Megoldás. Felhasználjuk a meghatározott peremsűrűség-függvényeket:

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(4x+1), & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(1+y), & y \in (0,1) \\ 0, & y \notin (0,1) \end{cases}$$

$$M(X) = \frac{1}{3}\int_0^1 x\cdot(4x+1)\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(4x^2+x\right)dx =$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}x^3+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{8}.$$
$$M(Y) = \int_0^1 y\cdot f_2(y)dy = \frac{2}{3}\int_0^1 y\cdot(1+y)\,dy =$$
$$= \frac{2}{3}\left(\frac{y^2}{3}+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{10}{8}.$$

7.6. Feltételes eloszlások várható értéke

Az X folytonos valószínűségi változónak az Y folytonos valószínűségi változó $Y = y$ feltétel melletti feltételes várható értéke $M(X\,|Y=y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_1(x\,|y)dx$. Hasonlóan $M(Y\,|X=x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f_2(y\,|x)dy$. Ha behelyettesítjük a sűrűségfüggvényeket, a következő összefüggésekhez jutunk:

$$M(X\,|Y=y) = \frac{1}{f_2(y)}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x,y)dx, \quad \text{és}$$
$$M(Y\,|X=x) = \frac{1}{f_1(x)}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f(x,y)dy.$$

Példa. Az X és Y változók együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(2x+y), & \text{ha } 0<x<1, 0<y<1 \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Számítsuk ki az $M\left(X\,\middle|Y=\frac{1}{2}\right)$ feltételes várható értéket.

Megoldás. A peremsűrűség-függvény az

$$f_2(y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(1+y), & \text{ha } y\in(0,1) \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény, így

$$M\left(X\,\middle|\,Y=\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{1}\int_0^1 x\cdot\frac{2}{3}\left(2x+\frac{1}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1\left(2x^2+\frac{x}{2}\right)dx=\frac{2}{3}\left(\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{11}{18}.$$

8. FEJEZET

KOVARIANCIA, KORRELÁCIÓS EGYÜTTHATÓ ÉS REGRESSZIÓANALÍZIS

Az n elemű (x_i, y_i), $1 \leqslant i \leqslant n$ véletlen minták esetén gyakorlati jelentőségű, hogy megállapítsuk a megfelelő X és Y valószínűségi változók közötti kapcsolat erősségét. Hasonlóan érvényes ez *sztochasztikus folyamatok* esetében, amikor $t \in \mathbb{N}$ időpontokban megfigyelt X és Y valószínűségi változók értékeinek (x_t, y_t) időben lezajló változásai közötti kapcsolatot vizsgáljuk. Egy ilyen gyakorlati példa egy termék X ára és a termék iránti Y kereslet (a termékből bizonyos időpontokban eladott mennyiség) közti összefüggés meghatározása. Az X és Y valószínűségi változók közötti összefüggések vizsgálatához szükségünk van a következő fogalmakra: kovariancia, korrelációs együttható, regresszióanalízis.

8.1. A kovariancia (együttváltozás)

8.1. értelmezés. Legyen X és Y két tetszőleges valószínűségi változó. Ha ezeknek létezik várható értéke és létezik az $(X-M(X))(Y-M(Y))$ (eltérés-változók szorzata) változó várható értéke, akkor ezt a várható értéket az X és Y *kovarianciájának* nevezzük.

8.2. tétel (A kovariancia tulajdonságai).
1. Szimmetrikus, azaz $\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,X)$;
2. $M\left((X - M(X))(Y - M(Y))\right) = M\left(XY\right) - M\left(X\right) \cdot M\left(Y\right)$;
3. ha $X = Y$, akkor $\operatorname{cov}(X,Y) = D^2(X)$;
4. $|\operatorname{cov}(X,Y)| \leqslant D(X) \cdot D(Y)$.

Bizonyítás.
2. Valóban,

$$[X - M(X)]\,[Y - M(Y)] = XY - XM\left(Y\right) - YM\left(X\right) + M\left(X\right)M\left(Y\right)$$

és ennek a várható értéke $M\left(XY\right) - M\left(X\right) \cdot M\left(Y\right)$.

4. Az $M\left[(X-\lambda Y)^2\right] \geqslant 0$ egyenlőtlenségből felírhatjuk, hogy

$$M\left(X^2\right) - 2\lambda M\left(XY\right) + \lambda^2 M\left(Y^2\right) \geqslant 0,$$

ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Innen következik, hogy az egyenlőtlenég bal oldalán álló másodfokú trinom diszkriminánsa $\Delta \leqslant 0$, tehát

$$M^2\left(XY\right) \leqslant M\left(X^2\right) \cdot M\left(Y^2\right). \tag{8.1}$$

Ha a (8.1)-ben X-et helyettesítjük $X - M(X)$-szel és Y-t $Y - M(Y)$-nal és utána négyzetgyököt vonunk, azt kapjuk, hogy $|\mathrm{cov}(X,Y)| \leqslant D(X) \cdot D(Y)$.

Diszkrét valószínűségű változók esetén, ha X és Y lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots$, illetve $y_1, y_2, \ldots$ és az együttes valószínűségek p_{ij}, akkor X és Y kovarianciája

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}[x_i - M(X)][y_j - M(Y)]p_{ij}.$$

8.2. A korrelációs együttható

Az X és Y tetszőleges valószínűségi változók közötti kapcsolat erősségének a mérésére használjuk a kovarianciának egy normált vagy standartizált formáját, amelynek értéke mindig ugyanazon korlátok között marad. Ezt a normált vagy standartizált formát úgy kapjuk meg, hogy a kovariancia értékét elosztjuk a valószínűségi változók nem zérus szórásainak szorzatával.

8.3. értelmezés. Az X és Y valószínűségi változó korrelációs együtthatója a kovariancia normált vagy standardizált alakja

$$R(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{D(X)\cdot D(Y)} = \frac{M(XY) - M(X)M(Y)}{D(X)\cdot D(Y)}.$$

8.4. tétel (A korrelációs együttható tulajdonságai).

1. $|R(X,Y)| \leqslant 1$;
2. ha az X és Y valószínűségi változók között lineáris kapcsolat van, $Y = aX + b$, akkor $R(X,Y) = 1$, ha $a > 0$ és $R(X,Y) = -1$, ha $a < 0$;

3. ha az X és Y valószínűségi változók függetlenek, akkor

$$R(X,Y) = 0;$$

4. ha X és Y korrelálatlanok és létezik a szórásuk, akkor

$$D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y).$$

Bizonyítás.
1. Következik a kovariancia 4. tulajdonságából.
2.

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) &= \operatorname{cov}(X, aX+b) = \\ &= M\left(aX^2 + bX\right) - M(X)\cdot M(aX+b) = \\ &= aM\left(X^2\right) + bM(X) - aM^2(X) - bM(X).\end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned}R(X,Y) &= \frac{a\left[M\left(X^2\right) - M^2(X)\right]}{D(X)\cdot D(aX+b)} = \frac{a\left[M\left(X^2\right) - M^2(X)\right]}{|a|\, D^2(X)} = \\ &= \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1, & \text{ha } a > 0 \\ -1, & \text{ha } a < 0. \end{cases}\end{aligned}$$

3. Független változókra $M(XY) - M(X)\cdot M(Y) = 0$. Fordítva nem igaz, vagyis abból, hogy $R(X,Y) = 0$, nem következik az X és Y függetlensége.

Megjegyzés. Ha $R(X,Y) = 0$, azt mondjuk, hogy a valószínűségi változók *korrelálatlanok*. A függetlenség fogalmánál tágabb fogalom a korrelálatlanság fogalma. Ha az X és Y valószínűségi változók normális eloszlásúak, akkor a korrelálatlanságukból következik az X és Y függetlensége.

4. Ellenőrizhető, hogy $D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y) + 2\operatorname{cov}(X,Y)$ és ennek alapján nyilvánvaló a tulajdonság.

Példa. Számítsuk ki a 8.1. táblázatban szereplő X és Y diszkrét valószínűségi változók

a) kovarianciáját,
b) korrelációs együtthatóját.

8.1. táblázat.

X	Y: 5	Y: 6	Y: 10	X peremeloszlása
2	$\frac{12}{90}$	$\frac{16}{90}$	$\frac{12}{90}$	$p_1 = \frac{40}{90}$
3	$\frac{15}{90}$	$\frac{20}{90}$	$\frac{15}{90}$	$p_2 = \frac{50}{90}$
Y peremeloszlása	$q_1 = \frac{27}{90}$	$q_2 = \frac{36}{90}$	$q_3 = \frac{27}{90}$	1

Megoldás.
a) Kiszámítjuk a kovariancia képletében szereplő mennyiségeket:

$$M(XY) = \sum_j x_i y_j p_{ij} = 10 \cdot \frac{12}{90} + 12 \cdot \frac{16}{90} + 20 \cdot \frac{12}{90} +$$
$$+ 15 \cdot \frac{15}{90} + 18 \cdot \frac{20}{90} + 30 \cdot \frac{15}{90} = 17,6\,(3)\,,$$
$$M\,(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i p_i = 2 \cdot \frac{40}{90} + 3 \cdot \frac{50}{90} = \frac{23}{9},$$
$$M\,(Y) = \sum_{j=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} y_j q_j = 5 \cdot \frac{27}{90} + 6 \cdot \frac{36}{90} + 10 \cdot \frac{27}{90} = \frac{621}{90} = 6,9,$$
$$M\,(X,Y) - M\,(X)\,M\,(Y) = \frac{1587}{90} - \frac{23}{9} \cdot \frac{621}{90} = \frac{1}{90}\,(1587 - 1587) = 0.$$

Tehát az X és Y korrelálatlanok.
b)

$$R\,(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}\,(X,Y)}{D\,(X) \cdot D\,(Y)} = \frac{M\,(X,Y) - M\,(X) \cdot M\,(Y)}{D\,(X) \cdot D\,(Y)} = 0.$$

Megjegyzés. Ellenőrizhető, hogy a vizsgált változók függetlenek is.

8.3. Regresszióanalízis

Az időben zajló véletlen (sztochasztikus) folyamatokhoz rendelt X és Y valószínűségi változók összefüggését az eloszlásfüggvényen

és a sűrűségfüggvényen kívül jellemezhetjük egy olyan g függvénnyel, amelyre Y és $g(X)$ különbsége négyzetének várható értéke minimális.

Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy az X és Y valószínűségi változók megfelelő értékeiből szerkesztett (x_i, y_i) pontokat ábrázoljuk az xOy koordinátarendszerben, majd keresünk egy olyan $y = g(x)$ egyenletű görbét, amelyre ezek a pontok a lehető legjobban illeszkednek. Az illeszkedés jóságának mérésére az eltérések négyzetösszegét használjuk. Igazolható, hogy $g(x)$ éppen Y-nak az $X = x$ feltétel mellett számolt várható értéke, tehát

$$g(x) = m_2(x) = M(Y \,|X = x).$$

Ennek a függvénynek a grafikus képét Y-nak az X-re vonatkozó *regressziós görbéjének* nevezzük.

8.5. értelmezés. Ha X, Y valószínűségi változók, akkor az $m_2(x) = M(Y \,|X = x)$ függvényt az Y valószínűségi változónak az X valószínűségi változóra vonatkoztatott (elsőfajú) regressziós függvényének, az $m_1(y) = M(X \,|Y = y)$ függvényt pedig az X valószínűségi változónak az Y valószínűségi változóra vonatkoztatott (elsőfajú) *regressziós függvényének* nevezzük.

A regressziós függvény diszkrét esetben

Ha X, Y diszkrét valószínűségi változók és az *együttes* valószínűségek $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$, a megfelelő peremvalószínűségek

$$p_i = P(X = x_i) = \sum_j p_{ij}, \quad q_j = P(Y = y_j) = \sum_i p_{ij},$$

akkor

$$M(Y \,|X = x_i) = \sum_j y_j \frac{p_{ij}}{p_i} = m_2(x_i) \quad \text{és}$$
$$M(X \,|Y = y_j) = \sum_i x_i \frac{p_{ij}}{q_j} = m_1(y_j).$$

Példa. A 8.2. táblázatban az (X, Y) diszkrét valószínűségi változók *együttes* és *peremvalószínűség-eloszlása* látható. Határozzuk meg az X-nek Y-ra, illetve Y-nak X-re vonatkozó regressziós függvényét.

8.2. táblázat.

y_j	5	6	10
$m_1(y_j)$	$\frac{23}{9}$	$\frac{23}{9}$	$\frac{23}{9}$

Megoldás. Meghatározzuk az elsőfajú regressziós függvényértékeket, először X-nek az Y-ra vonatkoztatott regressziós függvényértékeit és azután Y-nak az X-re vonatkoztatott regressziós függvényértékeit:

$$m_1(5) = M(X/Y=5) = 2\cdot\frac{12}{27} + 3\cdot\frac{15}{27} = \frac{1}{27}(24+45) = \frac{69}{27} = \frac{23}{9},$$
$$m_1(6) = 2\cdot\frac{16}{36} + 3\cdot\frac{20}{36} = \frac{1}{36}(32+60) = \frac{92}{36} = \frac{23}{9} = 2,5,$$
$$m_1(10) = 2\cdot\frac{12}{27} + 3\cdot\frac{15}{27} = \frac{1}{27}(24+45) = \frac{69}{27} = \frac{23}{9}.$$

Hasonlóan határozzuk meg Y-nak az X-re vonatkoztatott regressziós függvényét:

$$m_2(2) = 5\cdot\frac{12}{40} + 6\cdot\frac{16}{40} + 10\cdot\frac{12}{40} = \frac{276}{40} = 6,9,$$
$$m_2(3) = 5\cdot\frac{15}{50} + 6\cdot\frac{20}{50} + 10\cdot\frac{15}{50} = \frac{345}{50} = 6,9.$$

A regressziós függvény folytonos esetben

Ha az (X,Y) kétdimenziós folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye f és a peremsűrűség-függvények f_1, illetve f_2, akkor a regressziós függvények

$$m_2(x) = M(Y\,|X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\cdot f_{2|1}(y\,|x)dy = \int_{-\infty}^{\infty} y\cdot\frac{f(x,y)}{f_1(x)}dy \quad \text{és}$$
$$m_1(y) = M(X\,|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_{1|2}(x\,|y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\frac{f(x,y)}{f_2(y)}dx.$$

Megjegyzés. Ha X és Y független valószínűségi változók, akkor regressziós függvényeik állandók.

Példa. Legyen X, Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(2x+y), & \text{ha } 0 < x < y, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Számítsuk ki az X és Y változók

a) kovarianciáját,

b) korrelációs együtthatóját,

c) az elsőfajú regressziós függvények értékkészleteit.

Megoldás.

a) $\operatorname{cov}(X,Y) = M(X,Y) - M(X)M(Y)$, tehát előbb kiszámítjuk a megfelelő mennyiségeket:

$$M(X,Y) = \frac{2}{3}\int_0^1\int_0^1 xy(2x+y)\,dxdy = \frac{2}{3}\int_0^1\int_0^1 \left(2x^2y + xy^2\right)dxdy =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1\left(\int_0^1 \left(2x^2y + xy^2\right)dy\right) = \frac{2}{3}\int_0^1 \left(x^2\cdot y^2 + \frac{xy^3}{3}\right)\Big|_0^1 dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{3}\right)dx = \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{6}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

$M(X)$ és $M(Y)$ kiszámítása feltételezi a peremsűrűség-függvények ismeretét.

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \frac{2}{3}\int_0^1 (2x+y)\,dy =$$

$$= \frac{2}{3}\left(2xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(4x+1), \quad x \in (0,1)$$

$$f_2(y) = \frac{2}{3}\int_0^1 (2x+y)\,dx = \frac{2}{3}\left(x^2 + yx\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(1+y), \quad y \in (0,1),$$

tehát

$$M(X) = \int_0^1 x\cdot f_1(x)\,dx = \frac{1}{3}\left(4\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{11}{18}.$$

Hasonlóan

$$M(Y) = \frac{2}{3}\int_0^1 y(1+y)\,dy = \frac{2}{3}\int_0^1 \left(y+y^2\right)dy = \frac{2}{3}\left(\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{10}{18}$$

és így

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \frac{1}{3} - \frac{11}{18}\cdot\frac{10}{18} = -\frac{6}{972} = -0,0061.$$

b) A korrelációs együttható kiszámításához szükségünk van a $D(X)$ és $D(Y)$ mennyiségekre, ezért kiszámítjuk az $M(X^2)$ várható értéket.

$$M\left(X^2\right) = \int_0^1 x^2\cdot f_1(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x^2(4x+1)\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x^2(4x+1)\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(4x^3+x^2\right)dx = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{4}x^4+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}.$$

Tehát $D^2(X) = \frac{4}{9} - \left(\frac{11}{18}\right)^2 = \frac{4}{9} - \frac{121}{324} = \frac{23}{324} \cong 0,07$ és így $D(X) \cong 0,27$.

Hasonlóan

$$M\left(Y^2\right) = \int_0^1 y^2 f_2(y)\,dy = \frac{2}{3}\int_0^1 y^2(1+y)\,dy = \frac{2}{3}\int_0^1 \left(y^2+y^3\right)dy =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{y^3}{3}+\frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{7}{12} = \frac{7}{18},$$

tehát $D^2(Y) = \frac{7}{18} - \left(\frac{10}{18}\right)^2 = \frac{126-100}{324} = \frac{26}{324} \cong 0,08,\ D(Y) = 0,28$ és így

$$R(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D(X)\,D(Y)} \cong \frac{-0,0061}{0,27\cdot 0,28} \cong -0,08.$$

Folytonos valószínűségi változók estében, X-nek az Y-ra vonatkoztatott regressziós függvényét a következőképpen számítjuk ki:

$$m_1(y) = M(X\,|Y) = \int_0^1 x\cdot f_{1|2}(x\,|y)\,dx.$$

A feltételes sűrűségfüggvények:

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{\frac{2}{3}(2x+y)}{\frac{2}{3}(1+y)} = \frac{2x+y}{1+y} \quad \text{és}$$

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{\frac{2}{3}(2x+y)}{\frac{1}{3}(4x+1)} = \frac{2(2x+y)}{4x+1}.$$

Így

$$m_1(y) = \int_0^1 x \cdot \frac{2x+y}{y+1} dx = \frac{1}{1+y} \int_0^1 \left(2x^2 + xy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{1+y} \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2}y\right)\Big|_0^1 = \frac{4+3y}{6(1+y)}.$$

Hasonlóan

$$m_2(x) = M(Y/X) = \int_0^1 y \cdot f_{2/1}(y/x)\, dy = 2\int_0^1 y \cdot \frac{2x+y}{4x+1} dx =$$

$$= \frac{2}{4x+1} \int_0^1 \left(2xy + y^2\right) dy = \frac{2}{4x+1} \left(2x + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\frac{3x+1}{4x+3}.$$

Lineáris regresszió (másodfajú regresszió)

Ebben az esetben keressük a lineáris $g(X) = aX + b$ regressziós függvényt. Ha az X és Y megfelelő értékeit ismerjük és ezeket az (x_i, y_j) értékpárokat az xOy koordinátarendszerben ábrázoljuk, akkor keressük azt az $y = ax + b$ egyenletű egyenest, amelyhez a legjobban illeszkednek ezek a pontok. Ez azt jelenti, hogy az Oy mentén számolt eltérések négyzetösszege minimális. Így az

$$S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad S(a,b) = M\left([Y - (aX+b)]^2\right)$$

függvény minimumát keressük.

$$S(a,b) = M\left[Y^2 - 2Y(aX+b) + a^2X^2 + 2abM(X) + b^2\right] \tag{8.2}$$

A (8.2) kétváltozós függvény stacionárius pontjainak koordinátáit a következő egyenletrendszer megoldásai szolgáltatják:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 2aM\left(X^2\right) + 2b(X) - 2M(XY) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 2aM(X) + 2b - 2M(Y) = 0. \end{cases}$$

Egyszerűsítés után a következő egyenletrendszerhez jutunk

$$\begin{cases} aM\left(X^2\right) + bM\left(X\right) = M\left(XY\right) \\ aM\left(X\right) \ + b \qquad\quad = M\left(Y\right). \end{cases}$$

Ennek megoldása a Cramer-szabály alapján:

$$\Delta = \begin{vmatrix} M\left(X^2\right) & M\left(X\right) \\ M\left(X\right) & 1 \end{vmatrix} = M\left(X^2\right)) - M^2\left(X\right) = D^2\left(X\right).$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} M\left(XY\right) & M\left(X\right) \\ M\left(Y\right) & 1 \end{vmatrix} = \operatorname{cov}\left(X,Y\right) \quad \text{és}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} M\left(X^2\right) & M\left(XY\right) \\ M\left(X\right) & M(Y) \end{vmatrix} = M\left(X^2\right) M\left(Y\right) - M\left(XY\right) \cdot M\left(X\right).$$

Innen

$$a = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D^2(X)} \tag{8.3}$$

$$b = \frac{M(X^2) \cdot M(Y) - M(XY) \cdot M(X)}{D^2(X)} \tag{8.4}$$

A számlálóhoz hozzáadjuk és levonjuk az $M\left(X^2\right) \cdot M\left(Y\right)$ kifejezést és így a

$$b = \frac{M(X^2) \cdot M(Y) - M^2(X) \cdot M(Y) + M^2(X) \cdot M(Y) - M(XY) \cdot M(X)}{D^2(X)} =$$

$$= M\left(Y\right) - M\left(X\right) \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D^2(X)} \tag{8.5}$$

értéket kapjuk.

Példa. Határozzuk meg az (X,Y) valószínűségi változók regressziós egyenesét, ha az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlása a 8.3. táblázatban adott.

Megoldás. Keresünk egy olyan $Y_i = aX_i + b$ egyenletű egyenest, amelyhez az (x_i, y_i) koordinátájú pontok a legközelebb vannak, vagyis amelytől számolt eltérések négyzetösszege minimális.

8.3. táblázat.

X	Y 0	Y 1	X perem-eloszlása
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{2}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{1}{2}$
Y perem-eloszlása	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

A 8.3. táblázatban szereplő adatok alapján

$$M(X) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{3}, \quad M(Y) = \frac{2}{3},$$
$$M(X^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{3}, \quad M(Y^2) = \frac{2}{3},$$
$$D^2(X) = M\left(X^2\right) - M^2(X) = \frac{5}{9},$$
$$D^2(Y) = M\left(Y^2\right) - M^2(X) = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}.$$
$$M(XY) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{12} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{4}{12} = \frac{11}{12}.$$
$$R(x,y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D(X)D(Y)} = \frac{1}{36} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{10}} = 0,079$$

(gyenge korreláció).

$$a = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D^2(X)} = \frac{1}{36} \cdot \frac{9}{5} = \frac{1}{20},$$
$$b = M(Y) - \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D^2(X)} M(X) = \frac{2}{3} - \frac{1}{36} \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{3}{5}.$$

Tehát a regressziós egyenes egyenlete $Y = \frac{1}{20}X + \frac{3}{5}$.

8.4. táblázat. *Kétdimenziós diszkrét valószínűségi vektorok*

Sorszám	Jellemzők	Jelölések, képletek
1	Együttes eloszlás	$P(X = x_i, Y = y_j)$.
2	Eloszlásfüggvény	$F(x,y) = P(X < x, Y < y) = \sum\limits_{\substack{x_i<x \\ y_j<y}} p_{ij}$
3	Peremeloszlásfüggvények	$P(X = x_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum\limits_{j} p_{ij}$ $P(Y = y_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum\limits_{i} p_{ij} = q_j$
4	Feltételes eloszlás	$P(X = x_i \,\vert Y = y_j) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)} = \frac{p_{ij}}{\sum\limits_{i} p_{ij}} = \frac{p_{ij}}{q_j}$ $P(Y = y_j \,\vert X = x_i) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(X=x_i)} = \frac{p_{ij}}{\sum\limits_{j} p_{ij}} = \frac{p_{ij}}{p_i}$
5	Feltételes eloszlásfüggvények	$F(x \,\vert Y = y_j) = P(X < x \,\vert Y = y_j) = \frac{P(X<x,\, Y=y_j)}{P(Y=y_j)}$ $F(x \,\vert Y < y_j) = P(X < x \,\vert Y < y_j) = \frac{P(X<x,\, Y<y_j)}{P(Y<y_j)}$
6	Együttes eloszlás várható értéke	$M(t(X,Y)) = \sum\limits_{i} \sum\limits_{j} t(x_i, y_j) p_{ij}$
7	Peremeloszlások várható értéke	$M(X) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \quad M(Y) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} y_j q_j$
8	Feltételes eloszlások várható értéke	$M(X \,\vert Y = y_j) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i \,\vert Y = y_j) =$ $= \frac{1}{q_j} \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i p_{ij}$ $M(Y \,\vert X = x_i) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} y_j P(Y = y_j \,\vert X = x_i) =$ $= \frac{1}{p_i} \sum\limits_{j=1}^{\infty} y_j p_{ij}$

Sor-szám	Jellemzők	Jelölések, képletek
9	Kovariancia	$\mathrm{cov}(X,Y) = M(XY) - M(X)\,M(Y)$
10	Korrelációs együttható	$R(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{D(X)D(Y)}$
11	Regressziós függvény	$m_1(y) = M(X\,\|Y = y)\ ,\quad m_2(x) = M(Y\,\|X = x)$

8.5. táblázat. *Kétdimenziós folytonos valószínűségi vektorok jellemzői*

Sor-szám	Jellemzők	Jelölések, képletek
1	Eloszlás-függvény	$F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy$
2	Perem-eloszlás-függvény	$F_1(x) = P(X < x) = F(x,\infty) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv$ $F_2(y) = P(Y < y) = F(\infty,y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$
3	Feltételes eloszlás-függvények	$F\,(x\,\|y\,) = \frac{F'_y(x,y)}{f_2(y)},\quad F\,(y\,\|x\,) = \frac{F'_y(x,y)}{f_1(x)}$ $P\,(X < x\,\|Y < y\,) = \frac{F(x,y)}{F_1(x)},$ $P\,(Y < y\,\|X < x\,) = \frac{F(x,y)}{F_2(y)}$
4	Sűrűség-függvény	$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$
5	Perem-sűrűség-függvények	$f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy,\quad f_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$
6	Feltételes sűrűség-függvény	$f_{1/2}(x\,\|y\,) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{F''(x,y)}{f_2(y)},$ $f_{2/1}(y\,\|x\,) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{F''(x,y)}{f_1(x)}$

Sor-szám	**Jellemzők**	**Jelölések, képletek**
7	Együttes eloszlás várható értéke	$M\left(t\left(X,Y\right)\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}t(x,y)f(x,y)dxdy$
8	Perem-eloszlások várható értéke	$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\ f_1(x)dx,\quad M(Y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y\ f_2(y)dy$
9	Feltételes eloszlások várható értéke	$M(X\,\vert Y=y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf_{1\vert 2}\left(x\,\vert y\right)dx$ $M(Y\,\vert X=x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}yf_{2\vert 1}\left(y\,\vert x\right)dy$
10	Kovariancia	$\mathrm{cov}(X,Y)=M(XY)-M(X)M(Y)$
11	Korrelációs együttható	$R(X,Y)=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{D(X)D(Y)}$
12	Regressziós függvény	$m_1(y)=M\left(X\,\vert Y=y\right),\quad m_2(x)=M\left(Y\,\vert X=x\right)$

9. FEJEZET

A LINEÁRIS ALGEBRA ELEMEI

A lineáris algebra a lineáris tereknek (vektortereknek) az algebrai vizsgálatával foglalkozik A lineáris algebra nevét onnan kapta, hogy eredetileg a lineáris egyenletrendszerek és az azokkal kapcsolatos fogalmak (vektorok, mátrixok, determinánsok) elméletével foglalkozott. A lineáris algebra fontos gyakorlati alkalmazása a lineáris programozás. Az erre vonatkozó ismeretek közül mi a Gauss–Jordan-féle módszert, valamint a szimplex módszert tanulmányozzuk. Fölhasználjuk a mátrixokra, determinánsokra, a mátrixok inverzére, a mátrixok rangjára, valamint a lineárisan függő és független vektorrendszerekre vonatkozó középiskolai ismereteket, amelyeknek rövid áttekintése az alábbiakban következik.

9.1. értelmezések.

1. A K halmazt *testnek* nevezzük és a $(K, +, \cdot)$ szimbólummal jelöljük, ha a K halmazon értelmezett a $+ : K \times K \to K$ és a $\cdot : K \times K \to K$ művelet úgy, hogy $(K, +)$ struktúra *kommutatív csoport* és a második multiplikatív művelet asszociatív, rendelkezik semleges elemmel, minden $x \in K,\ x \neq 0$ (ahol 0 az első műveletre nézve a semleges elem) elemnek van inverz eleme a második műveletre vonatkozóan, és a második művelet disztributív az elsőre nézve. Ha a második művelet is kommutatív, akkor a $(K, +, \cdot)$ *test* kommutatív.

2. A V nem üres halmazt a K test feletti *vektortérnek* nevezzük, ha értelmezett rajta egy $\oplus : V \times V \to V$ belső művelet és egy $\odot : K \times V \to V$ külső művelet a következő tulajdonságokkal:

a) $(V, \oplus)$ Abel-féle csoport;

b) $\lambda \odot (v_1 \oplus v_2) = (\lambda \odot v_1) \oplus (\lambda \odot v_2), \quad \forall \lambda \in K, \quad \forall v_1, v_2 \in V$;

c) $(\lambda_1 \oplus \lambda_2) \odot v_1 = (\lambda_1 \odot v_1) \oplus (\lambda_2 \odot v_1), \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \quad \forall v_1, v_2 \in V$;

d) $\lambda_1 \odot (\lambda_1 \odot v_1) = (\lambda_1 \odot \lambda_1) \odot v_1, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \quad \forall v_1 \in V$;

e) $1 \odot v_1 = v_1, \quad \forall v_1 \in V$, ahol 1 a K testben a második művelet (szorzás) semleges eleme.

A K test feletti vektorteret a $(V, \oplus, \odot, K)$ szimbólummal jelöljük. A valós számtest felett értelmezett vektorterek jelölésére a $(V, \oplus, \odot, \mathbb{R})$ szimbólumot használjuk. Igen gyakran előfordul, hogy a $\oplus$ és $\odot$

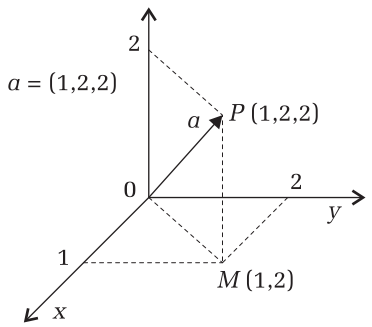
műveletjelek helyett egyszerűen csak a $+$, illetve a $\cdot$ jelet használjuk, amennyiben ez nem vezet félreértéshez.

9.1. Vektorok, mátrixok, determinánsok

A vektorok, mátrixok, determinánsok és egyenletrendszerekkel kapcsolatos fogalmak ismétlése során helyenként feltételezzük a középiskolai tananyag ismeretét.

9.1.1. Műveletek vektorokkal

Az $\mathbb{R}$ test fölötti n-dimenziós V vektortér elemeit n-dimenziós vektoroknak nevezzük és az $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, vagy $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ jelölést használjuk, ahol $a_i \in \mathbb{R},\ 1 \leqslant i \leqslant n$. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokat mindkét esetben az a vektor komponenseinek vagy koordinátáinak nevezzük, az első esetben sorvektorról beszélünk, a másodikban oszlopvektorról. Ez a megnevezés a 2- illetve 3-dimenziós analógián alapul, hisz például a 3-dimenziós térben minden számhármasnak megfelel egy vektor (9.1. ábra).



9.1. ábra.

9.2. értelmezések.

1. Az a és b vektorok *összegét* a következőképpen jelöljük és értelmezzük:

$$a+b=(a_1,a_2,\cdots,a_n)+(b_1,b_2,\cdots,b_n)=$$
$$=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)\,,\quad a_i,b_j\in\mathbb{R}.$$

2. Az a vektornak egy tetszőleges $c\in\mathbb{R}$ számmal (skalár) való szorzatát a következőképpen jelöljük és értelmezzük:

$$c\cdot a=c\,(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(ca_1,ca_2,\cdots,ca_n)\,.$$

3. Általában, ha $v_1,v_2,\ldots,v_m$ n-dimenziós vektorok és $x_1,x_2,\ldots,x_m$ valós számok, akkor az $x_1v_1+x_2v_2+\ldots+x_mv_m$ kifejezést a $v_1,v_2,\ldots,v_m$ vektorok *lineáris kombinációjának* nevezzük.

4. Az $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ és $b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ n-vektorok *skalárszorzata* az

$$a\cdot b=(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)=\sum_{i=1}^{n}a_ib_j$$

szám.

Példa. Ha $a=(2,-1,3)$ és $b=(1,0,5)$, akkor az a és b vektorok *skalárszorzata*

$$a\cdot b=2\cdot 1+(-1)\cdot 0+3\cdot 5=17.$$

A skalárszorzat tulajdonságai:

a) $a\cdot b=b\cdot a$, $a,b\in\mathbb{R}^n$;

b) $a\,(b+c)=ab+ac$;

c) $(x\cdot a)\cdot b=a\cdot(x\cdot b)=x\cdot(a\cdot b)\,,\quad x\in\mathbb{R}$;

d) $a\cdot a>0\quad\Leftrightarrow\quad a\neq 0$ (nullvektor);

e) az a vektor hossza (normája) $|a|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots a_n^2}=\sqrt{a\cdot a}$;

f) az a és b vektor által bezárt α szög koszinusza

$$\cos\alpha=\frac{a\cdot b}{|a|\,|b|},$$

ahol $|a|=\sqrt{a\cdot a}$ és $|b|=\sqrt{b\cdot b}$ az a, illetve b vektor hossza. Az ortogonalitás (merőlegesség) feltétele $a\cdot b=0$;

g) a $v_1,v_2,\ldots,v_m$ $\mathbb{R}^n$-beli vektorok *lineárisan összefüggők*, ha léteznek olyan $c_1,c_2,\cdots,c_m$ nem mind nulla számok, hogy

$$c_1v_1+c_2v_2+\ldots+c_mv_m=0. \tag{9.1}$$

Ha a (9.1) egyenlőség csak $c_1=c_2=\cdots=c_m=0$ esetén teljesül, akkor a $v_1,v_2,\ldots,v_m$ vektorokat *lineárisan függetleneknek* nevezzük.

Megjegyzés. A $v_1, v_2, \ldots, v_m$ $\mathbb{R}^n$-beli vektorrendszer pontosan akkor *lineárisan összefüggő*, ha legalább egy vektor felírható a többiek lineáris kombinációjaként:

$$v_i = x_1 v_1 + \ldots + x_{i-1} v_{i-1} + x_{i+1} v_{i+1} + \ldots + x_m v_m, \quad \text{vagy}$$

$$v_i = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \ldots + x_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix},$$

ahol $v_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$.

9.3. értelmezés. A $(V, +, \cdot, K)$ vektortér d-dimenziós tér ($d \in \mathbb{N}$), ha van a térben d lineárisan független vektor és bármely $d+1$ vektort tartalmazó vektorrendszer lineárisan összefüggő. A d-dimenziós V vektortérben azok a vektorrendszerek, amelyek d darab lineárisan független vektort tartalmaznak, a V-ben bázist alkotnak.

9.1.2. Mátrixok

9.4. értelmezés. Ha $m, n \in \mathbb{N}^*$, akkor az $F : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$ függvényeket $m \times n$-es (vagy (m, n) típusú) mátrixoknak nevezzük. A szemléletesség kedvéért a függvényértékeket téglalap alakú táblázatba szokás rendezni, amelynek m sora és n oszlopa van, és az i-edik sor és j-edik oszlop közös részében az $F(i, j)$ függvényérték van.

Példa 2×2-es, 2×3-as, 2×1-es és 1×2-es mátrixra:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1, & 2 \end{bmatrix}.$$

Az $m \times n$-es mátrix általános alakja:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{mn} \\ \vdots & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \text{vagy} \quad A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}.$$

Az $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ mátrix akkor és csak akkor *egyenlő* a $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$ mátrixszal, ha A és B azonos típusú ($m = p$ és $n = q$) és minden lehetséges i-re és j-re $a_{ij} = b_{ij}$.

Megjegyzések.

1. n-edrendű *négyzetes* vagy *kvadratikus* mátrixnak nevezzük az (n, n) típusú mátrixot.

2. Ha a mátrix minden eleme nulla, akkor a mátrixot *nullmátrixnak* nevezzük. Az $m \times n$-es nullmátrixot 0_{mn}-nel és az $n \times n$-es négyzetes nullmátrixot 0_n-nel jelöljük.

3. Ha a mátrixnak csak a főátlóján vannak nullától különböző elemei, akkor a mátrix *diagonális* mátrix vagy *átlós* mátrix.

4. *Egységmátrixnak* nevezzük és I_n-nel jelöljük az olyan négyzetes mátrixot, amelyben a főátló elemei egyesek ($a_{ii} = 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$) és az átlón kívüli elemek nullák. Vagyis az egységmátrix:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Mátrix szorzása skalárral

A mátrixnak egy c számmal (skalárral) való szorzatát cA-val jelöljük, és úgy kapjuk meg, hogy A minden elemét megszorozzuk c-vel, anélkül hogy az elem helyét (a táblázatban) megváltoztatnánk. Így ha $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, akkor $c \cdot A = (c \cdot a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$. Például, ha $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, akkor $2A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$.

Mátrixok összeadása

Két azonos típusú mátrix összegét $A+B$-vel jelöljük és az összegmátrix elemeit úgy kapjuk meg, hogy rendre összeadjuk A és B megfelelő elemeit. Például, ha

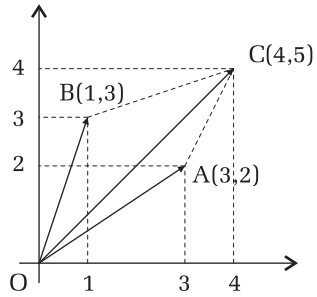
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix},$$

akkor

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Megjegyzések.

1. A mátrixok összeadási szabálya érvényes az azonos dimenziójú vektorok összeadására is. Ha $a = [1 \quad 3]$ és $b = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$, akkor $a + b = \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix}$. Ebben az esetben az összegvektort a paralelogramma szabálya segítségével is megkaphatjuk:



9.2. ábra. *Vektorok összeadása*

2. Belátható, hogy az n dimenziós tér bármely $A(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ pontja megfeleltethető annak az n-dimenziós $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ vektornak, amelyik az origót az A ponttal köti össze.

3. Az n-dimenziós tér bármely két A és B pontja által meghatározott egyenes szakasz C pontjainak koordinátáit a következő formában írhatjuk:

$$\lambda a + (1 - \lambda) b, \quad \text{ahol} \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Mátrixok összeadásának és skalárral való szorzásának szabályai

1. $A + B = B + A$ (az összeadás kommutatív);
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (az összeadás asszociatív);
3. $A + 0 = A$ (a nullvektor az összeadás semleges eleme);
4. $A + (-A) = 0_{m \times n}$ (az A ellentett eleme $-A$);
5. $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta B$;
6. $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$;
7. $\alpha (\beta A) = (\alpha\beta) A$.

Ezekből a tulajdonságokból látható, hogy a mátrixok az értelmezett műveletekkel vektorteret alkotnak.

Mátrix transzponáltja

Egy adott $m \times n$-es mátrix transzponáltját A^T-vel jelöljük, és A^T-t úgy kapjuk meg az A-ból, hogy a sorokat felcseréljük az oszlopokkal, vagyis A első sora lesz az A^T első oszlopa, az A második sora lesz az A^T második oszlopa és így tovább. Például, ha $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$, akkor

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

Általában az $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ mátrix transzponáltja:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{n\times m}(\mathbb{R}).$$

Mátrix szorzása mátrixszal

Ha $A \in M_{m\times n}$ és $B \in M_{n\times p}$ két mátrix (az első mátrixnak ugyanannyi oszlopa van, mint ahány sora van a másodiknak), akkor a $C = A \cdot B \in M_{m\times p}$ szorzatmátrix elemeit a

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{1n}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant p$$

szabály szerint számítjuk ki.

Ennek a szabálynak az alkalmazását megkönnyíti a *Falk-módszer*, amelyet így is felírhatunk:

	B
A	$A \times B$

Példa. Számítsuk ki az A és B mátrix szorzatát az adott sorrendben:

				B		
				1	5	0
				2	−1	3
				4	0	6
A	1	2	−4	a_{11}	a_{12}	a_{13}
	0	5	4	a_{21}	a_{22}	a_{23}

$c_{11} = 1 + 4 - 12 = -7, \quad c_{12} = 5 - 2 + 0 = 3, \quad c_{13} = 0 + 6 - 18 = -12,$
$c_{21} = 0 + 10 + 16 = 26, \quad c_{22} = 0 - 5 + 0 = -5, \quad c_{23} = 0 + 15 + 24 = 39.$

$$C = \begin{pmatrix} -7 & 3 & -12 \\ 26 & -5 & 39 \end{pmatrix}.$$

Mátrixok szorzásának szabályai

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (asszociativitás);
2. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (balról disztributív);
3. $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$ (jobbról disztributív).

9.1.3. Determinánsok

Ha $A \in M_n(\mathbb{R})$ egy *négyzetes* mátrix, akkor hozzárendelhetjük a *mátrix determinánsát,* amit $\det A$-val vagy $|A|$-val jelölünk és a következőképpen számíthatjuk ki:

a) képezzük az $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ halmaz összes permutációját ($n!$ darabot);
b) minden $(\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n))$ permutációhoz hozzárendeljük az
$$\varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$
szorzatot, ahol $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$ aszerint, hogy $(\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n))$ permutációban az inverziók száma páros vagy páratlan;
c) a szorzatokat összeadjuk:
$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}. \tag{9.2}$$

Példa. Ha n=2, akkor $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Ha $n = 3$, akkor

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$
$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

A (9.2) képlet szerint az n-edrendű determináns kiszámítása elég bonyolult, ha $n > 3$. Ezért célszerű egy n-edrendű determináns kiszámítását alacsonyabb rendű determinánsok kiszámítására visszavezetni. Ezt a módszert a *determinánsok kifejtésének* nevezik.

Legismertebb kifejtési szabály: a determináns tetszőleges sorának (oszlopának) a_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant m$ (vagy $1 \leqslant j \leqslant n$) elemeit megszorozzuk az elemnek megfelelő *algebrai komplementummal* és ezeket a szorzatokat összeadjuk.

Például az n-edrendű $|A|$ determinánsnak az i-edik sora szerinti kifejtése:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in},$$

ahol A_{ij} az a_{ij} elem algebrai komplementuma, amit úgy kapunk meg, hogy A mátrixból kitöröljük az i-edik sort és j-edik oszlopot, és az így kapott mátrix determinánsát szorozzuk $(-1)^{i+j}$-nel.

Példa. Egy harmadrendű determinánsnak az első sora szerinti kifejtése a következő:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$
$$= a_{11}\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12}\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

9.1.3.1. Determinánsok tulajdonságai

1. Ha az A mátrix legalább egy sora vagy oszlopa 0-kból áll, akkor $|A|$=0.
2. Az A transzponáltjának determinánsa egyenlő A determinánsával.
3. Ha a B mátrixot úgy kapjuk az A mátrixból, hogy annak egy sorát (vagy egy oszlopát) megszorozzuk egy α számmal, akkor $|B| = \alpha\,|A|$.
4. Ha az A mátrix két sorát (vagy oszlopát) felcseréljük, akkor a determináns előjele megváltozik, de abszolút értéke ugyanaz marad.
5. Ha az A mátrix két sora (vagy oszlopa) azonos, akkor $|A| = 0$.
6. Ha az A mátrix egyik sora (vagy oszlopa) egy másik sor (oszlop) valahányszorosa, akkor $|A| = 0$.
7. Ha egy sor (oszlop) valahányszorosát hozzáadjuk egy másik sorhoz (oszlophoz), akkor a determináns nem változik.

8. Ha A és B $n \times n$-es mátrixok, akkor szorzatuk determinánsa egyenlő determinánsaik szorzatával: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.
9. Ha az A egy $n \times n$-es mátrix, és α egy valós szám, akkor

$$|\alpha A| = \alpha^n |A| .$$

9.1.3.2. Mátrixok inverze

9.5. értelmezés. Ha adott négyzetes A mátrixhoz létezik olyan A^{-1} mátrix, amelyre

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n,$$

akkor az A mátrix invertálható és az A^{-1} mátrix az A mátrix *inverze*.

Bizonyítható, hogy csak a nem szinguláris négyzetes mátrixok invertálhatók.

Példa. Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrix inverzét.

Megoldás. Az A inverz létezésének szükséges feltétele, hogy $\det A \neq 0$, vagyis

$$ad - bc \neq 0.$$

Keressünk egy olyan 2×2-es mátrixot, amelyre $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{vagyis} \quad \begin{cases} ax + bu = 1 \\ cx + du = 0. \end{cases}$$

Ebből az egyenletrendszerből következik, hogy $x = \frac{d}{ad-bc}$ és $u = \frac{-c}{ad-bc}$. Hasonlóan kapjuk, hogy $\begin{cases} ay + bv = 0 \\ cy + dv = 1 \end{cases}$, tehát $y = \frac{-b}{ad-bc}$ és $v = \frac{a}{ad-bc}$.

Így az $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrix inverze $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

9.1.3.3. Az inverz mátrix tulajdonságai

Ha az A és B invertálható $n \times n$-es mátrix, akkor:

a) A^{-1} invertálható és $(A^{-1})^{-1} = A$;
b) $A \cdot B$ invertálható és $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
c) az A^T transzponált mátrix is invertálható, és $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;
d) $(c \cdot A)^{-1} = c^{-1} A^{-1}$, ha a c valós szám nem nulla.

9.2. Lineáris egyenletrendszerek

Általában az m egyenletből álló n ismeretlent tartalmazó lineáris egyenletrendszert a következőképpen jelöljük:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{9.3}$$

A (9.3) egyenlőségekben az $x_1, x_2, \ldots, x_n$-et változóknak vagy ismeretleneknek nevezzük, az a_{ij} számok ($1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$) az együtthatók és a b_i számok ($1 \leqslant i \leqslant m$) a szabadtagok.

9.6. értelmezés. A (9.3) egyenletrendszer megoldásának nevezzük az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ szám n-est, amely kielégíti a rendszer mindenik egyenletét.

A (9.3) egyenletrendszert írhatjuk a

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i, \quad i \in \{1, 2, \ldots, m\}$$

alakban is. A (9.3) lineáris egyenletrendszer ekvivalens a következő mátrixegyenlettel:

$$A \cdot x = b, \tag{9.4}$$

ahol A az együtthatók mátrixa: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ az ismeretlenekből alkotott oszlopvektor és $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ a szabadtagok oszlopvektora.

A (9.4) egyenlet mindkét oldala $m \times 1$-es mátrix (vagy m-elemű oszlopvektor). Ahhoz, hogy az Ax mátrix egyenlő legyen a b mátrixszal, vagyis az Ax oszlopvektor egyenlő legyen a b vektorral, az szükséges, hogy a megfelelő elemeik egyenlők legyenek. Az Ax első eleme nem

más, mint az A első sorának x-szel képzett skaláris szorzata. Ez a következőképpen írható:

$$(a_{11}\ a_{12}\ \cdots\ a_{1n})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n.$$

Ez egyenlő kell hogy legyen b első elemével (azaz b_1-gyel). Így (9.4) magában foglalja azt az állítást, hogy $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$. Ez nem más, mint a (9.3) rendszer első egyenlete. Hasonlóan, a (9.4) egyenlőség tartalmazza azt is, hogy A i-edik sorának az x-szel való skaláris szorzata b_i-vel kell hogy egyenlő legyen, ami nem más, mint a (9.3) rendszer i-edik egyenlősége. Ez a gondolatmenetünk azt mutatja, hogy (9.3) és (9.4) ugyanannak a lineáris egyenletrendszernek két különböző leírása. Azt mondjuk, hogy (9.3) a (9.4) *mátrixos formája*.

Példa. A $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 11 \\ 3x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$ egyenletrendszer mátrix formája $Ax = b$, ahol $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \end{bmatrix}$.

Ha az $Ax = b$ egyenlőség mindkét oldalát balról szorozzuk az A^{-1} mátrixszal, az

$$x = A^{-1}b$$

egyenlőséget kapjuk, tehát az inverz mátrix segítségével megoldható az egyenletrendszer.

Ha $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ és $A^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$, valamint $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, akkor az egyenletrendszer

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

és a megoldás

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}b_1 + \alpha_{12}b_2 \\ x_2 = \alpha_{21}b_1 + \alpha_{22}b_2 \end{cases}.$$

Látható, hogy az eredeti rendszerben a b_1 és b_2 van az x_1 és x_2 segítségével kifejezve, míg a megoldásban az x_1 és x_2 a b_1 és b_2 segítségével. Ezt úgy is elérhetjük, hogy az egyenletekben rendre hajtjuk végre a cseréket, például kicseréljük az x_1-et b_1-re, majd az x_2-t b_2-re. Ehhez csak azt kell

megvizsgálni, hogy a csere milyen változásokat eredményez az együtthatókra vonatkozóan. Ez az eljárás az inverz mátrix meghatározására is használható, mert láttuk, hogy adott mátrix inverzének meghatározása visszavezethető több olyan egyenletrendszer megoldására, amelynek ugyanaz a mátrixa. A következő paragrafusban meghatározzuk egy ilyen cserének a szabályait.

9.2.1. Gauss–Jordan-féle elemcsere-eljárás

Abból indulunk ki, hogy elnevezzük a (9.4) egyenletrendszerben az ismeretlenek x oszlopvekor komponenseit *független változóknak* és a szabadtagok b oszlopvektor komponenseit, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *függő változóknak*. Az egyszerűség kedvéért vegyük azt az esetet, amikor $m = n = 3$, vagyis oldjuk meg az

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{9.5}$$

lineáris egyenletrendszert.

A (9.5) egyenletrendszerhez hozzárendeljük az alábbi táblázatot:

9.1. táblázat.

x_1	x_2	x_3	
$\langle a_{11} \rangle$	a_{12}	a_{13}	b_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3

A 9.1. táblázatból az egyenletrendszer i-edik egyenletét úgy kapjuk meg, hogy a vastag vízszintes vonal feletti (x_1, x_2, x_2) vektort skalárisan megszorozzuk a táblázatban a vastag vízszintes vonal alatti i-edik sorral és az eredmény éppen a b_i. Az egyenletrendszer első egyenletéből fejezzük ki az x_1-et b_1 függvényében és helyettesítsük be a másik két egyenletbe. A kiválasztott egyenletben a kifejezett ismeretlen együtthatóját (a_{11}) generáló elemnek nevezzük és a táblázatban megjelöljük.

A kijelölt cserét úgy végezzük el, hogy a (9.5) egyenletrendszer első egyenletét megszorozzuk $\frac{1}{a_{11}}$-gyel (ha $a_{11} \neq 0$), a kapott egyenletből kifejezzük az x_1 változót és x_1-et behelyettesítjük az egyenletrendszer második és harmadik egyenletébe. Így a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a_{11}}b_1 && -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 && -\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = x_1\\
&\frac{a_{21}}{a_{11}}b_1 + \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}}x_2 && + \frac{a_{11}a_{22}-a_{13}a_{21}}{a_{11}}x_3 = b_2\\
&\frac{a_{31}}{a_{11}}b_1 + \frac{a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31}}{a_{11}}x_2 && + \frac{a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}}{a_{11}}x_3 = b_3.
\end{aligned} \tag{9.6}$$

A (9.6) egyenletrendszernek is ugyanazon szabályok szerint megfeleltetjük az együtthatókból álló táblázatot és megvizsgáljuk, hogy az első táblázatból a második táblázat hogyan kapható meg, anélkül hogy az egyenleteket leírnánk.

9.2. táblázat.

b_1	x_2	x_3	
$a_{11}^{(1)}$	$a_{12}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$	x_1
$a_{21}^{(1)}$	$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	b_2
$a_{31}^{(1)}$	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	b_3

Ahol az $a_{ij}^{(1)}$ együtthatókat a következő képletek szerint kapjuk:

$$\begin{aligned}
&a_{11}^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}; && a_{12}^{(1)} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}; && a_{13}^{(1)} = -\frac{a_{13}}{a_{11}}\\
&a_{21}^{(1)} = \frac{a_{21}}{a_{11}}; && a_{22}^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\frac{1}{a_{11}}; && a_{23}^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}\frac{1}{a_{11}}\\
&a_{31}^{(1)} = \frac{a_{31}}{a_{11}}; && a_{32}^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\frac{1}{a_{11}}; && a_{33}^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}\frac{1}{a_{11}}.
\end{aligned}$$

Látható, hogy minden a_{ij}^1 elem olyan tört, amelynek a nevezője a generáló elem. Ezért előbb a számlálókat számítjuk ki, majd minden számlálót elosztunk a generáló elemmel. A számlálókban a generáló elem helyén 1-es van, a sorában a többi elem előjele megváltozik, az oszlop többi eleme változatlanul marad és a táblázat többi elemének a számlálója egy 2×2-es determináns, amelybe a generáló elem sorának és oszlopának, illetve a kiszámítandó együttható sorának és oszlopának a közös elemei kerülnek. Az eljárást folytatjuk, a második egyenletet elosztjuk $a_{22}^{(1)} = \dfrac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}}$-gyel, ebből kifejezzük az x_2-t és ezt behelyettesítjük az egyenletrendszer első és harmadik egyenletébe, így megkapjuk azt az egyenletrendszert, amelynek megfelel a 9.3. táblázat.

9.3. táblázat.

b_1	b_2	b_3	
$a_{11}^{(2)}$	$a_{12}^{(2)}$	$a_{13}^{(2)}$	x_1
$a_{21}^{(2)}$	$a_{22}^{(2)}$	$a_{23}^{(2)}$	x_2
$a_{31}^{(2)}$	$a_{32}^{(2)}$	$a_{33}^{(2)}$	x_3

Miután a harmadik egyenletet elosztjuk $a_{33}^{(2)}$-vel és segítségével kiküszöböljük az x_3-at is az első és a második egyenletből, megkapjuk az eredeti egyenletrendszerrel ekvivalens egyenletrendszert, amelynek a 9.4. táblázat felel meg.

9.4. táblázat.

b_1	b_2	b_3	
$a_{11}^{(3)}$	$a_{12}^{(3)}$	$a_{13}^{(3)}$	x_1
$a_{21}^{(3)}$	$a_{22}^{(3)}$	$a_{23}^{(3)}$	x_2
$a_{31}^{(3)}$	$a_{32}^{(3)}$	$a_{33}^{(3)}$	x_3

Az utolsó táblázatból kiolvasható a (9.5) egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 a_{11}^{(3)} + b_2 a_{12}^{(3)} + b_3 a_{13}^{(3)} \\ x_2 &= b_1 a_{21}^{(3)} + b_2 a_{22}^{(3)} + b_3 a_{23}^{(3)} \\ x_3 &= b_1 a_{31}^{(3)} + b_2 a_{32}^{(3)} + b_3 a_{33}^{(3)}. \end{aligned}$$

Megjegyzés. A lineáris egyenletrendszerek megoldása során az x_1, x_2, x_3 ismeretleneket tetszőleges sorrendben küszöbölhetjük ki.

Látható, hogy bármelyik táblázatból a következőt az alábbi algoritmus szerint kapjuk:

1. A generáló elem helyett 1-et írunk.
2. A generáló elem oszlopában a többi elemet változatlanul hagyjuk.
3. A generáló elem sorában a többi elem előjelét megváltoztatjuk.
4. A táblázat további elemeit a másodrendű determináns kiszámítási szabálya szerint számoljuk ki. A determináns elemei a generáló elem sorának és oszlopának, illetve a kiszámítandó együttható sorának és oszlopának a közös elemei. A determináns előjelét úgy állapítjuk meg, hogy a generáló elem mindig a főátlón legyen.

5. Az új táblázat minden elemét elosztjuk a generáló elemmel.

Egy ilyen cserének a végrehajtását nevezzük Gauss–Jordan lépésnek.

Példa. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a Gauss–Jordan lépések segítségével.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ \quad\;\; 2x_2 + \;\; x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + \qquad = 3. \end{cases} \tag{9.7}$$

Megoldás. Felírjuk a feladatnak megfelelő kiinduló, formális táblázatot:

9.5. táblázat.

x_1	x_2	x_3	
$\langle 1 \rangle$	2	3	$b_1 = 2$
0	2	1	$b_2 = 2$
1	5	0	$b_3 = 3$

A kiinduló táblázatban a generáló elemet $\langle\,\rangle$ zárójelbe tettük, és az első Gauss–Jordan lépés után a 9.6. táblázatot kaptuk:

9.6. táblázat.

b_1	x_2	x_3	
1	-2	-3	x_1
0	$\langle 2 \rangle$	1	b_1
1	3	-3	b_2

A 9.6. táblázatból kiindulva elvégezzük a második Gauss–Jordan lépést és megkapjuk a 9.7. táblázatot.

9.7. táblázat.

b_1	b_2	x_3	
1	-1	-2	x_1
0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	x_2
1	$\frac{3}{2}$	$\langle -\frac{9}{2} \rangle$	b_3

A harmadik Gauss–Jordan lépés után kapjuk az utolsó, 9.8. táblázatot:

9.8. táblázat.

$b_1 = 2$	$b_2 = 2$	$b_3 = 3$	
$a_{11}^{(2)} = \frac{5}{9}$	$a_{12}^{(3)} = -\frac{15}{9}$	$a_{13}^{(3)} = \frac{4}{9}$	x_1
$a_{21}^{(3)} = -\frac{1}{9}$	$a_{22}^{(3)} = \frac{1}{3}$	$a_{23}^{(3)} = \frac{1}{9}$	x_2
$a_{31}^{(3)} = \frac{2}{9}$	$a_{32}^{(3)} = \frac{3}{9}$	$a_{33}^{(3)} = -\frac{2}{9}$	x_3

A 9.8. táblázatból kiolvasható a (9.7) egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\frac{5}{9} - 2\frac{15}{9} + 3\frac{4}{9} = -\frac{8}{9}, \\ x_2 &= -2\frac{1}{9} + 2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{9} = \frac{7}{9}, \\ x_3 &= 2\frac{2}{9} + 2\frac{3}{9} - 3\frac{2}{9} = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

Megjegyzés. A 9.8. táblázatból kiolvasható a rendszer mátrixának az inverze is. Ha az inverz mátrixra nincs szükség, csak a rendszer megoldására, akkor a számolások egyszerűbben is elvégezhetők, ha a (9.7) egyenletrendszert és a neki megfelelő kiinduló 9.7. táblázatot a következő alakban írjuk:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2 = 0 \\ \qquad 2x_2 + \ \ x_3 - 2 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + \qquad - 3 = 0. \end{cases} \tag{9.8}$$

9.9. táblázat.

x_1	x_2	x_3	1	
$\langle 1 \rangle$	2	3	-2	$y_1 = 0$
0	2	1	-2	$y_2 = 0$
1	5	0	-3	$y_3 = 0$

Ha a 9.9. táblázatban rendre az x_1-et, x_2-t, x_3-at felcseréljük az y_1, y_2, y_3-mal, akkor az y_1, y_2 és y_3 oszlopát rendre elhagyhatjuk (mert az y_1, y_2, y_3 értéke 0). Így megkapjuk a 9.10–9.12. táblázatokat.

A 9.12. táblázat tartalmazza a (9.7), (9.8) lineáris egyenletrendszerek megoldását.

9.10. táblázat.

x_2	x_3	1	
-2	-3	2	x_1
$\langle 2 \rangle$	1	-2	0
3	-2	-1	0

9.11. táblázat.

x_3	1	
-2	0	x_1
$-\frac{1}{2}$	1	x_2
$\langle -\frac{9}{2} \rangle$	2	0

9.12. táblázat.

1	
$-\frac{8}{9}$	x_1
$\frac{7}{9}$	x_2
$\frac{4}{9}$	x_3

2. Oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszereket:

a)

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 8 \\ 6x_1 + 15x_2 - 2x_3 = 22 \\ 9x_2 + 3x_3 = 12 \end{cases};$$

b)

$$\begin{cases} 2x + 3x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}.$$

10. FEJEZET

LINEÁRIS PROGRAMOZÁS GEOMETRIAI MEGOLDÁSA

10.1. Alapfogalmak

Az anyagi javak előállításánál jelentős fontossággal bír az erőforrások optimális felhasználása (gépek célszerű felhasználása, beruházások célszerű tervezése stb.).

Az optimalizálási feladatok megoldására több matematikai modellt dolgoztak ki.

Mi a *lineáris programozási modellt* mutatjuk be. A lineáris programozási modellezés feltételezi, hogy matematikai szimbólumokat rendeljünk az üzemszervezésre vonatkozó fogalmakhoz, felhasználva a lineáris programozás egyik megalapozójának, G. B. Dantzig amerikai matematikusnak a jelöléseit (1949).

Feltételezzük, hogy egy vállalat n gazdasági tevékenységet folytat. A különböző gazdasági tevékenységek szintjeit, gazdasági tevékenységek matematikai modelljének a *döntési változóit,* a *különböző termékek számát* jelöljük x_j-vel, ahol $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Így például egy bútorgyárban készült két különböző bútordarab számát jelöljük x_1-gyel, x_2-vel stb.

- a_{ij}-vel jelöljük egy egységnyi x_j termék előállításához az i-edik erőforrásból szükséges mennyiséget;
- az i-edik erőforrásból rendelkezésre álló mennyiséget b_i-vel jelöljük, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Így a lineáris programozási modell esetében a feltételrendszer a következőképpen alakul:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ &\vdots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Belátható, hogy az x_j, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ változók csak nemnegatív értékeket vehetnek fel, amit határfeltételeknek vagy nemnegativitási feltételeknek nevezünk:

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \ldots, \quad x_n \geqslant 0.$$

A matematikai programozási modell azt jelenti, hogy úgy határozzuk meg a modell döntési változóinak az értékét, hogy a gazdasági tevékenységek célkitűzései maximálisak legyenek. Így például, ha egy egységnyi j-edik termék hozamát c_j-vel jelöljük, akkor a $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ célfüggvény *maximumát* keressük. Abban az esetben, ha a hozam veszteség, akkor a célfüggvény *minimuma* adja a megoldást.

10.1. értelmezés. Azt a matematikai programozási modellt, amelyben a feltételrendszer és a célfüggvény is elsőfokú összefüggéseket (lineáris egyenleteket, egyenlőtlenségeket) tartalmaz, *lineáris programozási modell*nek nevezzük.

A lineáris programozási modellnek a *vektormátrix* jelölésekkel való leírásáért bevezetjük a következő jelöléseket:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$
$$c = (c_1, c_2, \ldots, c_n),$$

ahol A a feltételrendszer mátrixa, x a modellváltozók oszlopvektora, b a rendelkezésre álló erőforrás oszlopvektora és c a célfüggvény együtthatók sorvektora.

10.2. értelmezés. Az

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

két azonos típusú mátrix estében $A_{m\times n} \leqslant B_{m\times n}$, ha $a_{ij} \leqslant b_{ij}$, bármely $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén.

A használt jelölésekkel a lineáris programozási (Lp) modell mátrixos, *maximum* feladata a következő:

$$\begin{array}{c} Ax \leqslant b \\ x \geqslant 0_{m\times 1} \\ \hline z_{max} = c \cdot x \end{array} \tag{10.2}$$

Ha a (10.2) modellben még $b \geqslant 0$ is teljesül, akkor az Lp feladatot *normál* feladatnak nevezzük, és ha a feltételek még egyenleteket is tartalmaznak, akkor az Lp feladatot *módosított normál* feladatnak nevezzük. Az Lp általános feladata a következő:

$$\begin{array}{c} A_1x \leqslant b_1 \quad b_1 \geqslant 0 \\ A_2x = b_2 \quad b_2 \geqslant 0 \\ A_2x \geqslant b_3 \quad b_3 \geqslant 0 \\ x \geqslant 0 \\ \hline z_{\max} = c \cdot x = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n. \end{array} \tag{10.3}$$

Példa. Egy vállalkozó kétféle bútordarabot gyárt. Készítsük el a vállalkozó maximális bevételt hozó termelési tervét, és számítsuk ki a maximális bevételt az alábbi adatok alapján:

Az egyik bútorféleség (asztal) előállításához felhasználnak 105 dm^3 fenyőanyagot és 60 munkaórát.

A másik bútordarab (szék) előállításához szükséges 70 dm^3 fenyőanyag és 12 munkaóra. Tegyük fel, hogy a vállalkozó 2625 dm^3 fenyőanyaggal rendelkezik és 1080 munkaórára szerződött munkásokat. A vállalkozó bevétele egy asztal után $c_1 = 45$ egység, és a szék esetében $c_2 = 15$ egység.

Határozzuk meg a döntési változók $x = (x_1, x_2)$ értékeit, vagyis azt, hogy a vállalkozónak hány asztalt és hány széket kell gyártania, adott humán és anyagi erőforrások esetén, hogy a bevétele maximális legyen.

Ennek a feladatnak elkészítjük a matematikai modelljét:

- a technológiai együtthatók: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 105 & 70 \\ 60 & 12 \end{pmatrix}$,
- a korlátozó feltételek: $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2625 \\ 1080 \end{pmatrix}$,
- döntési változók: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$,
- a célfüggvény együtthatóit sorvektor alakban $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2) = (45, 15)$.

Az Lp probléma matematikai modellje:

$$\max\{c \cdot x \,|\, Ax \geqslant b, x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2\}, \quad b \in \mathbb{R}^2,\ b \geqslant 0_{m\times 1}.$$

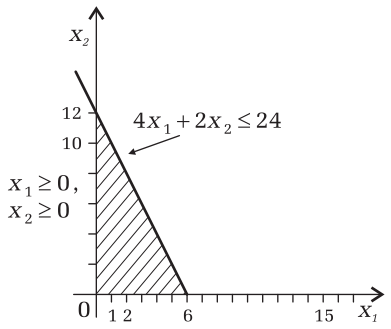
A mi esetünkben:

$$\begin{array}{c} 105x_1 + 70x_2 \leqslant 2625 \\ 60x_1 + 12x_2 \leqslant 1080 \\ \hline \max(45x_1 + 15x_2) \end{array} \quad \text{és egyszerűsítés után} \quad \begin{array}{c} 3x_1 + 2x_2 \leqslant 75 \\ 5x_1 + \ \ x_2 \leqslant 90 \\ \hline z_{\max} = 45x_1 + 15x_2. \end{array} \tag{10.4}$$

Nyilvánvaló, hogy $x_1 \geqslant 0$ és $x_2 \geqslant 0$ kell hogy legyen, mivel negatív számú bútordarabnak nincs értelme. Belátható, hogy a bevételszintvonal egyenletében, $z = 45x_1 + 15x_2$, a döntési változók egymástól függetlenül befolyásolják a célfüggvény értékét.

10.2. A kétváltozós lineáris programozási feladat grafikus megoldása (Optimalizálás grafikus módszerrel)

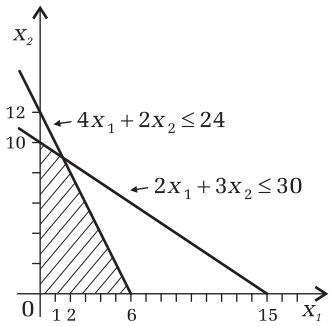
Általában a kétdimenziós optimalizálás grafikus megoldása azon alapszik, hogy a derékszögű koordinátarendszerben az elsőfokú, kétismeretlenes egyenletek és egyenlőtlenségek képe egyenes, illetve félsík (10.1. ábra).



10.1. ábra. *Lehetséges megoldások halmaza, amelyekre* $4x_1 + 2x_2 \leq 24$ *és* $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Nemnegatív megoldás keresése esetén csak az első síknegyed pontjait vesszük számításba. A matematikai modellben a kétismeretlenes

korlátozó feltételek egy-egy félsíkot határoznak meg. Az egyenlőtlenségrendszer megoldása ezeknek a félsíkoknak a közös része, *metszete*. Ez a halmaz a kétváltozós lineáris programozás esetén egy sokszög és L-lel jelöljük. Az L halmaz képezi a lineáris programozási feladat *lehetséges megoldásainak halmazát,* mivel a sokszög minden pontjának koordinátái kielégítik az egyenlőtlenségeket, vagyis a probléma korlátozó feltételeit (10.2. ábra).



10.2. ábra. *L: Lehetséges megoldások halmaza, amelyekre* $x_1, x_2 \ge 0$, $2x_1 + 3x_2 \le 30$, $4x_1 + 2x_2 \le 24$

Belátható, hogy ha a korlátozó feltételek száma nő, akkor a lehetséges megoldásoknak megfelelő konvex tartomány területe nem növekedhet, esetleg csökken.

A mi esetünkben a lehetséges megoldások halmaza *határegyeneseinek* az egyenletei a következők:

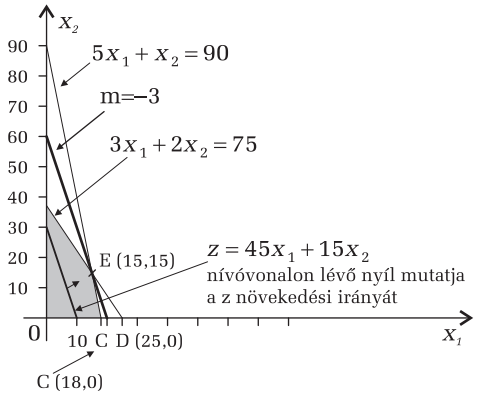
$$\begin{array}{c} 105x_1 + 70x_2 = 2625 \\ 60x_1 + 12x_2 = 1080 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} 3x_1 + 2x_2 = 75 \\ 5x_1 + x_2 = 90 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{array}$$

Az E pont, vagyis a csúcspont koordinátáit a határegyenesek egyenleteiből álló egyenletrendszer megoldása adja:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 75 \\ 5x_1 + x_2 = 90 \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -7,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 75 & 2 \\ 90 & 1 \end{vmatrix} = -105; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 75 \\ 5 & 90 \end{vmatrix} = -105.$$

$$x_1 = 15, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-105}{-7} = 15, \quad z = 45 \cdot 15 + 15 \cdot 15 = 900.$$



10.3. ábra. *Lp feladat lehetséges tartományának extremális pontjai (O, C, E, B)*

A lehetséges megoldások esetében a $z = f(x)$ célfüggvény értéke más és más lehet. Feladatunk éppen az, hogy meghatározzuk az L halmaznak azt a pontját vagy azon pontjait, $x \in L$, amelyeknél a $z = 45x_1 + 15x_2$ célfüggvény maximális értéket vesz fel. Ezért ábrázoljuk a $z = 45x_1 + 15x_2$ egyenletű egyenest, amelyben $z = 45x_1 + 15x_2$ a célfüggvény értéke. Ennek az egyenesnek a grafikonjával párhuzamos egyeneseket a célfüggvény *nívóvonalainak* nevezzük.

Ha egy nívóvonalat megtalálunk, akkor a többit úgy kapjuk meg, hogy a nívóvonalnak megfelelő egyenest önmagával párhuzamosan eltoljuk.

A $z = 45x_1 + 15x_2$ egyenletű egyenest eltoljuk önmagával párhuzamosan z növekvő irányába, addig, amíg ennek az egyenesnek és az L sokszögnek van még közös pontja. A lineáris célfüggvény irányítényezője $m = -3$, és a grafikus képét eltoljuk önmagával párhuzamosan úgy, hogy a koordinátatengelyekből minél nagyobb darabot metsszen le és menjen át az L konvex sokszög (poligon) egy csúcsán. A mi esetünkben ez az E pontban következik be, és a koordinátái $(15, 15)$. Így a célfüggvény maximális értéke

$$z(x_0) = z(15, 15) = 45x_1 + 15x_2 = 45 \cdot 15 + 15 \cdot 15 = 900.$$

A $P(0, 90)$ csúcspontban a célfüggvényérték

$$z = 0 \cdot 45 + 18 \cdot 90 = 162 < 900.$$

Mivel ennek a konvex poligonnak egy kivételével minden csúcspontját végigjártuk, a legnagyobb célfüggvényérték adja a lineáris programozási feladat optimális megoldását.

Az Lp feladat célfüggvénye a maximumát az $E\,(15, 15)$ csúcspontban éri el, mivel a nívóvonal távolsága az origótól akkor a legnagyobb, amikor a nívóvonal átmegy az $E\,(15, 15)$ ponton.

Hasonló módon egy minimalizálási problémában az optimális megoldás egy olyan pont a lehetséges megoldások halmazában, ahol a célfüggvény értéke a legkisebb.

Legtöbb lineáris programozási feladatnak egy optimális megoldása van, de előfordulhat, hogy az Lp-nek nincs optimális megoldása, másoknak végtelen sok optimális megoldása is lehet.

Az előbbiekben bemutattuk tehát a lineáris programozási feladatok lehetséges és optimális megoldásának legfontosabb jellemzőit, éspedig:

1. A kétváltozós lineáris programozási feladatok lehetséges megoldásainak a halmaza mindig egy konvex sokszög.
2. A lineáris programozási feladatok optimális megoldása a konvex sokszög (vagy konvex poliéder) egyik csúcspontjában van (előfordulhat, hogy egy oldal mentén minden pont egy optimális megoldásnak felel meg).

A megoldási algoritmus lépései:

- meghatározzuk a lehetséges megoldások konvex tartományát;
- meghatározzuk a lehetséges megoldásoknak azt a csúcspontját, amelyben a célfüggvény szélsőértéket vesz fel.

Megjegyzés. Ha a lineáris programozási feladatban a korlátozó feltételek száma nagyobb, mint három, geometriai szemléltetésre nem kerülhet sor, de absztrakció által használatos az n-dimenziós tér, sík, egyenes, pont, poliéder stb. fogalma.

A bemutatott lineáris programozási feladat megoldása egy kisebb hatásfokú módszer, ami abban áll, hogy meghatározzuk az L halmaz véges számú csúcspontjait, azután kiszámítjuk ezekben a csúcspontokban a célfüggvény értékeit, és amelyik csúcspontban a célfüggvény maximális értékű, annak a pontnak a koordinátái szolgáltatják az Lp probléma döntési változóinak az optimális értékeit: $x_1 = 15$, $x_2 = 15$.

Létezik olyan megoldási algoritmus, amely nagyszámú korlátozó feltétel és nagyszámú ismeretlen esetében is kedvezőbb körülmények között vezet a célfüggvény optimális értékének megtalálásához. A probléma szintén szélsőérték-feladat, maximalizálás vagy minimalizálás lehet.

Ha a döntési változók száma nagyobb, mint kettő, akkor a probléma lehetséges megoldásainak a halmaza egy poliéder. A lineáris optimalizálási feladat két fontos tulajdonságának a bemutatása végett szükség van lehetséges megoldások *csúcspontjának* az értelmezésére.

10.3. értelmezés. A lehetséges megoldások halmazának egy $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pontját és a neki megfelelő $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ oszlopvektort az L halmaz *csúcspontjának* vagy *extremális pontjának* nevezzük, ha a $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nem lehet egyetlen olyan szakasznak sem a belső pontja, amely benne van az L-ben, vagyis ha az x nem állítható elő egymástól különböző pontok konvex kombinációjaként. Tehát

$$x \neq \lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2, \quad \text{ahol} \quad \lambda \in (0,1) \quad x_1, x_2 \in L.$$

Így bizonyítható a lineáris optimalizálási feladat első fontos tulajdonsága.

10.4. tétel. Az $Ax \leqslant b$, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $x \geqslant 0_{n\times 1}$ feladat lehetséges megoldásainak halmaza *konvex*.

Bizonyítás. Legyenek $\mathrm{x}_1 \in L$ és $\mathrm{x}_2 \in L$, $\mathrm{x}_1 \neq \mathrm{x}_2$, $x_1 \in \mathbb{R}^n$, $x_2 \in \mathbb{R}^n$, két vektor (a lehetséges megoldások L halmazának két pontja). Tehát

$$Ax_1 \leqslant b,\ x_1 \geqslant 0 \quad \text{és} \quad Ax_2 \leqslant b,\ x_2 \geqslant 0.$$

Azt kell igazolni, hogy tetszőleges $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ esetén az $\mathrm{x} = \lambda \mathrm{x}_1 + (1-\lambda)\mathrm{x}_2$ szintén megoldás. Valóban, mivel az $A_{m\times n}$ és a $(\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2)_{m\times 1}$ mátrixok szorzása disztributív az összeadásra nézve,

$$Ax = A\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right] = \lambda A x_1 + (1-\lambda) A x_2 \leqslant \lambda b + (1-\lambda) b = b.$$

Megjegyzés. Gyakorlatilag a lehetséges megoldások L halmazának a konvexitása azt jelenti, hogy a halmaz bármely két pontja által meghatározott szakasz minden pontja eleme a halmaznak.

10.5. értelmezés. A lineáris programozási feladat *optimális megoldásának* nevezzük azt az $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ lehetséges megoldást, amelyen

a célfüggvény szélsőértéket vesz fel, vagyis a maximalizálási problémában a célfüggvény a legnagyobb értéket veszi fel.

10.6. tétel. A lineáris programozási modell célfüggvénye,

$$\max\{\boldsymbol{c}\cdot x\,|Ax=b;\ x\geqslant 0\},$$

a lehetséges megoldások konvex tartományának belső pontjaiban nem vesz fel nagyobb értékeket, mint a csúcspontokban felvett értékek maximuma.

Bizonyítás. Azt kell igazolni, hogy a célfüggvény a lehetséges megoldások belső pontján, azaz olyan ponton, amely előállítható a csúcspontok konvex kombinációjaként, nem vehet fel nagyobb értéket, mint a csúcspontok valamelyikén. A redukció ad absurdum bizonyítási eljárás szerint feltételezzük, hogy az $f(x)=\boldsymbol{c}\cdot x$ célfüggvény a maximumát az x_0 belső pontban veszi fel. Legyenek $x_1,x_2,\ldots,x_n$ csúcspontok. Mivel x_0 belső pont, ezért előállítható a csúcspontok konvex kombinációjaként, azaz $x_0=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$, ahol $\alpha_i\geqslant 0$ és $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$. Felírhatjuk, hogy

$$f(x_0)=c\cdot x_0=\quad c\cdot\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=\alpha_1 c\cdot x_1+\alpha_2 c\cdot x_2+\cdots+\alpha_n c\cdot x_n \tag{10.5}$$

A (10.5) egyenletben a célfüggvénynek a csúcspontokban felvett cx_i értékei szerepelnek. Ha a célfüggvénynek a csúcspontok közül a k-adikban veszi fel a legnagyobb értéket, vagyis $M=c\cdot x_k=\max\limits_i c\cdot x_i$, akkor $\alpha_i\geqslant 0$ alapján (10.5) alatti összeg nem csökken, ha a $c\cdot x_i-k$ helyett $c\cdot x_k$-t írunk, azaz

$$f(x_0)\leqslant\quad \alpha_1 M+\alpha_2 M+\cdots+\alpha_n M=M\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.$$

Mivel $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$, belátható, hogy $f(x_0)\leqslant M$. Ez azt jelenti, hogy a csúcspontokban felvett célfüggvényértékek maximumánál nem lehet nagyobb egyetlen belső pontban felvett érték sem, tehát a célfüggvény maximumát elégséges a csúcspontokban keresni.

Példa. Egy vállalat az E_1, E_2 erőforrások felhasználásával T_1, T_2 termékeket állít elő 3, illetve 4 pénzegység nyereséggel. A nyersanyagtartalékok és az egyes termékekhez szükséges nyersanyagmennyiségek a 10.1. táblázatban találhatók.

10.1. táblázat.

A rendelkezésre álló erőforrás-mennyiség	T_1	T_2
$E_1 = 154$	7	14
$E_2 = 144$	11	8
Termékenkénti nyereség	3	4

a) Írjuk fel a feladat matematikai modelljét.
b) Lehetséges megoldás-e az $x_1 = 6$, $x_2 = 2$, és mennyi a célfüggvény értéke ebben az esetben?
c) Határozzuk meg a feladat optimális megoldását grafikus módszerrel.

Megoldás.

a)

$$\begin{array}{c} 7x_1 + 14x_2 \leqslant 154 \\ 11x_1 + 8x_2 \leqslant 144 \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0 \\ \hline z_{\max} = 3x_1 + 4x_2. \end{array}$$

b) $x_1 = 8$, $x_2 = 4$ lehetséges megoldása az Lp problémának, mivel $x_1 = 8$, $x_2 = 4$ megoldása az

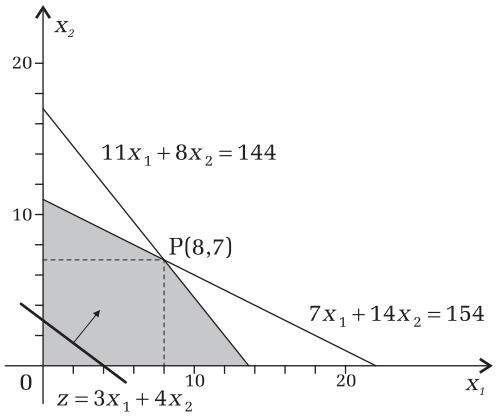
$$\begin{cases} 7x_1 + 14x_2 \leqslant 154 \\ 11x_1 + 8x_2 \leqslant 144 \end{cases}$$

egyenlőtlenségrendszernek. Valóban, $7 \cdot 8 + 14 \cdot 4 = 112 \leqslant 154$, $11 \cdot 8 + 8 \cdot 4 = 120 \leqslant 144$. Ebben az esetben $z = 3 \cdot 8 + 4 \cdot 4 = 40$.

c) Az Lp feladat megoldása grafikus módszer alkalmazásával. Meghatározzuk a lehetséges megoldások konvex sokszögét (poligonját) (10.4. ábra).
A $7x_1 + 14x_2 = 154$ és $11x_1 + 8x_2 = 144$ egyenletű egyenesek metszéspontjának koordinátái $P(8, 7)$, és ebben a pontban a célfüggvény értéke

$$z_{\max} = 3x_1 + 4x_2 = 3 \cdot 8 + 4 \cdot 7 = 24 + 28 = 52.$$

Megjegyzés. Létezik egy olyan algoritmus, melynél nem kell az összes bázismegoldást (az L halmaz összes csúcspontját) meghatározni, hanem csak ezek egy részét, és így jutunk el az optimális megoldáshoz.



10.4. ábra.

Ez az eljárás a *szimplex módszer* nevet viseli, és jelenleg a lineáris programozási feladatok megoldásának egyik hatékony módszere. A szimplex módszert a következő fejezetben mutatjuk be.

Gyakorlatok.

1. Oldjuk meg a következő Lp feladatokat:

a)

$$\begin{array}{c} x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 8 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \\ \hline z_{\max} = 2x_1 + 3x_2 \end{array}$$

E: $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = \frac{10}{3}$, $z_{max} = \frac{10}{3}$.

b)

$$\begin{array}{c} 3x_1 + 2x_2 \geqslant 12 \\ 2x_1 + 5x_2 \geqslant 0 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \\ \hline z_{\max} = 4x_1 + 7x_2 \end{array}$$

E: z nem korlátos.

11. FEJEZET

SZIMPLEX ALGORITMUS ÉS ALKALMAZÁSA NORMÁL Lp FELADATOK MEGOLDÁSÁRA

A szimplex módszerrel akár igen nagy méretű Lp feladatokat is meg tudunk oldani. A szimplex módszer megértése céljából először a *normál Lp feladatok* algebrai úton történő megoldásával foglalkozunk.

11.1. értelmezés. Normál Lp feladatnak nevezzük azt a lineáris programozási modellt, amelynél a korlátozó feltételek mind kisebb vagy egyenlő relációval adottak (kivéve a változók nemnegativitására vonatkozó feltételeket), a b kapacitásvektor csak nemnegatív komponensekből áll, és a célfüggvény maximumát keressük.

A normál Lp feladatok matematikai modellje a következő:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0, b \geqslant 0. \\ \hline z_{\max} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \end{array}, \tag{11.1}$$

ahol az i-edik erőforrásból származó b_i, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ mennyisége nem lehet negatív szám, vagyis

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

A normál Lp feladat vektormátrix formája:

$$\begin{array}{c} Ax \leqslant b \\ x \geqslant 0, b \geqslant 0 \\ \hline z_{\max} = c \cdot x \end{array} \tag{11.2}$$

A 10. fejezetben megmutattuk, hogy az Lp probléma megoldása a lehetséges megoldások konvex halmazának egy csúcspontjában van (lásd a 10.4. és 10.6. tételt).

A szimplex módszer segítségével a lehetséges megoldások konvex tartományában a célfüggvényérték egy növekvő sorozatát határozzuk meg úgy, hogy a lehetséges megoldások konvex halmazának mindenik csúcspontjához hozzárendelünk egy szimplex táblát. Azért, hogy ezt a hozzárendelést megkönnyítsük, az $Ax \leqslant b$ egyenlőtlenségrendszert az ún. segédváltozók bevezetésével *egyszerű* (szimplex) egyenletrendszerré alakítjuk át. Ezeket a segéd- vagy kiegészítőváltozókat $u_1, u_2, \ldots, u_m$-mel jelöljük és úgy választjuk meg az értékeiket, hogy teljesüljön az alábbi egyenletrendszer:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \ldots & a_{1n}x_n + & u_1 & & & & & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \ldots & a_{2n}x_n + & & + & u_2 & & & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & \ldots & & & \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & & a_{mn}x_n + & & & & & u_m & = & b_m \end{cases} \tag{11.3}$$

A kiegészítőváltozók a célfüggvénybe is bevihetők a következőképpen:

$$z_{\max} = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_{n+1}u_1 + \ldots + c_{n+m}u_m,$$

ahol $c_{n+1} = c_{n+2} = \ldots = c_{n+m} = 0$ és u_i $(i \in \{1, 2, \ldots, m\})$ szimbólum jelöli az i-edik erőforrásból a fel nem használt anyagmennyiséget.

Az Lp probléma (11.3) átalakított alakját az Lp feladat *kanonikus* alakjának nevezzük.

Az Lp feladat kanonikus formájában minden feltétel egyenlőség és minden változó nemnegatív. A (11.1) normál Lp feladatnak megfelelő kanonikus forma vektormátrix alakja a következő:

$$\begin{gathered} (A, E) \cdot \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = b, \\ x \geqslant 0, \quad u \geqslant 0, \quad b \geqslant 0_{m \times 1}. \\ \hline z_{\max} = f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_{n+1}u_1 + \ldots + c_{n+m}u_m \end{gathered} \tag{11.4}$$

ahol $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$ a kiegészítő változók vektora és E az m-edrendű egységmátrix.

A kanonikus formában írt Lp feladat megoldásában fontos szerepet játszanak a (11.4) egyenletrendszer *bázismegoldásai*.

11.2. értelmezés. Ha a (11.3) egyenletrendszer (A, E) mátrixának $n + m$ oszlopvektora közül ki tudunk választani m lineárisan független oszlopvektort, például az $a_1, a_2, \ldots, a_m$ vektorrendszert úgy, hogy a $B_{m\times(n+m)} = (a_1, 0, \ldots, 0, a_2, 0, \ldots, 0, a_m, 0, \ldots, 0)$ mátrixra teljesüljön a $B \cdot \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = b$ egyenlőség, akkor az (x, u) vektor *bázismegoldás*. Ha a kapott megoldásvektor minden komponense nemnegatív, akkor a bázismegoldást *lehetséges bázismegoldásnak* (lbm) nevezzük.

Az Lp probléma lehetséges bázismegoldásai és az Lp probléma lehetséges megoldásai konvex halmazának csúcspontjai között kölcsönösen egyértelmű (bijektiv) megfeleltetés létezik. Ez az alapja a lineáris programozási feladatok megoldására szolgáló úgynevezett *szimplex* módszernek.

11.3. tétel. A lehetséges bázismegoldások a lehetséges megoldások halmazának csúcspontjai.

Bizonyítás. Igazoljuk, hogy a lehetséges bázismegoldások nem állíthatók elő más, egymástól különböző lehetséges megoldások konvex kombinációjaként.

A bázismegoldást úgy határozzuk meg, hogy kiválasztunk m *bázisváltozót* (BV) és meghatározzuk ezeknek azon értékeit, amelyek kielégítik az $(A, E) \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = b$ egyenletrendszert. A *nem-bázisváltozókat (NBV)* mind 0-nak vesszük. Egy bázisváltozónak a cseréje egy nem-bázisváltozóval új bázismegoldásokhoz vezet. Az Lp feladat megoldása azt jelenti, hogy kell keresni azt a bázismegoldást, amelyre a célfüggvény értéke maximális.

Mielőtt a konkrét lineáris programozási feladatoknak a szimplex módszerrel történő megoldására térnénk, áttekintjük a szimplex algoritmus elvi ismertetését.

1. A lineáris programozási feladatoknak a *kanonikus* alakjához hozzárendeljük az

$$
\begin{array}{lllllllll}
a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \dots & a_{1n}x_n+ & u_1 & & & & = & b_1 \\
a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & \dots & a_{2n}x_n+ & & + & u_2 & & = & b_2 \\
\vdots & & & & & & & \dots & & \\
a_{m1}x_1+ & a_{m2}x_2+ & & a_{mn}x_n+ & & & & u_m & = & b_m \\
\hline
\multicolumn{10}{c}{z_{\max} = f(x,u) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_{n+1}u_1 + \ldots + c_{n+m}u_m}
\end{array}
\tag{11.5}
$$

konvencionális táblázatot:

11.1. táblázat.

x_1	x_2	$\dots$	x_n	u_1	u_2	$\dots$	u_m	$-z$	$\boldsymbol{b}$
a_{11}	a_{12}	a_{1n}	1	0	$\dots$	0	0	b_1	
a_{21}	a_{22}	a_{2n}	0	1	$\dots$	0	0	b_2	
$\vdots$									$\vdots$
a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	0	0	$\dots$	1	0	b_m
c_1	c_2	$\dots$	c_n	0	0	$\dots$	0	1	$\mathbf{0}$

2. A konvencionális táblázatból megkapjuk a kiinduló szimplex-táblázatot, ha az $u_1, u_2, \ldots, u_m$ bázisváltozókat és $-z$-t a táblázat első oszlopába írjuk.

11.2. táblázat.

	x_1	x_2	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n	$\boldsymbol{b}$
u_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1j}	$\dots$	a_{1n}	b_1
u_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2j}	$\dots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$						$\vdots$
u_i	a_{i1}	a_{i2}	$\dots$	a_{ij}	$\dots$	a_{in}	b_i
$\vdots$	$\vdots$						$\vdots$
u_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{1j}	$\dots$	a_{mn}	b_m
$-\boldsymbol{z}$	c_1	c_2	$\dots$	c_j	$\dots$	c_n	$\mathbf{0}$

A 11.2. táblázatból kiolvashatjuk az Lp probléma első banális bázis-megoldását:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m, u_1, u_2, \ldots, u_m) = (0, 0, \ldots, 0, b_1, b_2, \ldots, b_m)$$

és a célfüggvény értékét:

$$z_{\max} = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = c_1 0 + c_2 0 + \ldots + c_n 0 + c_{n+1} 0 + \ldots + c_{n+m} 0 = 0.$$

Ennek a bázismegoldásnak megfelelő csúcspont az n-dimenziós koordinátarendszer origója $O(0, 0, \ldots, 0)$.

3. Van lehetőség arra, hogy a célfüggvény értékét növeljük. Ezért elemi bázistranszformációt végzünk, vagyis a bázistranszformációnak azt a legegyszerűbb esetét tekintjük, amikor csak egy bázisváltozót cserélünk ki egy nem-bázisváltozóval. Ebben az esetben a megfelelő lehetséges bázismegoldásoknak az eredeti Lp probléma lehetséges megoldásainak a halmazában a szomszédos csúcspont felel meg.

A bázisból kimenő és a bázisba bevont oszlop-, illetve sorvektor találkozásánál található a *generáló- vagy sarokelem*. Fontos kérdés az, hogy milyen kritériumok szerint választjuk ki a generálóelemet úgy, hogy a célfüggvényérték nagyobb legyen. Ennek első feltétele, hogy csak *pozitív szám* lehet. A második feltétel szerint a generálóelemet a *pozitív és a legnagyobb c_j elem oszlopában kell* választani ahhoz, hogy az új bázis esetében a célfüggvény értéke minél nagyobb legyen. Ha nincs legnagyobb célfüggvényérték, akkor egyiket választjuk a sok közül. Így kiválaszthatunk a nem-bázisváltozók közül egy új bázisváltozót, a neki megfelelő oszloppal együtt. Következő lépés: az új bázisváltozónak megfelelő generálóoszlop elemei közül meg kell határozni a *generálóelemet*. Ezt úgy kapjuk meg, hogy az induló szimplex tábla utolsó oszlopának ($\boldsymbol{b}$ oszlop) megfelelő elemeit elosztjuk a generálóoszlop megfelelő pozitív elemeivel. Abból a sorból választjuk a generálóelemet, ahol a $q_i = \frac{b_i}{a_{ij}}$ hányados minimális ($a_{ij} > 0$).

A vektorcsere révén kapott új szimplex tábla elemeit a *módosított* Gauss–Jordan (mGJ) kiküszöbölési módszer alkalmazásával számítjuk ki.

A módosított Gauss–Jordan-féle algoritmus a következő műveletek elvégzését jelenti:

1. a generálóelem helyére 1-et írunk,
2. a generálóelem sorában lévő többi elem változatlan,
3. a generálóelem oszlopában lévő többi elem előjele megváltozik,
4. az összes többi elemet a másodrendű determináns kiszámítási szabálya szerint számítjuk ki úgy, hogy a generálóelem mindig a főátlón van,
5. az új táblázat összes elemét elosztjuk a generálóelemmel,
6. folytatjuk a bázistranszformációt, amíg létezik pozitív célfüggvény-együttható.

Példa. Tekintsük újból a grafikus módszerrel már megoldott egyik feladatot, és keressük a $z_{\max} = 45x_1 + 15x_2$ lineáris célfüggvény szélsőértékét a következő lineáris egyenlőtlenségi feltételek mellett.

$$\begin{array}{c} 3x_1 + 2x_2 \leqslant 75 \\ 5x_1 + \ \ x_2 \leqslant 90 \\ \hline z_{\max} = 45x_1 + 15x_2 \end{array}$$

Nyilvánvaló, hogy $x_1 \geqslant 0$ és $x_2 \geqslant 0$, mivel negatív számú bútordarabnak nincs értelme.

1. Felírjuk az Lp probléma kanonikus alakját:

$$\begin{array}{c} 3x_1 + 2x_2 + u_1 \qquad\quad = 75 \\ 5x_1 + \ \ x_2 \qquad\quad + u_2 = 90 \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad u_1, u_2 \geqslant 0 \\ \hline z_{\max} = 45x_1 + 15x_2 \end{array} \tag{11.6}$$

2. A (11.6) Lp problémának megfelel a következő induló szimplextáblázat:

11.3. táblázat. *1. szimplextáblázat*

	x_1	x_2	$\boldsymbol{b}$
u_1	3	2	75
u_2	$\langle 5 \rangle$	1	90
$-\boldsymbol{z}$	45	15	**0**

A (11.6) egyenletrendszerből és az 1. szimplextáblázatból látható, hogy a (11.6) egyenletrendszer megoldása $(x_1, x_2, u_1, u_2) = (0, 0, 75, 90)$ és a célfüggvény értéke nulla, mivel a nem-bázisváltozók értéke nulla $x_1 = x_2 = 0$, $u_1 = 75$, $u_2 = 90$, ahol u_1, u_2 a bázisváltozók és x_1, x_2, a nem-bázisváltozók, valamint $z = 0$.

A (11.6) Lp feladat $(x_1, x_2, u_1, u_2) = (0, 0, 75, 90)$ bázismegoldásának megfelel az eredeti Lp feladat lehetséges megoldásait ábrázoló konvex tartománynak az $\boldsymbol{O}$ pontja (11.1. ábra).

3. Az Lp problémának a (11.6) egyenletrendszer által felkínált megoldásánál egy nagyobb célfüggvényértékhez vezető megoldása is előállítható. Az általános algoritmusnak megfelelően a generálóelem az $\langle 5 \rangle$, mert a 45 oszlopában erre az értékre minimális a $\frac{b_i}{a_{ij}}$ tört $\left(\frac{90}{5} < \frac{75}{3}\right)$.

Ezért az x_1-et bevisszük a bázisba és az u_2-t kivisszük a bázisból. Ezt a báziscserét úgy valósítjuk meg, hogy az x_1-et kiküszöböljük, vagyis

kifejezzük a (11.6) egyenletrendszer második egyenletéből és ezt behelyettesítjük az egyenletrendszer első egyenletébe. Rendezés után a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} u_1 - \dfrac{3}{5}u_2 + \dfrac{7}{5}x_2 = 21 \\ x_1 + \dfrac{1}{5}u_2 + \dfrac{1}{5}x_2 = 18 \end{cases}. \tag{11.7}$$

Belátható, hogy az x_1 és u_1 ismeretleneknek megfelelő oszlopvektorok egységmátixot képeznek, lineárisan függetlenek és egy új bázist képeznek.

Az induló $(0, 0, 75, 90)$ csúcspontról a módosított Gauss–Jordan algoritmus segítségével áttérünk egy szomszédos csúcspontra:

$$(x_1, x_2, u_1, u_2) = (18, 0, 21, 0).$$

Ebben a csúcsponban a célfüggvény értéke

$$z = 18 \cdot 45 + 0 \cdot 15 = 810.$$

A (11.7) Lp problémának megfelel a 2. szimplextáblázat:

11.4. táblázat. *2. szimplextáblázat*

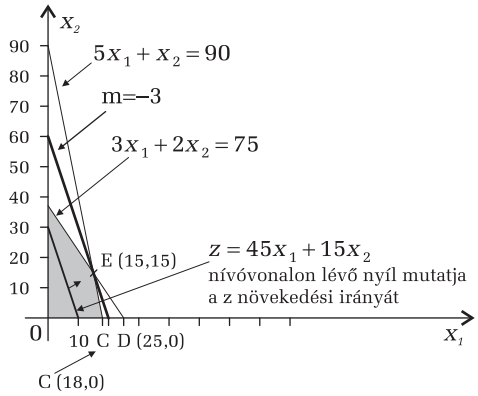
	u_2	x_2	b
u_1	$-\frac{3}{5}$	$\left\langle \frac{7}{5} \right\rangle$	21
x_1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	18
$-z$	-9	6	-810

A (11.7) kanonikus Lp feladat bázismegoldása: $x_1 = 18$, $u_1 = 21$ és $x_2 = u_2 = 0$, ahol x_1, u_1 a bázisváltozók és u_2, x_2 a nem-bázisváltozók, $z = 45 \cdot 18 = 810$.

A (11.7) Lp feladat $(x_1, x_2, u_1, u_2) = (18, 0, 21, 0)$ bázismegoldásának megfelel az eredeti Lp feladat lehetséges megoldása konvex tartományának a **C** pontja (11.1. ábra).

4. Mivel a 2. szimplextáblázat utolsó sorában van a $+6$ elem, újabb generálóelemet választhatunk, ez a $\left\langle \frac{7}{5} \right\rangle$, és folytatjuk az optimális célfüggvényérték keresését a szimplex algoritmus szerint.

A célfüggvény értékének növelése érdekében elvégezhetünk még egy bázistranszformációt, mivel létezik még egy pozitív célegyüttható. Ennek



11.1. ábra. *Lp feladat lehetséges tartományának extremális pontjai (O, C, E, B)*

megfelelően a (11.7) egyenletrendszer első egyenletéből kifejezzük az x_2-t és ezt behelyettesítjük a (11.7) egyenletrendszer második egyenletébe. Így lesz az u_1 bázisváltozóból nem-bázisváltozó és fordítva, az x_2 nem-bázisváltozóból bázisváltozó.

Tehát az u_1 oszlopát felcseréljük az x_2 oszlopával. A számítások eredménye a következő:

$$\begin{aligned} x_2 - \frac{3}{7}u_2 + \frac{5}{7}u_1 &= 15 \\ x_1 + \quad \frac{2}{7}u_2 - \frac{1}{7}u_1 &= 15. \end{aligned} \tag{11.8}$$

Tehát az x_1 bekerül a bázisba, az u_2 helyére. Ebben áll a báziscsere. A báziscsere következményeként kapott (11.8) egyenletrendszer együtthatóit a módosított Gauss–Jordan-féle algoritmus alapján számítjuk ki.

A (11.8) Lp problémának megfelel a 3. szimplextáblázat:

11.5. táblázat. *3. szimplextáblázat*

	u_2	u_1	$\boldsymbol{b}$
x_2	$-\frac{3}{7}$	$\frac{5}{7}$	15
x_1	$\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$	15
$-\boldsymbol{z}$	$-\frac{45}{7}$	$-\frac{30}{7}$	-900

A 3. szimplextáblázat utolsó sora negatív számokból áll, ez azt jelenti, hogy a célfüggvényérték további növelése nem lehetséges, és megtaláltuk az Lp probléma optimális megoldását, $z = 900$.

A csúcspont koordinátái $x_1 = 15$, $x_2 = 15$, ami a konkrét gazdasági kérdésre vonatkoztatva azt jelenti, hogy mind a két bútorféleségből 15, 15 darabot érdemes gyártani.

A (11.7) Lp feladat bázismegoldása $(x_1, x_2, u_1, u_2) = (15, 15, 0, 0)$, $z = 900$, és ennek a bázismegoldásnak megfelel az eredeti Lp feladat lehetséges megoldása konvex tartományának az **E** pontja (11.1.ábra). Ezzel a szimplex algoritmust befejeztük.

Csak azért, hogy a probléma összes bázismegoldását megadjuk, folytatjuk az elemi bázistranszformációkat, és az (x_1, x_2) bázisváltozókról áttérünk egy új (x_1, u_1) bázisváltozóra. A megfelelő kanonikus Lp probléma feltételei a következők:

$$\begin{aligned} -\frac{7}{3}x_2 - \frac{5}{3}u_1 + u_2 &= -35 \\ x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}u_1 \qquad &= 25. \end{aligned} \tag{11.9}$$

Ha folytatjuk a szimplex algoritmust, miután megkaptuk az Lp probléma optimális megoldását, akkor csak a (11.6) egyenletrendszer bázismegoldásait és nem a lehetséges bázismegoldásokat kapjuk. Az $x_2 = u_1 = 0$, $x_1 = 25$, $u_2 = -35$ nem lehetséges bázismegoldás, mivel $u_1 < 0$, és ennek a bázismegoldásnak az **A** pont felel meg.

A következő elemi bázistranszformáció után megkapjuk az $x_1 = u_1 = 0$, $x_2 = 35,5$, $u_2 = 54,5$ bázismegoldást, aminek a 11.1. ábrán a **B** pont felel meg. Az utolsó elemi bázistranszformáció a következő megoldáshoz vezet: $x_1 = u_2 = 0$, $x_2 = 90$, $u_1 = -105$, ami szintén nem lbm, mivel $u_2 < 0$. Ennek a bázismegoldásnak a **D** pont felel meg. A nem lbmnek nem felelnek meg csúcspontok az eredeti Lp probléma lehetséges megoldásainak a halmazában. Így az Lp feladat lehetséges bázismegoldásai és az eredeti Lp feladat extremális pontjai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés látható a 11.6. táblázatban.

Megjegyzés. Az eredeti Lp feladatban a lehetséges megoldások konvex halmazának minden extremális pontja a megfelelő kanonikus Lp feladat lehetséges bázismegoldása.

A szimplex módszer előnye akkor válik nyilvánvalóvá, amikor három vagy háromnál több változós Lp problémát kell megoldani, ugyanis a szimplex algoritmus alkalmazásával nem kell az összes bázismegoldást meghatározni, az L halmaz összes csúcspontjában a célfüggvényértéket kiszámítani, hanem a számításoknak csak ezek egy részét kell elvégezni, és mindig kiválasztható az a csúcs, amelyik nagyobb célfüggvényértéket biztosít.

11.6. táblázat.

Bázis-változók	Nem-bázis-változók	Lehetséges bázismegoldás	A megfelelő csúcspont
x_1, x_2	u_1, u_2	$u_1 = u_2 = 0, \quad x_1 = x_2 = 15,$ $z = 900$	**E**
x_1, u_1	x_2, u_2	$x_2 = u_2 = 0, \quad x_1 = 18, \quad u_1 = 21,$ $z = 810$	**C**
x_1, u_2	x_2, u_1	$x_2 = u_1 = 0, x_1 = 25, u_2 = -35$	**A** nem lbm, mert $u_2 < 0$
x_2, u_1	x_1, u_2	$x_1 = u_2 = 0, \quad x_2 = 90,$ $u_1 = -105$	**D** nem lbm, mert $u_1 < 0$
x_2, u_2	x_1, u_1	$x_1 = u_1 = 0, \quad x_2 = 35,5,$ $u_2 = 54,5, \quad z = 53,25$	**B**
u_1, u_2	x_1, x_2	$x_1 = x_2 = 0, \quad u_1 = 75, \quad u_2 = 90,$ $z = 0$	**O**

A szimplex algoritmus hasonlít egy „optimális hegymászás" algoritmusához, amely szerint minden lépés közelebb visz a csúcshoz. A szimplex algoritmus jelenleg a lineáris programozási feladatok leggyakrabban használt megoldási módszere.

Belátható, hogy az Lp feladat lehetséges bázismegoldásai és az eredeti Lp feladat lehetséges megoldása konvex tartományának csúcspontjai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létezik.

A tekintett Lp feladatnak hat bázismegoldása van az **A**, **B**, **C**, **D**, **E** és **O** pontoknak megfelelően (11.1. ábra), és négy lehetséges bázismegoldása van az **O**, **C**, **E**, **B** pontoknak megfelelően.

Példák.

1. Keressük meg a következő Lp probléma optimális megoldását:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 \leqslant 6 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \leqslant 2 \\ 2x_1 + 5x_2 \qquad\quad \leqslant 1 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$$
$$\overline{z_{\max} = 2x_1 - 3x_2 + x_3}$$

Megoldás. Felírjuk az Lp probléma kanonikus alakját az u_1, u_2, u_3 hiányváltozók bevezetésével és az induló szimplextáblázatot:

$$\begin{cases} x_1 - \ x_2 + 3x_3 + u_1 & = 6 \\ 2x_1 + \ x_2 + 4x_3 \qquad + u_2 & = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 \qquad\qquad\qquad + u_3 & = 1, \end{cases}$$

11.7. táblázat. *1. szimplextáblázat*

	x_1	x_2	x_3	b
u_1	1	-1	3	6
u_2	2	1	4	2
u_3	$\langle 2 \rangle$	5	0	1
$-z$	2	-3	1	0

Az induló szimplextáblázatból azt kapjuk, hogy:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad u_1 = 6, \quad u_2 = 2, \quad u_3 = 1, \quad z = 0$$

és a generálóelem $\langle 2 \rangle$.

Elkészítjük a 2. szimplextáblázatot az mGJ-féle algoritmus alapján.

11.8. táblázat. *2. szimplextáblázat*

	u_3	x_2	x_3	b
u_1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{2}$	3	$\frac{11}{2}$
u_2	-1	-4	$\langle 4 \rangle$	1
x_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$-z$	-1	-8	$+1$	-1

A 2. szimplextáblázatból azt kapjuk, hogy:

$$x_2 = x_3 = u_3 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad u_1 = \frac{11}{2}, \quad u_2 = 1, \quad z = 1$$

és a generálóelem $\langle 4 \rangle$.

Elkészítjük a 3. szimplextáblázatot az mGJ-féle algoritmus segítségével.

A 3. szimplextáblából azt kapjuk, hogy:

$$x_2 = u_2 = u_3 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{1}{4}, \quad u_1 = \frac{19}{4} \quad \text{és} \quad z = \frac{5}{4}.$$

11.9. táblázat. *3. szimplextáblázat*

	u_3	x_2	u_2	b
u_1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{19}{4}$
x_3	$-\frac{1}{4}$	-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
x_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$-z$	$-\frac{3}{4}$	-7	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}$

Mivel a 3. szimplextáblázatban a célegyütthatók mind negatívak, a $z = \frac{5}{4}$ a célfüggvény maximális értéke.

2. Oldjuk meg a következő normál Lp feladatot:

$$\begin{array}{c} 4x_1 + 2x_2 \leqslant 28 \\ 2x_1 + 5x_2 \leqslant 30 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \\ \hline z_{\max} = 4x_1 + 5x_2 \end{array}$$

Megoldás. Felírjuk a feltételrendszer kanonikus alakját:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + u_1 \qquad &= 28 \\ 2x_1 + 5x_2 \qquad + u_2 &= 30 \end{aligned}$$

Az induló bázismegoldás: $(x_1, x_2, u_1, u_2) = (0, 0, 28, 30)$, $z = 4{\cdot}0 + 5{\cdot}0 = 0$.

Felírjuk az induló szimplextáblázatot úgy, hogy a feladat feltételrendszerének mátrixát kibővítjük a célfüggvény sorával, miután a célfüggvényt nullára redukáljuk. $-z + 4x_1 + 5x_2 = 0$.

11.10. táblázat.

	x_1	x_2	b	
u_1	4	2	28	$\frac{28}{2} = 14$
u_2	2	$\langle 5 \rangle$	30	$\frac{30}{5} = 6$ (szűk keresztmetszet)
$-z$	4	5	0	

Az első elemi bázistranszformáció generálóeleme: 5. Az induló szimplextáblázatból kiolvasható az induló bázismegoldás a sorok elejének és végének összeolvasásával, vagyis a bázisban lévő változók értékei egyenlők az erőforrások értékeivel. Azok a változók, amelyek nincsenek a bázisban, nullák: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $u_1 = 28$, $u_2 = 30$, $z = 0$.

11.11. táblázat.

	x_1	u_2	b
u_1	$\left\langle \frac{16}{5} \right\rangle$	$-\frac{2}{5}$	16
x_2	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	6
$-z$	2	-1	-30

A bázistranszformáció lépései után kapjuk a 2. szimplextáblázatot:

Ebből kiolvasható a megoldás: $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, $u_1 = 16$, $u_2 = 0$, $z = 30$.

Mivel a célfüggvény sorában van pozitív elem, a $z = 30$ nem optimális. Az x_1 oszlopából választunk generálóelemet. Mivel $\frac{16}{\frac{16}{5}} = 5$ és $\frac{6}{\frac{2}{5}} = 15$, az első sorból választjuk a generálóelemet. Elvégezzük az elemi bázistranszformációt:

11.12. táblázat.

	u_1	u_2	b
x_1	$\frac{5}{16}$	$-\frac{2}{16}$	5
x_2	$-\frac{2}{16}$	$\frac{1}{4}$	4
$-z$	$-\frac{10}{6}$	$-\frac{3}{4}$	-40

A táblázatból kiolvasható megoldás:

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 4, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad z = 40.$$

Ez egyben optimális megoldás is, mivel a célsorban nincs pozitív elem.

12. FEJEZET

OPTIMÁLIS GAZDÁLKODÁS VÁLTOZÓ ERŐFORRÁSOK ESETÉBEN. DUÁL FELADAT

Minden Lp feladathoz tartozik egy duál probléma. A duál feladatban a döntési változók az erőforrások egységárai (árnyékárak), és így lehetőség nyílik az ún. érzékenységvizsgálatra.

Hogyan írjuk fel egy adott *primál* Lp feladatnak megfelelő duálját?

12.1. értelmezés. Azokat a feltételes szélsőérték-feladatokat, amelyekben lineáris egyenlőtlenségek és egyenletek ($\leqslant$) által meghatározott halmazon egy *lineáris függvény maximumát* keressük, amikor $\boldsymbol{b} \geqslant \mathbf{0}_{m\times 1}$, *primál lineáris programozási feladatnak* nevezzük.

Tekintsük a primál Lp probléma matematikai modelljét.

Az Lp *primál* feladatot a következőképpen fogalmazzuk meg: a különböző termékekből mennyit kell előállítani ahhoz, hogy a jövedelem maximális legyen a meglévő erőforrások keretein belül? Ennek a feladatnak a matematikai modellje a következő:

$$\begin{array}{c}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m. \\
x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0 \\
\hline
z_{max} = f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_2x_2.
\end{array}$$

A primál feladat mátrixos alakja:

$$\frac{A\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}}{f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{x} \geqslant 0.$$

Megjegyzés. A lineáris programozás feladata *normál feladat,* ha

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \geqslant 0$$

és keressük a célfüggvény maximumát. A normál feladat megfogalmazása mátrixjelöléssel a következő: keressük a $z = c \cdot x$ maximumát, amikor

$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqslant 0, \boldsymbol{b} \geqslant 0\}\,.$$

Abban az esetben, ha a $\boldsymbol{b}$ vektor elemei negatív számok is lehetnek, akkor a lineáris programozási feladatot *standard* feladatnak nevezzük.

Ha a primál Lp feladatban a döntési változók $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ száma n és a korlátozó feltételek $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ száma m, akkor a duál feladatban a döntési változók $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ száma m és a korlátozó feltételek $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ száma n. A duál feladatban az erőforrások egységárai képezik a döntési változókat. Így látható, hogy a *duál* Lp feladatban helyet cserélnek a primál Lp feladat célfüggvény együtthatói, $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ és a korlátozó feltételek $b_1, b_2, \ldots, b_m$ együtthatói.

Ha feltételezzük, hogy az alapanyagok egységárai rendre y_1, y_2, ..., y_m és az a cél, hogy ezen alapanyagok beszerzésére fordított kiadás minimális legyen, akkor egy új lineáris programozási feladatot kapunk, éspedig a primál Lp probléma *duálját*.

Jelöljük a duál feladat célfüggvényét:

$$g_{\min} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{y} = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m.$$

A nyersanyagok egységárai y_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Ezek csak olyanok lehetnek, hogy a termékek előállításához szükséges erőforrások ára legalább akkora legyen, mint a termékekből származó nyereségek.

$$\begin{aligned}
&a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geqslant c_1 \\
&a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geqslant c_2 \\
&\vdots \\
&a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geqslant c_n.
\end{aligned}$$

Ekkor tehát az

$$\frac{A\boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{c}^T}{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{y} = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m \ \rightarrow \ \min.}$$

minimumfeladathoz jutunk. Összefoglalva:

$$\text{primál feladat} \qquad \frac{Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0_{n\times 1}}{z_{max} = c \cdot x},$$

$$\text{duál feladat} \qquad \frac{A^T y \geqslant c^T, \quad y \geqslant 0_{m\times 1}}{g_{min} = b \cdot y}.$$

Ily módon a primál és duál feladat együtt mindig egy úgynevezett primál–duál feladatpárt alkot.

Látható, hogy a duál feladat feltételrendszerének együtthatómátrixa azonos a primál feladat együtthatómátrixának transzponáltjával és a primál és duál feladatban szerepet cserél a $\boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{c}$ vektor.

12.2. tétel. Ha $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ a következő duál feladatpár döntési változói

$$\frac{Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0_{n\times 1}}{z_{max} = c \cdot x} \quad \text{és} \quad \frac{A^T y \geqslant c^T, \quad y \geqslant 0_{m\times 1}}{g_{min} = b^T \cdot y},$$

akkor a célfüggvények értékeire érvényes a következő állítás: $z_{\max} \leqslant g_{\min}$.

Bizonyítás. Valóban, $Ax \leqslant b$ és $A^T y \geqslant c^T \ \Rightarrow \ y^T \cdot A \geqslant c$, mivel két mátrix szorzatának a traszponáltja egyenlő a mátrixok transzponáltjainak fordított sorrendben való szorzatával. Megszorozzuk az első egyenlőtlenséget y^T-vel balról és az utolsó egyenlőtlenséget $\boldsymbol{x}$-szel jobbról:

$$y^T \cdot Ax \leqslant y^T \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot y^T = \boldsymbol{g}_{\min}, \quad y^T \cdot Ax \geqslant c \cdot x = z_{\max}.$$

A két egyenlőtlenség összehasonlításából adódik, hogy $z_{\max} \leqslant g_{\min}$.

Egy konkrét Lp feladattal kezdjük és bemutatjuk annak a grafikus megoldását. Az erőforrások esetében felmerül a kérdés, hogy a rendelkezésre álló erőforrások változása mennyiben módosítja az optimális megoldást. Milyen összefüggés van a változó erőforrások és az optimális megoldás megtalálása között? Tulajdonképpen, ha eddig az erőforrások optimális fölhasználásában meghatározó volt az erőforrások adott, statikus volta, most azt vizsgáljuk meg, hogy az erőforrások változásai milyen hatással vannak a lineáris programozási feladat optimális megoldására. Ehhez a vizsgálathoz segítséget nyújt az ún. dualitáselmélet. Milyen

megoldandó gazdasági feladat van a primál Lp feladat mögött, és milyen gazdasági feladat matematikai modelljét fejezi ki a duál feladat? A primál feladatban a kérdés az, hogy adott erőforrások felhasználásával a különböző termékféleségekből mennyit állítson elő a vállalkozó ahhoz, hogy *maximális jövedelmet* (nyereséget) érjen el.

$$\begin{array}{c} 3x_1+2x_2 \leqslant 75 \\ 5x_1+\ x_2 \leqslant 90 \\ \hline z_{\max} = 45x_1 + 15x_2 \end{array}$$

A döntési változók: x_1, x_2.

A duál feladatban az erőforrásokat szolgáltató cégnek az a célja, hogy az egyes termékekben bennefoglalt nyersanyagok ára ne legyen kisebb, mint a termék utáni jövedelem. Ezeket a korlátozó feltételeket a nyersanyagokat szolgáltató cég szabja meg. A duál feladatban a termékeket előállító vállalkozó azt vizsgálja, hogy a nyersanyag összára minél kisebb legyen.

Az előbbi Lp primál feladatnak a duálja

$$\begin{array}{c} 3y_1+5y_2 \geqslant 45 \\ 2y_1+\ y_2 \geqslant 15 \\ y_1 \geqslant 0, \quad y_2 \geqslant 0 \\ \hline g_{\min} = f(\boldsymbol{y}) = 75y_1 + 90y_2. \end{array}$$

Vizsgáljuk meg újból az asztalosműhely-feladatot. Ennek a primál feladat változatát megoldottuk. Megoldását a 11. fejezetben lévő 3. szimplextáblázat tartalmazza.

12.1. táblázat. *3. szimplextáblázat*

	u_2	u_1	$\boldsymbol{b}$
x_2	$-\frac{3}{7}$	$\frac{5}{7}$	15
x_1	$\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$	15
$-\boldsymbol{z}$	$-\frac{45}{7}$	$-\frac{30}{7}$	-900

A primál feladat célfüggvényeinek együtthatói alkotják a duál feladat feltételeinek jobb oldalát. Minden előjelkötetlen változóhoz egyenlőség, és minden előjelkötött változóhoz egyenlőtlenség tartozik a másik feladatban.

A duál feladat megoldása szimplex módszerrel:

12.2. táblázat. *1. szimplextáblázat*

	y_1	y_2	$\boldsymbol{c}$
u_1	3	$\langle 5 \rangle$	45
u_2	2	1	15
$-g$	75	90	0

12.3. táblázat. *2. szimplextáblázat*

	y_1	u_1	$\boldsymbol{c}$
y_2	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	9
u_2	$\langle \frac{7}{5} \rangle$	$\frac{1}{5}$	6
$-g$	21	-18	-810

12.4. táblázat. *3. szimplextáblázat*

	u_2	u_1	$\boldsymbol{c}$
y_2	$-\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{45}{7}$
y_1	$\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{30}{7}$
$-g$	-15	-15	-900

Megmutatjuk, hogy a duál feladat megoldásának van egy gazdasági szempontból érdekes jelentése.

Tekintsük újból az asztalosműhely-feladatot:

$$\begin{array}{c} 3x_1 + 2x_2 \leqslant 76 \\ 5x_1 + \ \ x_2 \leqslant 90 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \\ \hline z_{\max} f(x) = (45x_1 + 15x_2). \end{array}$$

Vizsgáljuk meg, mi történik az asztalos nyereségével, ha módosul az erőforrása egy egységnyi faanyaggal.

Felírjuk a határoló egyenesek (hipersíkok) egyenletét.

$$\begin{array}{ll} 3x_1 + 2x_2 = 76 & \text{faanyag határegyenlete} \\ 5x_1 + \ \ x_2 = 90 & \text{munkaóra határegyenlete} \end{array}$$

Ábrázoljuk a $3x_1 + 2x_2 = 76$ egyenest ugyanabban a koordinátarendszerben. Ebben az esetben a P pont csúszik az $5x_1 + x_2 = 90$ egyenesen felfelé, és a $3x_1 + 2x_2 = 76$, illetve az $5x_1 + x_2 = 90$ egyenletű egyenes metszéspontjának koordinátái:

$$P'(x_1', x_2') = P'\left(\frac{104}{7}, \frac{110}{7}\right) = P'\left(14\frac{6}{7}, 15\frac{5}{7}\right).$$

A P' pontnak megfelelő nyereség

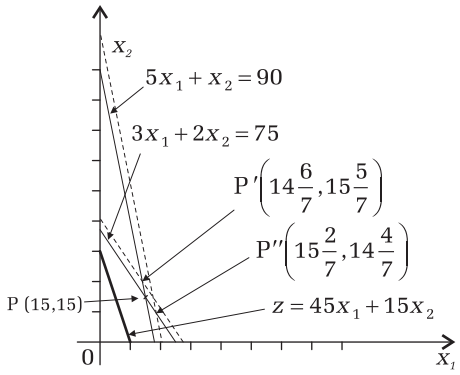
$$z = 45 \cdot \frac{104}{7} + 15\frac{110}{7} = \frac{6330}{7} = 900\frac{30}{7}.$$

Tehát a nyereség nő $\frac{30}{7}$ pénzegységgel.

Hasonlóan végezzük el a számításokat, ha a munkaóra-erőforrást növeljük egy egységgel. Akkor a $P(15, 15)$ pont a $P''(x_1'', x_2'')$ pontba kerül, ahogy azt a

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 75 \\ 5x_1 + x_2 = 91 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 75 \\ 10x_1 + 2x_2 = 182 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldása mutatja.



12.1. ábra.

$$x_1 = \frac{107}{7} = 15\frac{2}{7} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{182 - 10\frac{107}{7}}{2} = \frac{102}{7} = 14\frac{4}{7}. \quad P''\left(15\frac{2}{7}, 14\frac{4}{7}\right)$$

A vállalkozó nyeresége a $P''\left(15\frac{2}{7}, 14\frac{4}{7}\right)$ pontban

$$z = 45 \cdot \frac{107}{7} + 15\frac{2}{7} = \frac{6300 + 45}{7} = 900 + \frac{45}{7}.$$

Tehát a nyeresége nő $\frac{45}{7}$ egységgel.

Érdekes összefüggést fedezünk fel, amikor észrevesszük, hogy a duál feladat megoldása éppen $y_1 = \frac{30}{7}$, $y_2 = \frac{45}{7}$.

Példa. Egy vállalkozó sajtot és vajat termel. 400 pénzegység a nyereség minden egységnyi mennyiségű (kg) sajton és minden egységnyi mennyiségű (kg) vajon. Egy egységnyi mennyiségű sajt elkészítéséhez rendre 2, 1 és 1 óra szükséges az 1., 2. és 3. részlegen. Ugyanezek az értékek az egységnyi vaj esetében 1, 4 és 2 óra.

Tegyük fel, hogy az 1. és 2. részlegek kapacitása legfeljebb napi 16 óra, míg a harmadik részleg kapacitása 11 óra. Jelölje x_1 és x_2 a naponta gyártott sajt, illetve vaj mennyiségét kg-ban.

a) Magyarázzuk meg, hogy a napi nyereség maximalizálásához a következő feladatokat kell megoldanunk.

$$\begin{array}{c} 2x_1 + \ \ x_2 \leqslant 16 \\ x_1 + 4x_2 \leqslant 16 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 11 \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0 \\ \hline z_{\max} = f(\boldsymbol{x}) = 400x_1 + 500x_2 \end{array}.$$

b) Oldjuk meg a feladatot grafikusan.

c) Ha az üzem napi egy órával tudná növelni valamelyik részlegének kapacitását, melyik részleg kapacitását kellene először növelni?

Megoldás.

a) $2x_1 + x_2 \leqslant 16$ azt fejezi ki, hogy az 1-es részlegen legfeljebb annyi időt használhatnak fel a termeléshez naponta, mint a kapacitása stb.

b) $z_{\max} = 3800$, $(x_1, x_2) = (7, 2)$.

c) Ha az 1. részleg kapacitását növeljük, az Lp feladat megoldása és a nyereségnövekedés a következő:

$$x_1 = \frac{23}{3}, \quad x_2 = \frac{5}{3}, \quad \Delta z = 100.$$

Ha a 2. részleg kapacitását növeljük, a nyereség nem nő. Ha a 3. részleg kapacitását növeljük, az Lp feladat megoldása és a nyereségnövekedés a következő:

$$x_1 = \frac{20}{3}, \quad x_2 = \frac{8}{3}, \quad \Delta z = 200.$$

Így a harmadik részleg kapacitását érdemes növelni a legközelebbi alkalommal.

13. FEJEZET

A JÁTÉKELMÉLET ELEMEI

A játékelmélet a stratégiai játékokkal foglalkozik, amelyekben a játék kimenetele nagymértékben a játékosok tudásától, tapasztalától függ, és célja az azonos területen működő játékosok optimális cselekvéseinek, stratégiáinak meghatározása. Ma a játékelmélet a szerencsejátékok köréből átlépett a gazdasági és politikai problémák olyan területeire, mint pl. a piaci verseny modellezése vagy a környezetvédelmi egyezmények tervezése.

A játékelmélet megalapozói között vannak Neumann János (1903–1957) és Wald Ábrahám (1902–1950) magyar származású matematikusok is.

13.1. Játék, stratégia

A gazdasági életben sokszor olyan döntést kell hozni, amelynél figyelembe kell venni hasonló érdekeltségű vállakozók döntési lehetőségeit. Például, amikor a vendéglátóiparban meg kell határozni a saját reklám- és ármegállapítási politikát, a bankvilágban a kamatláb kiszámítását, akkor a viszonylag új tudományág, a játékelmélet jól használható.

13.1. értelmezés. *Játék* az ellentétes érdekek esetében és meghatározott szabályok betartásával végzett cselekvés.

A játék három komponensből áll: játékosokból, játékszabályokból, az eredmények értékeléséből.

13.2. értelmezés. *Stratégia* (gör.: hadászat, hadjáratok, háborúk vezetésének tudománya, nem fegyveres harcban, valamilyen kitűzött célért folyó küzdelemben az irányítás tudománya) a játékos megállapított szabályok alapján történő lépéseinek terve.

A stratégiai játékokban a részt vevő játékosok érdekei általában ellentétesek vagy eltérőek. Így a stratégiai játékokra a konfliktusok jellemzők.

Ez az alapja a játékelmélet széles körű alkalmazhatóságának a konfliktushelyzetek matematikai modellezésében.

Tehát a játékosnak előre végig kell gondolnia az összes lehetséges lépést, amely a játék folyamán előállhat. A stratégia mindenik helyzetre előirányozza a megfelelő megoldást. A játékelmélet célja megtalálni az optimális stratégiákat és a kialakuló egyensúlyi helyzeteket. A játék lehet *kétszemélyes* vagy *többszemélyes*, aszerint, hogy a játékban két vagy több játékos érdekellentéte van jelen.

Ebben a fejezetben olyan helyzeteket vizsgálunk, amelyekben csak két döntéshozó (játékos) szerepel.

13.2. Kétszemélyes nullaösszegű játékok

A kétszemélyes nullaösszegű játékot a következő kifizetésmátrix formájában mutatjuk be. Az A játékos (sorjátékos) lépéseit jelöljük x_1, x_2, ..., x_m-mel és a B játékos (oszlopjátékos) lépéseit y_1, y_2, ..., y_n-nel. Ha $m = n$, akkor *négyzetes játékmátrixot* kapunk. Mindkét játékos választhat magának egy $x_i \in X$, illetve $y_j \in Y$ stratégiát, ahol az X és Y meghatározott véges lépések halmaza.

13.1. táblázat.

	y_1	y_2	$\dots$	y_n	min
x_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	α_1
x_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	α_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	α_m
max	β_1	β_2	$\dots$	β_m	

Az A és B játékos választásai (lépései) meghatározzák a játék eredményét. Az (x_i, y_j) lépések az

$$X \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots x_i \dots & x_m \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots y_j \dots & y_n \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tiszta stratégiák elemei.

A kevert srtatégiák esetében a játékosok lépéseinek a valószínűségi eloszlásai a következők:

$$X\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}, \quad \sum_i^m p_i = 1,$$

$$Y\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix}, \quad \sum_j^n q_j = 1.$$

Tehát a stratégiát tulajdonképpen a $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ és $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ valószínűségi vektorok határozzák meg.

A játék értékét, vagyis a kifizetést az A játékos számára felírhatjuk a stratégia függvényeként:

$$t : p \times q \to \mathbb{R}, \quad (p,q) \to t(p,q) = E(p,q) = \\ = \sum_i^n \sum_j^m t(x_i, y_j)\, p_{ij} = \sum_i \sum_j a_{ij} p_i q_j.$$

Belátható, hogy a kevert stratégiák tartalmazzák a tiszta stratégiát, amikor a p és q valószínűség-vektorokban i, illetve j komponense 1 $(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$, a többi komponense 0. Ebben az esetben a játék kimenetele az A játékos számára $a_{ij} = t(x_i, y_j)$.

Az A játékos nyereségét a játékmátrix a_{ij} elemével jelöljük. Ami az A-nak nyereség, az a B-nek veszteség.

13.3. értelmezés. Ha az egyik játékos mindegyik játszmában annyit nyer, amennyit a másik veszít, a játékot *zérusösszegűnek* nevezzük.

Ha a játékmátrixban az a_{ij} elem pozitív, akkor az A játékos nyer, és ha az a_{ij} elem negatív, akkor az (i, j) játszmában az A játékos fizet. Az A játékos úgy próbálja kidolgozni a stratégiáját, hogy a játszmák az ő számára nyereségesek legyenek.

Ha mindegyik játékos mindenik lépés előtt ismeri az összes előző lépés eredményeit, a játékot *teljes információjú játéknak* nevezzük.

A kérdés az, hogy milyen stratégiát válasszunk, vagyis milyen legyen a lépéseknek mint valószínűségi változóknak az eloszlása.

Itt két független optimalizációs jelenséggel van dolgunk.

Az első játékos mindent megtesz, hogy minél többet kapjon és keresi a játékmátrix oszlopaiban a maximumot. Az ellenfele ezt a nyereményt csökkenteni akarja. Ezt foglalja magába a következő kifejezés:

$$\min_j \max_i E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \tag{13.1}$$

A B játékos megpróbálja növelni az A játékos veszteségét és keresi a sorok minimumát, de az első játékos a minimális kifizetések között keresi a maximumot. Ezt foglalja magába a következő kifejezés:

$$\max_i \min_j E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \tag{13.2}$$

13.3. A minimax elv

A játékelmélet alapvető tétele, amelyet Neumann János fogalmazott meg, kimondja, hogy a zérusösszegű játékok esetében mindig létezik két olyan

$$X \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}, \quad \sum_i^m p_i = 1 \quad \text{és}$$

$$Y \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix}, \quad \sum_j^n q_j = 1$$

kevert stratégia, amelyekre a (13.1) és (13.2) kifejezések egyenlők.

13.4. tétel. $\min_j \max_i E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \max_i \min_j E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$.

E tétel bizonyításának egyszerűsített változata megtalálható Neumann, J. von és Morgenstern, O. [1953] *Theory of games an Economic Behavior* című munkájában vagy az [1] jegyzetben.

A minimax elv a mindkét játékos számára legelőnyösebb, optimális stratégia meghatározására szolgál, és egyaránt érvényes tiszta stratégiák és kevert stratégiák esetében.

A továbbiakban tanulmányozzuk a minimax elv érvényesítését nyeregponttal rendelkező játékok és nyeregpont nélküli játékok esetében

13.4. Nyeregpontos játékok

A minimax elvet egy konkrét mátrixjáték esetében mutatjuk be.

Legyen a játék nyereségmátrixa (fizetési mátrixa) a következő táblázat:

13.2. táblázat.

B

A		y_1	y_2	y_3	y_4	min
	x_1	-3	-1	4	2	$-3 = \alpha_1$
	x_2	5	-2	0	1	$-2 = \alpha_2$
	x_3	2	0	2	3	$0 = \alpha_3 = v_1$
	x_4	3	0	-4	6	$-4 = \alpha_4$
	max	5	0	4	6	
		β_1	$\beta_2 = v_2$	β_3	β_4	

13.5. értelmezés. Az $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}}$ kifizetési mátrixnak az $a_{i_0 j_0}$ elemét nyeregpontnak nevezzük, ha

$$a_{i_0 j_0} \leqslant a_{i_0 j}, \ \forall\, j \in \{1, 2, \ldots, m\} \quad \text{és} \quad a_{i_0 j_0} \geqslant a_{i j_0}, \ \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

(a nyeregpont a sorában a legkisebb elem és az oszlopában a legnagyobb).

Ha a játékmátrixnak van nyeregpontja, akkor a megfelelő játékot *nyeregpontos játéknak* nevezzük. A nyeregpont egyfajta egyensúlypont is, abban az értelemben, hogy ha bármelyik játékos stratégiát változtat, akkor csak rosszabbul jár. Így a nyeregpont stabil abban az értelemben, hogy abból egyik játékos sem kíván egyoldalúan elmozdulni.

Feltételezzük, hogy a játékosok ismerik egymás lehetséges lépéseit. Mit tegyen a sorjátékos ebben a játékban? Ha az első sort választja, akkor az oszlopjátékos az első oszlopot választja azért, hogy a nyereménye 3 legyen és a sorjátékos vesztesége 3 legyen. Hasonlóan, ha a sorjátékos a második sort választja, akkor az oszlopjátékos a második oszlopot fogja választani, azért, hogy a sorjátékos vesztesége 2 legyen. Ha a sorjátékos a harmadik sort választja, akkor a feltevés szerint, mint a második sorban, a legkisebb szám a 0. Ha a sorjátékos a negyedik sort választja, akkor a vesztesége 4 lesz, így a sorjátékosnak azt a sort kell választania, amelyben a legkisebb elem a legnagyobb, vagyis $\max(-3, -2, 0, -4) = 0$, a sorjátékosnak a harmadik sort kell választania, így biztosítani tudja, hogy sem nem veszít, sem nem nyer, $\max(\text{sorminimum}) = 0$.

A helyzet az oszlopjátékos szempontjából éppen fordított. Amikor az oszlopjátékos választ, arra kell számítania, hogy a sorjátékos az oszlopban szereplő legnagyobb értéket tartalmazó sort fogja választani, így okozva a legnagyobb kifizetést az oszlopjátékos számára. Esetünkben, ha az oszlopjátékos az első oszlopot választja, akkor a sorjátékos a második sort választja. Hasonlóan, ha az oszlopjátékos a második oszlopot

választja, akkor a sorjátékos a harmadik vagy a negyedik sort választja, és így tovább, a sorjátékos el tudja érni, hogy vesztesége 0 legyen. Ebben a kifizetési mátrixban teljesül a minimax elv:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}.$$

A nyeregpont könnyen megtalálható, mivel sorában a legkisebb és oszlopában a legnagyobb. Ebben a játékban a játék értéke $v = 0$.

Általában α_i a mátrix i-edik sorában a legkisebb elem, ami a sorjátékos maximális veszteségét jelenti. A sorjátékos vesztesége akkor lesz a legkisebb, ha azt a sort választja, amelyben az α_i maximális. A mi esetünkben $i = 3$. Ezt az α_3 értéket v_1-gyel jelöljük és a játék *alsó értékének* nevezzük, $v_1 = \max_i \min_j a_{ij} = 0$.

A táblázat utolsó sorában az oszlopjátékos oszloponkénti maximális veszteségei vannak feltüntetve. Nyilvánvaló, hogy az oszlopjátékos vesztesége akkor lesz minimális, ha azt az oszlopot választja, amelyikben β_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ minimális:

$$v_2 = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}.$$

A v_2 mennyiséget a játék *felső értékének* nevezzük. A mátrix azon sorának megfelelő stratégiát, amelyben a v_1 megtalálható, *maximin* stratégiának nevezzük. A mátrix azon oszlopának megfelelő stratégiát, amelyben a v_2 megtalálható, *minimax* stratégiának nevezzük a tekintett mátrixjáték esetében.

Ha $v_1 = v_2 = v$, akkor a közös v értékét a játék *értékének* nevezzük. Ha a játék értéke nulla, akkor a játékot *igazságos játéknak* nevezzük.

Abban az esetben, ha $v_1 = v_2 = v \neq 0$, a játék igazságtalan. Ha $v > 0$, akkor a nyertes az A játékos, és ha $v < 0$, akkor az A játékos a vesztes.

A sorjátékos *maxmin* stratégiájához tartozó kifizetőfüggvény értéke:

$$v_1 = \max_i \min_j a_{ij} = a_{32} = 0.$$

Az oszlopjátékos *minimax* stratégiájához tartozó kifizetőfüggvény értéke

$$v_2 = \min_j \max_i v_2 = a_{32} = 0.$$

Az $i = 3$, $j = 2$ maxmin-minmax stratégiapár választása egyensúlyi helyzetet teremt a játékban, amelyik játékos eltér attól a stratégiától, csak rosszabbul járhat.

Belátható, hogy ha $v_1 = v_2 = v$, akkor ez a v érték a sorának minimuma és oszlopának maximuma.

A bemutatott feladat esetében az optimális stratégiák a következők:

$$X\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad Y\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tiszta stratégiák.

Abban az esetben, ha $v_1 \neq v_2$, akkor minden esetben $v_2 > v_1$, és a mátrixjátéknak nincs nyeregpontja.

13.5. Nyeregpont nélküli játékok 2×2-es mátrixjátékok esetében

Abban az esetben, ha $v_1 < v_2$, vagyis $\max_i \min_j a_{ij} \leqslant \min_j \max_i a_{ij}$, felmerül a kérdés, hogy nem volna-e lehetséges, hogy a v_1-nél nagyobb nyereséget biztosítsunk a sorjátékos számára a stratégiáknak adott valószínűséggel való alkamazásával.

Neumann János tétele szerint, ha $v_1 < v_2$, akkor az X, Y *kevert* stratégiapár egy v középnyereséget biztosít minden véges játék esetében, és a v_1 csak akkor növelhető és a v_2 csak akkor csökkenthető, ha az A és B játékos *kevert* stratégiát alkalmaz.

A sor és oszlopjátékosok kevert stratégiáit egy 2×2-es mátrixjáték esetén a következő eloszlásfüggvényekkel adjuk meg:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix},$$

ahol a p_1, p_2, q_1, q_2 valószínűségekre $p_1 + p_2 = 1$, $q_1 + q_2 = 1$, p_1 az a valószínűség, amellyel az A játékos az x_1 stratégiát alkalmazza stb.

Példák. Nyeregpont nélküli játékok:

a)

13.3. táblázat.

	y_1	y_2	y_3	min
x_1	0	7	2	0
x_2	7	−2	−1	−2
max	7	7	2	

$$v_1 = \max_i \min_j, \quad a_{ij} = 0,\ i = 1,\ j = 1,$$
$$v_2 = \min_j \max_i, \quad a_{ij} = 2,\ i = 1,\ j = 3, \quad v_1 \neq v_2.$$

b)

13.4. táblázat.

	y_1	y_2	min
x_1	3	5	3
x_2	6	2	2
max	6	5	

$$v_1 = \max_i \min_j, \quad a_{ij} = 2,\ i = 2,\ j = 2,$$
$$v_2 = \min_j \max_i, \quad a_{ij} = 5,\ i = 1,\ j = 2, \quad v_1 \neq v_2.$$

Megjegyzés. Azokat a tiszta stratégiákat, amelyeket nullától különböző valószínűséggel alkalmazunk a kevert stratégiában, *hasznos* stratégiának nevezzük. Az $m \times n$-es mátrixjáték esetében a hasznos stratégiák száma mindkét játékos esetében nem lehet nagyobb, mint $\min(m \cdot n)$.

13.6. értelmezés. Azokat a kevert stratégiákat, amelyek a v, $v_1 \leqslant v \leqslant v_2$ játékértékeket biztosítják, *optimális kevert stratégiáknak* nevezzük.

Példa. Határozzuk meg általában a sorjátékos részére az optimális kevert stratégiát a következő 2×2-es mátrixjáték esetén, ha $v_1 < v_2$.

13.5. táblázat.

		B	
		y_1	y_2
A	x_1	a_{11}	a_{12}
	x_2	a_{21}	a_{22}

Megoldás. A kevert stratégia kifejezhető az X és Y stratégiák eloszlásfüggvényével:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ p & 1-p \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ q & 1-q \end{pmatrix}.$$

Ha a sorjátékos az $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$ kevert stratégiát játssza, és az oszlopjátékos az $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ kevert stratégiát, akkor a sorjátékos

nyereményének várható értéke:

$$E\left(p;1-p;q;1-q\right) \doteq E\left(p,q\right) = qE\left(p,1\right) + \left(1-q\right)E\left(p,2\right) = \\ = q\left(pa_{11} + \left(1-pa_{21}\right)a_{21}\right) + \left(1-q\right)\left(pa_{12} + \left(1-p\right)a_{22}\right) \quad (13.3)$$

A játékban akkor áll be egyensúlyhelyzet, ha a játékosoknak vannak olyan

$$X^* = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ p^* & 1-p^* \end{pmatrix}, \quad Y^* = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ q^* & 1-q^* \end{pmatrix}$$

kevert stratégiáik, amelyektől egyik játékosnak sem érdemes eltérni, vagyis

$$E\left(p,q*\right) \leqslant E\left(p*,q*\right) \leqslant E\left(p*,q\right), \quad \forall p \in [0,1], \ \forall q \in [0,1]. \quad (13.4)$$

A (13.4) mutatja, hogy ha az A játékos eltér az egyensúlyi helyzettől, akkor kevesebbet nyer, mint v, és ha a B játékos tér el az egyensúlyi helyzettől, akkor többet veszít, mint v.

Az (X^*, Y^*) stratégiapár az $E\left(p;1-p;q;1-q\right)$ függvénynek, vagy röviden az $E\left(p,q\right)$ függvénynek *kevert nyeregpontja*. Az ilyen nyeregpont létezése biztosítja, hogy az X^*, Y^* stratégiák alkalmazása esetén a játékosok biztosítani tudnak maguknak legalább $E\left(p^*,q^*\right)$ nyereséget, az ellenfél viselkedésétől függetlenül.

A kevert nyeregpont létezése esetén a játékot *megoldhatónak*, a p^*-t és q^*-t optimális kevert stratégiának, az $E\left(p^*,q^*\right) = v$ értéket a játék értékének nevezzük.

A játékot megoldani azt jelenti, hogy meg kell határozni a (p^*, q^*, v) számhármast (ha p^* ismert, akkor $1-p^*$ is ismert).

A (13.4) egyenlőtlenségek a tiszta stratégiákra is érvényesek, tehát

$$\begin{aligned} E(p^*,1) &= a_{11}p^* + a_{21}(1-p^*) \geqslant v \quad \text{(első oszlop)} \\ E(p^*,2) &= a_{12}p^* + a_{22}(1-p^*) \geqslant v \\ E(1,q^*) &= a_{11}q^* + a_{12}(1-q^*) \leqslant v \quad \text{(első sor)} \\ E(2,q^*) &= a_{21}q^* + a_{22}(1-q^*) \leqslant v. \end{aligned}$$

A játék megoldását p^*, $1-p^*$, q^*, $1-q^*$, és v értékeket a következő primál és duál feladatok közös megoldásai adják (ha léteznek):

$$\begin{matrix} a_{11}p + a_{21}(1-p) \geqslant v \\ a_{12}p + a_{22}(1-p) \geqslant v \end{matrix} \qquad v \text{ maximális}, \quad (13.5)$$

$$\begin{aligned} a_{11}q + a_{12}(1-q) &\leqslant v \\ a_{21}q + a_{22}(1-q) &\leqslant v \end{aligned} \qquad v \text{ minimális.} \tag{13.6}$$

Az optimális megoldás esetén a (13.5) és (13.6) egyenlőtlenségrendszerekből egyenletrendszerek lesznek, és az optimális megoldást megkapjuk, ha megoldjuk a következő egyenletrendszereket:

$$\begin{cases} a_{11}p + a_{21}(1-p) = v \\ a_{12}p + a_{22}(1-p) = v \end{cases}, \tag{13.7}$$

$$\begin{cases} a_{11}q + a_{12}(1-q) = v \\ a_{21}q + a_{22}(1-q) = v \end{cases}. \tag{13.8}$$

Következik: $a_{11}p + a_{21}(1-p) = a_{12}p + a_{22}(1-p)$, ahonnan

$$p = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \quad 1 - p = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \tag{13.9}$$

Hasonlóan a második egyenletrendszerből:

$$q = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \quad 1 - q = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11}^{+} a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \tag{13.10}$$

Megjegyzés. Abban az esetben, ha $a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21} = 0$, a feladatnak tiszta nyeregpontja van.

Példa. Határozzuk meg az optimális stratégiákat és a játék értékét az alábbi mátrixszal megadott játékban:

13.6. táblázat.

	q	$1-q$	min
p	3	5	3
$1-p$	6	2	2
max	6	5	

A játéknak nincs nyeregpontja, mivel

$$\text{maxmin}(3,2) = 3 \neq \text{minmax}(6,5) = 5.$$

A (13.9) képletnek megfelelően:

$$p = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{2-6}{3+2-(5+6)} = \frac{2}{3}, \quad v = 4.$$

A (13.10) képlet alapján:

$$q = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{2-5}{3+2-6-5} = \frac{1}{2}, \quad v = 4.$$

A játékos nyereményének várható értéke a (11.1) szerint :

$$E\,(p; 1-p; q; 1-q) = qE_1 + (1-q)\cdot E_2 = \\ = q(3p + 6(1-p)) + (1-q)(5p + 2(1-p) = 4.$$

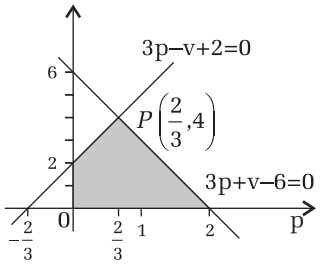
Mivel $a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21} = -6 \neq 0$, a játéknak nincs tiszta nyeregpontja és nincsen optimális tiszta stratégiája. A $v = 4$ értéknek akkor van stabilitása, ha a sorjátékos a $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ kevert stratégiát, illetve az oszlopjátékos a $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, kevert stratégiát játssza.

A mátrixjáték grafikus úton is megoldható, hasonlóan a lineáris programozási feladatok megoldásához.

Megoldjuk grafikusan a (13.5) és (13.4) egyenlőtlenségrendszereket ebben az esetben:

$$\begin{aligned} 3p + 6(1-p) &\geqslant v \\ 5p + 2(1-p) &\geqslant v \end{aligned} \qquad v \text{ maximális,} \tag{13.11}$$

$$\begin{aligned} 3q + 5(1-q) &\leqslant v \\ 6q + 2(1-q) &\leqslant v. \end{aligned} \qquad v \text{ minimális.} \tag{13.12}$$



13.1. ábra.

Hasonlóan járunk el a (10) egyenlőtlenségrendszer esetében is.

Példa. Adottak az $X = \{1, -1, 2\}$ és $Y = \{1, -3, 2, -5\}$ halmazok. A sorjátékos kiválaszt egy x számot az X halmazból, az oszlopjátékos egy y-t az Y-ból. A kifizetendő összeg $x + y$. Határozzuk meg a játék nyeregpontjait és optimális stratégiáit. Igazságos-e a játék? Hogyan kellene módosítani a játék mátrixát, hogy a játék igazságos legyen?

Megoldás. Elkészítjük a játék nyereségmátrixát.

13.7. táblázat.

		Y			
		1	-3	2	-5
X	1	2	-2	3	-4
	-1	0	-4	1	-6
	2	3	-1	0	-3

Megfigyelhető, hogy az első sor dominálja a második sort, ezért a dominált sor elhagyásával a játék mátrixát alacsonyabb típusúra redukáljuk.

13.8. táblázat.

		Y			
		1	-3	2	-5
X	1	2	-2	3	-4
	2	3	-1	0	-3

A negyedik oszlop dominálja a második és a harmadik oszlopot. Elhagyjuk a dominált oszlopokat és egy másodrendű négyzetes mátrixot kapunk.

13.9. táblázat.

		Y		
		1	-5	min
X	1	2	-4	-4
	2	3	-3	-3
	max	3	-3	

$$\max_i \min_j = -3 = \min_j \max_i = -3.$$

A mátrixjáték tiszta nyeregpontja $(2, -5)$. A játék értéke -3, tehát nem igazságos, és azért, hogy igazságos legyen, a nyereségfüggvény értékét kell növelni 3-mal.

13.1. feladat. Adottak az $X = \{1, -1, 2\}$ és $Y = \{1, -3, 2, -5\}$ halmazok. A sorjátékos kiválaszt egy számot az X halmazból, az oszlopjátékos

egy y-t az Y-ból. A kifizetendő összeg $x \cdot y$. Határozzuk meg a játék nyeregpontjait és optimális stratégiáit. Igazságos-e a játék? Hogyan kellene módosítani a játék mátrixát, hogy a játék igazságos legyen?

Felelet. A játéknak nincs tiszta nyeregpontja és nincsenek domináns stratégiák.

14. FEJEZET

KÉTSZEMÉLYES NEM KONSTANS ÖSSZEGŰ JÁTÉKOK

Az üzleti döntési helyzeteket modellező legtöbb játék nem konstans összegű, hiszen meglehetősen ritka, hogy az üzleti versenytársak között teljes az érdekellentét. Ebben a fejezetben olyan kétszemélyes nem konstans összegű játékokat vizsgálunk, amelyekben a játékosok között nincs együttműködés.

Előfordulhat, hogy az egyik játékos nem pontosan annyit nyer, mint amennyit a másik veszít, sőt tetszőleges (i, j) stratégiapár esetén az első játékos nyeresége a_{ij} és a második nyeresége b_{ij}. Így tulajdonképpen két kifizetési mátrixszal jellemezhető a játék (vagy egy olyan mátrixszal, amelynek minden eleme egy két számot tartalmazó vektor). Innen ered a bimátrix játék megnevezés.

14.1. Benzinkutasok problémája

Két benzinkút van egymással átellenben az úton. Mindkét benzinkút tulajdonosának minden hónap elején döntenie kell a következő hónapi árról, és hónap közben nem változtathatnak az áron. A következő havi árat a hónap első napján éjfélkor ki kell írni. Az egyik kút tulajdonosa éjfél előtt így gondolkozik:

Az elmúlt hónapban volt egy kis nyereségem. Ha a szomszédos kút eltűnne, az én forgalmam megduplázódna, akkor már hatalmas nyereségre tehetnék szert, mivel a kút fenntartásának költségei alig nőnének. Ezt egy kis árcsökkentéssel lehetne megvalósítani. A kút tulajdonosa számításokba kezd, és arra az eredményre jut, hogy ha csökkentené az árat, és ezzel a másik kút vásárlóinak a felét sikerülne magához csábítani, akkor a jelenlegi *1 egységnyi nyeresége 4 egységnyire* nőne.

De felmerül benne a kétely: mi történik, ha a másik kút tulajdonosa is ugyanígy gondolkozik, és ő is csökkenti az árat? Ebben az esetben a forgalma sem nőne, és kicsi nyeresége is eltűnne. Következtetése: nem

érdemes engednie az árból. De további számításokra ösztökéli az a kérdés, hogy mi történik akkor, ha ő megtartja a múlt havi árat, a másik benzinkutas pedig csökkenti az árat. Arra az eredményre jut, hogy ha ez történik, akkor az ő kútjának a vesztesége 3 egység lenne (-3 egység nyereség).

Kevéssel éjfél előtt látja, hogy a szemközti kutas gondterhelten ballag a kútja felé, hóna alatt egy kis táblával. Azt is látja, hogy az ellenőr is megjelent, aki éppen azt vizsgálja, hogy mi a helyzet az árakkal éjfélkor. Így a két benzinkutas külön-külön kell hogy döntsön arról, hogy kiteszie az új táblát az alacsonyabb árral, vagy otthagyja a régit. Tehát anélkül kell dönteniük az új árról, hogy tudnák, mit tesz a konkurencia.

Megoldás. Feltéve, hogy a benzinkutasoknak nincs szándékukban egymással kommunikálni, a 14.1. táblázatban megadjuk a két, A és B benzinkutas nyereségét a két tiszta stratégia alkalmazásának függvényében.

A két benzinkutasnak 2–2 tiszta stratégiája van: az első stratégia jelentse azt, hogy marad a régi ár és a második azt, hogy csökken az ár.

Mivel a benzinkutasok egymástól függetlenül döntenek, négy lehetőség van. Ezeket tartalmazza a mellékelt táblázat (a megfelelő kifizetési függvényértékekkel együtt).

14.1. táblázat.

	$j=1$	$j=2$
$i=1$	$(1,1)$	$(-3,4)$
$i=2$	$(4,-3)$	$(0,0)$

A benzinkutasok nyereségmátrixaiból kiolvashatjuk a stratégiák lehetséges kombinációit és a hozzátartozó kimeneteleket. Látható, hogy nem konstans összegű a játék, mivel a nyereségek összege lehet 0, 1 vagy 2, az alkalmazott stratégiák függvényében.

A táblázatból kiolvashatjuk, hogy az $i=1$, $j=1$ stratégia dominálja az $i=2$, $j=2$ stratégiát, mivel az $i=1$, $j=1$ stratégiához tartozó kifizetésfüggvény minden értéke nagyobb, mint az $i=2$, $j=2$ stratégiához tartozó kifizetésfüggvény minden értéke. Ha mindegyikük a dominált (árcsökkentés) stratégiát követi, akkor mindegyik nyeresége csökken 1 pénzegységgel. Amennyiben mindkét benzinkutas a domináló stratégia mellett dönt, mindketten jobban járnak, mert a nyereségük nem csökken.

A kompetitív stratégiát (csökken az ár, csökken az ár) stabil megoldásnak, Nash-féle egyensúlynak nevezzük.

14.1. értelmezés. A játékosok valamely stratégiaválasztása *egyensúlypont,* ha egyik játékos sem profitálhat abból, hogy egyoldalúan megváltoztatja a stratégiáját.

Ez azt jelenti, hogy a $(0,0)$ nyereséget eredményező stratégiapár egy egyensúlypont, mivel ha bármelyik benzinkutas eltér ettől, akkor a nyeresége -3 pénzegység (veszteség).

A bal oldali 0 a legnagyobb érték az oszlopban, és a jobb oldali zéró a legnagyobb érték a sorában. Viszont az $(1,1)$ nyereséget eredményező stratégiapár nem egyensúlypont, bármelyik benzinkutas 1-ről növelheti a nyereségét, ha egy kicsit csökkenti a benzin árát (mindkét benzinkutas előnyre tehet szert a másik rovására).

Megjegyezzük, hogy a kompetitív megoldás stabilitásának feltétele az, hogy a versenytársak között ne legyen összejátszás. Különben, ha megegyeznek – kooperálnak abban, hogy egyikük sem csökkenti a benzin árát –, akkor megmarad az $1,-1$ egységnyi nyereségük a vásárlók rovására.

A benzinkutas-dilemma esetében a $(0,0)$ nyereséget biztosító stratégiát *versengő stratégiának* nevezzük, míg az $(1,1)$ nyereséget biztosító stratégiát *kooperatív* stratégiának nevezzük. A benzinkutasok esetében a kooperatív stratégia azt jelenti, hogy nem csökkentik a benzin árát és mindketten nyernek a piac közvetítésével.

A legésszerűbb cselekvési módozatok megtalálása jelenti a konfliktusos helyzetek megoldását.

Egy bonyolult konfliktusos helyzet megoldásáért kapta Harsányi János 1994-ben a közgazdasági Nobel-díjat, két kiemelkedő kutatóval, J. F. Nash és R. Selten tudósokkal megosztva.

A benzinkutasok 14.1. táblázatában lévő nyereségmátrixot, a bimátrixot, felbonthatjuk két 2×2-es mátrixra, az A játékos mátrixára és a B játékos mátrixára.

14.2. táblázat. *Az A játékos nyereségmátrixa*

	$j=1$	$j=2$
$i=1$	1	-3
$i=2$	4	0

14.3. táblázat. *Az B játékos nyereségmátrixa*

	$j=1$	$j=2$
$i=1$	1	4
$i=2$	-3	0

14.2. értelmezés. A bimátrixjátéknak az (i^0, j^0) stratégiapár tiszta egyensúlyi pontja, ha a játékosok kifizetőfüggvényeire teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

$$a\left(i, j^0\right) \leqslant a\left(i^0, j^0\right), \ \forall i \in \{1,2\} \quad \text{és} \quad b\left(i^0, j\right) \leqslant b\left(i^0, j^0\right), \ \forall j \in \{1,2\}. \tag{14.1}$$

A benzinkutasok bimátrixának nincs egyensúlyi pontja, mivel az (1) feltétel egyik stratégiapárra sem teljesül. Például az $(1,1)$ stratégiapár nem egyensúlyi pont, mivel $a_{11} < a_{21} = 4$. A (14.1) egyenlőtlenségek azt fejezik ki, hogy az (i^0, j^0) választás mindkét játékos számára előnyös, ha a másik ettől nem tér el.

Egyensúlypont választása mindkettőjüknek maximális kifizetőfüggvény-értékeket biztosít, ha a másik játékos is az egyensúlyi stratégiát választja. Tulajdonképpen a bimátrix egyensúlypontja a mátrixjátékok nyeregpontját adja meg.

A nem bimátrixjátékban is a cél olyan egyensúlyi helyzetek felkutatása, amelyektől egyik játékosnak sem érdemes eltérnie. Így jutunk el a tiszta vagy kevert nyeregpont általánosításaként a tiszta vagy kevert egyensúlypont fogalmához.

A bimátrixjátékok megoldása mindenekelőtt az egyensúlyi pontok megkeresését jelenti. Erre általános módszert nem ismerünk.

A 2×2-es bimátrixjátékok esetében, ha nincs tiszta egyensúlyi pont, akkor a kevert stratégiák között keresünk kevert egyensúlyi pontot vagy pontokat.

14.2. Bimátrixjátékok kevert egyensúlypontjainak meghatározása

14.3. értelmezés. Az $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ bimátrixjátéknak az (i^*, j^*) stratégiapár kevert egyensúlyi pontja, ha a nyereségfüggvényekre teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

$$\begin{aligned} E_A\left(p, q^*\right) &\leqslant E_A\left(p^*, q^*\right), \ \forall p \in [0,1], \quad \text{és} \\ E_B\left(p^*, q\right) &\leqslant E_B\left(p^*, q^*\right), \ \forall q \in [0,1], \end{aligned} \tag{14.2}$$

A játék értéke $u = E_A\left(p^*, q^*\right)$ és $v = E_B\left(p^*, q^*\right)$.

Tetszőleges $(p, 1-p)$ és $(q, 1-q)$ stratégiák mellett az A és B játékosok nyereségfüggvényei:

$$\begin{aligned} E_A(p,q) &= pA \cdot q^T = \\ &= (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})p \cdot q + (a_{12}^{-} a_{22})p + (a_{21} - a_{22})q + a_{22} \\ E_B(p,q) &= pB \cdot q^T = \\ &= (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})p \cdot q + (b_{12}^{-} b_{22})p + (b_{21} - b_{22})q + b_{22}. \end{aligned} \tag{14.3}$$

Mivel $E_A(p, q^*) = pE_A(1, q^*) + (1-p)E_A(0, q^*)$ az $E_A(p, q^*) \leqslant E_A(p^*, q^*)$ egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, minden $p \in [0, 1]$ esetén, ha teljesül $p = 1$ és $p = 0$ esetén. Az $E_A(1, q^*) \leqslant E_A(p^*, q^*)$ egyenlőtlenség ekvivalens az $\alpha q^* (1 - p^*) - a (1 - p^*) \leqslant 0$ egyenlőtlenséggel, míg az $E_A(0, q^*) \leqslant E_A(p^*, q^*)$ egyenlőtlenség az $\alpha p^* q^* - ap^* \geqslant 0$ egyenlőtlenséggel, ahol

$$\alpha = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} \quad \text{és} \quad a = a_{22} - a_{12}.$$

Így az

$$\begin{cases} (\alpha q^* - a)(1 - p^*) \leqslant 0 \\ (\alpha q^* - a)\, p^* \geqslant 0 \end{cases}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Ennek a rendszernek a megoldásairól a következőket állíthatjuk:

1. ha $p^* = 0$, akkor minden $(0, q^*)$ megoldás, ahol $\alpha q^* - a \leqslant 0$;
2. ha $p^* = 1$, akkor minden $(1, q^*)$ megoldás, ahol $\alpha q^* - a \geqslant 0$;
3. ha $0 < p^* < 1$, akkor csak a $q^* = \frac{a}{\alpha}$ érték felel meg, tehát a rendszernek ebben az esetben csak egy megoldása van.

Hasonló gondolatmenet alapján $E_B(p^*, q) = qE_B(p^*, 1) + (1 - q)E_B(p^*, 0)$ és így elégséges az $E_B(p^*, 1) \leqslant E_B(p^*, q^*)$, illetve $E_B(p^*, 0) \leqslant E_B(p^*, q^*)$ egyenlőtlenségekből alkotott rendszert megoldani. Ez a rendszer viszont

$$\begin{cases} (\beta p^* - b)(1 - q^*) \leqslant 0 \\ (\beta p^* - b)\, q^* \geqslant 0 \end{cases}$$

alakban írható, ahol $\beta = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}$ és $b = b_{22} - b_{21}$.

Ennek a rendszernek a megoldásairól a következőket állíthatjuk:

1. ha $q^* = 0$, akkor minden $(0, p^*)$ megoldás, ahol $\beta p^* - b \leqslant 0$;
2. ha $q^* = 1$, akkor minden $(1, p^*)$ megoldás, ahol $\beta p^* - b \geqslant 0$;
3. ha $0 < q^* < 1$, akkor csak a $p^* = \frac{b}{\beta}$ érték felel meg, tehát a rendszernek ebben az esetben csak egy megoldása van.

Példa. Piaci verseny. Egy kis cég (A) nagy mennyiségű árut akar eladni egy másik nagy cég (B) által uralt két piac valamelyikén. Ezért az A cég reklámhadjáratot akar indítani valamelyik piacon, B pedig szintén reklámhadjárattal igyekszik megvédeni egyik piacát. Ha ugyanazon a piacon folytatnak reklámhadjáratot, akkor A veszít. Az első piacon drágább a reklámhadjárat, de elnyerése kétszer nagyobb hasznot biztosít, mint a második piac meghódítása (2, illetve 1 egység). Az első piacért folytatott harc elvesztése a kis cég számára gyakorlatilag a tönkremenést jelenti (legyen ez 10 egységgel értékelve), míg B számára az első piac megtartása 5 egység nyereséget jelent. Melyik piacon indítson reklámhadjáratot az A, illetve a B cég?

Megoldás. A cégeknek 2–2 tiszta stratégiájuk van: 1. az első piacon folytatni reklámhadjáratot, 2. a második piacon folytatni reklámhadjáratot. Fizetési mátrixaik a következők:

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$a = a_{22} - a_{12} = -1 - 2 = -3;$$
$$\alpha = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = -10 - 2 - 1 - 1 = -14;$$
$$q^* = \frac{a}{\alpha} = \frac{3}{14}.$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$b = b_{22} - b_{21} = 1 + 2 = 2;$$
$$\beta = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = 5 + 2 + 1 + 1 = 9;$$
$$p^* = \frac{b}{\beta} = \frac{2}{9}.$$

Az előbbiek alapján az egyetlen egyensúlyi pont $p^*\left(\frac{2}{9}, \frac{7}{9}\right)$ és $q^*\left(\frac{3}{14}, \frac{11}{14}\right)$. A játék értéke pedig:

$$u = \left(\frac{2}{9}, \frac{7}{9}\right) \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{14} \\ \frac{11}{14} \end{pmatrix} = -\frac{6}{7};$$
$$v = \left(\frac{2}{9}, \frac{7}{9}\right) \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{14} \\ \frac{11}{14} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}.$$

Ezeket az értékeket a játék többszöri megismétlése esetén kapjuk. Egyszeri játék esetén azt a tiszta stratégiát kell választani, amely a kevert

stratégiában nagyobb valószínűséggel szerepel. Így a második piacon érdemes a cégeknek reklámhadjáratot folytatni. A játék szigorúan megoldható és igazságtalan a kis cég számára.

Gyakorlatok.

1. Határozzuk meg a következő mátrixjátékok értékét és optimális stratégiáit.

$$M_1) \quad \begin{pmatrix} 15 & 2 & -3 \\ 6 & 5 & 7 \\ -7 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. $v = 5$; $(0,\ 1,\ 0)$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $M_2)$ $\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$; $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

2. Határozzuk meg, hogy az alábbi játékok közül melyik nyeregpontos és melyik igazságos. Abban az esetben, ha a játék nyeregpontos, keressünk mindkét játékos számára optimális stratégiát.

a)

0	2
−1	4

b)

5	0
0	2

c)

3	1
−4	0

d)

2	5
−1	a

Megoldás.

a) szigorúan determinált és igazságos, A játssza az 1. sort, B játssza az 1. oszlopot;

b) nem szigorúan determinált;

c) szigorúan determinált, de nem igazságos;

d) bármilyen a értékre a játék szigorúan determinált, $v = 2$.

14.4. táblázat. *Normális eloszlás sűrűségfüggvényének és eloszlásfüggvényének értéktáblázata*

x	$\varphi(x)$	$\phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\phi(x)$
0	0,3989	0,5	0,45	0,3605	0,6736	0,9	0,2661	0,8159
0,01	0,3989	0,504	0,46	0,3589	0,6772	0,91	0,2637	0,8186
0,02	0,3989	0,508	0,47	0,3572	0,6808	0,92	0,2613	0,8212
0,03	0,3988	0,512	0,48	0,3555	0,6844	0,93	0,2589	0,8238
0,04	0,3986	0,516	0,49	0,3538	0,6879	0,94	0,2565	0,8264
0,05	0,3984	0,5199	0,5	0,3521	0,6915	0,95	0,2541	0,8289
0,06	0,3982	0,5239	0,51	0,3503	0,695	0,96	0,2516	0,8315
0,07	0,398	0,5279	0,52	0,3485	0,6985	0,97	0,2492	0,834
0,08	0,3977	0,5319	0,53	0,3467	0,7019	0,98	0,2468	0,8365
0,09	0,3973	0,5359	0,54	0,3448	0,7054	0,99	0,2444	0,8389
0,1	0,397	0,5398	0,55	0,3429	0,7088	1	0,242	0,8413
0,11	0,3965	0,5438	0,56	0,341	0,7123	1,01	0,2396	0,8438
0,12	0,3961	0,5478	0,57	0,3391	0,7157	1,02	0,2371	0,8461
0,13	0,3956	0,5517	0,58	0,3372	0,719	1,03	0,2347	0,8485
0,14	0,3951	0,5557	0,59	0,3352	0,7224	1,04	0,2323	0,8508
0,15	0,3945	0,5596	0,6	0,3332	0,7257	1,05	0,2299	0,8531
0,16	0,3939	0,5636	0,61	0,3312	0,7291	1,06	0,2275	0,8554
0,17	0,3932	0,5675	0,62	0,3292	0,7324	1,07	0,2251	0,8577
0,18	0,3925	0,5714	0,63	0,3271	0,7357	1,08	0,2227	0,8599
0,19	0,3918	0,5753	0,64	0,3251	0,7389	1,09	0,2203	0,8621
0,2	0,391	0,5793	0,65	0,323	0,7422	1,1	0,2179	0,8643
0,21	0,3902	0,5832	0,66	0,3209	0,7454	1,11	0,2155	0,8665
0,22	0,3894	0,5871	0,67	0,3187	0,7486	1,12	0,2131	0,8686
0,23	0,3885	0,591	0,68	0,3166	0,7517	1,13	0,2107	0,8708
0,24	0,3876	0,5948	0,69	0,3144	0,7549	1,14	0,2083	0,8729
0,25	0,3867	0,5987	0,7	0,3123	0,758	1,15	0,2059	0,8749
0,26	0,3857	0,6026	0,71	0,3101	0,7611	1,16	0,2036	0,877
0,27	0,3847	0,6064	0,72	0,3079	0,7642	1,17	0,2012	0,879
0,28	0,3836	0,6103	0,73	0,3056	0,7673	1,18	0,1989	0,881
0,29	0,3825	0,6141	0,74	0,3034	0,7704	1,19	0,1965	0,883
0,3	0,3814	0,6179	0,75	0,3011	0,7734	1,2	0,1942	0,8849
0,31	0,3802	0,6217	0,76	0,2989	0,7764	1,21	0,1919	0,8869
0,32	0,379	0,6255	0,77	0,2966	0,7794	1,22	0,1895	0,8888
0,33	0,3778	0,6293	0,78	0,2943	0,7823	1,23	0,1872	0,8907

x	$\varphi(x)$	$\phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\phi(x)$
0,34	0,3765	0,6331	0,79	0,292	0,7852	1,24	0,1849	0,8925
0,35	0,3752	0,6368	0,8	0,2897	0,7881	1,25	0,1826	0,8944
0,36	0,3739	0,6406	0,81	0,2874	0,791	1,26	0,1804	0,8962
0,37	0,3725	0,6443	0,82	0,285	0,7939	1,27	0,1781	0,898
0,38	0,3712	0,648	0,83	0,2827	0,7967	1,28	0,1758	0,8997
0,39	0,3697	0,6517	0,84	0,2803	0,7995	1,29	0,1736	0,9015
0,4	0,3683	0,6554	0,85	0,278	0,8023	1,3	0,1714	0,9032
0,41	0,3668	0,6591	0,86	0,2756	0,8051	1,31	0,1691	0,9049
0,42	0,3653	0,6628	0,87	0,2732	0,8078	1,32	0,1669	0,9066
0,43	0,3637	0,6664	0,88	0,2709	0,8106	1,33	0,1647	0,9082
0,44	0,3621	0,67	0,89	0,2685	0,8133	1,34	0,1626	0,9099
1,35	0,1604	0,9115	1,86	0,0707	0,9686	2,37	0,0241	0,9911
1,36	0,1582	0,9131	1,87	0,0694	0,9693	2,38	0,0235	0,9913
1,37	0,1561	0,9147	1,88	0,0681	0,9699	2,39	0,0229	0,9916
1,38	0,1539	0,9162	1,89	0,0669	0,9706	2,4	0,0224	0,9918
1,39	0,1518	0,9177	1,9	0,0656	0,9713	2,41	0,0219	0,992
1,4	0,1497	0,9192	1,91	0,0644	0,9719	2,42	0,0213	0,9922
1,41	0,1476	0,9207	1,92	0,0632	0,9726	2,43	0,0208	0,9925
1,42	0,1456	0,9222	1,93	0,062	0,9732	2,44	0,0203	0,9927
1,43	0,1435	0,9236	1,94	0,0608	0,9738	2,45	0,0198	0,9929
1,44	0,1415	0,9251	1,95	0,0596	0,9744	2,46	0,0194	0,9931
1,45	0,1394	0,9265	1,96	0,0584	0,975	2,47	0,0189	0,9932
1,46	0,1374	0,9279	1,97	0,0573	0,9756	2,48	0,0184	0,9934
1,47	0,1354	0,9292	1,98	0,0562	0,9761	2,49	0,018	0,9936
1,48	0,1334	0,9306	1,99	0,0551	0,9767	2,5	0,0175	0,9938
1,49	0,1315	0,9319	2	0,054	0,9772	2,51	0,0171	0,994
1,5	0,1295	0,9332	2,01	0,0529	0,9778	2,52	0,0167	0,9941
1,51	0,1276	0,9345	2,02	0,0519	0,9783	2,53	0,0163	0,9943
1,52	0,1257	0,9357	2,03	0,0508	0,9788	2,54	0,0158	0,9945
1,53	0,1238	0,937	2,04	0,0498	0,9793	2,55	0,0154	0,9946
1,54	0,1219	0,9382	2,05	0,0488	0,9798	2,56	0,0151	0,9948
1,55	0,12	0,9394	2,06	0,0478	0,9803	2,57	0,0147	0,9949
1,56	0,1182	0,9406	2,07	0,0468	0,9808	2,58	0,0143	0,9951
1,57	0,1163	0,9418	2,08	0,0459	0,9812	2,59	0,0139	0,9952
1,58	0,1145	0,9429	2,09	0,0449	0,9817	2,6	0,0136	0,9953

x	$\varphi(x)$	$\phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\phi(x)$
1,59	0,1127	0,9441	2,1	0,044	0,9821	2,61	0,0132	0,9955
1,6	0,1109	0,9452	2,11	0,0431	0,9826	2,62	0,0129	0,9956
1,61	0,1092	0,9463	2,12	0,0422	0,983	2,63	0,0126	0,9957
1,62	0,1074	0,9474	2,13	0,0413	0,9834	2,64	0,0122	0,9959
1,63	0,1057	0,9484	2,14	0,0404	0,9838	2,65	0,0119	0,996
1,64	0,104	0,9495	2,15	0,0396	0,9842	2,66	0,0116	0,9961
1,65	0,1023	0,9505	2,16	0,0387	0,9846	2,67	0,0113	0,9962
1,66	0,1006	0,9515	2,17	0,0379	0,985	2,68	0,011	0,9963
1,67	0,0989	0,9525	2,18	0,0371	0,9854	2,69	0,0107	0,9964
1,68	0,0973	0,9535	2,19	0,0363	0,9857	2,7	0,0104	0,9965
1,69	0,0957	0,9545	2,2	0,0355	0,9861	2,71	0,0101	0,9966
1,7	0,094	0,9554	2,21	0,0347	0,9864	2,72	0,0099	0,9967
1,71	0,0925	0,9564	2,22	0,0339	0,9868	2,73	0,0096	0,9968
1,72	0,0909	0,9573	2,23	0,0332	0,9871	2,74	0,0093	0,9969
1,73	0,0893	0,9582	2,24	0,0325	0,9875	2,75	0,0091	0,997
1,74	0,0878	0,9591	2,25	0,0317	0,9878	2,76	0,0088	0,9971
1,75	0,0863	0,9599	2,26	0,031	0,9881	2,77	0,0086	0,9972
1,76	0,0848	0,9608	2,27	0,0303	0,9884	2,78	0,0084	0,9973
1,77	0,0833	0,9616	2,28	0,0297	0,9887	2,79	0,0081	0,9974
1,78	0,0818	0,9625	2,29	0,029	0,989	2,8	0,0079	0,9974
1,79	0,0804	0,9633	2,3	0,0283	0,9893	2,81	0,0077	0,9975
1,8	0,079	0,9641	2,31	0,0277	0,9896	2,82	0,0075	0,9976
1,81	0,0775	0,9649	2,32	0,027	0,9898	2,83	0,0073	0,9977
1,82	0,0761	0,9656	2,33	0,0264	0,9901	2,84	0,0071	0,9977
1,83	0,0748	0,9664	2,34	0,0258	0,9904	2,85	0,0069	0,9978
1,84	0,0734	0,9671	2,35	0,0252	0,9906	2,86	0,0067	0,9979
1,85	0,0721	0,9678	2,36	0,0246	0,9909	2,87	0,0065	0,9979
2,88	0,0063	0,998	3,38	0,0013	0,9996	3,88	0,0002	0,9999
2,89	0,0061	0,9981	3,39	0,0013	0,9997	3,89	0,0002	0,9999
2,9	0,006	0,9981	3,4	0,0012	0,9997	3,9	0,0002	1
2,91	0,0058	0,9982	3,41	0,0012	0,9997	3,91	0,0002	1
2,92	0,0056	0,9982	3,42	0,0012	0,9997	3,92	0,0002	1
2,93	0,0055	0,9983	3,43	0,0011	0,9997	3,93	0,0002	1
2,94	0,0053	0,9984	3,44	0,0011	0,9997	3,94	0,0002	1
2,95	0,0051	0,9984	3,45	0,001	0,9997	3,95	0,0002	1

x	$\varphi(x)$	$\phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\phi(x)$
2,96	0,005	0,9985	3,46	0,001	0,9997	3,96	0,0002	1
2,97	0,0048	0,9985	3,47	0,001	0,9997	3,97	0,0002	1
2,98	0,0047	0,9986	3,48	0,0009	0,9997	3,98	0,0001	1
2,99	0,0046	0,9986	3,49	0,0009	0,9998	3,99	0,0001	1
3	0,0044	0,9987	3,5	0,0009	0,9998			
3,01	0,0043	0,9987	3,51	0,0008	0,9998			
3,02	0,0042	0,9987	3,52	0,0008	0,9998			
3,03	0,004	0,9988	3,53	0,0008	0,9998			
3,04	0,0039	0,9988	3,54	0,0008	0,9998			
3,05	0,0038	0,9989	3,55	0,0007	0,9998			
3,06	0,0037	0,9989	3,56	0,0007	0,9998			
3,07	0,0036	0,9989	3,57	0,0007	0,9998			
3,08	0,0035	0,999	3,58	0,0007	0,9998			
3,09	0,0034	0,999	3,59	0,0006	0,9998			
3,1	0,0033	0,999	3,6	0,0006	0,9998			
3,11	0,0032	0,9991	3,61	0,0006	0,9998			
3,12	0,0031	0,9991	3,62	0,0006	0,9999			
3,13	0,003	0,9991	3,63	0,0005	0,9999			
3,14	0,0029	0,9992	3,64	0,0005	0,9999			
3,15	0,0028	0,9992	3,65	0,0005	0,9999			
3,16	0,0027	0,9992	3,66	0,0005	0,9999			
3,17	0,0026	0,9992	3,67	0,0005	0,9999			
3,18	0,0025	0,9993	3,68	0,0005	0,9999			
3,19	0,0025	0,9993	3,69	0,0004	0,9999			
3,2	0,0024	0,9993	3,7	0,0004	0,9999			
3,21	0,0023	0,9993	3,71	0,0004	0,9999			
3,22	0,0022	0,9994	3,72	0,0004	0,9999			
3,23	0,0022	0,9994	3,73	0,0004	0,9999			
3,24	0,0021	0,9994	3,74	0,0004	0,9999			
3,25	0,002	0,9994	3,75	0,0004	0,9999			
3,26	0,002	0,9994	3,76	0,0003	0,9999			
3,27	0,0019	0,9995	3,77	0,0003	0,9999			
3,28	0,0018	0,9995	3,78	0,0003	0,9999			
3,29	0,0018	0,9995	3,79	0,0003	0,9999			
3,3	0,0017	0,9995	3,8	0,0003	0,9999			
3,31	0,0017	0,9995	3,81	0,0003	0,9999			

x	$\varphi(x)$	$\phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\phi(x)$
3,32	0,0016	0,9995	3,82	0,0003	0,9999			
3,33	0,0016	0,9996	3,83	0,0003	0,9999			
3,34	0,0015	0,9996	3,84	0,0003	0,9999			
3,35	0,0015	0,9996	3,85	0,0002	0,9999			
3,36	0,0014	0,9996	3,86	0,0002	0,9999			
3,37	0,0014	0,9996	3,87	0,0002	0,9999			

SZAKIRODALOM

ANDRÁS Szilárd–SZILÁGYI Zsolt
2006 *Geometria* II. Státus Kiadó

CSEKE Vilmos
1982 *A valószínűségszámítás és gyakorlati alkalmazásai.* Kolozsvár, Dacia

CSERNYÁK László
1998 *Valószínűségszámítás. Matematika közgazdászoknak.* Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó
1999 *Operációkutatás* II. Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó

DENKINGER Géza
1999 *Valószínűségszámítás.* Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó
1999 *Valószínűségszámítási gyakorlatok.* Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó

DEZSŐ Gábor
2002 *Matematika közgazdászoknak.* Kolozsvár

FILEP László
Játékelmélet. Filun Kiadó

GÁSPÁR–TEMESI
1999 *Lineáris programozási gyakorlatok.* Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó

IOSIFESCU, M.–THEODORESCU, R.
1963 Mi is az a játékelmélet? *Matematikai és Fizikai Lapok* 14. (1963) 65–80.

KEMÉNY I. G.–SNELL, I. L.–THOMSON, G. L.
1971 *A modern matematika alapjai. Véges struktúrák.* Budapest, Műszaki Könyvkiadó

KÓCZY Á. László
2006 A Neumann-féle játékelmélet. *Közgazdasági Szemle* LIII. 2006. január. 31–45.

MIHOC, Gh.–MICU, N.
1980 *Teoria probabilităților şi statistică matematică.* Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică

MORRIS, Peter
1994 *Introduction to game theory.* Springer Verlag

OBÁDOVICS J. Gyula
2001 *Valószínűségszámítás és matematikai statisztika.* Budapest, Scolar Kiadó

SOLT György
1973 *Valószínűségszámítás.* Budapest, Műszaki Könyvkiadó

TÓTH Irén
1999 *Operációkutatás* I. Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó

WAYNE L. Winston
2003 *Operációkutatás – módszerek és alkalmazások.* II., Aula Kiadó

A SAPIENTIA –
ERDÉLYI MAGYAR TUDOMÁNYEGYETEM JEGYZETEI

BEGE ANTAL
Számelméleti feladatgyűjtemény. Marosvásárhely, Műszaki és Humán Tudományok Kar, Matematika–Informatika Tanszék. 2002.

BEGE ANTAL
Számelmélet. Bevezetés a számelméletbe. Marosvásárhely, Műszaki és Humán Tudományok Kar, Matematika–Informatika Tanszék. 2002.

VOFKORI LÁSZLÓ
Gazdasági földrajz. Csíkszereda, Csíkszeredai Kar, Gazdaságtan Tanszék. 2002.

TŐKÉS BÉLA – DÓNÁTH-NAGY GABRIELLA
Kémiai előadások és laboratóriumi gyakorlatok. Marosvásárhely, Műszaki és Humán Tudományok Kar, Gépészmérnöki Tanszék. 2002.

IRIMIAŞ, GEORGE
Noțiuni de fonetică şi fonologie. Csíkszereda, Csíkszeredai Kar, Humán Tudományok Tanszék. 2002.

SZILÁGYI JÓZSEF
Mezőgazdasági termékek áruismerete. Csíkszereda, Csíkszeredai Kar, Gazdaságtan Tanszék. 2002.

NAGY IMOLA KATALIN
A Practical Course in English. Marosvásárhely, Műszaki és Humán Tudományok Kar, Humán Tudományok Tanszék. 2002.

BALÁZS LAJOS
Folclor. Noțiuni generale de folclor şi poetică populară. Csíkszereda, Csíkszeredai Kar, Humán Tudományok Tanszék. 2003.

POPA-MÜLLER IZOLDA
Műszaki rajz. Marosvásárhely, Műszaki és Humán Tudományok Kar, Gépészmérnöki Tanszék. 2004.

FODORPATAKI LÁSZLÓ – SZIGYÁRTÓ LÍDIA – BARTHA CSABA
Növénytani ismeretek. Kolozsvár, Természettudományi és Művészeti Kar, Környezettudományi Tanszék. 2004.

MARCUŞ, ANDREI – SZÁNTÓ CSABA – TÓTH LÁSZLÓ
Logika és halmazelmélet. Marosvásárhely, Műszaki és Humán Tudományok Kar, Matematika–Informatika Tanszék. 2004.

KAKUCS ANDRÁS
Műszaki hőtan. Marosvásárhely, Műszaki és Humán Tudományok Kar, Gépészmérnöki Tanszék. 2004.

BIRÓ BÉLA
Drámaelmélet. Csíkszereda, Gazdasági és Humántudományi Kar, Humántudományi Tanszék. 2004.

BIRÓ BÉLA
Narratológia. Csíkszereda, Gazdasági és Humántudományi Kar, Humántudományi Tanszék. 2004.

MÁRKOS ZOLTÁN
Anyagtechnológia. Marosvásárhely. Műszaki és Humán Tudományok Kar, Gépészmérnöki Tanszék. 2004.

GRECU, VICTOR
Istoria limbii române. Csíkszereda, Gazdasági és Humántudományi Kar, Humántudományi Tanszék. 2004.

VARGA IBOLYA
Adatbázis-kezelő rendszerek elméleti alapjai. Marosvásárhely, Műszaki és Humántudományok Kar, Matematika–Informatika Tanszék. 2004.

CSAPÓ JÁNOS
Biokémia. Csíkszereda, Műszaki és Társadalomtudományi Kar, Műszaki és Természettudományi Tanszék. 2004.

CSAPÓ JÁNOS – CSAPÓNÉ KISS ZSUZSANNA
Élelmiszer-kémia. Csíkszereda, Műszaki és Társadalomtudományi Kar, Műszaki és Természettudományi Tanszék. 2004.

KÁTAI ZOLTÁN
Programozás C nyelven. Marosvásárhely, Műszaki és Humántudományok Kar, Matematika–Informatika Tanszék. 2004.

WESZELY TIBOR
Analitikus geometria és differenciálgeometria. Marosvásárhely, Műszaki és Humántudományok Kar, Matematika–Informatika Tanszék. 2005.

GYÖRFI JENŐ
A matematikai analízis elemei. Csíkszereda, Gazdaság- és Humántudományok Kar, Matematika–Informatika Tanszék. 2005.

FINTA BÉLA – KISS ELEMÉR – BARTHA ZSOLT
Algebrai struktúrák feladatgyűjtemény. Marosvásárhely, Műszaki és Humántudományok Kar, Matematika–Informatika Tanszék. 2006.

ANTAL MARGIT
Fejlett programozási technikák. Marosvásárhely, Műszaki és Humántudományok Kar, Matematika–Informatika Tanszék. 2006.

CSAPÓ JÁNOS – SALAMON ROZÁLIA
Tejipari technológia és minőségellenőrzés. Csíkszereda, Műszaki és Társadalomtudományok Kar, Élelmiszertudományi Tanszék. 2006.

OLÁH-GÁL RÓBERT
Az informatika alapjai közgazdász- és mérnökhallgatóknak. Csíkszereda, Gazdaság- és Humántudományok Kar, Matematika–Informatika Tanszék. 2006.

JÓZON MÓNIKA
Általános jogelméleti és polgári jogi ismeretek. Csíkszereda, Gazdaság- és Humántudományok Kar, Üzleti Tudományok Tanszék. 2007.

KÁTAI ZOLTÁN
Algoritmusok felülnézetből. Marosvásárhely, Műszaki és Humántudományok Kar, Matematika–Informatika Tanszék. 2007.

CSAPÓ JÁNOS – CSAPÓNÉ KISS ZSUZSANNA – ALBERT CSILLA
Élelmiszer-fehérjék minősítése. Csíkszereda, Műszaki és Társadalomtudományi Kar, Élelmiszertudományi Tanszék. 2007.

ÁGOSTON KATALIN – DOMOKOS JÓZSEF – MÁRTON LŐRINC
Érzékelők és jelátalakítók. Laboratóriumi útmutató. Marosvásárhely, Műszaki és Humántudományok Kar, Villamosmérnöki Tanszék. 2007.

SZÁSZ RÓBERT
Komplex függvénytan. Marosvásárhely, Műszaki és Humántudományok Kar, Matematika–Informatika Tanszék. 2007.

KAKUCS ANDRÁS
A végeselem-módszer alapjai. Marosvásárhely, Műszaki és Humántudományok Kar, Gépészmérnöki Tanszék. 2007.

ANTAL MARGIT
Objektumorientált programozás. Marosvásárhely, Műszaki és Humántudományok Kar, Matematika–Informatika Tanszék, 2007.

MAJDIK KORNÉLIA – TONK SZENDE-ÁGNES
Biokémiai alkalmazások. Kémiai laboratóriumi jegyzet. Kolozsvár, Természettudományi és Művészeti Kar, Környezettudományi Tanszék, 2007.

DÓSA ZOLTÁN
Tanulás, emlékezés, képzelet. Marosvásárhely, Gazdaság- és Humántudományok Kar, Üzleti Tudományok Tanszék. 2007.

A PARTIUMI KERESZTÉNY EGYETEM JEGYZETEI

Kovács Adalbert
Alkalmazott matematika a közgazdaságtanban. Lineáris algebra. Nagyvárad, Alkalmazott Tudományok Kar, Közgazdaságtan Tanszék. 2002.

Horváth Gizella
A vitatechnika alapjai. Nagyvárad, Bölcsészettudományi Kar, Filozófia Tanszék. 2002.

Angi István
Zeneesztétikai előadások. I. Nagyvárad, Alkalmazott Tudományok Kar, Zenepedagógiai Tanszék. 2003.

Péter György – Kinter Tünde – Pajzos Csaba
Makroökonómia. Feladatok. Nagyvárad, Alkalmazott Tudományok és Művészetek Kar, Közgazdaságtan Tanszék. 2003.

Angi István
Zeneesztétikai előadások. II. Nagyvárad, Alkalmazott Tudományok Kar, Zenepedagógiai Tanszék. 2005.

Tonk Márton
Bevezetés a középkori filozófia történetébe. Nagyvárad, Bölcsészettudományi Kar, Filozófiai Tanszék. 2005.

Scientia Kiadó
400112 Kolozsvár (Cluj-Napoca)
Mátyás király (Matei Corvin) u. 4. sz.
Tel./fax: +40-264-593694
E-mail: kpi@kpi.sapientia.ro

Korrektúra:
Jancsik Pál

Műszaki szerkesztés:
Mikó Csilla, Lineart kft.

Tipográfia:
Könczey Elemér

Készült a T3 Kiadó nyomdájában
150 példányban xx nyomdai ív terjedelemben
520085 Sepsiszentgyörgy (Sf. Gheorghe)
Sport u. 8/A, tel.: +40-267-351684
Felelős vezető: Bács Attila