Szilárd András

Ecuaţii integrale Fredholm-Volterra

Editura Didactică şi Pedagogică
Bucureşti, 2005

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
Ecuaţii integrale Fredholm-Volterra
Szilárd András
Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti
p. 170; cm. 24
ISBN 973-30-1821-X
...

Tiparul executat sub comanda nr. 51/2005
la Imprimeria Status, Miercurea-Ciuc
http://www.status.com.ro/

Între exigenţa de a fi clar
şi tentaţia de a fi obscur,
imposibil de hotărât
care merită mai multă consideraţie
Emil Cioran

Celor de la care am reuşit
să învăţ

Când libertatea ta devine una
cu propria ta constrângere,
atunci, într-adevăr, eşti.
Elena Liliana Popescu

Cuprins

Introducere

Teoria ecuaţiilor integrale reprezintă un capitol important în matematica aplicată. Primele lucrări, având ca tematică ecuaţiile integrale au apărut în secolul 19 şi la începutul secolului 20, având ca autori matematicieni renumiţi ca Niels Abel (1802-1829), Augustin Cauchy (1789-1857), Edouard Goursat (1858-1936), Maxime Bocher (1867-1918), David Hilbert (1862-1943), Vito Volterra (1860-1940), Ivar Fredholm (1866-1927), Emile Picard (1856-1941), Traian Lalescu (1882-1929). Primele tratate din acest domeniu au apărut în anii 1910 (T. Lalescu 1911, M. Bocher 1912, D Hilbert 1912, V. Volterra 1913)(vezi I.A. Rus [**104**]). În secolul 20 teoria ecuaţiilor integrale a avut o dezvoltare spectaculoasă, atât din perspectiva teoriilor matematice care se pot aplica, cât şi din punctul de vedere al aproximării efective a soluţiilor. Principalele metode care se aplică la studiul ecuaţiilor integrale sunt:

1. metodele de punct fix (principiul contracţiilor, teoreme de punct fix de tip Schauder, Leray-Schauder);
2. metodele variaţionale (puncte critice, teoreme de tip mountain pass);
3. metode iterative (metoda iteraţiilor monotone, metode de tip Newton);
4. metode numerice (metoda elementului finit, metoda elementului la frontieră, metoda colocaţiei, metoda ondeletelor).

Pentru o introducere în studiul acestor metode menţionăm câteva lucrări fundamentale

1. T.A. Burton ([**27**]), R.P. Agarwal şi D. O'Reagan ([**5**]), C. Corduneanu ([**34**], [**33**] şi [**35**]), V. Lakshmikantham ([**67**]), M.A. Krasnoselskii ([**63**] şi [**62**]), R. Precup ([**91**] şi [**79**]);
2. A. Ambrosetti ([**6**]), D. Motreanu şi V. Rădulescu ([**77**]), R. Precup ([**91**]);
3. V. Lakshmikantham ([**66**]), S. Heikkilä şi V. Lakshmikantham ([**54**]), D. Pascali şi S. Sburlan ([**85**]), R. Precup ([**91**]);
4. S. Prössdorf şi B. Silbermann ([**92**]), Gh. Micula ([**75**]), D. Trif ([**86**]), C.I. Gheorghiu ([**43**]), C.A. Brebbia ([**22**]).

precum şi cărţile fundamentale de analiză funţională scrise de K. Deimling ([**38**]), K. Yosida ([**118**]), E. Zeidler ([**120**]), H. Brezis ([**23**]), L. Kantorovitch ([**61**]). Pe parcursul acestei cărţi vom cita foarte des şi monografiile de bază în teoria punctelor fixe scrise de I.A. Rus ([**98**], [**105**]), R.P. Agarwal, M. Meehan şi D. O'Regan ([**4**]), J. Dugundji şi A. Granas ([**41**]).

O contribuţie importantă în dezvoltarea teoriei punctului fix şi a ecuaţiilor integrale au avut-o şi membrii seminarului de cercetare din cadrul catedrei de ecuaţii diferenţiale, condus de prof. dr. Ioan A. Rus. În cadrul acestui seminar au fost dezbătute mai multe problematici legate de teoria ecuaţiilor integrale: Teoria punctului fix în mulţimi ordonate, Elemente extremale şi puncte fixe, Teoria metrică a punctului fix, Operatori Picard şi slab Picard, Continuitate şi puncte fixe, Compactitate şi puncte fixe, Convexitate şi puncte fixe, Teoria punctului fix în topologie algebrică şi analiză globală, Structuri de punct fix, Aplicaţii ale teoriei punctului fix în studiul ecuaţiilor operatoriale, diferenţiale, integrale şi cu derivate parţiale.

În această carte prezentăm rezultatele obţinute de autor în timpul pregătirii tezei de doctorat. Aceste rezultate se referă pe de o parte la operatori Picard şi operatori Picard pe fibre iar pe de altă parte la ecuaţii integrale mixte Fredholm-Volterra

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K_1(x,s,y(s);\lambda)ds + \int_a^b K_2(x,s,y(s);\lambda)ds, \tag{0.1}$$

în spaţiul $C([a,b],X)$, unde $(X,\|\cdot\|)$ este un spaţiu Banach şi în spaţiul $L^2[a,b]$. În spaţiul $C([a,b],X)$ studiem existenţa şi unicitatea, continuitatea în raport cu parametrul λ, derivabilitatea în raport cu parametrul λ, atât în cazul nucleelor continue cât şi în cazul nucleelor slab singulare. În cazul liniar obţinem o dezvoltare în serie după puterile lui λ cu ajutorul nucleelor iterate şi o reprezentare pentru nucleul rezolvent. În spaţiul $L^2[a,b]$ studiem continuitatea şi diferenţiabilitatea operatorului soluţie în raport cu parametrul λ. În ambele spaţii tratăm şi ecuaţii cu argument modificat.

Cartea este structurată în 4 capitole după cum urmează:

Capitolul 1 este un capitol introductiv în care sunt prezentate noţiunile şi teoremele de bază ce vor fi aplicate sau generalizate pe parcursul celorlalte capitole. Primele trei paragrafe conţin notaţiile şi definiţiile referitoare la L-spaţii, operatorii Picard pe L-spaţii şi operatori Picard pe spaţii metrice generalizate. În al patrulea paragraf este prezentată problematica operatorilor triunghiulari şi teorema contracţiilor pe fibră, precum şi generalizarea acestei teoreme pentru φ-contracţii definite pe spaţii metrice generalizate. Ultimul paragraf este dedicat prezentării unor teoreme de punct fix. Rezultatele originale din acest capitol au fost publicate în lucrarea [**11**].

În **Capitolul 2** prezentăm rezultatele legate de contracţiile convexe. Prima dată definim şirurile subconvexe (definiţia 1.1 şi 1.2) şi demonstrăm că orice şir subconvex cu termeni pozitivi este convergent (teorema 1.3). Aceste rezultate generalizează proprietăţi puse în evidenţă de D. Bărbosu, M. Andronache în [**24**], de S.M. Şoltuz în [**113**] şi de J. van de Lune în [**68**].

În al doilea paragraf definim contracţiile convexe (definiţia 2.1) şi demonstrăm că orice contracţie convexă pe un spaţiu metric complet este un operator Picard (teorema 2.1). O parte a acestei teoreme a fost demonstrată de V. Istrăţescu în [**57**] folosind faptul că orice contracţie convexă este o δ-contracţie, dar acolo nu s-a obţinut o delimitare pentru distanţa $d(x_n, x^*)$, unde x_n este al n-lea termen al şirului aproximaţiilor succesive şi x^* este punctul fix.

În paragraful 3 definim contracţiile convexe pe spaţii metrice generalizate (definiţia 3.1) şi demonstrăm că orice contracţie convexă generalizată, definită pe un spaţiu metric generalizat complet, este un operator Picard (teorema 5.3).

Paragraful 4 conţine inegalităţi de tip Gronwall. Mai precis, o inegalitate abstractă (teorema 4.2), o teoremă asupra convergenţei unei serii de tip Neumann (teorema 4.3), o inegalitate discretă (teorema 4.6), o inegalitate mixtă (teorema 4.8) şi două inegalităţi integrale (teoremele 4.4 şi 4.5), toate având în spate un operator de tip contracţie convexă. Aceste inegalităţi generalizează unele rezultate obţinute de M. Zima în [**121**], B.G. Pachpatte în [**81**], de J.I. Wu şi G. Yang în [**117**] şi de S.S. Dragomir în [**40**].

În paragraful 5 extindem teorema contracţiilor pe fibră, la cazul contracţiilor convexe pe fibră şi prezentăm o aplicaţie a acestei teoreme. Teorema 5.3 generalizează teorema contracţiilor pe fibră obţinută de I.A. Rus în [**103**] şi de M.A. Şerban în [**112**].

Rezultatele originale din acest capitol au fost publicate în lucrările [**13**], [**12**], [**9**] şi [**10**].

Capitolul 3 este structurat pe 5 paragrafe. În primul paragraf stabilim teoreme de existenţă folosind teorema lui Schauder, teorema Leray-Schauder şi teorema lui Krasnoselskii. Al doilea paragraf este împărţit în trei subparagrafe. În primul subparagraf stabilim teorema de punct fix 2.1 care este un caz particular al teoremei lui Perov, aplicate pe un produs cartezian a două spaţii metrice, şi folosind această teoremă obţinem teorema de existenţă şi unicitate 2.2 pentru ecuaţii mixte de tip Fredholm-Volterra. Acest rezultat cuprinde condiţii mai exacte decât cele din lucrările autorilor I Naroşi ([**78**]), A. Petruşel ([**87**]), B.G. Pachpatte ([**80**]), D. Gou ([**45**]), V.M. Mamedov şi Ja. D. Musaev ([**71**]), I. Bihari ([**21**]), J. Kwapisz şi M. Turo ([**64**] şi [**65**]), R.K. Nohel, J.A. Wong şi J.S.W. Miller ([**76**]), şi C. Corduneanu ([**33**]). În al doilea subparagraf definim nucleele iterate şi stabilim proprietăţile nucleelor rezolvente (teorema 2.3). Aceste rezultate sunt extinderi ale unor teoreme clasice referitoare la ecuaţiile integrale liniare (a se vedea cartea lui W. Pogorzelski [**88**]). În subparagraful 3 studiem ecuaţia mixtă Fredholm-Volterra cu nuclee cu singularitate slabă (definiţia 2.1 şi teoremele 2.10, 2.11, 2.12). Aceste rezultate extind proprietăţile clasice la cazul ecuaţiilor mixte cu singularităţi slabe (a se vedea cartea lui D.V. Ionescu [**56**]).

Al treilea paragraf al acestui capitol conţine rezultate de continuitate şi derivabilitate pentru soluţiile ecuaţiilor Fredholm-Volterra.

Toate proprietăţile sunt demonstrate prin tehnica contracţiilor pe fibră.

În paragraful 4 stabilim teoreme de existenţă şi unicitate pentru ecuaţii Fredholm-Volterra cu argument modificat (având o modificare mixtă) iar în ultimul paragraf demonstrăm teoreme de comparaţie pentru ecuaţii Fredholm-Volterra.

Rezultatele originale din acest capitol au fost publicate în lucrările [**8**] şi [**14**].

Capitolul 4. În acest capitol am studiat continuitatea şi diferenţiabilitatea operatorului soluţie $S : [\lambda_1, \lambda_2] \to L^2(I)$ definit prin $S(\lambda)(t) = y^*(t, \lambda)$, unde $y^*(\cdot, \lambda) \in L^2(I)$ este unica soluţie a unei ecuaţii mixte Fredholm-Volterra pe un interval I. Capitolul este împărţit în două paragrafe; în primul paragraf este tratat cazul ecuaţiilor definite pe un interval mărginit (cu sau fără modificare a argumentului), iar în al doilea paragraf cazul ecuaţiilor definite pe semiaxă.

Prezenta carte se adresează tuturor acelora ce au preocupări (cunoaşterea unor rezultate şi/sau obţinerea de rezultate noi) în domeniul Ecuaţiilor integrale. Ea este utilă şi celor preocupaţi de modelarea matematică prin ecuaţii integrale.

În final doresc să mulţumesc referenţilor ştiinţifici prof. dr. Radu Precup de la Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, prof. dr. Nicolae Lungu de la Universitatea Technică din Cluj-Napoca şi prof. dr. Viorel Radu de la Universitatea de Vest din Timişoara pentru observaţiile şi sugestiile privind teza de doctorat şi prof. dr. Ioan A. Rus pentru sprijinul acordat în timpul pregătirii tezei de doctorat.

Cluj-Napoca   Autorul

Octombrie 2005

CAPITOLUL 1

Preliminarii

În acest capitol amintim principalele noţiuni şi rezultate pe care le vom folosi pe parcursul acestei cărţi. Majoritatea acestor proprietăţi sunt cunoscute, de aceea omitem unele demonstraţii.

1. L-spaţii

Definiţia 1.1. *Fie X o mulţime nevidă,*

$$s(X) = \{\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} |\, x_n \in X, n \in \mathbb{N}\}$$

mulţimea şirurilor de elemente din X, $c(X) \subset s(X)$ şi un operator $Lim : c(X) \to X$. Tripletul $(X, c(X), Lim)$ este un L-spaţiu dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:

1. *Dacă $x_n = x, \forall n \in \mathbb{N}$, atunci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c(X)$ şi*
$$Lim((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = x;$$
2. *Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c(X)$ şi*
$$Lim((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = x,$$
atunci pentru orice subşir $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ avem $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}} \in c(X)$ şi $Lim((x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}) = x$.

Elementele mulţimii $c(X)$ sunt prin definiţie şirurile convergente din X (în structura L-spaţiului) şi în loc de $Lim((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = x$ scriem $x_n \to x$ pentru $n \to \infty$. În cazul în care nu se crează nici o confuzie folosim pentru L-spaţiul $(X, c(X), Lim)$ notaţia $(X, \to)$.

Convergenţa în L-spaţii, de obicei, nu este topologică, deci în general nu există o topologie care să genereze aceleaşi şiruri convergente. Structura de L-spaţiu a fost introdusă de M. Fréchet în 1906 şi s-a dovedit a fi cel mai abstract cadru în care se poate aplica metoda aproximaţiilor succesive. Exemple semnificative de L-spaţii se pot construi în mulţimi ordonate, spaţii metrice, spaţii metrice generalizate, spaţii 2-metrice etc. (a se vedea I. A. Rus [**106**]). Pentru fixarea ideilor prezentăm structurile de L-spaţii folosite în cadrul acestei lucrări.

EXEMPLUL 1.1. *Dacă* (X, d) *este un spaţiu metric,* $c(X)$ *este mulţimea şirurilor convergente în topologia metricii, şi operatorul* $Lim : c(X) \to X$ *este definit prin*

$$Lim((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

unde limita din membrul drept este în topologia generată de metrica d*, atunci* $(X, c(X), Lim)$ *este un L-spaţiu.*

DEFINIŢIA 1.2. *Dacă* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *şi* $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *sunt două elemente din* $\mathbb{R}^n$*, atunci prin relaţia* $x \leq y$ *înţelegem* $x_i \leq y_i$, $i = \overline{1, n}$.

DEFINIŢIA 1.3. *Fie* X *o mulţime. Aplicaţia* $d : X \times X \to \mathbb{R}^n$ *este o metrică generalizată pe* X *dacă satisface următoarele proprietăţi:*

1. $d(x, y) \geq 0$ *pentru orice* $x, y \in X$ *şi* $d(x, y) = 0$ *dacă şi numai dacă* $x = y$*;*
2. $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in X$;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $\forall x, y, z \in X$ *(inegalităţile în* $\mathbb{R}^n$ *sunt definite conform definiţiei 1.2).*

Perechea (X, d) *se numeşte spaţiu metric generalizat.*

EXEMPLUL 1.2. *Dacă* (X, d) *este un spaţiu metric generalizat cu metrica în* $\mathbb{R}^n$*,* $c(X)$ *este mulţimea şirurilor convergente în topologia* *metricii şi operatorul* $Lim : c(X) \to X$ *este definit prin*

$$Lim((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

unde limita din membrul drept este în topologia generată de metrica d*, atunci* $(X, c(X), Lim)$ *este un L-spaţiu.*

În multe aplicaţii intervin mulţimi dotate atât cu o convergenţă cât şi cu o ordonare. Dacă aceste două structuri sunt compatibile, atunci vorbim de un L-spaţiu ordonat. Astfel avem următoarea definiţie:

DEFINIŢIA 1.4. *Dacă* $(X, \to)$ *este un L-spaţiu şi* $\leq$ *o relaţie de ordine pe* X*, atunci tripletul* $(X, \to, \leq)$ *este un L-spaţiu ordonat dacă are loc implicaţia:*

$$[x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \to x^*,\ y_n \to y^* \text{ pentru } n \to \infty] \ \Rightarrow\ x^* \leq y^*$$

OBSERVAŢIA 1.1. *Dacă în exemplele 1.1 şi 1.2 se consideră o relaţie de ordine compatibilă cu structura de L-spaţiu, atunci spaţiile* X *considerate devin L-spaţii ordonate. Ca exemple concrete putem considera spaţiile* $C([a,b])$ *şi* $C([a,b], \mathbb{R}^n)$ *în care convergenţa şi relaţia de ordine sunt cele naturale.*

2. Operatori Picard pe L-spaţii

DEFINIŢIA 2.1. *(I.A. Rus* [**106**]*) Fie* $(X, \to)$ *un L-spaţiu. Operatorul* $T : X \to X$ *este un operator Picard dacă*

a) $F_T = \{x_T^*\}$;

b) $T^n(x) \to x_T^*$ *pentru* $n \to \infty$, $\forall x \in X$.

Aici s-a notat cu F_T *mulţimea punctelor fixe ale operatorului* T*, iar prin* T^n *înţelegem iterata a n-a a operatorului* T.

Dacă şirul aproximaţiilor succesive converge pentru orice element iniţial, dar limita nu este unică, atunci se spune că operatorul T este slab Picard.

DEFINIŢIA 2.2. *(I.A. Rus* [**106**]*) Fie* $(X, \to)$ *un L-spaţiu. Operatorul* $T : X \to X$ *este un operator slab Picard dacă* $\forall x_0 \in X$ *există* $x_\infty(x_0) \in F_T$ *cu proprietatea* $T^n(x_0) \to x_\infty(x_0)$ *pentru* $n \to \infty$.

OBSERVAŢIA 2.1. *Dacă operatorul* T *este un operator slab Picard, atunci îi putem ataşa operatorul* $T^\infty : X \to X$ *definit prin relaţia*

$$T^\infty(x) = \lim_{n\to\infty} T^n(x).$$

Pentru o tratare detaliată a proprietăţilor operatorilor slab Picard a se vedea I.A. Rus [**106**] şi [**99**].

Cele mai semnificative clase de operatori Picard sunt caracterizate prin intermediul teoremelor de punct fix. Astfel, din principiul contracţiilor rezultă că orice contracţie pe un spaţiu metric complet este operator Picard.

TEOREMA 2.1. *(Principiul contracţiilor* [**105**]*) Dacă* (X, d) *este un spaţiu metric complet şi există* $0 \leq L < 1$ *astfel încât operatorul* $T : X \to X$ *satisface condiţia*

$$d(T(u), T(v)) \leq L \cdot d(u, v),\ \forall u, v \in X,$$

atunci

(1) T *are un punct fix unic* u^*.
(2) *şirul aproximaţiilor succesive* $u_{n+1} = T(u_n), \forall n \in \mathbb{N}$ *este convergent şi are limita* u^* *pentru orice* $u_0 \in X$;
(3) *are loc inegalitatea*

$$d(u_n, u^*) \leq \frac{L^n}{1-L} \cdot d(u_1, u_0),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

În general folosind teoremele metrice care garantează convergenţa şirului de aproximaţii succesive putem defini clase de operatori Picard (respectiv slab Picard).

TEOREMA 2.2. *(R. Kannan, [**60**]) Dacă (X, d) este un spaţiu metric complet, $T : X \to X$ un operator cu proprietatea*

$$d(T(x), T(y)) \leq a[d(x, T(x)) + d(y, T(y))], \ \forall x, y \in X, \tag{2.2}$$

unde $a \in [0, 1/2)$ este un număr fixat, atunci T este un operator Picard.

DEMONSTRAŢIE. Dacă $x^*, y^* \in F_T$, atunci din condiţia dată deducem $d(x^*, y^*) \leq 0$, deci $x^* = y^*$. Astfel mulţimea F_T are cel mult un element. Dacă $x_0 \in X$ este un element arbitrar şi $y = T(x_0)$, atunci din inegalitatea dată obţinem $d(T(x_0), T^2(x_0)) \leq ad(x_0, T(x_0)) + ad(T(x_0), T^2(x_0))$, deci $d(T(x_0), T^2(x_0)) \leq \dfrac{a}{1-a} d(x_0, T(x_0))$. Cu notaţia $\alpha = \dfrac{a}{1-a}$ obţinem

$$\begin{aligned} d(T^n(x_0), T^{n+1}(x_0)) = d(T(T^{n-1}(x_0)), T^2(T^{n-1}(x_0))) \leq \\ \leq \alpha d(T^{n-1}(x_0), T^n(x_0)) \leq \cdots \leq \alpha^n d(x_0, T(x_0)). \end{aligned}$$

Astfel

$$\begin{gathered} d(T^n(x_0), T^{n+p}(x_0)) \leq \\ \leq d(T^n(x_0), T^{n+1}(x_0)) + \cdots + d(T^{n+p-1}(x_0), T^{n+p}(x_0)) \leq \\ \leq (\alpha^n + ... + \alpha^{n+p-1}) d(x_0, T(x_0)) = \frac{\alpha^n(1-\alpha^p)}{1-\alpha} d(x_0, T(x_0)). \end{gathered}$$

Spaţiul (X, d) fiind complet şi $(T^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ un şir fundamental există $x^* \in X$ astfel încât $\lim\limits_{n \to \infty} T^n(x_0) = x^*$. Din inegalitatea dată deducem

$$d(x^*, T(x^*)) \leq d(x^*, T^n(x_0)) + d(T^n(x_0), T(x^*)) \leq$$
$$\leq d(x^*, T^n(x_0)) + ad(T^{n-1}(x_0), T^n(x_0)) + ad(x^*, T(x^*)),$$

deci

$$d(x^*, T(x^*)) \leq \frac{1}{1-a} d(x^*, T^n(x_0)) + \frac{a}{1-a} d(T^{n-1}(x_0), T^n(x_0)).$$

Trecând la limită cu $n \to \infty$, rezultă $d(x^*, T(x^*)) \leq 0$, deci $T(x^*) = x^*$. Am demonstrat că şirul aproximaţiilor succesive converge la unicul punct fix pentru orice $x_0 \in X$, deci operatorul T este un operator Picard. ■

TEOREMA 2.3. *(L.B. Ćirić-S. Reich-I.A. Rus,* [**94**]*) Fie (X,d) un spaţiu metric complet, $T : X \to X$ un operator pentru care există $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+$, astfel încât $\alpha + \beta + \gamma < 1$ şi*

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y) + \beta d(x, T(x)) + \gamma d(y, T(y)), \tag{2.3}$$

$\forall x, y \in X$, atunci T este un operator Picard.

DEMONSTRAŢIE. Dacă $x^*, y^* \in F_T$, atunci din inegalitatea dată obţinem $d(x^*, y^*) \leq \alpha d(x^*, y^*)$, deci pentru $d(x^*, y^*) \neq 0$ ajungem la contradicţie. Astfel $d(x^*, y^*) = 0$ şi $|F_T| \leq 1$. Aplicând inegalitatea din enunţ pentru $x_0 \in X$ arbitrar şi $y = T(x_0)$ obţinem

$$d(T(x_0), T^2(x_0)) \leq \frac{\alpha + \beta}{1 - \gamma} d(x_0, T(x_0)).$$

Folosind notaţia $a = \dfrac{\alpha + \beta}{1 - \gamma}$, şi un raţionament inductiv deducem $d(T^n(x_0), T^{n+1}(x_0)) \leq a^n d(x_0, T(x_0))$. Din această inegalitate rezultă că şirul $(T^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ este fundamental, deci există $x^* \in X$ astfel încât

$\lim_{n \to \infty} T^n(x_0) = x^*$. Pe de altă parte

$$d(x^*, T(x^*)) \leq$$
$$\leq d(x^*, T^n(x_0)) + d(T^n(x_0), T(x^*)) \leq d(x^*, T^n(x_0)) +$$
$$+\alpha d(T^{n-1}(x_0), x^*) + \beta d(T^{n-1}(x_0), T^n(x_0)) + \gamma d(x^*, T(x^*)),$$

deci

$$d(x^*, T(x^*)) \leq \frac{1}{1-\gamma} d(x^*, T^n(x_0)) +$$
$$+\frac{\alpha}{1-\gamma} d(T^{n-1}(x_0), x^*) + \frac{\beta}{1-\gamma} d(T^{n-1}(x_0), T^n(x_0)).$$

Pentru $n \to \infty$, obţinem $d(x^*, T(x^*)) \leq 0$, deci $T(x^*) = x^*$ şi operatorul T este un operator Picard. ■

Observaţia 2.2. *Pentru $\alpha = 0$ şi $\beta = \gamma$ din teorema 2.3 obţinem teorema 2.2.*

Teorema 2.4. *(M.G. Maia, [**69**]) Dacă operatorul $T : X \to X$ şi metricile $d, \rho : X \times X \to \mathbb{R}$ definite pe mulţimea nevidă X satisfac condiţiile*

(i) *(X, d) este un spaţiu metric complet;*
(ii) *$d(x, y) \leq \rho(x, y), \forall x, y \in X$;*
(iii) *$T : (X, d) \to (X, d)$ este continuu;*
(iv) *$T : (X, \rho) \to (X, \rho)$ este contracţie cu constanta a,*

atunci operatorul $T : (X, d) \to (X, d)$ este un operator Picard.

Demonstraţie. Dacă $x^*, y^* \in F_T$, atunci din condiţia (iv) deducem $\rho(x^*, y^*) \leq a\rho(x^*, y^*)$, deci pentru $\rho(x^*, y^*) \neq 0$ ajungem la o contradicţie. Astfel $|F_T| \leq 1$. Dacă $x_0 \in X$ este un element arbitrar şi $y = T(x_0)$, atunci datorită condiţiei (iv) şirul $(T^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir fundamental în (X, ρ) şi are loc inegalitatea

$$\rho(T^n(x_0), T^{n+p}(x_0)) \leq \frac{a^n}{1-a}\rho(x_0, T(x_0)).$$

Din condiţia (ii) rezultă $d(T^n(x_0), T^{n+p}(x_0)) \leq \dfrac{a^n}{1-a}\rho(x_0, T(x_0))$, deci şirul $(T^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ este fundamental în spaţiul (X, d). Din condiţia (i) deducem existenţa unui element $x^* \in X$ cu proprietatea $\lim\limits_{n\to\infty} T^n(x_0) = x^*$. Folosind condiţia (iii) obţinem $T(\lim\limits_{n\to\infty} T^n(x_0)) = T(x^*)$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} T^{n+1}(x_0) = T(x^*)$ şi astfel $T(x^*) = x^*$. Astfel operatorul T este un operator Picard. ■

Teorema 2.5. *(L.B. Ćirić,* [**31**]*)Dacă* (X, d) *este un spaţiu metric complet, pentru operatorul* $T : X \to X$ *există numerele* $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ *cu proprietatea* $a + 2b + 2c < 1$ *şi*

$$d(T(x), T(y)) \leq ad(x, y) + b[d(x, T(x)) + d(y, T(y))]+$$
$$+c[d(x, T(y)) + d(y, T(x))], \forall x, y \in X,$$

atunci T *este un operator Picard.*

Demonstraţie. Dacă $x^*, y^* \in F_T$, atunci din inegalitatea dată obţinem $d(x^*, y^*) \leq (a + 2c)d(x^*, y^*)$, deci $d(x^*, y^*) = 0$. Astfel obţinem $|F_T| \leq 1$. Dacă $x_0 \in X$ şi $y = T(x_0)$, atunci rezultă inegalitatea $d(T(x_0), T^2(x_0)) \leq \dfrac{a+b+c}{1-b-c}d(x_0, T(x_0))$. Folosind notaţia $\alpha = \dfrac{a+b+c}{1-b-c}$ şi un raţionament inductiv deducem

$$d(T^n(x_0), T^{n+1}(x_0)) \leq \alpha^n d(x_0, T(x_0)).$$

Din această inegalitate rezultă că

$$d(T^n(x_0), T^{n+p}(x_0)) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}d(x_0, T(x_0)),$$

deci şirul $(T^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ este fundamental. Spaţiul (X,d) fiind complet există $x^*\in X$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} T^n(x_0)=x^*$. Din inegalitatea

$$d(x^*,T(x^*))\le d(x^*,T^n(x_0))+d(T^n(x_0),T(x^*))\le d(x^*,T^n(x_0))+$$
$$+ad(T^{n-1}(x_0),x^*)+b[d(T^{n-1}(x_0),T^n(x_0))+d(x^*,T(x^*))]+$$
$$+c[d(T^{n-1}(x_0),T(x^*))+d(x^*,T^n(x_0))]$$

pentru $n\to\infty$ obţinem $d(x^*,T(x^*))\le(b+c)d(x^*,T(x^*))$, deci $d(x^*,T(x^*))=0$. De aici rezultă că operatorul T este un operator Picard. ■

COROLARUL 1.1. *Dacă (X,d) este un spaţiu metric complet, operatorul $T:X\to X$ are proprietatea*

$$d(T(x),T(y))\le ad(x,y)+b[d(x,T(x))+d(y,T(y))],\forall x,y\in X,$$

unde $a,b\in\mathbb{R}_+$ şi $a+2b<1$, atunci T este un operator Picard.

DEMONSTRAŢIE. Aplicăm teorema 2.5 pentru $c=0$. ■

COROLARUL 1.2. *Dacă (X,d) este un spaţiu metric complet şi operatorul $T:X\to X$ are proprietatea*

$$d(T(x),T(y))\le c[d(x,T(y))+d(y,T(x))],\ \forall x,y\in X,$$

unde $c\in[0,1/2)$, atunci T este un operator Picard.

DEMONSTRAŢIE. Aplicăm teorema 2.5 pentru $a=b=0$. ■

TEOREMA 2.6. *(L.B. Ćirić) Dacă (X,d) este un spaţiu metric complet şi operatorii $T,B:X\to X$ satisfac condiţia*

$$d(T(x),B(y))\le d(x,y)+\beta[d(x,T(x))+d(y,B(y))]+$$
$$+\gamma[d(x,B(y))+d(y,T(x))],\ \forall x,y\in X,$$

unde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+$ *sunt numere fixate cu proprietatea* $\alpha+2\beta+2\gamma < 1$, *atunci operatorii* T *şi* B *sunt operatori Picard.*

DEMONSTRAŢIE. Pentru un element arbitrar $x_0 \in X$ definim şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prin relaţiile $x_1 = T(x_0)$, $x_2 = B(x_1), \ldots, x_{2n} = B(x_{2n-1})$, $x_{2n+1} = T(x_{2n})$. Din condiţia dată avem inegalităţiile:

$$d(x_1, x_2) = d(T(x_0), B(x_1)) \leq$$
$$\leq \alpha d(x_0, x_1) + \beta[d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)] + \gamma[d(x_0, x_2) + d(x_1, x_1)] \leq$$
$$\leq \alpha d(x_0, x_1) + \beta[d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)] + \gamma[d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)],$$

deci $d(x_1, x_2) = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{1-\beta-\gamma} d(x_0, x_1)$. În mod analog deducem inegalitatea $d(x_2, x_3) = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{1-\beta-\gamma} d(x_1, x_2)$. Folosind notaţia $a = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{1-\beta-\gamma}$ printr-un raţionament inductiv obţinem

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq a^{2n+1} d(x_0, x_1), \ \forall n \in \mathbb{N}; \tag{2.4}$$
$$d(x_{2n}, x_{2n+1}) \leq a^{2n-1} d(x_1, x_2), \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.5}$$

deci $d(x_n, x_{n+1}) \leq a^n d(x_0, x_1), \ \forall n \geq 0$ şi astfel

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{a^n}{1-a} d(x_0, x_1).$$

Spaţiul (X, d) fiind fundamental şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge către un element $x^* \in X$. Din egalitatăţiile $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = x^*$ şi din inegalităţiile

$$d(x^*, T(x^*)) \leq d(x^*, x_{2n}) + d(x_{2n}, T(x^*)) \leq d(x^*, x_{2n}) + \alpha d(x_{2n-1}, x^*)$$
$$+\beta[d(x_{2n-1}, x_{2n}) + d(x^*, T(x^*))] + \gamma[d(x_{2n-1}, T(x^*)) + d(x^*, x_{2n})],$$

pentru $n \to \infty$ deducem $d(x^*, T(x^*)) \leq (\beta + \gamma)d(x^*, T(x^*))$, deci $d(x^*, T(x^*)) = 0$. Demonstrăm că x^* este punct fix şi pentru B.

$$d(x^*, B(x^*) \leq d(x^*, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, B(x^*) \leq$$

$$\leq d(x^*, x_{2n+1}) + \alpha d(x_{2n}, x^*) + \beta[d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x^*, B(x^*)]+$$

$$+\gamma[d(x_{2n}, B(x^*) + d(x^*, x_{2n+1})].$$

În cazul $n \to \infty$ rezultă inegalitatea

$$d(x^*, B(x^*)) \leq (\beta + \gamma)d(x^*, B(x^*)),$$

deci $d(x^*, B(x^*)) = 0$. Pe de altă parte dacă $x^*, y^* \in F_T$, atunci din $x^* \in F_B$ rezultă

$$d(x^*, y^*) = d(T(y^*), B(x^*)) \leq \alpha d(y^*, x^*)+$$

$$+\beta[d(y^*, T(y^*)) + d(x^*, B(x^*))] + \gamma[d(y^*, B(x^*)) + d(x^*, T(y^*))],$$

deci $d(y^*, x^*) \leq (\alpha + 2\gamma)d(y^*, x^*)$ şi astfel $d(y^*, x^*) = 0$. Dacă $z^*, x^* \in F_B$, atunci din $x^* \in F_T$ rezultă

$$d(x^*, z^*) = d(T(x^*), B(z^*)) \leq \alpha d(x^*, z^*)+$$

$$+\beta[d(x^*, T(x^*)) + d(z^*, B(z^*))] + \gamma[d(x^*, B(z^*)) + d(z^*, T(x^*))],$$

deci $d(x^*, z^*) \leq (\alpha + 2\gamma)d(x^*, z^*)$, şi astfel $d(x^*, z^*) = 0$. De aici rezultă că $F_T = F_B = \{x^*\}$. Pentru a arăta că operatorii B şi T sunt operatori Picard trebuie să arătăm că şirul aproximaţiilor succesive converge către unicul punct fix. Pentru acesta să considerăm un şir de aproximaţii succesive pentru operatorul B definit prin $y_{n+1} = B(y_n)$, $\forall n \geq 0$ cu $y_0 \in X$ arbitrar. Aplicând inegalitatea dată pentru $x = x^*$, $y = y_n$ şi folosind inegalitatea $d(y_n, y_{n+1}) \leq d(y_n, x^*) + d(x^*, y_{n+1})$ obţinem

$$d(x^*, y_{n+1}) \leq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{1 - \beta - \gamma} d(x^*, y_n),$$

deci şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge către x^* pentru orice $y_0 \in X$. În mod analog se arată că şirul $z_{n+1} = T(z_n),\ \forall n \geq 0$ converge la x^* pentru orice $z_0 \in X$, deci operatorii B şi T sunt operatori Picard. ■

OBSERVAŢIA 2.3. *Teorema 2.5 este un caz particular al teoremei 2.6 (se obţine din această teoremă pentru $T = B$).*

Alte exemple de operatori Picard se pot pune în evidenţă pornind de la teoremele de punct fix obţinute de: Edelstein, J. Bryant, L.F. Guseman, W.A. Kirk, B. Sims, S.B. Nadler, R.D. Nussbaum, F.A. Potra, V. Pták, L. Ćirić, I.A. Rus, V. Berinde, M.A. Şerban etc. (pentru o listă mult mai amplă a se vedea I.A. Rus [**98**] şi [**106**]).

3. Operatori Picard pe spaţii metrice generalizate

Pentru a enunţa generalizarea teoremei 2.1 la cazul spaţiilor metrice cu metrica generalizată $d : X \times X \to \mathbb{R}^n$, avem nevoie de următoarea definiţie:

DEFINIŢIA 3.1. *([**105**]) Matricea $S \in M_n(\mathbb{R})$ este convergentă la 0 dacă*

$$\lim_{m\to\infty} S^m = 0_n.$$

TEOREMA 3.1. *Dacă $\|\cdot\|_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o normă în $\mathbb{R}^n$, atunci funcţia*
$\|\cdot\|_m : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\|A\|_M = sup\{\|S \cdot x\|_v \mid \|x\|_v = 1\},\ \forall S \in M_n(\mathbb{R})$$

este o normă pe $M_n(\mathbb{R})$ şi se spune că această normă este subordonată normei $\|\cdot\|_v$.

TEOREMA 3.2. *([**105**]) Dacă $S \in M_n(\mathbb{R})$, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *Matricea* S *este convergentă la* 0.
2. *Există o normă matricială în* $M_n(\mathbb{R})$, *subordonată unei norme vectoriale din* $\mathbb{R}^n$, *pentru care* $\|S\| < 1$.
3. *Valorile proprii ale matricii* S *sunt în interiorul discului unitate.*
4. *Matricea* $I_n - S$ *este nesingulară şi*

$$(I_n - S)^{-1} = I_n + S + S^2 + S^3 + ... + S^m + ...$$

Teorema 3.3. *(Teorema lui Perov;* [**105**]*) Dacă* (X, d) *este un spaţiu metric generalizat complet (cu* $d : X \times X \to \mathbb{R}^n$*) şi* $T : X \to X$ *un operator cu proprietatea*

$$d(T(x), T(y)) \leq S \cdot d(x, y), \ \forall x, y \in X, \tag{3.6}$$

unde S *este o matrice convergentă către zero, atunci*

1) *operatorul* T *are un punct fix unic* $x^* \in X$;
2) *şirul aproximaţiilor succesive* $x_{k+1} = T(x_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ *converge către* x^* *pentru orice* $x_0 \in X$;
3) *are loc inegalitatea*

$$d(x_k, x^*) \leq S^k \cdot (I_n - S)^{-1} \cdot d(x_0, x_1), \quad \forall k \geq 0. \tag{3.7}$$

Astfel, operatorii definiţi pe spaţii metrice generalizate şi care satisfac condiţiile teoremei 3.3, sunt operatori Picard.

4. Operatori triunghiulari

Definiţia 4.1. *(M.A. Şerban* [**112**]*) Dacă* (X_k, d_k), $k = \overline{0, p}$, $p \geq 1$ *sunt spaţii metrice, atunci operatorilor*

$$A_k : X_0 \times \ldots \times X_k \to X_k, \quad k = \overline{0, p}$$

li se poate ataşa operatorul triunghiular

$$B_p : X_0 \times \ldots \times X_p \to X_0 \times \ldots \times X_p,$$

definit prin

$$B_p(x_0, \ldots, x_p) = (A_0(x_0), A_1(x_0, x_1), \ldots, A_p(x_0, x_1, \ldots, x_p)). \tag{4.8}$$

Problema de bază referitoare la aceşti operatori triunghiulari este următoarea:

Problema 1.2.1: (I.A. Rus [**97**]) Fie (X, d) şi (Y, ρ) două spaţii metrice şi $A : X \times Y \to X \times Y$ operatorul triunghiular ataşat operatorilor $B : X \to X$ şi $C : X \times Y \to Y$, adică $A(x, y) = (B(x), C(x, y))\,, \forall x \in X, y \in Y$. Problema constă în stabilirea condiţiilor necesare şi suficiente asupra operatorilor B şi C astfel încât A să fie un operator (slab) Picard.

Este necesar ca operatorii B şi $A(x^*, \cdot) : Y \to Y$ să fie operatori (slab) Picard, unde x^* este punct fix pentru B. Pe de altă parte nici condiţia mai tare $A(x_0, \cdot) : Y \to Y$ operator (slab) Picard, pentru orice $x_0 \in X$ nu garantează calitatea de operator (slab) Picard a operatorului A. Astfel, în cazul general, obţinem următoarea problemă:

Problema 1.2.2: (I.A. Rus [**102**]) Fie (X_k, d_k), $k = \overline{0, p}$, $p \geq 1$, spaţii metrice şi fie operatorii

$$A_k : X_0 \times \ldots \times X_k \to X_k, \quad k = \overline{0, p}.$$

Presupunem că au loc următoarele condiţii:

(i) operatorul A_k este continuu în raport cu $(x_0, \ldots, x_{k-1})$, pentru orice $x_k \in X_k, k = \overline{1, p}$;

(ii) operatorii $A_0, A_k\,(x_0, \ldots, x_{k-1}, \cdot)$, $k = \overline{1, p}$, sunt operatori (slabi) Picard.

Să se stabilească condiţii suficiente pentru ca operatorul B_p dat de relaţia (4.8) să fie operator (slab) Picard.

Problemele 1.2.1. şi 1.2.2. au fost formulate de I. A. Rus plecând de la un rezultat obţinut de M. W. Hirsch şi C.C. Pugh în [**55**]. Operatorii triunghiulari sunt utilizaţi în studiul continuităţii şi al derivabilităţii soluţiilor, iar în aceste aplicaţii calităţile operatorului triunghiular sunt cruciale. Aceste probleme au fost studiate de I.A. Rus ([**102**], [**103**]) şi M.A. Şerban ([**110**], [**112**] şi [**111**]). În continuare prezentăm unele rezultate în legătură cu problemele enunţate şi demonstrăm o extindere a acestora la φ-contracţii generalizate.

TEOREMA 4.1. *(Teorema contracţiilor pe fibră, I. A. Rus* [**97**]*) Fie (X, d) un spaţiu metric, (Y, ρ) un spaţiu metric complet şi $A : X\times Y \to X\times Y$ un operator astfel încât $A(x, y) = (B(x), C(x, y))$. Presupunem că au loc:*

(i) $A \in C\left(X \times Y, X \times Y\right)$;

(ii) *$B : X \to X$ este un operator slab Picard;*

(iii) *există $\lambda \in]0; 1[$ astfel încât:*

$$\rho(C(x, y), C(x, z)) \leq \lambda \cdot \rho(x, z),$$

pentru orice $x \in X$ şi $y, z \in Y$.

Atunci A este operator slab Picard. Mai mult, dacă $C^n\left(B^\infty(x), \cdot\right)(y) \to y^*(x)$, atunci $A^n(x, y) \to (B^\infty(x), y^*(x))$.

TEOREMA 4.2. *(I.A. Rus* [**103**] *) Fie (X_k, d_k), $k = \overline{0, p}$, $p \geq 1$, spaţii metrice. Considerăm operatorii:*

$$A_k : X_0 \times \ldots \times X_k \to X_k, \quad k = \overline{0, p}.$$

Presupunem că au loc:

(i) (X_k, d_k), $k = \overline{1,p}$, *sunt spaţii metrice complete;*

(ii) *operatorul A_0 este un operator (slab) Picard;*

(iii) *există $\alpha_k \in]0;1[$ astfel încât operatorii $A_k(x_0,\ldots,x_{k-1},\cdot)$ sunt α_k-contracţii, $k=\overline{1,p}$;*

(iv) *operatorul A_k este continuu în raport cu $(x_0,\ldots,x_{k-1})$, pentru orice $x_k \in X_k$, $k=\overline{1,p}$.*

Atunci operatorul $B_p = (A_0,\ldots,A_p)$, definit de (4.8), este operator (slab) Picard. Mai mult, dacă A_0 este operator Picard şi notăm cu

$$F_{A_0} = \{x_0^*\}, \quad F_{A_1(x_0^*,\cdot)} = \{x_1^*\}, \ldots, \quad F_{A_k(x_0,\ldots,x_{p-1},\cdot)} = \left\{x_p^*\right\}$$

atunci

$$F_{B_p} = \left\{(x_1^*,\ldots,x_p^*)\right\}.$$

Pentru a extinde această teoremă la o clasă mai largă de operatori, avem nevoie de următoarele noţiuni:

Definiţia 4.2. *(I.A. Rus* [**105**]*) O funcţie $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ care satisface condiţiile:*

$(\mathrm{i})_0$ *φ este monoton crescătoare;*

$(\mathrm{ii})_0$ $(\varphi^n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge către zero, pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$;*

se numeşte funcţie de comparaţie.

Definiţia 4.3. *(I.A. Rus* [**105**]*). O funcţie de comparaţie continuă care îndeplineşte, în plus, condiţia $\lim_{t\to\infty}(t-\varphi(t)) = +\infty$, se numeşte funcţie de comparaţie strictă.*

Definiţia 4.4. *(V. Berinde* [**20**]*). O funcţie $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ se numeşte funcţie de (c)-comparaţie dacă:*

$(\mathrm{i})_0$ *φ este monoton crescătoare;*

(ii)$_0$ *există* $k_0 \in \mathbb{N}$, $\alpha \in]0;1[$ *şi o serie convergentă cu termeni nenegativi,* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ *astfel încât:*

$$\varphi^{k+1}(t) \leq \alpha \varphi^{k}(t) + v_k,$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$ *şi* $k \geq k_0$.

Lema 4.1. *(V. Berinde [**20**])*

(a) *Orice funcţie de comparaţie este continuă în zero;*
(b) *Orice funcţie de comparaţie subaditivă este continuă.*

Lema 4.2. *(V. Berinde [**20**]). Dacă* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *este o funcţie de (c)-comparaţie atunci:*

(a) φ *este funcţie de comparaţie;*
(b) $\varphi(t) < t$ *pentru orice* $t \in \mathbb{R}_+$;
(c) φ *este continuă în zero;*
(d) *seria* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi^k(t)$ *este convergentă pentru orice* $t \in \mathbb{R}_+$;
(e) *suma seriei* $s(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi^k(t)$ *este monoton crescătoare şi continuă în zero;*
(f) $(\varphi^n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ *converge la zero când* $t \to \infty$.

Lema 4.3. *(M.A. Şerban [**111**]) Fie* $\alpha_n \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, *şi* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *astfel încât:*

(i) $\alpha_n \to 0$ *pentru* $n \to \infty$;
(ii) φ *este o funcţie de (c)-comparaţie.*

Atunci şirul $\sum\limits_{k=0}^{n} \varphi^{n-k}(\alpha_k) \to 0$ *pentru* $n \to \infty$.

Demonstraţie. Descompunem suma în două sume parţiale:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \varphi^{n-k}(\alpha_k) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \varphi^{n-k}(\alpha_k) + \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} \varphi^{n-k}(\alpha_k).$$

Pentru prima sumă parţială avem:

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \varphi^{n-k}(\alpha_k) \leq \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \varphi^{n-k}(\max_{m\in\mathbb{N}} \alpha_m) \to 0,$$

pentru $n \to \infty$, deoarece avem restul unei serii convergente, conform Lemei 4.2, punctul (d). Pentru cea de a doua sumă parţială avem:

$$\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} \varphi^{n-k}(\alpha_k) \leq \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} \varphi^{n-k}(\max_{j\leq n} \alpha_k) \leq s(\max_{j\leq n} \alpha_k).$$

Din continuitatea lui s în $t = 0$, (conform Lemei 4.2, punctul (e)), şi din faptul că $\max\limits_{j\leq n} \alpha_k \to 0$ pentru $n \to \infty$ deducem că şi cea de a doua sumă parţială tinde la 0 pentru $n \to \infty$. ■

TEOREMA 4.3. *(M.A. Şerban* [**111**]*) Fie* (X_k, d_k)*,* $k = \overline{0,p}$*,* $p \geq 1$*, spaţii metrice. Considerăm operatorii:*

$$A_k : X_0 \times \ldots \times X_k \to X_k, \quad k = \overline{0,p}.$$

Presupunem că au loc:

(i) (X_k, d_k), $k = \overline{1,p}$, *sunt spaţii metrice complete;*

(ii) *operatorul* A_0 *este un operator (slab) Picard;*

(iii) *există* $\varphi_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *o funcţie de (c)-comparaţie subaditivă astfel încât operatorii*

$A_k(x_0, \ldots, x_{k-1}, \cdot)$ *sunt* φ_k-*contracţii,* $k = \overline{1,p}$*;*

(iv) *operatorul* A_k *este continuu în raport cu* $(x_0, \ldots, x_{k-1})$, *pentru orice* $x_k \in X_k$, $k = \overline{1,p}$.

Atunci operatorul $B_p = (A_0, \ldots, A_p)$, *definit de (4.8), este operator (slab) Picard. Mai mult, dacă* A_0 *este operator Picard şi notăm cu*

$$F_{A_0} = \{x_0^*\}, \quad F_{A_1(x_0^*,\cdot)} = \{x_1^*\}, \ldots, \quad F_{A_k(x_0^*,\ldots,x_{p-1}^*,\cdot)} = \left\{x_p^*\right\} \tag{4.9}$$

atunci

$$F_{B_p} = \left\{(x_1^*, \ldots, x_p^*)\right\}.$$

Această proprietate se poate extinde pentru metrici generale, generalizând prima dată noţiunile şi lemele necesare. În aceste leme am notat cu K conul pozitiv al unui spaţiu Banach ordonat cu norma monotonă.

Definiţia 4.5. *(V. Berinde* [**20**]*) Funcţia* $\varphi : K \to K$ *este o funcţie de comparaţie dacă*

a) $t_1 \leq t_2 \Longrightarrow \varphi(t_1) \leq \varphi(t_2)$ *(φ este crescătoare)*

b) *şirul* $(\varphi^n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge către* 0 *pentru orice* $t \in K$.

Definiţia 4.6. *(V. Berinde* [**20**]*) Funcţia* $\varphi : K \to K$ *este o funcţie de (c)-comparaţie dacă* φ *este crescătoare şi satisface următoarea proprietate:*
există numerele $k_0 \in \mathbb{N}$ *şi* $a \in \mathbb{R}$ *cu* $0 < a < 1$ *şi o serie cu termeni pozitivi, convergentă* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *astfel încât*

$$\left\|\varphi^{k+1}(t)\right\| \leq a \cdot \left\|\varphi^k(t)\right\| + a_k, \forall k \geq k_0.$$

Definiţia 4.7. *(V. Berinde* [**20**]*) Dacă* (X, d) *este un spaţiu* $K-$*metric şi* $\varphi : K \to K$ *o funcţie de comparaţie, atunci operatorul* $A : X \to X$ *este* $\varphi-$*contracţie generalizată dacă*

$$d\left(A(x),A(y)\right)\leq\varphi\left(d(x,y)\right),\forall x,y\in X.$$

LEMA 4.4. *(V. Berinde [**20**]) Dacă K este conul pozitiv al unui spaţiu Banach ordonat cu norma monotonă, şi $\varphi:K\rightarrow K$ este o funcţie de (c)-comparaţie, atunci au loc următoarele proprietăţi:*

a) $\varphi(t)<t$ *pentru orice* $t\in K$*;*

b) φ *este continuă în* 0*;*

c) *seria* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varphi^k(t)$ *este convergentă pentru orice* $t\in K$*;*

d) *funcţia* $s(t):=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varphi^k(t)$ *este crescătoare şi continuă în* 0*;*

e) *şirul* $\left(\varphi^n(t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *are limita* 0 *(când* $n\rightarrow\infty$*) pentru orice* $t\in K$*.*

DEFINIŢIA 4.8. *Dacă K este conul pozitiv al unui spaţiu Banach ordonat, X este o mulţime şi $d:X\times X\rightarrow K$ satisface proprietăţile:*

1. $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$;
2. $d(x,y)=d(y,x),\ \forall x,y\in X$;
3. $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y),\ \forall x,y,z\in X$,

atunci spunem că (X,d) este un spaţiu metric cu metrica în K.

OBSERVAŢIA 4.1. *Dacă (X,d) este un spaţiu metric generalizat cu metrica în K ($d:X\times X\rightarrow K$), unde K este conul pozitiv al unui spaţiu Banach ordonat cu norma monotonă, atunci vom spune că X este un spaţiu K-metric. În aplicaţii folosim $K=R_+^m$.*

LEMA 4.5. *(Sz. András [**11**]) Dacă $\varphi:K\rightarrow K$ este o funcţie de (c)-comparaţie şi $\left(\alpha_n\right)_{n\in N}$ este un şir de elemente din K, cu proprietatea $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\varphi^{n-k}(\alpha_k)=0$.*

DEMONSTRAŢIE. Descompunem suma după cum urmează:

$$\sum_{k=0}^{n}\varphi^{n-k}(\alpha_k)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\varphi^{n-k}(\alpha_k)+\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n}\varphi^{n-k}(\alpha_k)$$

Din punctul c) al lemei 4.4 deducem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n(\varepsilon)$ astfel încât $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\varphi^{n-k}(\beta) < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru $n \geq n(\varepsilon)$, unde $\beta = \max\{\alpha_k \mid 0 \leq k\}$. Pe de altă parte dacă

$$\gamma_n = \max\left\{\alpha_k \mid \left[\frac{n}{2}\right]+1 \leq k \leq n\right\},$$

atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n = 0$, deci din lema 4.4 punctul d) rezultă că există $m(\varepsilon)$ cu proprietatea $s(\gamma_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq m(\varepsilon)$. Din aceste relaţii obţinem:

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\varphi^{n-k}(\alpha_k)+\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n}\varphi^{n-k}(\alpha_k)\leq$$

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\varphi^{n-k}(\beta)+\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n}\varphi^{n-k}(\gamma_n)\leq\frac{\varepsilon}{2}+s\left(\gamma_n\right)\leq\varepsilon$$

dacă $n \geq \max\{n(\varepsilon), m(\varepsilon)\}$. ■

LEMA 4.6. *(Sz. András* [**11**]*) Fie* (X,d) *un spaţiu* $K-$*metric,* $\varphi : K \to K$ *o funcţie de (c)-comparaţie subaditivă şi* $A, A_n : X \to X$ *operatori cu proprietăţile:*

a) *şirul* $(A_n)_{n\in N}$ *converge punctual către* A;

b) A_n *şi* A *sunt* $\varphi-$*contracţii generalizate pentru orice* $n \in \mathbb{N}$ *(în sensul definiţiei 4.7);*

atunci şirul $(A_n \circ A_{n-1} \circ ... \circ A_1 \circ A_0)(x)$ *converge către unicul punct fix al operatorului* A.

DEMONSTRAŢIE. Dacă notăm cu x^* unicul punct fix al operatorului A, atunci avem următoarele inegalităţi:

$$d\left((A_n \circ A_{n-1} \circ ... \circ A_0)(x), x^*\right) \leq$$

$$d\left((A_n \circ A_{n-1} \circ ... \circ A_0)(x), (A_n \circ A_{n-1} \circ ... \circ A_0)(x^*)\right)+$$

$$+d\left(\left(A_n \circ A_{n-1} \circ ... \circ A_0\right)(x^*), A_n(x^*)\right) + d\left(A_n(x^*), x^*\right) \le$$
$$\varphi^{n+1}(d(x,x^*))+$$
$$+\varphi\left(d\left(\left(A_{n-1} \circ ... \circ A_0\right)(x^*), x^*\right)\right) + d\left(A_n(x^*), x^*\right) \le$$
$$\varphi^{n+1}(d(x,x^*)) + d\left(A_n(x^*), x^*\right) +$$
$$+\varphi\left(d\left(\left(A_{n-1} \circ ... \circ A_0\right)(x^*), A_{n-1}(x^*) + d\left(A_{n-1}(x^*), x^*\right)\right)\right) \le$$
$$\le \varphi^{n+1}(d(x,x^*)) + \varphi\left(d\left(\left(A_{n-1} \circ ... \circ A_0\right)(x^*), A_{n-1}(x^*)\right)\right) +$$
$$\varphi\left(d\left(A_{n-1}(x^*), x^*\right)\right) + d\left(A_n(x^*), x^*\right) \le$$
$$\le \varphi^{n+1}(d(x,x^*)) + \varphi^2\left(d\left(\left(A_{n-2} \circ ... \circ A_0\right)(x^*), x^*\right)\right) +$$
$$\varphi\left(d\left(A_{n-1}(x^*), x^*\right)\right) + d\left(A_n(x^*), x^*\right).$$

Folosind metoda inducţiei matematice putem demonstra:

$$d\left(\left(A_n \circ A_{n-1} \circ ... \circ A_0\right)(x), x^*\right) \le$$
$$\varphi^{n+1}(d(x,x^*)) + \sum_{k=1}^{n+1} \varphi^{n+1-k}(d\left(A_{k-1}(x^*), x\right)^*).$$

Dacă $\alpha_k := d\left(A_k(x^*), x^*\right)$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$, atunci datorită lemei precedente avem:

$$\lim_{n\to\infty} \left(A_n \circ A_{n-1} \circ ... \circ A_0\right)(x) = x^*. \qquad \blacksquare$$

LEMA 4.7. *(Sz. András [**11**]) Fie (X,d) un spaţiu K_1-metric şi (Y,ρ) un spaţiu $K-$metric, unde K şi K_1 sunt conuri pozitive în două spaţii Banach ordonate şi cu normele monotone, $\varphi : K \to K$ o funcţie de (c)-comparaţie, $x_n, x^* \in X$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $T : X \times Y \to Y$ un operator. Dacă*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$;
b) *φ este subaditiv;*
c) *operatorul $T(\cdot, y) : X \to Y$ este continuu pentru orice $y \in Y$;*
d) *operatorul $T(x, \cdot) : Y \to Y$ este o $\varphi-$contracţie generalizată pentru orice $x \in X$;*
e) *(Y,ρ) este un spaţiu $K-$metric complet;*

atunci şirul $y_{n+1} = T(x_n, y_n)$, $y_1 = y$ *converge către unicul punct fix al operatorului* $T(x^*, \cdot) : Y \to Y, \forall y \in Y$.

DEMONSTRAŢIE. În lema 4.6 considerăm operatorii $A_n : Y \to Y$, $A_n(y) = f(x_n, y)$ şi $A : Y \to Y$, $A(y) = f(x^*, y)$. ∎

Folosind aceste leme demonstrăm principalul rezultat din acest paragraf, care este o extindere a teoremei 3.2.1. din [**112**] (M.A. Şerban) şi ne va permite să folosim technica operatorilor Picard pe fibre în cazul unor sisteme de ecuaţii integrale mixte Fredholm-Volterra.

TEOREMA 4.4. *(Sz. András* [**11**]*) Fie* (X_j, d_j) *spaţii* K_j-*metrice complete pentru* $j = \overline{1,p}$, *şi* (X_0, d_0) *un spaţiu* K_0-*metric, unde* $K_j, j = \overline{0,p}$ *sunt conurile pozitive ale unor spaţii Banach ordonate, fiecare având norma monotonă în raport cu ordonarea. Dacă operatorii* $A_k : X_0 \times X_1 \times ... \times X_k \to X_k, k = \overline{0,p}$ *satisfac condiţiile:*

a) *operatorul* A_0 *este (slab) Picard;*
b) *există funcţiile de (c)-comparaţie subaditive* $\varphi_j : K_j \to K_j$ *astfel încât operatorii* $A_j(x_0, x_1, ..., x_{j-1}, \cdot) : X_j \to X_j$ *să fie* φ_j-*contracţii pentru* $j = \overline{1,p}$;
c) *operatorul* A_j *este continuu în raport cu* $(x_0, x_1, ..., x_{j-1})$ *pentru orice* $x_j \in X_j$ *şi* $j = \overline{1,p}$;

atunci operatorul triunghiular $B_p = (A_0, A_1, ..., A_{p-1}, A_p)$ *este (slab) Picard. Mai mult, dacă* A_0 *este un operator Picard, şi* $F_{A_0} = \{x_0^*\}$, $F_{A_1(x_0^*,\cdot)} = \{x_1^*\}$, ... , $F_{A_p(x_0^*,x_1^*,...,x_{p-1}^*,\cdot)} = \left\{x_p^*\right\}$, *atunci*

$$F_{B_p} = \left\{\left(x_0^*, x_1^*, ..., x_{p-1}^*, x_p^*\right)\right\}.$$

DEMONSTRAŢIE. Demonstrăm teorema enunţată prin metoda inducţiei matematice. Pentru $p = 1$ considerăm elementele arbitrare

$x_0 \in X_0$ şi $x_1 \in X_1$. Construim şirul de aproximaţii succesive pentru operatorul $B_1 = (A_0, A_1)$ prin relaţiile:

$$\left(x_0^{n+1}, x_1^{n+1}\right) = B_1\left(x_0^n, x_1^n\right) = \left(A_0(x_0^n), A_1\left(x_0^n, x_1^n\right)\right).$$

Din această construcţie rezultă că $x_0^n \longrightarrow x_0^*$ (deoarece A_0 este un operator (slab) Picard) şi $x_1^{n+1} = A_1\left(x_0^n, x_1^n\right)$, deci condiţiile lemei 4.7 sunt satisfăcute. Astfel $x_1^n \longrightarrow x_1^*$, unde x_1^* este unicul punct fix al operatorului $A_1\left(x_0^*, \cdot\right) : X_1 \to X_1$. De aici rezultă că operatorul $B_1 = (A_0, A_1)$ este un operator (slab) Picard. Pentru a doua parte a inducţiei observăm că $B_{k+1} = (B_k, A_{k+1})$ şi operatorii B_k respectiv A_{k+1} satisfac condiţiile cazului $p = 1$ datorită ipotezei inductive, deci conform principiului inducţiei matematice demonstraţia este completă. ∎

Observaţia 4.2. *Dacă $K_j = R_+$ pentru $j = \overline{0, p}$, obţinem teorema 4.3, iar în cazul $p = 1, K_0 = \mathbb{R}_+^p, K_1 = \mathbb{R}_+^m$, $\varphi_1 : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}_+^m$ cu $\varphi_1(t) = Q \cdot t$, unde Q este o matrice convergentă către 0, obţinem teorema 5.1. Această teoremă permite să folosim aceeaşi technică şi în cazul sistemelor de ecuaţii integrale.*

În încheierea acestui paragraf prezentăm o aplicaţie a teoremei precedente la studiul sistemului de ecuaţii integrale:

$$x(t) = g(t) + \lambda \cdot \int_a^b K(t, s, x(s))ds \quad t \in [a, b] \tag{4.10}$$

unde $g \in C\left([a, b], \mathbb{R}^n\right), K \in C\left([a,\, b] \times [a,\, b] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right)$ şi funcţia necunoscută este o funcţie cu valori vectoriale $x \in C\left([a, b], \mathbb{R}^n\right)$. În spaţiul $C\left([a, b], \mathbb{R}^n\right)$ considerăm norma Cebîsev definită prin relaţia

$\|x\| = \begin{pmatrix} \|x_1\|_\infty \\ \|x_2\|_\infty \\ ... \\ \|x_n\|_\infty \end{pmatrix}$, pentru orice $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \in C([a,b], \mathbb{R}^n)$, unde $\|x_k\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x_k(t)|$. Cu această normă spaţiul $C([a,b], \mathbb{R}^n)$ este un spaţiu Banach.

TEOREMA 4.5. *(Sz. András [**11**]) Dacă*

a) $g \in C([a,b], \mathbb{R}^n)$, $K \in C([a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$;

b) *există o funcţie* $\varphi_0 : [a,b] \times \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ *astfel încât*

$$\|K(t, s, u) - K(t, s, v)\|_n \leq \varphi_0(s, \|u - v\|)$$

pentru orice $u, v \in \mathbb{R}^n$ *şi* $t \in [a,b]$, *unde* $\|\cdot\|_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n_+$ *este norma definită de relaţia*

$$\|u\|_n = \begin{pmatrix} |u_1| \\ |u_2| \\ ... \\ |u_n| \end{pmatrix}, \forall u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ ... \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n;$$

c) *funcţia* $\varphi : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ *definită de* $\varphi(w) = \lambda_0 \cdot \int\limits_a^b \varphi_0(s,w)ds$ *este o funcţie de (c)-comparaţie,*

atunci

1) *ecuaţia 4.10 are o soluţie unică* $x^*(\cdot,\lambda)$ *în* $C([a,b], \mathbb{R}^n)$, *pentru orice* $\lambda \in [-\lambda_0, \lambda_0]$;

2) *pentru orice element* $x_0 \in C([a,b], \mathbb{R}^n)$ *şirul* $(x_n)_{n\in N}$ *definit de relaţia*

$$x_{n+1}(t) = g(t) + \lambda \cdot \int\limits_a^b K(t,s,x_n(s))ds, t \in [a,b]$$

converge uniform către x^*, *pentru orice* $\lambda \in [-\lambda_0, \lambda_0]$;

3) *are loc inegalitatea*

$$\|x_n - x^*\| \leq s\left(\|x_1 - x_0\|\right),$$

unde $s(w) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi^k(w)$;

4) *funcţia* $x^* : [a,b] \times [-\lambda_0, \lambda_0] \to \mathbb{R}$ *este continuă*

5) *dacă* $K(t,\, s,\, \cdot) \in C^1(\mathbb{R})$ *pentru orice* $t, s \in [a,b]$, *atunci* $x^*(t,\cdot) \in C^1\left([-\lambda_0, \lambda_0]\right), \forall t \in [a,b]$.

Demonstraţie. Considerăm spaţiul Banach

$$X := \left(C\left([a,b] \times [-\lambda_0, \lambda_0], \mathbb{R}^n\right), \|\cdot\|\right)$$

şi operatorul $A_0 : X \to X$, definit prin relaţia

$$A_0(x)(t,\lambda) = g(t) + \lambda \cdot \int\limits_a^b K(t,s,x(s,\lambda))ds, \forall t \in [a,\, b] \text{ şi } \lambda \in [-\lambda_0, \lambda_0].$$

Datorită condiţiilor b) şi c) operatorul A_0 este o $\varphi-$contracţie, deci aplicând teorema 2.2.1. din [**20**] (V. Berinde) obţinem 1)-4). Pentru a demonstra 5) considerăm operatorul $A_1 : X \times X \to X$ definit prin relaţia

$$A_1(x,y)(t,\lambda) = \int\limits_a^b K(t,s,x(s,\lambda))ds + \lambda \cdot \int\limits_a^b \frac{\partial K(t,s,x(s,\lambda))}{\partial x} \cdot y(s,\lambda)ds.$$

Datorită condiţiilor b) şi c) obţinem

$$\|A_1(x,\, y_1) - A_1(x,\, y_2)\| \leq \varphi(\|y_1 - y_2\|),$$

deci teorema 4.4 implică convergenţa uniformă a şirurilor

$$x_{n+1}(t,\lambda) = g(t) + \lambda \cdot \int\limits_a^b K(t,s,x_n(s,\lambda))ds \text{ şi}$$

$$y_{n+1}(t,\lambda) = \int\limits_a^b K(t,s,x_n(s,\lambda))ds + \lambda \cdot \int\limits_a^b \frac{\partial K(t,s,x_n(s,\lambda))}{\partial x_n} \cdot y(s,\lambda)ds$$

către x^*, respectiv y^*. Pe de altă parte luând $y_1 = \frac{\partial x_1}{\partial \lambda}$, obţinem $y_n = \frac{\partial x_n}{\partial \lambda}$, pentru orice $n \in \mathbb{R}$, deci teorema lui Weierstrass implică existenţa derivatei $\frac{\partial x^*}{\partial \lambda}$ şi a egalităţii $\frac{\partial x^*}{\partial \lambda} = y^*$. ■

5. Teoreme de punct fix

5.1. Teorema de punct fix a lui Schauder. Această teoremă este generalizarea teoremei lui Brouwer pentru spaţii infinit dimensionale.

Definiţia 5.1. ([**89**]) *Dacă X, Y sunt spaţii Banach şi $T : D \subset X \to Y$ atunci vom spune că*

a) *operatorul T este mărginit dacă transformă mulţimile mărginite în mulţimi mărginite;*
b) *operatorul T este compact dacă transformă mulţimile mărginite în mulţimi relativ compacte;*
c) *operatorul T este complet continuu dacă este continuu şi compact;*
d) *operatorul T este de rang finit dacă $T(D)$ este inclus într-un spaţiu finit dimensional.*

Teorema 5.1. ([**91**])

a) *Dacă operatorii $T_k : D \to Y$, $D \subset X$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sunt complet continui şi $T : D \to Y$ satisface condiţia*

$$T(u) = \lim_{k \to \infty} T_k(u) \tag{5.11}$$

unde convergenţa este uniformă pe orice submulţime mărginită a lui D, atunci T este complet continuu.

b) *Dacă $D \subset X$ este o submulţime mărginită şi închisă şi $T : D \to Y$ este un operator complet continuu, atunci există* *un şir de operatori complet continui de rang finit* $T_k : D \to Y$ *astfel încât*

$$T(u) = \lim_{k\to\infty} T_k(u)$$

uniform pe D *şi* $T_k(D) \subset \mathrm{conv}(T(D))$, $\forall k \geq 1$.

DEMONSTRAŢIE. a) Demonstrăm că T este continuu în orice punct $u_0 \in D$. Din inegalitatea

$$\|T(u) - T(u_0)\|_Y \leq \|T(u) - T_k(u)\|_Y + \|T_k(u) - T_k(u_0)\|_Y +$$

$$+ \|T_k(u_0) - T(u_0)\|_Y,$$

relaţia (5.11) şi continuitatea lui T_k obţinem pentru orice $\varepsilon > 0$ un $k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\|T(u) - T_k(u)\|_Y < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall u \in B_r(u_0),\ \forall k \geq k(\varepsilon)$$

şi pentru un $k \geq k(\varepsilon)$ există $\overline{\delta} > 0$ astfel încât

$$\|T_k(u) - T_k(u_0)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{dacă } u \in B_{\overline{\delta}}(u_0).$$

Alegând $\delta = \min(r, \overline{\delta})$ am obţinut

$$\|T(u) - T(u_0)\|_Y \leq \varepsilon, \quad \forall u \in B_\delta(u_0),$$

deci T este continuu. Fie $M \subset D$ o submulţime mărginită. $T_k(M)$ este relativ compactă şi $T(M)$ este limita uniformă a lui $T_k(M)$ când $k \to \infty$. De aici rezultă că $T(M)$ este relativ compactă, deci operatorul este complet continuu.

b) T fiind complet continuu $T(D)$ este relativ compactă şi astfel pentru orice $\varepsilon > 0$ există o ε-reţea finită, deci există elementele $v_j \in T(D)$, $j = \overline{1, m_\varepsilon}$ astfel încât $\overline{T(D)} \subset \bigcup_{j=1}^{m_\varepsilon} B_\varepsilon(v_j)$.

Considerăm o partiţie a unităţii subordonată acestei acoperiri, deci funcţiile $\varphi_j \in C(\overline{T(D)};[0,1])$ cu $\operatorname{supp}\varphi_j \subset \overline{B_\varepsilon}(v_j)$ şi $\sum\limits_{j=1}^{m_\varepsilon} \varphi_j(v) = 1$, $\forall v \in \overline{T(D)}$ şi definim operatorul $T_\varepsilon : D \to Y$ cu relaţia

$$T_\varepsilon(u) = \sum_{j=1}^{m_\varepsilon} \varphi_j(T(u)) \cdot v_j, \quad \forall u \in D.$$

Din definiţia lui T_ε rezultă că T_ε este un operator continuu de rang finit şi avem relaţiile

$$\|T(u) - T_\varepsilon(u)\|_Y = \left\| \sum_{j=1}^{m_\varepsilon} \varphi_j(T(u))(T(u) - v_j) \right\|_Y \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{m_\varepsilon} \varphi_j(T(u)) \|T(u) - v_j\|_Y \le \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^{m_\varepsilon} \varphi_j(T(u)) = \varepsilon.$$

Estimarea are loc pentru orice $u \in D$, deci $T(u) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} T_\varepsilon(u)$ uniform pentru $u \in D$. ■

TEOREMA 5.2. *(Teorema lui Schauder;* [**91**]*) Fie X un spaţiu Banach, $K \subset X$ o submulţime nevidă, compactă şi convexă. Dacă $T : K \to K$ este un operator continuu, atunci T are cel puţin un punct fix.*

DEMONSTRAŢIE. T este complet continuu (K – compact), deci există operatorii complet continui cu rang finit $T_j : K \to K$ astfel încât $T(u) = \lim\limits_{j \to \infty} T_j(u)$ uniform pe K. Dacă X_j este subspaţiul finit dimensional în care se scufundă $T_j(K)$, atunci $T_j : K \cap X_j \to K \cap X_j$ şi din teorema lui Brouwer rezultă că există $u_j \in K \cap X_j$ astfel încât $u_j = T_j(u_j)$. K fiind compact, şirul $(u_j)_{j \ge 1}$ are un subşir convergent la un element $u \in K$, deci avem

$$u = \lim_{j \to \infty} u_j = \lim_{j \to \infty} T_j(u_j) = T(u).$$

■

TEOREMA 5.3. *(Lema lui Mazur; [**91**]) Dacă X este un spaţiu Banach şi $Y \subset X$ este o submulţime relativ compactă, atunci închiderea convexă a lui Y este o submulţime relativ compactă.*

DEMONSTRAŢIE. Y fiind relativ compactă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o ε-reţea finită, deci există $u_1, u_2, \ldots, u_m \in X$ astfel încât

$$Y \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_\varepsilon(u_i).$$

Dacă $R = \operatorname{conv}\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ atunci pentru orice $u \in \operatorname{conv} Y$ avem

$$u = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$$

cu $v_j \in Y$, $\lambda_j > 0$, $j = \overline{1,n}$ şi $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$. Dar pentru fiecare v_j există $u_{i_j} \in \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ astfel încât $\|v_j - u_{i_j}\| < \varepsilon$, deci

$$\|u - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_{i_j}\| = \|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (v_j - u_{i_j})\| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \|v_j - u_j\| \leq \varepsilon.$$

Astfel R este o ε-reţea pentru $\operatorname{conv} Y$. Pe de altă parte R este inclus în subspaţiul finit dimensional generat de $u_1, u_2, \ldots, u_m$ şi în X, deci R este o ε-reţea relativ compactă pentru $\operatorname{conv} Y$ şi de aici rezultă că mulţimea $\operatorname{conv} Y$ este relativ compactă. ∎

TEOREMA 5.4. *(Schauder; [**91**]) Dacă X este un spaţiu Banach, $D \subset X$ o submulţime nevidă, mărginită, închisă şi convexă iar $T : D \to D$ un operator complet continuu, atunci T are cel puţin un punct fix.*

Demonstraţie. T este complet continuu, deci $T(D)$ este relativ compactă şi astfel $\overline{\text{conv}}T(D)$ este o mulţime nevidă compactă şi convexă. Din $T(D) \subset D$ rezultă $\operatorname{conv} T(D) \subset \operatorname{conv} D = D$ şi $\overline{\text{conv}}T(D) \subset \overline{D} = D$, deci operatorul

$$\overline{T} : \overline{\text{conv}}T(D) \to \overline{\text{conv}}T(D), \quad \overline{T}(u) = T(u)$$

este un operator complet continuu. Din teorema lui Schauder rezultă că există $u \in \overline{\text{conv}}T(D) \subset D$ astfel încât $\overline{T}(u) = u$, deci $T(u) = u$. ■

5.2. Teorema lui Mönch. În această teoremă condiţia de compactitate a operatorului este înlocuită cu o altă condiţie (numită condiţia lui Mönch).

Teorema 5.5. *(*[**4**]*) Fie Ω o submulţime deschisă şi convexă a spaţiului Banach X şi $x_0 \in \Omega$ un element fixat. Dacă operatorul continuu $T : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ satisface condiţia:*

$C \subseteq \overline{\Omega}$ numărabilă şi $C \subseteq \overline{\text{conv}}(\{x_0\} \cup T(C))$ implică C relativ compactă,

atunci T are cel puţin un punct fix în $\overline{\Omega}$.

Demonstraţie. Construim mulţimile

$$D_0 = \{x_0\}, \quad D_n = \operatorname{conv}\left(\{x_0\} \cup T(D_{n-1})\right), \quad \forall n \geq 1.$$

Imaginea unei mulţimi compacte printr-o funcţie continuă este compactă şi din lema lui Mazur deducem (inductiv) că mulţimile D_n sunt relativ compacte. Din construcţia acestor mulţimi rezultă că

$$D_0 \subseteq D_1 \subseteq D_2 \subseteq \ldots \subseteq D_{n-1} \subseteq D_n \subseteq \ldots \subseteq \overline{\Omega}.$$

Mulţimile D_n sunt separabile, deci există mulţimile numărabile C_n cu proprietatea $\overline{C_n} = \overline{D_n}$, $\forall n \geq 0$. Considerăm mulţimile

$$D = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n \quad \text{şi} \quad C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Avem

$$D = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{conv}(\{x_0\} \cup T(D_{n-1})) = \operatorname{conv}(\{x_0\} \cup T(D))$$

şi

$$\overline{D} = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} D_n} = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{D_n}} = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{C_n}} = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n} = \overline{C}$$

$\left(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \overline{D_n} \subset \overline{\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} D_n} \text{ şi } D_n \subset \overline{D_n} \right)$, deci

$$C \subseteq \overline{C} = \overline{D} = \overline{\operatorname{conv}}(\{x_0\} \cup T(D)) = \overline{\operatorname{conv}}(\{x_0\} \cup T(\overline{D})) =$$

$$= \overline{\operatorname{conv}}(\{x_0\} \cup T(\overline{C})) = \overline{\operatorname{conv}}(\{x_0\} \cup T(C))$$

(deoarece $T(D) \cup \{x_0\} \subseteq T(\overline{D}) \cup \{x_0\} \subseteq \overline{T(D) \cup \{x_0\}} \subseteq \overline{\operatorname{conv}}(T(D) \cup \{x_0\})$ şi astfel $\overline{\operatorname{conv}}(T(D) \cup \{x_0\}) = \overline{\operatorname{conv}}(T(\overline{D}) \cup \{x_0\})$).
Din condiţia teoremei şi faptul că C este o mulţime numărabilă (reuniunea numărabilă a unor mulţimi numărabile) rezultă că $\overline{C}$ este compactă, deci şi $\overline{D}$ este o mulţime compactă. Din egalitatea

$$\overline{D} = \overline{\operatorname{conv}}(\{x_0\} \cup T(\overline{D}))$$

deducem $T(\overline{D}) \subset \overline{D}$, deci putem aplica teorema lui Schauder pentru operatorul $T : \overline{D} \to \overline{D}$. ■

TEOREMA 5.6. *(Teorema lui Mönch;* [**4**]*) Fie Y o submulţime închisă şi convexă a spaţiului Banach X şi $x_0 \in Y$ un element fixat. Dacă operatorul continuu $T : Y \to Y$ satisface proprietatea*

$Z \subseteq Y$ numărabilă şi $Z \subseteq \overline{\text{conv}}(\{x_0\} \cup T(Z))$ implică Z relativ compactă,
atunci T are cel puţin un punct fix în Y.

DEMONSTRAŢIE. Aceeaşi construcţie ca şi în teorema precedentă. ■

5.3. Alternativa Leray-Schauder. În teoremele de tip Leray-Schauder existenţa unei mulţimi invariante este înlocuită cu o condiţie pe frontiera domeniului de definiţie.

TEOREMA 5.7. *([**4**]) Fie X un spaţiu Banach, Y o submulţime închisă şi convexă, Z o submulţime deschisă a lui Y şi $p \in Z$ un element fixat. Dacă $T : \overline{Z} \to Y$ este un operator complet continuu, atunci*

1. *T are cel puţin un punct fix în $\overline{Z}$, sau*
2. *există $u \in \partial Z$ şi $\lambda \in (0, 1)$ astfel încât*

$$u = \lambda T(u) + (1 - \lambda)p.$$

DEMONSTRAŢIE. Presupunem că nu are loc 2. şi demonstrăm că are loc 1. Dacă

$$u \neq \lambda T(u) + (1 - \lambda)p, \quad \forall u \in \partial U, \ \forall \lambda \in [0, 1]$$

atunci considerăm mulţimea

$$A = \left\{ x \in \overline{U} \middle| x = tT(x) + (1 - t)p \text{ cu } t \in [0, 1] \right\}.$$

$A \neq \emptyset$ deoarece $p \in A$. Din continuitatea lui T rezultă că A este închisă şi din presupunerea iniţială deducem $A \cap \partial U = \emptyset$. Astfel din lema lui Urysohn rezultă că există o funcţie continuă $\mu : \overline{U} \to [0, 1]$ astfel încât

$$\mu(A) = 1 \quad \text{şi} \quad \mu(\partial U) = 0.$$

Construim operatorul

$$N(x) = \begin{cases} \mu(x)T(x) + (1-\mu(x))p, & x \in \overline{U} \\ p, & x \in C \setminus \overline{U} \end{cases}.$$

Operatorul $N : C \to C$ este complet continuu deoarece

$$N(C) \subseteq \overline{\text{conv}}(T(\overline{U}) \cup \{p\}),$$

deci conform teoremei lui Schauder există $x \in C$ cu proprietatea $x = N(x)$. Din $p \in U$ rezultă că avem

$$x = \mu(x) \cdot T(x) + (1-\mu(x)) \cdot p,$$

deci $x \in A$ şi astfel $\mu(x) = 1$, deci $x = T(x)$. ■

Această teoremă se poate extinde la operatori de tip Mönch.

TEOREMA 5.8. *([**4**]) Fie X un spaţiu Banach, Y o submulţime închisă şi convexă, Z o submulţime deschisă a lui Y şi $p \in Z$ un element fixat. Dacă operatorul continuu $T : \overline{Z} \to Y$ satisface condiţia lui Mönch ($W \subseteq \overline{Z}$ numărabilă şi $W \subset \overline{\text{conv}}(\{p\} \cup T(W)) \Rightarrow \overline{W}$ compact) şi $x \neq \lambda \cdot T(x) + (1-\lambda)p$, $\forall x \in \partial Z$, $\forall \lambda \in [0,1]$, atunci T are cel puţin un punct fix în $\overline{Z}$.*

DEMONSTRAŢIE. Presupunem că T nu are puncte fixe pe ∂U. Astfel

$$x \neq \lambda T(x) + (1-\lambda)p, \quad \forall x \in \partial U,\ \forall \lambda \in [0,1].$$

Considerăm mulţimea

$$A = \left\{x \in \overline{U} \middle| \exists \lambda \in [0,1] \text{ astfel încât } x = \lambda T(x) + (1-\lambda)p\right\}.$$

Mulţimea A este nevidă, închisă şi $A \cap \partial U = \emptyset$. Din lema lui Urysohn rezultă că există $\mu : \overline{U} \to [0,1]$ continuă cu proprietatea $\mu y(A) = 1$

şi $\mu(\partial U) = 0$. Construim operatorul $N : C \to C$,

$$N(x) = \begin{cases} \mu(x)T(x) + (1 - \mu(x))p, & x \in \overline{U} \\ p, & x \in C \setminus \overline{U} \end{cases}.$$

Acest operator este continuu şi satisface condiţia lui Mönch. Fie $D \subseteq C$ o mulţime numărabilă cu proprietatea $D \subseteq \overline{\text{conv}}(\{p\} \cup N(D))$. Din

$$N(D) \subseteq \text{conv}(T(D \cap \overline{U}) \cup \{p\}),$$

$$\{p\} \cup \text{conv}(T(D \cap \overline{U}) \cup \{p\}) = \text{conv}(T(D \cap \overline{U}) \cup \{p\})$$

avem

$$D \subseteq \overline{\text{conv}}(\{p\} \cup \text{conv}(T(D \cap \overline{U}) \cup \{p\})) =$$

$$= \overline{\text{conv}}(\{p\} \cup \text{conv}(T(D \cap \overline{U}))) =$$

$$= \overline{\text{conv}}(\{p\} \cup T(D \cap \overline{U})).$$

$D \cap \overline{U}$ este numărabilă şi avem

$$D \cap \overline{U} \subset \overline{\text{conv}}(\{p\} \cup T(D \cap \overline{U})),$$

deci putem folosi condiţia lui Mönch pentru T. Astfel $\overline{D \cap \overline{U}}$ este compact. Din lema lui Mazur deducem că $\overline{\text{conv}}\left(F(\overline{D \cap \overline{U}}) \cup \{p\}\right)$ este compact, deci din $D \subseteq \overline{\text{conv}}\left(F(\overline{D \cap \overline{U}}) \cup \{p\}\right)$ rezultă că şi $\overline{D}$ este compact. Aplicând teorema lui Mönch operatorului $N : C \to C$ deducem existenţa unui element $x \in C$ cu proprietatea $x = N(x)$. Din $p \in U$ rezultă $x \in U$ şi astfel avem relaţia

$$x = \mu(x)T(x) + 1 - \mu(x))p$$

de unde rezultă $x \in A$ şi $\mu(x) = 1$, deci $x = T(x)$. ■

Un caz particular al teoremei 5.8 este rezultatul următor:

TEOREMA 5.9. *([**4**]) Fie X un spaţiu Banach, Y o mulţime închisă, convexă, Z o submulţime deschisă a lui Y şi $p \in Z$ un element fixat. Dacă operatorul $T : \overline{Z} \to Y$ este un operator continuu, α condensator cu $T(\overline{Z})$ mărginit şi*

$$x \neq \lambda T(x) + (1-\lambda)p, \quad \forall x \in \partial Z,\ \forall \lambda \in (0,1),$$

atunci T are cel puţin un punct fix în $\overline{Z}$. (α este măsura lui Kuratowski de necompactitate şi printr-un operator α condensator înţelegem un operator T cu proprietatea $\alpha(T(W)) < \alpha(W)$ pentru orice mulţime mărginită cu proprietatea $\alpha(W) \neq 0$.)

DEMONSTRAŢIE. Aplicăm teorema 5.8. Fie $D \subseteq \overline{U}$ o mulţime măsurabilă cu proprietatea $D \subseteq \overline{\mathrm{conv}}(\{p\} \cup T(D))$. Dacă $\alpha(1) \neq 0$, atunci

$$\alpha(D) \leq \alpha\left(\overline{\mathrm{conv}}(\{p\} \cup T(D))\right) = \alpha(T(D)) < \alpha(D),$$

deci $\alpha(D) = 0$ şi astfel D este relativ compactă. De aici rezultă că operatorul T satisface condiţiile teoremei 5.8, deci are cel puţin un punct fix în $\overline{U}$. ■

5.4. Teorema lui Krasnoselskii. Teoremele de tip Krasnoselskii se referă la existenţa punctului fix al operatorilor care se pot scrie ca suma unui operator contractiv şi a unui operator complet continuu.

TEOREMA 5.10. *([**4**]) Fie X un spaţiu Banach, Y o mulţime închisă şi convexă, Z o submulţime deshisă a lui Y şi $p \in Z$ un element fixat. Dacă operatorul $T : \overline{Z} \to Y$ are proprietăţile*

1. *$T = T_1 + T_2$ cu*
2. *$T_1 : \overline{Z} \to Y$ complet continuu;*

3. $T_2 : \overline{Z} \to Y$ *φ-contracţie;*
4. $T(\overline{Z})$ *este mărginit în* Y,

atunci

a) T *are cel puţin un punct fix în* $\overline{Z}$, *sau*
b) $\exists u \in \partial Z$ *şi* $\lambda \in (0,1)$ *astfel încât*

$$u = \lambda T(u) + (1-\lambda)p.$$

Demonstraţie. Fie $D \subset \overline{U}$ o submulţime mărginită.

$$\alpha(T(D)) \leq \alpha(T_1(D)) + \alpha(T_2(D)) = \alpha(T_2(D)),$$

deoarece T_1 este complet continuu. Dar

$$\alpha(T_2(D)) \leq \Phi(\alpha(D)), \quad \text{deci}$$

$$\alpha(T(D)) \leq \Phi(\alpha(D)).$$

Aplicând teorema 5.9 obţinem proprietatea enunţată. ■

5.5. Teorema lui Tihonov. În studiul ecuaţiilor integrale pe domenii necompacte sunt necesare teoreme de punct fix mai generale decât cele prezentate până acum deoarece spaţiile de funcţii folosite de regulă nu mai sunt spaţii Banach.

Teorema 5.11. *([**4**]) Fie X un spaţiu vectorial topologic local convex (Hausdorff), Y o submulţime compactă şi Z o submulţime convexă cu $Y \subseteq Z$. Pentru orice vecinătate deshisă V a lui 0 există o funcţie continuă $P_V : A \to X$ cu proprietăţile:*

a) $P_V(x) \in L \cap Z$, $\forall x \in Y$;
b) $P_V(x) - x \in V$, $\forall x \in Y$,

unde L este un subspaţiu finit dimensional al lui X.

Demonstraţie. Presupunem că U este o vecinătate convexă şi echilibrată. Fie

$$|x|_U := \inf\{\alpha > 0 \big| x \in \alpha U\}$$

funcţionala Minkowski ataşată vecinătăţii U. Funcţia $x \to |x|_U$ este o seminormă continuă pe X şi

$$U = \{x \big| x \in X \text{ pentru care } |x|_U < 1\}.$$

A este compact, deci există o mulţime finită $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq A$ cu proprietatea

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U(a_i)$$

unde $U(a) = U + a$, $\forall a \in X$.
Definim funcţiile μ_i, $i = \overline{1, n}$ cu relaţiile

$$\mu_i(x) = \max\{0, 1 - |x - a_i|_U\}, \quad \forall x \in X,\ i = \overline{1, n}.$$

Din continuitatea funcţionalei Minkowski rezultă că şi μ_i este continuă şi avem

$$0 \leq \mu_i(x) \leq 1, \quad \forall x \in X.$$

$$\mu_i(x) = 0, \quad \text{dacă } x \in U(a_i) \text{ şi}$$

$$\mu_i(x) > 0 \quad \text{dacă } x \notin U(a_i).$$

Considerăm funcţia

$$P_U(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x) a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x)}, \quad \forall x \in A.$$

Funcţia este bine definită, deoarece $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x) > 0$ pentru orice $x \in X$, este continuă şi îşi ia valorile din subspaţiul finit dimensional generat de $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Din $A \subseteq C$ şi C convex deducem $P_U(x) \in C$,

$\forall x \in A$, deci proprietatea a) este verificată.
Pe de altă parte

$$|P_U(x) - x|_U = \frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x)(a_i - x)\right|_U}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x)} \leq$$

$$\leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x)|a_i - x|_U}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i(x)} < 1, \quad \forall x \in A$$

deoarece pentru orice $x \in A$ ori $\mu_i(x) = 0$ şi $|a_i - x|_U \geq 1$ sau $\mu_i(x) > 0$ şi $|a_i - x|_U < 1$. De aici rezultă $P_U(x) - x \in U$, $\forall x \in A$. ■

TEOREMA 5.12. *(*[**4**]*) Dacă X este un spaţiu vectorial topologic local convex (Hausdorff), Y o submulţime convexă şi $T : Y \to X$ un operator continuu cu proprietatea*

$$T(Y) \subseteq Z \subseteq Y$$

cu Z compact, atunci T are cel puţin un punct fix.

DEMONSTRAŢIE. Fie U o vecinătate deschisă, convexă şi echilibrată a lui 0 şi P_U operatorul definit de teorema 5.11. Definim operatorul $T_U : L \cap C \to L \cap C$ prin

$$T_U(x) = P_U(F(x)), \quad \forall x \in C.$$

(Operatorul este corect definit deoarece $P_U(F(x)) \in L \cap C$, $\forall x \in C$.) Fie K^* învelitoarea convexă a mulţimii $P_U(A)$ (în L). Din

$$T_U(L \cap C) \subseteq P_U(A) \subseteq L \cap C$$

rezultă

$$P_U(A) \subseteq K^* \subseteq L \cap C$$

şi

$$T_U(K^*) \subseteq K^*,$$

K^* fiind mulţime compactă în spaţiul finit dimensional L putem aplica teorema lui Brouwer, deci există $x \in K^*$ cu proprietatea $x = T_U(x)$. Astfel, pentru orice vecinătate deschisă U al lui 0, există $x \in K^* \subseteq C$ astfel încât

$$x - T(x) \in U \tag{5.12}$$

Dacă $x \neq T(x)$, $\forall x \in C$ atunci din continuitatea lui T şi separabilitatea lui X rezultă că există vecinităţile V_x şi W_x cu proprietatea

$$T(C \cap V_x(x)) \subseteq W_x(T(x)) \tag{5.13}$$

şi

$$V_x(x) \cap W_x(T(x)) \neq \emptyset. \tag{5.14}$$

Alegem vecinătatea U_x astfel încât să avem

$$2U_x \subseteq V_x \cap W_x.$$

Deoarece A este compactă, există o mulţime finită $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq A$ astfel încât

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}(a_i). \tag{5.15}$$

Demonstrăm că pentru orice $x \in C$ nu poate exista $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ cu proprietatea

$$x - T(x) \subseteq U_{a_j}.$$

Fie $x \in C$ un element fixat şi $y = T(x) \in A$. Din (5.15) rezultă că există $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât $y \in U_{a_j}(a_j)$. Dar $U_{a_j}(y) \subseteq V_{a_j}(a_j)$ ($y = u + a_j$ cu $u \in U_{a_j}$, deci dacă $z \in U_{a_j}(y)$, atunci $z = w + y = w + u + a_j$, unde $w \in U_{a_j}$ şi astfel $z \in 2U_{a_j} + a_j \subset V_{a_j}(a_j)$ datorită

alegerii lui U_{a_j}) deci dacă pentru orice $x \in U_{a_j}(y)$, atunci $x \in V_{a_j}(a_j)$. Pe de altă parte $y = F(x) \in W_{a_j}(T(a_j))$ din relaţia (5.13) şi astfel din (5.14) rezultă că $y \notin V_{a_j}(a_j)$ ceea ce contrazice $U_{a_j}(y) \subseteq V_{a_j}(a_j)$.
În consecinţă pentru $U \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{a_i}$ avem

$$x - T(x) \notin U, \quad \forall x \in C.$$

Această proprietate contrazice (5.12), deci există $x \in C$ cu proprietatea $x \in T(x)$. ■

TEOREMA 5.13. *([**4**]) Dacă Y este o submulţime convexă a unui spaţiu local convex separabil şi $T : Y \to Y$ este un operator complet continuu, atunci T are cel puţin un punct fix.*

DEMONSTRAŢIE. Considerăm în teorema 5.12 $A = \overline{T(C)}$. ■

TEOREMA 5.14. *([**4**]) Fie X un spaţiu local convex separabil, Y o submulţime convexă, Z o submulţime deschisă a lui Y şi $p \in Z$ un element fixat. Dacă operatorul $T : \overline{Z} \to Y$ ($\overline{Z}$ este închiderea în Y) este complet continuu, atunci avem următoarea alternativă:*

a) *T are punct fix în $\overline{Z}$, sau*
b) *există $u \in \partial Z$ şi $\lambda \in (0, 1)$ astfel încât*

$$u = \lambda \cdot T(u) + (1 - \lambda)p.$$

DEMONSTRAŢIE. Presupunem că b) nu are loc şi T nu are punct fix în ∂U. Mulţimea

$$A = \left\{ x \in \overline{U} \middle| \exists \lambda \in [0, 1] : x = \lambda T(x) + (1 - \lambda)p \right\}$$

este nevidă ($p \in U$) şi închisă.
Operatorul $T : \overline{U} \to C$ fiind complet continuu rezultă că $\overline{A}$ este compact. Deoarece $A \cap \partial U = \emptyset$, C este complet regular, A compact

şi ∂U închis există funcţia $\mu : \overline{U} \to [0,1]$ cu proprietatea $\mu(A) = 1$ şi $\mu(\partial U) = 0$. Considerăm operatorul $N : C \to C$ definit prin

$$N(x) = \begin{cases} \mu(x)T(x) + (1 - \mu(x))p, & x \in \overline{U} \\ p, & x \in C \setminus \overline{U} \end{cases}.$$

Acest operator este complet continuu, deci teorema 5.13 asigură existenţa unui element $x \in C$ cu proprietatea $x = N(x)$. Din $p \in U$ rezultă $x \in U$ şi astfel

$$x = \mu(x)T(x) + (1 - \mu(x))p,$$

deci $x \in A$ şi de aici avem $\mu(x) = 1$ respectiv $x = T(x)$. ∎

CAPITOLUL 2

Contracţii convexe

În acest capitol extindem teoremele demonstrate de D. Bărbosu, M. Andronache şi Ş. Şoltuz din [**24**] şi [**113**], referitoare la şiruri subconvexe de ordinul doi. Cu ajutorul acestor extinderi demonstrăm unele teoreme obţinute de V. Istrăţescu în [**57**] şi le extindem la spaţii metrice generalizate. Demonstrăm şi inegalităţi de tip Gronwall (A. Buică [**26**]) şi folosind technica şirurilor subconvexe extindem teorema contracţiilor pe fibră (I.A. Rus [**103**]) pentru contracţii convexe. Rezultatele din acest capitol au fost publicate în lucrările [**13**], [**12**], [**10**] şi [**9**].

1. Şiruri subconvexe

Definiţia 1.1. *(Sz. András [**13**]) Şirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir subconvex de ordinul p ($p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$) dacă există numerele reale $\alpha_i \in (0,1)\,, i = \overline{0, p-1}$ cu proprietatea*

$$\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i \leq 1 \text{ şi } a_{n+p} \leq \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i \cdot a_{n+i}, \quad \forall n \geq 1.$$

Definiţia 1.2. *(Sz. András [**13**]) Şirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir subconvex dacă există $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ astfel încât şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ să fie şir subconvex de ordinul p.*

În [**24**] D. Bărbosu şi M. Andronache au demonstrat următoarea teoremă:

Teorema 1.1. *Dacă* $a_i \geq 0, \forall i \geq 1,$ *şi există* $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1)$ *pentru care* $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 1,$ *şi*

$$a_{n+2} \leq \alpha_1 \cdot a_{n+1} + \alpha_2 \cdot a_n, \quad \forall\, n \geq 1,$$

atunci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ *este convergent.*

În [**113**] Ş. M. Şoltuz a generalizat această teoremă pentru cazul în care coeficienţii α_1 şi α_2 sunt înlocuiţi cu două şiruri de coeficienţi:

Teorema 1.2. *(Ş. M. Şoltuz* [**113**]*(enunţ corectat)) Orice şir de numere reale nenegative* $(a_n)_{n\geq 1}$ *care satisface inegalitatea*

$$a_{n+2} \leq \alpha_1(n) \cdot a_{n+1} + \alpha_2(n) \cdot a_n, \quad \forall n \geq 1,$$

unde

a) $\alpha_1(n), \alpha_2(n) \in (0,1]$ *şi* $\alpha_1(n) + \alpha_2(n) \leq 1, \forall\, n \geq 1;$
b) *şirurile* $(\alpha_1(n))_{n\geq 1}$ *şi* $(\alpha_2(n))_{n\geq 1}$ *sunt convergente şi*
c) $\min\left(\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_1(n), \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_2(n)\right) > 0,$

este convergent.

Menţionăm că în teorema 1.2 condiţia c) este necesară, altfel această teoremă nu ar fi adevărată nici pentru şiruri de tipul

$$a_{2n} = a, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ şi } a_{2n+1} = b, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

În acest paragraf generalizăm aceste rezultate pentru şiruri subconvexe de orice ordin, demonstrăm următoarele teoreme:

Teorema 1.3. *(Sz. András* [**13**]*) Dacă şirul de numere reale* $(a_n)_{n\geq 1}$ *satisface condiţiile*

a) $a_i \geq 0, \quad \forall i \geq 1;$

b) *există* $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *şi* $(\alpha_j)_{j=\overline{0,p-1}}$ *astfel încât* $\alpha_j \in (0,1)$ *şi* $\sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j \leq 1$ *pentru care*

$$a_{n+p} \leq \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j \cdot a_{n+j}, \quad \forall n \geq 1,$$

atunci el este convergent.

TEOREMA 1.4. *(Sz. András* [**13**]*) Dacă şirul de numere reale nenegative* $(a_n)_{n\geq 1}$ *satisface condiţiile*

a) $a_{n+p} \leq \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j(n) \cdot a_{n+j}$, $\forall n \geq 1$, *unde* $\alpha_j(n) \in (0,1]$,

$\forall\, n \geq 1, \quad j = \overline{0, p-1}$ *şi* $\sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j(n) \leq 1$, $\forall\, n \geq 1$;

b) *şirurile* $(\alpha_j\,(n))_{n\geq 1}$ *sunt convergente pentru* $j = \overline{0, p-1}$;

c) $\min\left\{ \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_j(n) \middle|\ 0 \leq j \leq p-1 \right\} > 0$,

atunci el este convergent.

Pentru a demonstra aceste teoreme folosim următoarele leme:

LEMA 1.1. *(J.J. Abdul* [**1**]*) Dacă rădăcinile ecuaţiei caracteristice* $\sum_{j=0}^{p-1} \beta_j \cdot x^j = 0$ *sunt în interiorul discului unitate, atunci orice şir* $(b_n)_{n\geq 1}$ *de numere reale (sau complexe) care satisface recurenţa*

$$\sum_{j=0}^{p-1} \beta_j \cdot b_{n+j} = 0, \quad \forall n \geq 1$$

este convergent, are limita 0, iar seria asociată $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ *este convergentă.*

LEMA 1.2. *(Teorema lui Kakeya,*[**84**]*) Dacă*

$$1 \geq \beta_{p-1} > \beta_{p-2} > \beta_{p-3} > ... > \beta_0 > 0, \tag{1.16}$$

atunci toate rădăcinile ecuaţiei $\sum_{j=0}^{p-1} \beta_j \cdot x^j = 0$ *satisfac inegalitatea* $|x| < 1$.

Lema 1.3. *(Sz. András* [**13**]*) Dacă şirul* $(a_n)_{n\geq 1}$ *are termenii pozitivi, şirul* $(c_n)_{n\geq 1}$ *definit de relaţiile* $c_n = \sum_{j=0}^{p-1} \beta_j \cdot a_{n+j} \quad \forall n \geq 1$ *este convergent şi dacă are loc relaţia (1.16), atunci şirul* $(a_n)_{n\geq 1}$ *este convergent.*

Demonstraţia lemei 1.1. Această lemă este o consecinţă directă a teoremei de reprezentare a şirurilor recurente liniare. Reprezentarea se poate demonstra prin transformări discrete (vezi J.J. Abdul [**1**]) sau printr-un raţionament analog cu cel folosit la ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi (vezi I.A. Rus [**100**] pag. 128-131). Astfel, dacă şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ satisface recurenţa

$$\sum_{j=0}^{p-1} \beta_j \cdot b_{n+j} = 0, \quad \forall n \geq 1,$$

atunci termenul general poate fi scris sub forma

$$b_n = \sum_{j=1}^{p-1} p_j(n) \cdot x_j^n,$$

unde $p_j \left(j = \overline{1, p-1}\right)$ sunt polinoame şi $x_j \left(j = \overline{1, p-1}\right)$ sunt rădăcinile ecuaţiei caracteristice $\sum_{j=0}^{p-1} \beta_j \cdot x^j = 0$. De aici deducem

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \sum_{j=1}^{p-1} \lim_{n\to\infty} p_j(n) \cdot x_j^n = 0,$$

deoarece $|x_j| < 1$. Pentru a arăta convergenţa seriei $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ este suficient să arătăm că seriile $\sum_{k=1}^{\infty} \left|p_j(k) x^k\right|$ sunt convergente dacă $|x| < 1$

şi $1 \leq j \leq p-1$. Acest fapt rezultă din al doilea criteriu de comparaţie şi criteriul raportului (criteriul lui D'Alembert). ■

Demonstraţia lemei 1.2. Notăm cu $f(x)$ polinomul $\sum\limits_{j=0}^{p-1} \beta_j \cdot x^j$. Efectuând operaţii elementare deducem:

$$(x-1)f(x) =$$
$$\beta_{p-1}x^p - (\beta_{p-1} - \beta_{p-2})\, x^{p-1} - (\beta_{p-2} - \beta_{p-3})\, x^{p-2} - ... - \beta_0, \text{ deci}$$
$$|(x-1)f(x)| \geq$$
$$\beta_{p-1}\,|x|^p - (\beta_{p-1} - \beta_{p-2})\,|x|^{p-1} - (\beta_{p-2} - \beta_{p-3})\,|x|^{p-2} - ... - \beta_0.$$

Din această inegalitate, pentru $|x| > 1$, obţinem

$$|(x-1)f(x)| \geq |x|^p \cdot \left[\beta_{p-1} - (\beta_{p-1} - \beta_{p-2})\,|x|^{-1} - \right.$$
$$\left. - (\beta_{p-2} - \beta_{p-3})\,|x|^{-2} - ... - \beta_0\,|x|^{-p}\right] > 0.$$

Dacă $|x| = 1$, avem

$$|x|^p \cdot \left[\beta_{p-1} - (\beta_{p-1} - \beta_{p-2})\,|x|^{-1} - (\beta_{p-2} - \beta_{p-3})\,|x|^{-2} - \dots \right.$$
$$\left. \dots - \beta_0\,|x|^{-p}\right] = 0,$$

dar egalitatea se poate realiza doar dacă imaginile în plan ale numerelor complexe 0, β_0, x, x^2, $\dots$, x^p sunt situate pe o dreaptă. Acesta implică $x \in \mathbb{R}$, deci avem $x \in \{-1, 1\}$. Pe de altă parte nici -1 şi nici 1 nu este rădăcină a polinomului f, deci demonstraţia este completă. ■

Demonstraţia lemei 1.3. Observăm că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$, atunci

$$c_n - l = \sum_{j=0}^{p-1} \beta_j \cdot \left(a_{n+j} - \frac{l}{\sum\limits_{k=0}^{p-1} \beta_k} \right),$$

deci este suficient să demonstrăm că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. Pentru acesta să construim şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ definit de următoarele relaţii:

1. $b_0 = 1$ şi $\sum\limits_{k=0}^{l} b_k \cdot \beta_{p-l-1+k} = 0$ pentru $1 \leq l \leq p-1$;
2. $\sum\limits_{j=0}^{p-1} \beta_j \cdot b_{n+j} = 0, \quad$ pentru $n \geq 1$.

Din lema 1.2 şi lema 1.1 deducem $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} |b_k| = \lambda \in \mathbb{R}$. Astfel din condiţiile date pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$-\tfrac{\varepsilon}{2\lambda} \cdot \beta_{p-1} < c_n < \tfrac{\varepsilon}{2\lambda} \cdot \beta_{p-1}, \quad \forall n \geq n_\varepsilon \text{ şi } m_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ pentru care}$$
$$|b_m \cdot \beta_k| < \tfrac{\beta_{p-1}\cdot\varepsilon}{p^2 \max\{a_n |\, n_\varepsilon \leq n \leq n_\varepsilon + p\}}, \quad \forall m \geq m_\varepsilon \text{ şi } 0 \leq k \leq p-1.$$

Din aceste inegalităţi deducem:

$$-\frac{\varepsilon}{2} \cdot \beta_{p-1} < -\lambda \cdot \frac{\varepsilon}{2\lambda} \cdot \beta_{p-1} < -\varepsilon \cdot \beta_{p-1} \cdot \sum_{k=0}^{m+1} |b_k| <$$

$$< \sum_{k=0}^{m+1} b_k \cdot c_{n+m+1-k} < \varepsilon \cdot \beta_{p-1} \cdot \sum_{k=0}^{m+1} |b_k| < \lambda \cdot \frac{\varepsilon}{2\lambda} \cdot \beta_{p-1} < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \beta_{p-1}$$

Pe de altă parte

$$\sum_{k=0}^{m+1} b_k \cdot c_{n+m+1-k} = \beta_{p-1} a_{m+n+p} + a_n b_{m+1}\beta_0 + a_{n+1}\left(b_{m+1}\beta_1 + b_m\beta_0\right) + \ldots$$

$$\ldots + a_{n+p-2}\left(b_{m+1}\beta_{p-1} + b_m\beta_{p-2} + \ldots + b_{m-p+2}\beta_0\right),$$

deci

$$-\varepsilon < a_{m+n_\varepsilon+p} < \varepsilon, \;\; \forall\, m \geq m_\varepsilon + p.$$

Această inegalitate implică $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, deci demonstraţia lemei este completă. ■

Demonstraţia teoremei 1.3. Dacă $\beta_k = \sum\limits_{j=0}^{k} \alpha_j$ pentru $0 \le k \le p-1$, şi $c_n = \sum\limits_{j=0}^{p-1} \beta_j \cdot a_{n+j} \, \forall n \ge 1$, atunci numerele β_k satisfac condiţiile din lemele precedente, deci avem

$$c_{n+1} = \sum_{k=0}^{p-1} \beta_k a_{n+k+1} \le a_{n+p} + \sum_{k=0}^{p-2} \beta_k \cdot a_{n+k+1} \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j \cdot a_{n+j} + \sum_{j=1}^{p-1} \beta_{j+1} \cdot a_{n+j} = \sum_{j=0}^{p-1} \beta_j \cdot a_{n+j} = c_n.$$

Din construcţia şirului $(c_n)_{n\ge1}$ rezultă că $c_n \ge 0$, pentru $n \ge 1$, deci şirul $(c_n)_{n\ge1}$ este convergent. Astfel lema 1.3 implică convergenţa şirului $(a_n)_{n\ge1}$. ■

Observaţia 1.1. *Şirul $(a_n)_{n\ge1}$ este un şir convex dacă există un număr natural $p \ge 1$ şi numerele reale $\alpha_i \in (0,1)$, $i = \overline{0, p-1}$ pentru care $\sum\limits_{i=0}^{p-1} \alpha_i = 1$ şi*

$$a_{n+p} = \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j \cdot a_{n+j}, \quad \forall n \ge 1.$$

În [**68**] *J.van de Lune a propus aflarea limitei unui şir convex. Din raţionamentul de mai înainte deducem că şirul $(c_n)_{n\ge1}$ este un şir constant, deci*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} c_n}{\sum\limits_{j=0}^{p-1} \beta_j} = \frac{\sum\limits_{j=0}^{p-1} \beta_j \cdot a_{j+1}}{\sum\limits_{j=0}^{p-1} \beta_j}.$$

Observaţia 1.2. *Dacă şirul* $(a_n)_{n\geq 1}$ *este subconvex, atunci şirul* $(c_n)_{n\geq 1}$ *este descrescător, deci*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \frac{\sum\limits_{j=0}^{p-1} \beta_j \cdot a_{j+1}}{\sum\limits_{j=0}^{p-1} \beta_j}.$$

Observaţia 1.3. *Folosind existenţa limitei* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *obţinem următoarea proprietate:*

Dacă pentru şirul de numere nenegative $(a_n)_{n\geq 1}$ *există numerele* $(\alpha_j)_{j=\overline{0,p-1}}$ *pentru care*

$$a_{n+p} \leq \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j \cdot a_{n+j}, \quad \forall n \geq 1,$$

unde $\alpha_j \in (0,1)$, *pentru* $j = \overline{0,p-1}$ *şi* $\sum\limits_{j=0}^{p-1} \alpha_j < 1$, *atunci şirul* $(a_n)_{n\geq 1}$ *este convergent,* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *şi seria* $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j$ *este convergentă. În acest caz şirul* $(a_n)_{n\geq 1}$ *se numeşte strict subconvex.*

Demonstraţia teoremei 1.4. Definim şirul $(d_n)_{n\geq 1}$ prin relaţiile $d_n = \max\{a_k \,|n \leq k \leq n+p-1\}$, $\forall\, n \geq 1$. Din inegalitatea dată deducem:

$$a_{n+p} \leq \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j \cdot a_{n+j} \leq \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j \cdot d_n \leq d_n \quad \forall n \geq 1,$$

deci $a_k \leq y_n$, pentru $n+1 \leq k \leq n+p$. Astfel

$$d_{n+1} = \max\{a_k \,|n+1 \leq k \leq n+p\} \leq d_n, \,\forall\, n \geq 1.$$

Pe de altă parte $d_n \geq 0$, $\forall n \geq 1$, deci există un număr nenegativ d, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = d$. În continuare arătăm că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi are aceeaşi limită ca $(d_n)_{n\geq 1}$. Din $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = d$ şi ultima condiţie a teoremei rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$d - \varepsilon \cdot \alpha_j(n) < d_n < d + \varepsilon \cdot \alpha_j(n), \quad \forall\, n \geq n_\epsilon \text{ şi } 0 \leq j \leq p-1.$$

Această inegalitate implică

$$a_n \leq d + \varepsilon \cdot \alpha_j(n), \quad \forall\, n \geq n_\epsilon \text{ şi } 0 \leq j \leq p-1.$$

Presupunem că există $n \geq n_\epsilon + p$ astfel încât $a_n \leq d - \varepsilon$. Prin inducţie arătăm că $a_{n+k} < d$, dacă $0 \leq k \leq p-1$. Pentru $k = 0$ inegalitatea este adevărată. Dacă $a_{n+k} < d$, pentru $0 \leq k \leq v-1$, atunci din prima condiţie a teoremei avem:

$$a_{n+v} \leq \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j \cdot a_{n+v-p+j} \leq$$
$$\left(\sum_{j=0}^{v-1} \alpha_j \cdot d\right) + \alpha_v \cdot (d-\varepsilon) + \left(\sum_{j=v+1}^{p-1} \alpha_j \cdot (d + \varepsilon \cdot \alpha_v)\right) < d,$$

deci $a_{n+k} < d$, pentru $0 \leq k \leq p-1$. Din aceste inegalităţi rezultă $d_n < d$, ceea ce reprezintă o contradicţie deoarece şirul $(d_n)_{n\geq 1}$ este descrescător. Din această contradicţie rezultă că $a_n \geq d - \varepsilon$, $\forall n \geq n_\epsilon + p$. Pe de altă parte

$$a_n \leq d + \varepsilon \cdot \alpha_j(n) < d + \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = d$. ■

2. Contracţii convexe

În acest paragraf extindem principiul contracţiilor pentru contracţii convexe. Teoremele din acest paragraf au fost parţial demonstrate de V. Istrăţescu în [**57**] şi M.R. Tascovic în [**116**], dar demonstraţia prezentată aici diferă de cele din [**57**] şi [**116**]. În plus obţinem şi o estimare pentru distanţa $d(T^n(x), x^*)$, unde x^* este unicul punct fix.

Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi $T : X \to X$ un operator. Principiul contracţiilor asigură existenţa şi unicitatea punctului fix al operatorului T, dacă $d(T(x), T(y)) \leq L \cdot d(x, y), \quad \forall x, y \in X$ şi $L < 1$. În plus se obţine şi o metodă de aproximare prin şirul aproximaţiilor succesive. În acest caz şirul $a_n = d\left(T^{n+1}(x), T^n(x)\right)$ este un şir strict subconvex; demonstraţia teoremei 2.1 foloseşte şiruri strict subconvexe mai generale, teorema fiind o versiune completată a teoremei 1.5. din [**57**] (metoda utilizată poate fi folosită şi pentru demonstrarea teoremelor 1.7., 2.3., 2.4., şi 4.1. din [**57**]).

TEOREMA 2.1. *(Sz. András [**13**]) Dacă (X, d) este un spaţiu metric complet şi $T : X \to X$ un operator continuu cu proprietatea că există $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \alpha_j \in (0,1)$, $j = \overline{0, p-1}$ astfel încât $\sum\limits_{j=0}^{p-1} \alpha_j < 1$, şi*

$$d(T^p(x), T^p(y)) \leq \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j \cdot d(T^j(x), T^j(y)), \quad \forall x, y \in X, \tag{2.17}$$

atunci

1) *operatorul T are un punct fix unic $x^* \in X$;*
2) *şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit de relaţiile $x_{n+1} = T(x_n)$, $\forall n \geq 1$ converge la x^*, pentru orice element iniţial $x_0 \in X$;*

3) *are loc inegalitatea* $d(x^*, x_n) \leq \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_{n+j}$, *unde*

$$c_{n+p} = \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j \cdot c_{n+j},\ \forall n \geq 1,$$

şi $c_j = d\left(T^{j+1}(x), T^j(x)\right)$, *pentru* $0 \leq j \leq p-1$.

Demonstraţie. Şirul

$$a_n = d\big(T^{n+1}(x), T^n(x)\big) = d\left(x_n, x_{n+1}\right)$$

este un şir strict subconvex deoarece $a_{n+p} \leq \sum\limits_{j=0}^{p-1} \alpha_j \cdot a_{n+j}$ unde $\sum\limits_{j=0}^{p-1} \alpha_j < 1$. Datorită observaţiei 1.3 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ şi seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ este convergentă. Astfel pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$d\big(T^{m+n}(x), T^m(x)\big) \leq \sum_{j=0}^{n-1} d\big(T^{m+j}(x), T^{m+j+1}(x)\big) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{m+j} \leq \varepsilon,$$

dacă $m \geq n_\varepsilon$. Din această inegalitate rezultă că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este un şir Cauchy în X. Pe de altă parte X este un spaţiu metric complet, deci există $x^* \in X$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$. Dacă în inegalitatea precedentă considerăm $n = 1$ şi folosim continuitatea operatorului T deducem că x^* este un punct fix pentru T. Din inegalitatea dată rezultă că T nu poate avea mai multe puncte fixe, deci x^* este unicul punct fix, poate fi aproximat prin aproximări succesive şi are loc inegalitatea de la punctul 3). ■

Pe baza acestei teoreme spunem că operatorii care satisfac condiţia (2.17) sunt contracţii convexe. Mai precis avem următoarea definiţie:

Definiţia 2.1. *(V. Istrăţescu* [**57**]*) Fie* (X, d) *un spaţiu metric şi* $T : X \to X$ *un operator. Operatorul* T *este o contracţie convexă* *dacă există* $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *şi* $\alpha_j \in (0,1)$ *cu proprietatea* $\sum\limits_{j=0}^{p-1} \alpha_j < 1$ *pentru care relaţia (2.17) este satisfăcută.*

Folosind aceeaşi tehnică putem generaliza şi teoremele de punct fix a lui Kannan, Reich, Maia şi Ćirić.

TEOREMA 2.2. *(Sz. András) Dacă* (X, d) *este un spaţiu metric complet,* $p \in \mathbb{N}^*$, $T : X \to X$ *un operator continuu cu proprietatea*
(2.18)
$$d(T^p(x), T^p(y)) \leq \sum_{i=0}^{p-1} a_i d(T^i(x), T^{i+1}(x)) + \sum_{i=0}^{p-1} b_i d(T^i(y), T^{i+1}(y)),$$
$\forall x, y \in X$, *unde* $\sum_{i=0}^{p-1} a_i + b_i < 1$ *şi* $a_i, b_i \geq 0, \overline{0, p-1}$, *atunci* T *este un operator Picard.*

OBSERVAŢIA 2.1. *Pentru* $p \in \{1, 2\}$ *nu avem nevoie de continuitatea operatorului. Rămâne problemă deschisă necesitatea continuităţii în cazul* $p \geq 3$.

DEMONSTRAŢIE. Dacă $x^*, y^* \in F_T$, atunci $T^i(x^*) = x^*$ şi $T^i(y^*) = y^*$ pentru $i \geq 1$, deci
$$d(x^*, y^*) = d(T^p(x^*), T^p(y^*)) \leq \sum_{i=0}^{p-1} a_i d(T^i(x^*), T^{i+1}(x^*)) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{p-1} b_i d(T^i(y^*), T^{i+1}(y^*)) \geq 0,$$
şi astfel $x^* = y^*$. Dacă în relaţia dată înlocuim x cu $T^k x$ şi y cu $T^{k+1}(x)$ rezultă
$$d(T^{p+k}(x), T^{p+k+1}(x)) \leq \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i d(T^{i+k}(x), T^{i+k+1}(x)),$$

unde $\alpha_i = \begin{cases} \frac{a_0}{1-b_{p-1}} & i = 0 \\ \frac{a_i + a_{i-1}}{1-b_{p-1}} & i \geq 1 \end{cases}$ pentru $1 \leq i \leq p-1$. Din condiţia impusă coeficienţilor rezultă $\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i < 1$, deci şirul

$$a_n = d(T^n x, T^{n+1}(x)),\ n \geq 0$$

este un şir strict subconvex. Datorită observaţiei 1.3 seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ este convergentă şi pe baza criteriului general de convergenţă al lui Cauchy rezultă că şirul $(T^n(x))_{n\geq 0}$ este fundamental. Completitudinea spaţiului garantează existenţa unui element $x^* \in X$ cu proprietatea $\lim\limits_{n\to\infty} T^n(x) = x^*$. Din continuitatea operatorului deducem că $x^* \in F_T$, deci operatorul T este un operator Picard.

■

În mod analog putem demonstra şi următoarele teoreme:

Teorema 2.3. *(Sz. András) Dacă* (X, d) *este un spaţiu metric complet,* $p \in \mathbb{N}^*$, $T : X \to X$ *un operator continuu cu proprietatea*

$$\begin{aligned} d(T^p(x), T^p(y)) \leq \sum_{i=0}^{p-1} c_i d(T^i(x), T^i(y)) + \\ \sum_{i=0}^{p-1} a_i d(T^i(x), T^{i+1}(x)) + \sum_{i=0}^{p-1} b_i d(T^i(y), T^{i+1}(y)), \end{aligned} \tag{2.19}$$

$\forall x, y \in X$, *unde* $\sum\limits_{i=0}^{p-1} a_i + b_i + c_i < 1$ *şi* $a_i, b_i, c_i \geq 0, \overline{0, p-1}$, *atunci* T *este un operator Picard.*

Teorema 2.4. *(Sz. András) Dacă* (X,d) *este un spaţiu metric complet,* $p \in \mathbb{N}^*$, $T : X \to X$ *un operator continuu cu proprietatea*

$$\begin{aligned} d(T^p(x),T^p(y)) &\leq \sum_{i=0}^{p-1} c_i d(T^i(x),T^i(y))+ \\ +\sum_{i=0}^{p-1} a_i d(T^i(x),T^{i+1}(x)) &+ \sum_{i=0}^{p-1} b_i d(T^i(y),T^{i+1}(y))+ \\ +\sum_{i=0}^{p-1} f_i d(T^i(x),T^{i+1}(y)) &+ \sum_{i=0}^{p-1} g_i d(T^i(y),T^{i+1}(x)), \end{aligned} \tag{2.20}$$

$\forall x, y \in X$, *unde* $\sum_{i=0}^{p-1} a_i + b_i + c_i + f_i + g_i < 1$ *şi* $a_i, b_i, c_i, f_i, g_i \geq 0, \overline{0, p-1}$, *atunci* T *este un operator Picard.*

Teorema 2.5. *(Sz. András) Dacă operatorul* $T : X \to X$ *şi metricile* $d, \rho : X \times X \to \mathbb{R}$ *definite pe mulţimea nevidă* X *satisfac condiţiile*

(i) (X,d) *este un spaţiu metric complet;*
(ii) $d(x,y) \leq \rho(x,y), \forall x,y \in X$;
(iii) $T : (X,d) \to (X,d)$ *este continuu;*
(iv) $T : (X,\rho) \to (X,\rho)$ *este contracţie convexă,*

atunci operatorul $T : (X,d) \to (X,d)$ *este un operator Picard.*

3. Contracţii convexe pe spaţii metrice generalizate

În acest paragraf demonstrăm că şi în teorema lui Perov (vezi 3.3) putem înlocui condiţia de contracţie cu o condiţie de tipul (2.17). Technica demonstraţiei diferă de cea folosită în paragraful 2 deoarece nu avem o teoremă de reprezentare a şirurilor recurente liniare în $\mathbb{R}^n$, dacă coeficienţii recurenţei sunt matrici.

3.1. Generalizarea teoremei lui Perov. Pentru a extinde teorema lui Perov (3.3) la contracţii convexe avem nevoie de extinderea definiţiei 2.1 pentru spaţii metrice generalizate.

Definiţia 3.1. *(Sz. András* [**12**]*) Fie* (X, d) *un spaţiu metric generalizat (cu* $d : X \times X \to \mathbb{R}^n$*) şi* $T : X \to X$ *un operator. Operatorul* T *este o contracţie convexă dacă există* $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *şi matricile* $(\Lambda_j)_{j=\overline{0,p-1}} \subset M_n(\mathbb{R})$ *cu proprietatea*

$$d(T^p(x), T^p(y)) \leq \sum_{j=0}^{p-1} \Lambda_j \cdot d(T^j(x), T^j(y)),\ \forall x, y \in X \tag{3.21}$$

unde $\sum\limits_{j=0}^{p-1} \|\Lambda_j\|_m < 1$ *cu o normă matricială* $\|\cdot\|_m : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *subordonată unei norme vectoriale* $\|\cdot\|_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*.*

Teorema 3.1. *(Sz. András* [**12**]*) Dacă* (X, d) *este un spaţiu metric generalizat complet şi operatorul continuu* $T : X \to X$ *este o contracţie convexă pe* X*, atunci*

1) *operatorul* T *are un punct fix unic* $x^* \in X$*;*
2) *şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit de relaţiile* $x_{n+1} = T(x_n)$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$ *converge la* x^* *pentru orice* $x_0 \in X$*;*
3) *are loc inegalitatea* $\|d(x^*, x_n)\|_v \leq \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_{n+j}$*, unde*

$$c_j = \left\| d\left(T^{j+1}(x), T^j(x)\right)\right\|_v \text{ pentru } 0 \leq j \leq p-1$$

$$\text{şi } c_{n+p} = \sum_{j=0}^{p-1} \|\Lambda_j\|_m \cdot c_{n+j}, \quad \forall n \geq 1.$$

Demonstraţie. Şirul

$$a_n = \left\| d\left(T^{n+1}(x), T^n(x)\right)\right\|_v = \|d(x_n, x_{n+1})\|_v$$

este strict subconvex deoarece

$$a_{n+p} \leq \sum_{j=0}^{p-1} \|\Lambda_j\|_m \cdot a_{n+j} \text{ şi } \sum_{j=0}^{p-1} \|\Lambda_j\|_m < 1.$$

Datorită observaţiei 1.3 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ şi seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ este convergentă. Din convergenţa seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d\left(x_n, x_{n+1}\right)$ rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$d(x_{n+m}, x_m) = d\left(T^{m+n}(x), T^m(x)\right) \leq \sum_{j=0}^{n-1} d\left(T^{m+j}(x), T^{m+j+1}(x)\right) =$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} d\left(x_{m+j}, x_{m+j+1}\right) \leq \varepsilon, \text{ dacă } m \geq n_\varepsilon.$$

Astfel şirul $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$ este un şir Cauchy în X. Dar (X, d) este un spaţiu metric complet, deci există $x^* \in X$ pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$. Folosind $\lim\limits_{n\to\infty} d\left(x_n, x_{n+1}\right) = 0$ deducem că x^* este un punct fix pentru T. Dacă în inegalitatea precedentă considerăm m fixat şi $n \to \infty$, obţinem $\left\|d(x^*, x_m)\right\|_v \leq \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_{m+j}$, unde

$$c_j = \left\|d\left(T^{j+1}(x), T^j(x)\right)\right\|_v \text{ pentru } 0 \leq j \leq p-1$$

şi

$$c_{n+p} = \sum_{j=0}^{p-1} \left\|\Lambda_j\right\|_m \cdot c_{n+j}, \quad \forall n \geq 1.$$

Din condiţia (3.21) rezultă că operatorul T nu poate avea mai multe puncte fixe, deci x^* este unicul punct fix (datorită continuităţii x^* este punct fix) şi astfel demonstraţia teoremei este completă. ∎

Observaţia 3.1. *În mod analog putem demostra şi teoreme de tip Kannan, Reich, Maia, Ćirić în spaţii metrice generalizate folosind operatori iteraţi şi condiţii de tip contracţie convexă.*

3.2. Aplicaţie. În studiul convergenţei unor metode iterative folosite pentru rezolvarea sistemelor liniare de ecuaţii, teorema de punct fix al lui Banach este utilizată foarte des. Dacă în locul acestei teoreme folosim teorema 3.1, atunci obţinem următorul rezultat:

Teorema 3.2. *(Sz. András* [**12**]*) Dacă* $Q \in M_n(\mathbb{R})$ *este o matrice şi* α *un număr pozitiv pentru care*

$$\left\|Q^2 - \alpha Q\right\|_m < 1 - \alpha,$$

atunci şirul definit de relaţiile $x_{n+1} = b + Q \cdot x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *converge către unica soluţie a sistemului* $(I_n - Q)x = b$ *pentru orice* $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Demonstraţie. Considerăm operatorul $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definit prin relaţia

$$T(x) = b + Q \cdot x, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Pentru acest operator avem $T(T(x)) = b + Q \cdot b + Q^2 \cdot x$, deci $T^2(x) - T^2(y) = Q^2(x - y)$ şi

$$\begin{gathered}\left\|T^2(x) - T^2(y)\right\|_v = \left\|Q^2(x - y)\right\|_v \leq \\ \left\|(Q^2 - \alpha Q)(x - y)\right\|_v + \left\|\alpha Q(x - y)\right\|_v \leq \\ \leq \left\|Q^2 - \alpha Q\right\|_m \left\|x - y\right\|_v + \alpha \cdot \left\|T(x) - T(y)\right\|_v .\end{gathered}$$

De aici rezultă că operatorul T satisface condiţiile teoremei 3.1, deci demonstraţia teoremei 3.2 este completă. ■

Observaţia 3.2. *Dacă*

$$Q = \begin{bmatrix} 1/2 & -2/3 \\ 2/3 & 1/2 \end{bmatrix}$$

şi $\alpha = 1/8$, *avem*

$$Q^2 - \alpha Q = \begin{bmatrix} -37/144 & -7/12 \\ 7/12 & -37/144 \end{bmatrix},$$

deci teorema 3.2 poate fi aplicată folosind norma matricială subordonată normei Minkovski din $\mathbb{R}^n$, *deoarece*

$$\left\|Q^2 - \alpha Q\right\| = 121/144 < 7/8.$$

Cu aceeaşi normă avem $\|Q\| = 7/6 > 1$, *deci nu putem aplica nici teorema de punct fix al lui Banach şi nici teorema lui Perov. În acest caz prin înlocuirea normei cu norma subordonată normei euclidiene am putea aplica teorema lui Perov, dar multe aplicaţii nu permit folosirea acestei norme deoarece necesită calculul valorilor proprii.*

4. Inegalităţi de tip Gronwall

În acest paragraf demonstrăm o lemă abstractă de tip Gronwall, aplicăm această lemă pentru un operator integral de tip Volterra şi unul de tip Fredholm-Volterra, iar în final demonstrăm o inegalitate discretă de tip Gronwall şi o inegalitate mixtă.

4.1. O inegalitate abstractă de tip Gronwall. I.A. Rus în [**106**] a demonstrat următoarea lemă abstractă de tip Gronwall:

TEOREMA 4.1. *Dacă* $(X, \to, \leq)$ *este un L-spaţiu ordonat şi operatorul* $T : X \to X$ *este un operator crescător şi slab Picard, atunci următoarele implicaţii sunt adevărate:*

1) *Dacă* $x \in X$ *şi* $x \leq T(x)$, *atunci* $x \leq T^\infty(x)$;
2) *Dacă* $x \in X$ *şi* $x \geq T(x)$, *atunci* $x \geq T^\infty(x)$.

Teorema următoare este o consecinţă a acestei teoreme pentru contracţii convexe.

TEOREMA 4.2. *(Sz. András* [**9**]*) Dacă* $(X, \|\cdot\|, \leq)$ *este un spaţiu normat ordonat iar* $T : X \to X$ *este un operator crescător şi slab Picard, atunci următoarele implicaţii sunt adevărate:*

1) *Dacă* $x \in X$ *şi* $x \leq \sum\limits_{i=0}^{p-1} \alpha_i \cdot T^{i+1}(x)$, *atunci* $x \leq T^\infty(x)$;
2) *Dacă* $x \in X$ *şi* $x \geq \sum\limits_{i=0}^{p-1} \alpha_i \cdot T^{i+1}(x)$, *atunci* $x \geq T^\infty(x)$,

unde numerele $\alpha_i \in (0,1)$, $i = \overline{0, p-1}$ *satisfac relaţia* $\sum\limits_{i=0}^{p-1} \alpha_i = 1$.

DEMONSTRAŢIE. Avem următoarele inegalităţi:

$$T^k(x) \leq \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i \cdot T^{k+i+1}(x), \text{ pentru } k \in \mathbb{N}. \tag{4.22}$$

Definim şirul $(a_n)_{n\geq -p+1}$ prin

$$a_k = 0 \text{ pentru } k \in \{-p+1, -p+2, \dots, -1\},\ a_0 = 1 \text{ şi}$$
$$a_{n+p} = \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j \cdot a_{n+j},\ \forall\, n \geq -p+1.$$

Înmulţind inegalităţile 4.22 cu a_k pentru $k = \overline{-p+1, n}$ şi adunând termen cu termen obţinem

$$x \leq \sum_{i=1}^{p} \gamma_i \cdot T^{n+p+i} x,$$

unde

$$\gamma_i = \sum_{k=i}^{p-1} \alpha_k \cdot a_{n+p+i-k}.$$

Membrul drept converge la $T^{\infty}(x) \cdot l \cdot \sum_{i=0}^{p-1} \beta_i$, unde $\beta_i = \sum_{k=i}^{p-1} \alpha_k$ şi l este limita şirului $(a_n)_{n\geq -p+1}$. Datorită observaţiei 1.1 această limită există şi este egală cu

$$\frac{\displaystyle\sum_{j=-p+1}^{0} \beta_j \cdot \alpha_{j+1}}{\displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} \beta_j} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} \beta_j},$$

deci teorema 4.2 este demonstrată. ∎

Observaţia 4.1. *O demonstraţie alternativă este următoarea: Operatorul* $\sum_{ii=0}^{p-1} \alpha_i \cdot T^{i+1}(x)$ *este un operator slab Picard şi pentru* x *fixat şirurile de aproximaţii succesive* $x_{n+1} = T(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$ *cu* $x_0 = x$ *şi* $y_{n+1} = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i \cdot T^{i+1}(y_n), \forall n \in \mathbb{N}$ *cu* $y_0 = x$*, au aceeaşi limită, deci teorema 4.1 implică inegalitatea cerută.*

OBSERVAŢIA 4.2. *Dacă* $\alpha_1 = 1$ *şi* $\alpha_i = 0$ *pentru* $i = \overline{2, p-1}$, *atunci putem renunţa la structura de spaţiu vectorial şi astfel obţinem teorema 4.1 (inegalitatea abstractă de tip Gronwall din* [**101**]*).*

OBSERVAŢIA 4.3. *Teorema 4.1 este esenţial diferită de teorema 4.2 deoarece inegalitatea* $x \leq \sum\limits_{i=0}^{p-1} \alpha_i \cdot T^{i+1}(x)$ *nu implică* $x \leq T(x)$.

În încheierea acestui paragraf prezentăm o generalizare a teoremei 6.5. din [**106**]. Această teoremă generalizează şi unele rezultate demonstrate de M.Zima în [**121**].

TEOREMA 4.3. *Fie* $(X, +, \cdot, \leq, \rightarrow)$ *un L-spaţiu liniar ordonat,* $\alpha_i \in (0, 1]$, $i = \overline{0, p-1}$ *cu* $\sum\limits_{i=0}^{p-1} \alpha_i = 1$, $T : X \rightarrow X$ *un operator şi* $y \in X$ *un element oarecare. Presupunem că:*

a) T *este un operator Picard;*

b) T *este liniară, continuă şi crescătoare;*

c) *există un şir de numere reale nenegative* $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *astfel încât*

(1) $c_k = 0$ *pentru* $k < 0$, $c_0 = 1$ *şi*

$$c_{n+p} = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k \cdot c_{n+p-1-k}, \quad \forall n \geq -p+1;$$

(2) *seria* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \cdot T^k(y)$ *este convergentă,*

atunci au loc următoarele implicaţii:

1) $x \leq \sum\limits_{k=0}^{p-1} \alpha_k \cdot T^k(x) + y \Longrightarrow x \leq \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \cdot T^k(y)$

2) $x \geq \sum\limits_{k=0}^{p-1} \alpha_k \cdot T^k(x) + y \Longrightarrow x \geq \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \cdot T^k(y)$.

DEMONSTRAŢIE. 1) Definim şirurile $(c_{n,k})_{n\in\mathbb{N}^*, k\in\mathbb{Z}}$ şi $(d_{n,k})_{n\in\mathbb{N}^*, k\in\mathbb{Z}}$ prin relaţiile

$$c_{n,k} = \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j \cdot c_{n-1,k-j}, \quad k = \overline{0, n(p-1)},\ c_{1,k} = \alpha_k,\ k = \overline{0, p-1},$$

şi $c_{n,k} = 0$ dacă $k > n(p-1)$ sau $k < 0$;

$$d_{n,k} = \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j \cdot d_{n-1,k-j}, \quad k = \overline{1, p(n-1)},\ d_{n,0} = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

şi $d_{n,k} = 0$ dacă $k > p(n-1)$ sau $k < 0$. Demonstrăm prin inducţie după n că are loc inegalitatea

$$x \leq \sum_{k=0}^{n(p-1)} c_{n,k} \cdot T^{n+k}(x) + \sum_{k=0}^{p(n-1)} d_{n,k} \cdot T^k(y), \quad \forall n \geq 1. \tag{4.23}$$

Operatorul T este operator Picard şi este liniar, deci $T^n \to 0$ dacă $n \to \infty$. De aici rezultă că $\sum\limits_{k=0}^{n(p-1)} c_{n,k} \cdot T^{n+k}(x) \to 0$ pentru $n \to \infty$ deoarece $\sum\limits_{k=0}^{n(p-1)} c_{n,k} = 1$. Pe de altă parte pentru şirul definit în condiţia c) avem $c_k = d_{k+1,k}$, $\forall k \geq 0$, şi astfel din inegalitatea 4.23 obţinem proprietatea dorită.
Partea a doua se poate demonstra în mod analog. ■

OBSERVAŢIA 4.4. *Dacă $p = 1$ şi $\alpha_0 = 1$, atunci putem renunţa la operaţia "$\cdot$", şi astfel seria construită se reduce la seria lui Neumann, deci obţinem teorema 6.5. demonstrată de I.A. Rus în* [**106**].

4.2. Aplicaţii. Fie $K \in C([a,b] \times [a,b], \mathbb{R}_+)$, $\alpha, \beta, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$ cu $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Considerăm ecuaţia

$$y(x) \leq \alpha + \beta \int_a^x K(x,s) y(s) ds,$$

şi calculăm iterata a doua a operatorului integral definit de membrul drept. Din teorema 4.2 obţinem următoarea teoremă:

TEOREMA 4.4. *(Sz. András* [**9**]*) Inegalitatea*

$$y(x) \le \alpha + \alpha_1 \beta \int_a^x K(x,s) y(s) ds + \alpha_2 \beta^2 \int_a^x K_2(x,s) y(s) ds +$$

$$+ \alpha_2 \alpha \beta \int_a^x K(x,s) ds$$

implică $y(x) \le y^*(x), \ \forall\ x \in [a,b]$, *unde*

$$K_2(x,s) = \int_s^x K(x,t) K(t,s) dt$$

şi y^* *este unica soluţie continuă a ecuaţiei*

$$y(x) = \alpha + \beta \int_a^x K(x,s) y(s) ds.$$

DEMONSTRAŢIE. Considerăm spaţiul metric complet (X,d), unde $X = C[a,b]$ şi d este o metrică Bielecki astfel încât operatorul $T : X \to X$ definit de relaţia

$$(Ty)(x) = \alpha + \beta \int_a^x K(x,s) y(s) ds, \ \forall x \in [a,b]$$

să fie un operator Picard. Din pozitivitatea funcţiei K rezultă că T este un operator crescător. Pe de altă parte

$$\alpha_1 \cdot (Ty)(x) + \alpha_2 \cdot (T^2 y)(x) = \alpha_1 \cdot \left(\alpha + \beta \int_a^x K(x,s) y(s) ds \right) +$$

$$+\alpha_2\left(\alpha+\beta\int_a^x K(x,s)\left(\alpha+\beta\int_a^x K(s,t)y(t)dt\right)ds\right)=$$

$$=\alpha+\alpha_1\beta\int_a^x K(x,s)y(s)ds+\alpha_2\beta^2\int_a^x K_2(x,s)y(s)ds+$$

$$+\alpha_2\alpha\beta\int_a^x K(x,s)ds,$$

deci pe baza teoremei 4.2, $y(x)\le y^*(x),\ \forall\ x\in[a,b]$. ■

Dacă $K_i:[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}_+,\ i\in\{1,2\}$ sunt funcţii continue şi aplicăm teorema 4.2 operatorului definit de membrul drept al ecuaţiei

$$y(x)=\alpha+\beta\int_a^x K_1(x,s)y(s)ds+\beta\int_a^b K_2(x,s)y(s)ds,$$

atunci obţinem următoarea teoremă:

Teorema 4.5. *(Sz. András [**9**]) Dacă funcţiile K_i ($i\in\{1,2\}$) satisfac condiţiile teoremei 2.2, atunci inegalitatea*

$$y(x)\le\alpha+\alpha_1\beta\left(\int_a^x K(x,s)y(s)ds+\int_a^b K_2(x,s)y(s)ds\right)+$$

$$+\beta\alpha\alpha_2\left(\int_a^x K(x,s)ds+\int_a^b K_2(x,s)ds\right)+$$

$$+\alpha_2\beta^2\left(\int_a^x K_1^{(2)}(x,s)y(s)ds+\int_a^b K_2^{(2)}(x,s)ds\right)$$

implică $y(x) \leq y^*(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$, *unde*

$$K_1^{(2)}(x,s) = \int\limits_s^x K_1(x,t)K_1(t,s)dt,$$

$$K_2^{(2)}(x,s) = \int\limits_a^x K_1(x,t)K_2(t,s)dt + \int\limits_a^b K_2(x,t)K_2(x,t)dt +$$
$$+ \int\limits_t^b K_2(x,t)K_1(x,t)dt$$

şi $y^*(x)$ *este unica soluţie continuă a ecuaţiei*

$$y(x) = \alpha + \beta \int\limits_a^x K_1(x,s)y(s)ds + \beta \int\limits_a^b K_2(x,s)y(s)ds.$$

Demonstraţie. Considerăm operatorul $T : X \to X$ definit de relaţia

$$(Ty)(x) = \alpha + \beta \int\limits_a^x K_1(x,s)y(s)ds + \beta \int\limits_a^b K_2(x,s)y(s)ds.$$

Datorită teoremei 2.2 şi pozitivităţii funcţiilor K_1, K_2 acest operator este un operator Picard crescător şi

$$\alpha_1 \cdot (Ty)(x) + \alpha_2 \cdot (T^2 y)(x) =$$
$$= \alpha_1 \cdot \left(\alpha + \beta \int\limits_a^x K_1(x,s)y(s)ds + \beta \int\limits_a^b K_2(x,s)y(s)ds \right) +$$
$$+\alpha_2 \left(\alpha + \alpha\beta \left(\int\limits_a^x K_1(x,s)ds + \int\limits_a^b K_2(x,s)y(s)ds \right) + \right.$$

$$+\beta^2\left(\left(\int_a^x K_1^{(2)}(x,s)y(s)ds+\int_a^b K_2^{(2)}(x,s)y(s)ds\right)\right)=$$

$$=\alpha+\alpha_1\beta\left(\int_a^x K(x,s)y(s)ds+\int_a^b K_2(x,s)y(s)ds\right)+$$

$$+\beta\alpha\alpha_2\left(\int_a^x K(x,s)ds+\int_a^b K_2(x,s)ds\right)+$$

$$+\alpha_2\beta^2\left(\int_a^x K_1^{(2)}(x,s)y(s)ds+\int_a^b K_2^{(2)}(x,s)ds\right),$$

unde

$$K_1^{(2)}(x,s)=\int_s^x K_1(x,t)K_1(t,s)dt,$$

$$K_2^{(2)}(x,s)=\int_a^x K_1(x,t)K_2(t,s)dt+\int_a^b K_2(x,t)K_2(x,t)dt+$$

$$+\int_t^b K_2(x,t)K_1(x,t)dt.$$

■

4.3. O inegalitate discretă de tip Gronwall. Următoarea teoremă este o versiune discretă a teoremei 4.4. Pentru simplificarea calculelor prima dată am enunţat cazul $\alpha_1=\alpha_2=\dfrac{1}{2}$. În mod analog se poate trata şi cazul general.

TEOREMA 4.6. *(Sz. András [**9**]) Dacă termenii şirurilor* $(a_k)_{k\geq 1}$ *şi* $(b_k)_{k\geq 1}$ *sunt numere pozitive şi satisfac inegalitatea :*

$$a_n \leq \alpha + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} b_j a_j + \frac{\alpha}{2}\sum_{j=1}^{n-1} b_j + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k}^{n-1} b_j b_k a_k,$$

atunci verifică şi inegalitatea

$$a_n \leq \alpha \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + b_k + \frac{b_k^2}{2}\right).$$

DEMONSTRAŢIE. Din inegalitatea dată deducem $a_1 \leq \alpha$ şi $a_2 \leq \alpha\left(1 + b_1 + \frac{b_1^2}{2}\right)$. Pentru $n = 3$ avem

$$a_3 \leq \alpha + \frac{b_1 a_1}{2} + \frac{b_2 a_1}{2} + \alpha\frac{b_1}{2} + \alpha\frac{b_2}{2} + \frac{b_1^2 a_1}{2} + \frac{b_1 b_2 a_1}{2} + \frac{b_2^2 a_1}{2} \leq$$

$$\leq \alpha\left(1 + b_1 + \frac{b_1^2}{2}\right)\left(1 + b_2 + \frac{b_2^2}{2}\right).$$

Cazul general se poate demonstra prin inducţie după n. ∎

Pentru a ilustra mai bine analogia cu teorema 4.4 enunţăm şi o versiune mai generală:

TEOREMA 4.7. *Dacă termenii şirurilor* $(a_k)_{k\geq 1}$ *şi* $(b_k)_{k\geq 1}$ *sunt numere pozitive şi satisfac inegalitatea :*

$$a_n \leq \alpha + \alpha_1 \sum_{j=1}^{n-1} b_j a_j + \alpha \cdot \alpha_2 \sum_{j=1}^{n-1} b_j + \alpha_2 \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k}^{n-1} b_j b_k a_k,$$

unde $\alpha_{1,2} \in (0,1)$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, *atunci verifică şi inegalitatea*

$$a_n \leq \alpha \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + b_k + \alpha_2 \cdot b_k^2\right).$$

OBSERVAŢIA 4.5. *Teoremele precedente generalizează unele rezultate obţinute de J.I. Wu, G. Yang în* [**117**], *R.P. Agarwal în* [**3**] *iar ideile se regăsesc parţial şi în lucrarea* [**119**], *unde este prezentată discretizarea unei inegalităţi integrale.*

TEOREMA 4.8. *(Inegalitate de tip Gronwall mixtă, Sz. András) Dacă funcţia $y \in C(D), D = [a,\infty] \setminus \mathbb{N}$ satisface inegalitatea*

$$y(x) \leq \alpha + \sum_{j=a}^{[x]-1} y(j) \cdot a_j + \int_a^x y(t) \cdot g(t)dt, \quad \forall x \in [a,\infty],$$

unde $y(a) \leq \alpha$, $g \in C[a,\infty]$ şi $a_j \in \mathbb{R}$, $\forall j \geq a$, atunci

$$y(x) \leq \alpha \cdot \left(1 + \sum_{j=a}^{[x]-1} c_j \prod_{i=j+1}^{[x]-1} (1 + c_i)\right) \cdot e^{\int_{[x]}^{x} g(t)dt},$$

unde

$$c_j = a_j + e^{\int_j^{j+1} g(t)dt} - 1, \quad \forall j \geq a.$$

OBSERVAŢIA 4.6. *Dacă $g(t) \equiv 0$, atunci obţinem forma discretă a inegalităţii Gronwall iar în cazul $a_k = 0$, $\forall k \geq 0$ versiunea continuă.*

DEMONSTRAŢIE. Folosim versiunea discretă a lemei lui Gronwall pentru şirul $y_j = y(j)$, $j \geq a$ şi după aceea pe fiecare interval $[j, j+1)$ folosim versiunea continuă.

■

OBSERVAŢIA 4.7. *Inegalitatea se poate demonstra şi folosind lema abstractă, dar prima dată trebuie să demonstrăm o teoremă de existenţă şi unicitate într-un spaţiu de funcţii construit convenabil.*

5. Contracţii convexe pe fibră

În acest paragraf extindem teorema contracţiilor pe fibră (vezi M.A. Şerban [**112**](teorema 3.1.3) sau I.A. Rus [**103**]) pentru contracţii convexe pe fibră.

În [**103**] autorul a demonstrat următoarea teoremă:

TEOREMA 5.1. *(I.A. Rus) Fie* (X, d) *un spaţiu metric generalizat cu metrica* $d : X \times X \to \mathbb{R}^p_+$, *şi* (Y, ρ) *un spaţiu metric generalizat complet cu metrica* $\rho : Y \times Y \to \mathbb{R}^m_+$. *Dacă operatorul continuu* $A : X \times Y \to X \times Y$ *verifică ipotezele*

a) $A(x, y) = (B(x), C(x, y))$, $\forall x \in X$ *şi* $y \in Y$*;*

b) *operatorul* $B : X \to X$ *este slab Picard;*

c) *există o matrice convergentă la zero* $Q \in M_m(\mathbb{R}_+)$ *astfel încât operatorii* $C(x, \cdot) : Y \to Y$ *sunt* Q*-contracţii pentru orice* $x \in X$,

atunci operatorul A *este un operator slab Picard. Mai mult dacă* B *este operator Picard, atunci şi operatorul* A *este Picard.*

În [**112**] autorul a demonstrat următoarea teoremă (teorema 3.1.3):

TEOREMA 5.2. *(M.A. Şerban) Dacă* (X_k, d_k) *cu* $k = \overline{0, q}$ *şi* $q \geq 1$ *sunt spaţii metrice şi* $A_k : X_0 \times X_1 \times ... \times X_k \to X_k$ *pentru* $k = \overline{0, q}$ *operatori cu următoarele proprietăţi:*

a) *spaţiile* (X_k, d_k) *sunt spaţii metrice complete dacă* $k = \overline{1, q}$*;*

b) *operatorul* A_0 *este slab Picard;*

c) *există* $\alpha_k \in (0, 1]$ *astfel încât operatorii*

$$A_k(x_0, ..., x_{k-1}, \cdot) : X_k \to X_k$$

sunt α_k*-contracţii* $\forall$ $(x_0, x_1, ..., x_{k-1}) \in X_0 \times X_1 \times ... \times X_k$ *şi* $k = \overline{1, q}$;

d) *operatorii* A_k *sunt continui în raport cu* $(x_0, x_1, ..., x_{k-1})$ *pentru orice* $x_k \in X_k$ *şi* $k = \overline{1, q}$,

atunci operatorul $B_p = (A_0, A_1, ..., A_{p-1}, A_p)$ *este slab Picard. Mai mult, dacă* A_0 *este un operator Picard şi* $F_{A_0} = x_0^*, F_{A_1(x_0^*, \cdot)} = x_1^*, \dots$ $F_{A_p(x_0^*, x_1^*, ..., x_{p-1}^*, \cdot)} = x_p^*$, *atunci* $F_{B_q} = (x_0^*, x_1^*, ..., x_{q-1}^*, x_q^*)$.

Considerăm $\|\cdot\|_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o normă vectorială oarecare pe $\mathbb{R}^n$ şi $\|\cdot\|_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ norma subordonată acestei norme. Următoarea teoremă este o generalizare a teoremelor 5.1 şi 5.2 pentru contracţii convexe pe spaţii metrice generalizate (vezi definiţia 3.1).

5.1. Teorema contracţiilor convexe pe fibră. Pentru a studia derivabilitatea soluţiilor unui sistem de ecuaţii prin technica operatorilor Picard folosind contracţii convexe avem nevoie de următoarea teoremă:

Teorema 5.3. *(Sz. András* [**10**]*) Dacă* (X_k, d_k) *cu* $k = \overline{0, q}$ *şi* $q \geq 1$ *sunt spaţii metrice generalizate şi* $A_k : X_0 \times X_1 \times ... \times X_k \to X_k$ *cu* $k = \overline{0, q}$ *operatori continui cu proprietăţile :*

a) *spaţiile* (X_k, d_k) *sunt spaţii metrice generalizate complete cu metricile*
$d_k : X_k \times X_k \to \mathbb{R}_+^{n_k}$, $n_k \in \mathbb{N}^*$ *pentru* $k = \overline{1, q}$;

b) *operatorul* A_0 *este (slab) Picard;*

c) *există* $p_k \in \mathbb{N}^*$ *şi* $\Lambda_{p_k}^{(j)} \in M_{n_k}(\mathbb{R}_+)$ *pentru* $j = \overline{0, p_k - 1}$ *cu proprietatea* $\sum\limits_{j=0}^{p_k-1} ||\Lambda_{p_k}^{(j)}||_{m_k} \leq 1$ *astfel încât operatorii*

$$(T_k)(\cdot) = A_k(x_0, ..., x_{k-1}, \cdot) : X_k \to X_k$$

să verifice condiţia

$$d_k(T_k^{(p_k)}(x_{k1}), T_k^{(p_k)}(x_{k2})) \leq \sum_{j=0}^{p_k-1} \Lambda_{p_k}^{(j)} \cdot d_k(T_k^{(j)}(x_{k1}), T_k^{(j)}(x_{k2})),$$

$\forall\ (x_0, x_1, ..., x_{k-1}) \in X_0 \times X_1 \times ... \times X_{k-1}$ *şi* $x_{k1}, x_{k2} \in X_k$, $k = \overline{1,q}$;

d) *operatorii* A_k *sunt continui în raport cu* $(x_0, x_1, ..., x_{k-1})$ *pentru orice* $x_k \in X_k$ *şi* $k = \overline{1,q}$,

atunci operatorul $B_q = (A_0, A_1, ..., A_{q-1}, A_q)$ *este (slab) Picard. Mai mult dacă* A_0 *este un operator Picard şi* $F_{A_0} = x_0^*, F_{A_1(x_0^*,\cdot)} = x_1^*, ...$ $F_{A_p(x_0^*,x_1^*,...,x_{q-1}^*,\cdot)} = x_q^*$, *atunci* $F_{B_q} = (x_0^*, x_1^*, ..., x_{q-1}^*, x_q^*)$.

Pentru a demonstra această teoremă avem nevoie de următoarea lemă:

Lema 5.1. *(Sz. András* [**10**]*) Matricile* $\Lambda_{ip_k}^{(j)} \in M_{n_k}(\mathbb{R}_+)$ *cu* $i = \overline{1,p_k}$ *şi* $j = \overline{0,p_k-1}$ *satisfac inegalitatea* $\sum\limits_{j=0}^{p_k-1} ||\Lambda_{ip_k}^{(j)}||_{m_k} < 1$ *pentru* $i = \overline{1,p_k}$. *Dacă şirul* $(x_m)_{m\geq 0} \subset (\mathbb{R}_+^{n_k})^{p_k}$ *satisface inegalitatea*

$$x_{m+1} \leq \bar{A} \cdot x_m + y_m, \forall m \in \mathbb{N},$$

unde $(y_m)_{m\geq 0} \subset (\mathbb{R}_+^{n_k})^{p_k}$, $\lim\limits_{m\to\infty} y_m = 0$ *şi* $\bar{A} \in M_{p_k}(M_{n_k}(\mathbb{R}_+))$ *este construit prin*

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \Lambda_{1p_k}^{(0)} & \Lambda_{1p_k}^{(1)} & ... & \Lambda_{1p_k}^{(p_k-1)} \\ \Lambda_{2p_k}^{(0)} & \Lambda_{2p_k}^{(1)} & ... & \Lambda_{2p_k}^{(p_k-1)} \\ ... & ... & ... & ... \\ \Lambda_{p_kp_k}^{(0)} & \Lambda_{p_kp_k}^{(1)} & ... & \Lambda_{p_kp_k}^{(p_k-1)} \end{bmatrix},$$

atunci şirul $(x_m)_{m\geq 0}$ *este convergent la* 0.

Demonstraţia lemei. Fie $||\cdot||_{n_k} : \mathbb{R}_+^{n_k} \to \mathbb{R}_+$ o normă pe $\mathbb{R}_+^{n_k}$ şi $||\cdot||_{m_k} : M_{n_k}(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}_+$ norma subordonată. Definim norma matricială $||\cdot||_{np} : (\mathbb{R}_+^{n_k})^{p_k} \to \mathbb{R}_+$ prin

$$||x||_{np} = \max\left\{||x_i||_{n_k} \Big| x = (x_1, x_2, ..., x_{p_k}), x_i \in \mathbb{R}_+^{n_k}\right\}$$

şi $||\cdot||_{mm} : M_{p_k}(M_{n_k}(\mathbb{R}_+)) \to \mathbb{R}_+$ prin $||A||_{mm} = \max\limits_{i=\overline{1,p_k}} \sum\limits_{j=1}^{p_k} ||a_{ij}||_{m_k}$, unde $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq p_k}$ şi $a_{ij} \in M_{n_k}(\mathbb{R}_+)$ pentru $1 \leq i, j \leq p_k$. Cu aceste notaţii avem următoarele proprietăţi:

(1) $||Ax||_{np} \leq ||A||_{mm} \cdot ||x||_{np}$, $\forall\ x \in (\mathbb{R}_+^{n_k})^{p_k}$ şi $A \in M_{p_k}(M_{n_k}(\mathbb{R}_+))$;

(2) $||A \cdot B||_{mm} \leq ||A||_{mm} \cdot ||B||_{mm}$, $\forall\ A, B \in M_{p_k}(M_{n_k}(\mathbb{R}_+))$;

(3) Dacă $A \leq B$, atunci $||A||_{mm} \leq ||B||_{mm}$.

Din condiţiile date avem $||\bar{A}||_{mm} = \max\limits_{i=\overline{1,p_k}} \sum\limits_{j=0}^{p_k-1} ||\Lambda_{ip_k}^{(j)}||_{m_k} < 1$, deci şirul $X_m = \sum\limits_{j=1}^{m} \bar{A}^j$ converge către o matrice $\underline{A}$. Astfel există $M \in \mathbb{R}_+$ astfel încât

$$||\sum_{j=0}^{p-1} \bar{A}^j||_{mm} < M,\ \forall\ p \in \mathbb{N}^*$$

şi pentru orice $\epsilon > 0$ există $p(\epsilon) \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$||A^p||_{mm} < \tfrac{\epsilon}{M_1},\ \forall\ p \geq p(\epsilon),$$

unde M_1 este o constantă fixată. Din condiţia $\lim\limits_{m\to\infty} y_m = 0$ rezultă că pentru orice $\epsilon > 0$ există $m(\epsilon) \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $||y_m|| \leq \frac{\epsilon}{2M}$, $\forall\ m \geq m(\epsilon)$. Pe de altă parte avem

$$\bar{A}^k \cdot x_{m+p-k} \leq \bar{A}^{k+1} \cdot x_{m+p-k-1} + \bar{A}^k \cdot y_{m+p-k-1}, \quad k = \overline{0, p-1}.$$

Adunând membru cu membru aceste inegalităţi obţinem

$$x_{m+p} \leq \bar{A}^p \cdot x_m + \sum_{j=0}^{p-1} \bar{A}^j \cdot y_{m+p-1-j}.$$

Această inegalitate implică

$$||x_{m_\epsilon+p}||_{np} \leq ||\bar{A}^p||_{mm} \cdot ||x_{m_\epsilon}||_{np} + \frac{\epsilon}{2M} \cdot \sum_{j=0}^{p-1} ||\bar{A}^j||_{mm} \leq$$

$$\leq ||\bar{A}||_{mm}^p \cdot M_1 + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon, \text{ dacă } p \geq p(\epsilon).$$

În consecinţă pentru orice $\epsilon > 0$ există $\overline{n}(\epsilon) = p(\epsilon) + m(\epsilon) \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$||x_{\overline{n}}||_{np} \leq \epsilon, \quad \forall \overline{n} \geq n(\epsilon),$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. ∎

Demonstraţia teoremei. Prima dată demonstrăm teorema pentru $q = 1$ şi după aceea folosim inducţia matematică după q. Pentru $q = 1$ considerăm şirurile $(x_n^0)_{n\geq 0} \subset X_0$ şi $(x_n^1)_{n\geq 0} \subset X_1$ definite de relaţiile

$$x_{n+1}^0 = A_0(x_n^0), \forall n \geq 0 \quad \text{şi} \quad x_{n+1}^1 = A_1(x_n^0, x_n^1), \forall n \geq 0. \tag{5.24}$$

Şirul $(x_n^0)_{n\geq 0}$ converge către un element $x_0^* \in X_0$ deoarece operatorul A_0 este slab Picard. Datorită teoremei 3.1 operatorul $A_1(x_0^*, \cdot) : X_1 \to X_1$ este un operator Picard, deci există un element unic $x_1^* \in X_1$ astfel încât $A_1(x_0^*, x_1^*) = x_1^*$. Demonstrăm că şirul $(x_n^1)_{n\geq 0}$ converge la x_0^*.

$$d_1(x_{n+p_1}^1, x_1^*) = d_1(A_1(x_{n+p_1-1}^0, x_{n+p_1-1}^1), A_1(x_0^*, x_1^*)) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{p_1} d_1(A_1^{j-1}(A_1(x^0_{n+p_1-j}, x^1_{n+p_1-j})), A_1^j(x^1_{n+p_1-j}))+$$

$$+d_1(A_1^{p_1}(x_n^1), A_1^{p_1}(x_1^*)) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{p_1} d_1(A_1^{j-1}(A_1(x^0_{n+p_1-j}, x^1_{n+p_1-j})), A_1^j(x^1_{n+p_1-j}))+$$

$$+\sum_{j=0}^{p_1-1} \Lambda_{p_1}^{(j)} \cdot d_1(A_1^j(x_n^1), A_1^j(x_1^*)),$$

unde

$$A_1^j : X_1 \to X_1, \quad A_1^j(x) = \underbrace{A_1(x_0^*, A_1(x_0^*, ..., A_1}_{j}(x_0^*, x)...)$$

pentru $j = \overline{1, p_1}$ şi $A_1^0(x) = x$, $\forall\, x \in X_1$. Folosind aceeaşi technică obţinem

$$d_1(A_1^j(x^1_{n+p_1}), A_1^j(x_1^*)) \leq \tag{5.25}$$

$$\leq \sum_{l=1}^{p_1} d_1(A_1^{j+l-1}(A_1(x^0_{n+p_1-l}, x^1_{n+p_1-l})), A_1^{j+l}(x^1_{n+p_1-l}))+ \tag{5.26}$$

$$+\sum_{l=0}^{p_1-1} \Lambda_{p_1}^{(l)} \cdot d_1(A_1^{j+l}(x_n^1), A_1^{j+l}(x_1^*)), \tag{5.27}$$

pentru $j = \overline{1, p_1 - 1}$.

Pe de altă parte putem construi inductiv matricile $\Lambda_{ip_1}^{(j)} \in M_{n_k}((R)_+)$ astfel încât

$$\sum_{l=0}^{p_1-1} \Lambda_{p_1}^{(l)} \cdot d_1(A_1^{j+l}(x_n^1), A_1^{j+l}(x_1^*)) \leq \sum_{l=0}^{p_1-1} \Lambda_{ip_1}^{(l)} \cdot d_1(A_1^l(x_n^1), A_1^l(x_1^*)),$$

pentru $i = \overline{1, p_1}$ şi $\sum_{j=0}^{p_1-1} ||\Lambda_{ip_1}^{(j)}||_{m_1} < 1, \quad i = \overline{1, p_1}$. Cu aceste construcţii considerăm $\bar{A} = [\Lambda_{ip1}^{(j)}]_{i=\overline{1,p_1}, j=\overline{0,p_1-1}}$,

$$x_m = \begin{bmatrix} (d_1(x^1_{p\cdot m}, x^*_1) \\ d_1(A^1_1(x^1_{p\cdot m}), x^*_1) \\ d_1(A^2_1(x^1_{p\cdot m}), x^*_1) \\ \vdots \\ d_1(A^{p_1-1}_1(x^1_{p\cdot m}), x^*_1) \end{bmatrix}, \forall m \in \mathbb{N}. \tag{5.28}$$

şi

(5.29)

$$y_m = \begin{bmatrix} \sum\limits_{l=1}^{p_1} d_1(A^{l-1}_1(A_1(x^0_{n+p_1-l}, x^1_{n+p_1-l})), A^l_1(x^1_{n+p_1-l})) \\ \sum\limits_{l=1}^{p_1} d_1(A^{1+l-1}_1(A_1(x^0_{n+p_1-l}, x^1_{n+p_1-l})), A^{1+l}_1(x^1_{n+p_1-l})) \\ \sum\limits_{l=1}^{p_1} d_1(A^{2+l-1}_1(A_1(x^0_{n+p_1-l}, x^1_{n+p_1-l})), A^{2+l}_1(x^1_{n+p_1-l})) \\ \vdots \\ \sum\limits_{l=1}^{p_1} d_1(A^{p_1+l-2}_1(A_1(x^0_{n+p_1-l}, x^1_{n+p_1-l})), A^{p_1+l-1}_1(x^1_{n+p_1-l})) \end{bmatrix},$$

$\forall m \in \mathbb{N}$. Din inegalităţile precedente, proprietăţile operatorului A_0 şi continuitatea operatorului A_1 rezultă că şirurile

$$(x_m)_{m\geq 0}, (y_m)_{m\geq 0} \in (\mathbb{R}^{n_1}_+)^{p_1}$$

satisfac ipotezele lemei 5.1, deci $\lim\limits_{m\to\infty} d_1(x^1_{p\cdot m}, x^*_1) = 0$. Din continuitatea operatorului A_1 rezultă $\lim\limits_{m\to\infty} x^1_m = x^*_1$.

Dacă teorema este demonstrată pentru q, putem demonstra pentru $q+1$ aplicând cazul deja demonstrat pentru $A_0 \to (A_0, A_1, ..., A_q)$ şi $A_1 \to A_{q+1}$. ■

5.2. Aplicaţie. Prezentăm o aplicaţie în care nici teorema 5.1 şi nici teorema 5.2 nu poate fi aplicată fără a schimba normele. (Menţionăm că datorită proprietăţii de infimum a razei spectrale dacă garantăm $\lim_{m\to\infty} S^m = 0$ cu $S \in M_n(\mathbb{R})$, putem schimba norma astfel încât să avem $||S|| < 1$.) Pe de altă parte dacă $\lim_{n\to\infty} S^n = 0$, putem alege $p \in \mathbb{N}$ şi $\alpha_1, ..., \alpha_p \in (0,1)$ astfel ca $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j < 1$ şi să avem $||S^p|| \leq \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j \cdot ||S^j||$, deci putem aplica teorema 5.3 fără a schimba norma.

Folosim notaţiile

$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \begin{bmatrix} |x_1 - y_1| \\ |x_2 - y_2| \end{bmatrix} \quad \forall\, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

şi

$$||S|| = \max\{|s_{11}| + |s_{12}|, |s_{21}| + |s_{22}|\} \text{ dacă } S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}.$$

Pentru matricea $S = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{16} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$ avem $||S|| = \frac{13}{12}$, $||S^2|| = \frac{649}{576}$, $||S^3|| = \frac{465}{407}$, $||S^4|| = \frac{507}{445}$..., $||S^9|| = \frac{4211}{4210} > 1$ şi $||S^{10}|| = \frac{1211}{1256} < 1$, deci

$$0.99 \cdot ||S^{10}|| + \sum_{j=1}^{9} 0.001 \cdot ||S^j|| = \frac{762}{947} < 1. \tag{5.30}$$

Datorită relaţiilor precedente putem aplica teorema 5.3 pentru studiul sistemului:

$$\begin{cases} x_1(\lambda) = \sin\left(\frac{5}{6}x_1(\lambda) + \frac{1}{4}x_2(\lambda) + \lambda\right) \\ x_2(\lambda) = \cos\left(\frac{1}{16}x_1(\lambda) + \frac{5}{6}x_2(\lambda) + \lambda^2\right) \end{cases} \tag{5.31}$$

Avem $A_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A_0(x_1, x_2) =$

$$= \left(\sin\left(\frac{5}{6}x_1(\lambda) + \frac{1}{4}x_2(\lambda) + \lambda\right), \cos\left(\frac{1}{16}x_1(\lambda) + \frac{5}{6}x_2(\lambda) + \lambda^2\right)\right)$$

şi $A_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A_1(x_1, x_2, u_1, u_2) = (v_1, v_2)$, unde

$$v_1 = \frac{5}{6}\sin\left(\frac{5}{6}x_1(\lambda) + \frac{1}{4}x_2(\lambda) + \lambda\right) \cdot u_1 +$$
$$+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{5}{6}x_1(\lambda) + \frac{1}{4}x_2(\lambda) + \lambda\right) \cdot u_2 + 1,$$

$$v_2 = \frac{1}{16}\cos\left(\frac{1}{16}x_1(\lambda) + \frac{5}{6}x_2(\lambda) + \lambda^2\right) \cdot u_1 +$$
$$+\frac{5}{6}\cos\left(\frac{1}{16}x_1(\lambda) + \frac{5}{6}x_2(\lambda) + \lambda^2\right) \cdot u_2 + 2\lambda.$$

Cu aceste notaţii A_0 este un operator Picard deoarece

$$d(A_0(x_1, x_2), A_0(y_1, y_2)) \leq S \cdot d((x_1, x_2), (y_1, y_2))$$

şi are loc relaţia (5.30) (vezi [**12**]). Pe de altă parte

$$d(A_1(x_1, x_2, u_1, u_2), A_1(x_1, x_2, v_1, v_2)) \leq S \cdot d((u_1, u_2), (v_1, v_2))$$

şi astfel pentru $j = \overline{1, 10}$ avem

$$d(A_1^{(11)}(u_1, u_2), A_1^{(11)}(v_1, v_2)) \leq A^j \cdot d(A_1^{(11-j)}(u_1, u_2), A_1^{(11-j)}(v_1, v_2)),$$

unde $A_1^{j+1}(u_1, u_2) = A_1^{(j)}(x_1, x_2, u_1, u_2)$ $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ cu $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ fixaţi. În consecinţă avem

$$d(A_1^{(11)}(u_1, u_2), A_1^{(11)}(v_1, v_2)) \leq 0.99 \cdot S^{10} \cdot d(A_1^{(1)}(u_1, u_2), A_1^{(1)}(v_1, v_2)) +$$

$$+0.001 \cdot \sum_{j=1}^{9} S^j \cdot (A_1^{(11-j)}(u_1, u_2), A_1^{(11-j)}(v_1, v_2)).$$

Această inegalitate, relaţia (5.30) şi teorema 5.3 implică convergenţa şirurilor

$$(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)}) = A_0(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \text{ şi} \tag{5.32}$$

$$(u_1^{(n+1)}, u_2^{(n+1)}) = A_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, u_1^{(n)}, u_2^{(n)}). \tag{5.33}$$

Dacă alegem $x_1, x_2 \in C^1[\lambda_1, \lambda_2]$, $u_1 = \frac{\partial x_1}{\partial \lambda}$ şi $u_2 = \frac{\partial x_2}{\partial \lambda}$, obţinem $u_1^{(n)} = \frac{\partial x_1^{(n)}}{\partial \lambda}$ şi $u_2^{(n)} = \frac{\partial x_2^{(n)}}{\partial \lambda}$, deci pe baza teoremei lui Weierstrass rezultă că soluţiile sistemului (5.31) sunt continuu derivabile în raport cu λ. Astfel am obţinut următoarea teoremă:

TEOREMA 5.4. *(Sz. András [**10**]) Sistemul (5.31) are o soluţie unică în $\mathbb{R}^2$ pentru orice $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ iar funcţiile $\lambda \to x_1(\lambda)$ şi $\lambda \to x_2(\lambda)$ sunt continuu derivabile în raport cu λ (sunt de clasă $C^1[\lambda_1, \lambda_2]$).*

OBSERVAŢIA 5.1. *Menţionăm încă o dată că matricea S este convergentă la 0, dar pentru a arăta acest lucru avem nevoie de valorile proprii şi nu de normele folosite mai sus.*

Ecuaţii Fredholm-Volterra în $C[a, b]$

În acest capitol stabilim teoreme de existenţă şi teoreme de existenţă şi unicitate pentru ecuaţii Fredholm-Volterra. În primul paragraf folosim teorema lui Schauder, teorema Leray-Schauder şi teorema lui Krasnoselskii pentru a stabili teoreme de existenţă. În al doilea paragraf folosim technica operatorilor Picard definiţi pe un produs cartezian pentru a stabili teoreme de existenţă şi unicitate. Tratăm separat cazul liniar, pentru a obţine o reprezentare a soluţiei şi extindem unele rezultate la cazul ecuaţiilor Fredholm-Volterra cu singularitate slabă. În paragraful 3 folosim technica operatorilor Picard pe fibre pentru a studia derivabilitatea soluţiei în raport cu un parametru iar în paragraful 4 extindem teoremele din paragrafele 2 şi 3 la cazul ecuaţiilor Fredholm-Volterra cu argument modificat iar în ultimul paragraf stabilim teoreme de comparaţie referitoare la ecuaţiile Fredholm-Volterra. Teoremele de existenţă şi unicitate completează rezultatele obţinute de I. Naroşi ([**78**]), A. Petruşel ([**87**]), B.G. Pachpatte ([**80**]), D. Gou ([**45**]), V.M. Mamedov şi Ja. D. Musaev ([**71**]), I. Bihari ([**21**]), J. Kwapisz şi M. Turo ([**64**] şi [**65**]), R.K. Nohel, J.A. Wong şi J.S.W. Miller ([**76**]), şi C. Corduneanu ([**33**]). În condiţiile acestor teoreme se pot obţine ca şi cazuri particulare teoremele clasice referitoare atât la ecuaţiile Volterra cât şi la ecuaţiile de tip Fredholm. O parte a rezultatelor originale din acest capitol au fost publicate în lucrările [**8**] şi [**14**].

1. Teoreme de existenţă

În acest paragraf aplicăm teorema lui Schauder şi teorema lui Krasnoselskii pentru a studia existenţa soluţiilor ecuaţiei mixte

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K_1(x,s,y(s))ds + \int_a^b K_2(x,s,y(s))ds, \tag{1.34}$$

Vom folosi proprietăţile cunoscute ale operatorilor integrali de tip Volterra şi Fredholm (pentru demonstraţia acestor proprietăţi se poate consulta R. Precup [**91**] şi [**89**]).

Teorema 1.1. *(Sz. András, [**7**]) Dacă au loc condiţiile:*

a) $K_1, K_2 \in C([a,b]\times[a,b]\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ *şi* $f \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$

b) *există* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ *astfel încât* $\|K_1(x,s,u)\| \le \alpha\cdot\|u\| + \beta$;

c) *există* $M \in \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$M = \sup_{(x,s,u)\in[a,b]\times[a,b]\times\mathbb{R}^n} \|K_2(x,s,u)\|;$$

atunci ecuaţia 1.34 are cel puţin o soluţie y^* *în* $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ *cu proprietatea* $\|y^*\|_{c\cdot\alpha} \le R_c$, *unde* R_c *este un număr mai mare decât* $\frac{c-1}{c}\cdot[\|f\| + (M+\beta)(b-a)]$ *şi* $c > 1$.

Pentru $\tau > 0$ norma Bielecki a unei funcţii $y \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$ este definită prin $\|y\|_\tau = \max\limits_{x\in[a,b]} \|y(x)\|\cdot e^{\tau(x-a)}$.

Demonstraţie. Considerăm spaţiul Banach $X = C([a,b],\mathbb{R}^n)$ şi operatorul $T : X \to X$ definit prin

$$T[y](x) = f(x) + \int_a^x K_1(x,s,y(s))ds + \int_a^b K_2(x,s,y(s))ds,\ \forall x\in[a,b]$$

Datorită condiţiei a) acest operator este bine definit şi complet continuu. Folosind b) şi c) obţinem

$$\|T[y](x)\| \leq \|f(x)\| + \int\limits_a^x \|K_1(x,s,y(s))\|ds + \int\limits_a^b \|K_2(x,s,y(s))\|ds \leq$$

$$\leq \|f\| + \alpha \cdot \int\limits_a^x \|y(s)\| \cdot e^{-\tau(s-a)} \cdot e^{\tau(s-a)} ds + \beta \cdot (b-a) + M \cdot (b-a) \leq$$

$$\leq \|f\| + \alpha \cdot \frac{e^{\tau(x-a)}}{\tau} \cdot \|y\|_\tau + (\beta + M) \cdot (b-a).$$

Din această inegalitate deducem că

$$\|T[y]\|_\tau \leq \frac{\alpha}{\tau} \cdot \|y\|_\tau + \|f\| + (M+\beta)(b-a),$$

deci pentru $\|y\|_\tau \leq R$ avem inegalitatea

$$\|T[y]\|_\tau \leq \frac{\alpha}{\tau} \cdot R + \|f\| + (M+\beta)(b-a).$$

Dacă $\tau > \alpha$, atunci din această inegalitate obţinem că pentru $R > \frac{\|f\|+(M+\beta)(b-a)}{1-\frac{\alpha}{\tau}}$ operatorul T invariază bila $B(0,R)$. Din teorema lui Schauder rezultă existenţa unei soluţii y^* şi inegalitatea $\|y^*\|_\tau \leq R$. Dacă $\tau = c \cdot \alpha$, atunci rezultă că $\|y^*\|_{c\cdot\alpha} \leq R_c$. ■

Putem relaxa condiţiile asupra nucleelor prin schimbarea spaţiului din care le alegem sau prin folosirea altei teoreme de punct fix. Dacă folosim teorema lui Krasnoselskii (5.10) obţinem următorul rezultat:

Teorema 1.2. *(Sz. András, [**7**]) Dacă au loc condiţiile:*

a) $K_1, K_2 \in C([a,b]\times[a,b]\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ *şi* $f \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$

b) K_2 *are proprietatea Lipschitz în raport cu ultima variabilă şi există* $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}_+$ *astfel încât* $\|K_1(x,s,u)\| \leq \alpha_1 \cdot \|u\| + \beta_1$;

c) *există funcţia integrabilă* $k_2 : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}_+$ *şi* $\tau_0 > \alpha_1$ *astfel încât*

$$\sup_{x\in[a,b]} \int_a^b k_2(x,s)ds \leq \left(1 - \frac{\alpha_1}{\tau_0}\right) e^{-\tau_0(b-a)}; \tag{1.35}$$

d) *există* $\beta_2 \in \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$\|K_2(x,s,z)\| \leq k_2(x,s) \cdot \|z\| + \beta_2,\ \forall (x,s) \in [a,b] \times [a,b], z \in \mathbb{R}^n;$$

atunci ecuaţia 1.34 are cel puţin o soluţie în $C([a,b],\mathbb{R}^n)$.

Demonstraţie. Operatorul $T_1 : C([a,b],\mathbb{R}^n) \to C([a,b],\mathbb{R}^n)$,

$$T_1[y](x) = f(x) + \int_a^x K_1(x,s,y(s))ds$$

este contracţie cu o normă Bielecki adecvată iar operatorul

$$T_2 : C([a,b],\mathbb{R}^n) \to C([a,b],\mathbb{R}^n),\ T_2[y](x) = \int_a^b K_2(x,s,y(s))ds$$

este complet continuu faţă de aceeaşi normă. Din şirul de inegalităţi

$$\|T[y](x)\| \leq \|f(x)\| + \int_a^x \|K_1(x,s,y(s))\|ds + \int_a^b \|K_2(x,s,y(s))\|ds \leq$$

$$\leq \|f\| + (\beta_1+\beta_2)(b-a) + \alpha_1 \int_a^x \|y(s)\| e^{-\tau(s-a)} e^{\tau(s-a)} ds +$$

$$+ \int_a^b k_2(x,s) \cdot \|y(s)\| ds \leq \|f\| + (\beta_1+\beta_2)(b-a) + \frac{\alpha_1}{\tau}\|y\|_\tau \cdot e^{\tau(x-a)} +$$

$$+ \|y\|_\tau \int_a^b k_2(x,s) e^{\tau(s-a)} ds$$

rezultă inegalitatea

$$\begin{aligned}(1.36)\qquad &\|T[y](x)\|_\tau \leq \|f\| + (\beta_1+\beta_2)(b-a)+\\ &+\|y\|_\tau \cdot \left(\frac{\alpha_1}{\tau} + \int\limits_a^b k_2(x,s)e^{-\tau(x-s)}ds\right),\end{aligned}$$

deoarece $e^{-\tau(x-a)} \leq 1$ pentru $x \in [a,b]$. Condiţia c) şi relaţia (1.36) garantează mărginirea mulţimii $T(\overline{U_\tau(R)})$, dacă

$$U_\tau(R) = \{y \in C([a,b],\mathbb{R}^n) | \, \|y\|_\tau \leq R\}$$

şi $R > 0$, deci conform teoremei 5.10 avem o alternativă de tip Leray-Schauder (pentru mulţimea C considerăm o bilă închisă pentru care $T(\overline{U_\tau(R)}) \subset C$). În continuare fixăm elementul $p = 0$, şi demonstrăm că există $R > 0$ astfel încât pentru $\lambda \in (0,1)$ ecuaţia $y = \lambda \cdot T[y] + (1-\lambda)p$ nu are soluţii pe frontiera lui $U_\tau(R)$. Dacă $\|y\|_\tau = R$, şi $y = \lambda \cdot T[y]$, atunci din inegalitatea 1.36 deducem

$$R < \|T[y]\|_\tau \leq \|f\|+(\beta_1+\beta_2)(b-a)+R\cdot\left(\frac{\alpha_1}{\tau} + \int\limits_a^b k_2(x,s)e^{-\tau(x-s)}ds\right).$$

Dacă putem alege τ astfel încât

$$(1.37)\qquad 1 - \frac{\alpha_1}{\tau} - \int\limits_a^b k_2(x,s)e^{-\tau(x-s)}ds > 0,$$

atunci există $R > 0$ cu proprietatea că ecuaţia $y = \lambda \cdot T[y]$ nu are soluţie pe frontiera lui $U_\tau(R)$. Pe de altă parte

$$(1.38)\qquad \int\limits_a^b k_2(x,s)e^{\tau s}ds \leq \int\limits_a^b k_2(x,s)ds \cdot e^{\tau b}$$

şi datorită condiţiei c) pentru $\tau = \tau_0$ avem

$$\int_a^b k_2(x,s)ds \cdot e^{\tau_0 b} \le \sup_{x\in[a,b]} \int_a^b k_2(x,s)ds \cdot e^{\tau_0 b} \le$$
$$\le \left(1 - \frac{\alpha_1}{\tau_0}\right) e^{\tau_0 a} < \left(1 - \frac{\alpha_1}{\tau_0}\right) e^{\tau_0 x}.$$

Parametrul τ s-a fixat astfel ca operatorul T_1 să fie contracţie. Datorită echivalenţei normelor $\|\cdot\|_\tau$ şi $\|\cdot\|_{\tau_0}$ există o bilă $U_\tau(R)$ pentru care ecuaţia $y = \lambda T[y]$ nu are soluţii pe frontiera lui $U_\tau(R)$, deci ecuaţia 1.34 are cel puţin o soluţie în $C([a, b], \mathbb{R}^n)$. ∎

Observaţia 1.1. *În inegalitatea 1.35 considerăm funcţia definită de expresia din membrul drept*

$$g : [\alpha_1, \infty) \to \mathbb{R},\ g(\tau) = \left(1 - \frac{\alpha_1}{\tau}\right) e^{-\tau(b-a)}.$$

Această funcţie are un punct de maxim în

$$\tau_1 = \frac{\alpha_1(b-a) + \sqrt{\alpha_1^2(b-a)^2 + 4\alpha_1(b-a)}}{2(b-a)}.$$

Dacă numărul din membrul stâng al inegalităţii 1.35 este mai mare decât maximul funcţiei g, atunci nu există τ_0 astfel încât inegalitatea c) să fie satisfăcută. Pe de altă parte dacă

$$\sup_{x\in[a,b]} \int_a^b k_2(x,s)ds \le g(\tau_1),$$

atunci putem lua $\tau_0 = \tau_1$.

Observaţia 1.2. *Dacă aplicăm teorema Leray-Schauder (5.7) operatorului $T_1 + T_2$, atunci putem renunţa la condiţia Lipschitz.*

În locul inegalităţii 1.38 putem folosi inegalitatea lui Hölder şi astfel condiţia asupra lui K_2 devine mai generală.

TEOREMA 1.3. *(Sz. András, [7]) Dacă au loc condiţiile*

a) $K_1, K_2 \in C([a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ *şi* $f \in C([a,b], \mathbb{R}^n)$

b) *există* $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}_+$ *astfel încât* $\|K_1(x,s,u)\| \leq \alpha_1 \cdot \|u\| + \beta_1$;

c) *există funcţia* $k_2 : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ *şi numărul* $p > 1$ *astfel încât*

$$\|K_2(x,s,z)\| \leq k_2(x,s) \cdot \|z\| + \beta_2,\ \forall (x,s) \in [a,b] \times [a,b], z \in \mathbb{R}^n;$$

$k_2(x,\cdot) \in L^p[a,b]$ *şi* $\|\, \|k_2(x,\cdot)\|_{L^p} \|_{\tau_0} < \frac{1}{b-a} \cdot e^{-1-\alpha q^2(b-a)}$, *unde* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *şi* $\tau_0 = \alpha q + \frac{1}{q(b-a)}$,

atunci ecuaţia 1.34 are cel puţin o soluţie în spaţiul $C([a,b], \mathbb{R}^n)$.

DEMONSTRAŢIE. Operatorii

$$T_1 : C([a,b], \mathbb{R}^n) \to C([a,b], \mathbb{R}^n),\ T_1[y](x) = f(x) + \int_a^x K_1(x,s,y(s))$$

şi

$$T_2 : C([a,b], \mathbb{R}^n) \to C([a,b], \mathbb{R}^n),\ T_2[y](x) = \int_a^b K_2(x,s,y(s))$$

sunt complet continui faţă de o normă Bielecki oarecare. Ca în cazul teoremei anterioare este suficient ca (1.37) să aibă loc. Din inegalitatea lui Hölder obţinem

$$\int_a^b k_2(x,s) e^{-\tau(x-s)} ds \leq \|k_2(x,\cdot)\|_{L^p} \cdot \left(\int_a^b e^{-\tau q(x-s)} ds \right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq \|k_2(x,\cdot)\|_{L^p} e^{-\tau(x-a)} \cdot \left(\frac{e^{\tau q(b-a)} - 1}{\tau q} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Astfel pentru ca inegaliatea 1.37 să fie adevărată este suficient să demonstrăm că

$$\left[\|k_2(x,\cdot)\|_{L^p} e^{-\tau(x-a)}\right]^q \cdot \frac{e^{\tau q(b-a)}-1}{\tau q} < \left(1-\frac{\alpha}{\tau}\right)^q. \tag{1.39}$$

Dacă alegem $\tau = \tau_0$, condiţia c) implică inegalitatea

$$[\|\,\|k_2(x,\cdot)\|_{L^p}\,\|_{\tau_0}]^q \cdot e^{\tau q(b-a)} < q(\tau - \alpha q) \tag{1.40}$$

deoarece funcţia $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $h(\tau) = q(\tau - \alpha q) \cdot e^{-\tau q(b-a)}$ îşi ia valoarea maximă în τ_0 şi maximul este chiar $\frac{1}{b-a} e^{-1-\alpha q^2(b-a)}$. Din inegalitatea lui Bernoulli şi inegalitatea 1.40 rezultă relaţia 1.39 şi astfel deducem existenţa unei bile $U_{\tau_0}(R)$ pentru care ecuaţia $y = \lambda T[y]$ nu are soluţii pe frontiera lui $U_{\tau_0}(R)$. Datorită teoremei 5.7 ecuaţia 1.34 are cel puţin o soluţie în $C([a,b],\mathbb{R}^n)$. ∎

Observaţia 1.3.
1. *Condiţii mai generale care să genereze mărginirea "a priori" a soluţiilor pot fi formulate dacă se folosesc teoreme de tip Leray-Schauder pentru spaţii cu mai multe metrici (a se vedea R. Precup* [**90**] *şi R.P. Agarwal, D. O'Regan* [**2**]*)*
2. *Dacă K_1 şi K_2 sunt de tip Hammerstein, putem renunţa la continuitatea nucleelor fără a schimba continuitatea soluţiei şi astfel vom avea teoreme mult mai generale (a se vedea lucrările lui R.P. Agarwal, M. Meehan şi D. O'Regan* [**5**], [**73**], [**74**] *şi R. Precup* [**91**]*).*

2. Teoreme de existenţă şi unicitate

În acest paragraf studiem existenţa şi unicitatea soluţiilor continue ale ecuaţiilor integrale mixte

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K_1(x, s, y(s); \lambda)ds + \int_a^b K_2(x, s, y(s); \lambda)ds, \tag{2.41}$$

şi

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K_1(x, s)y(s)ds + \lambda \int_a^b K_2(x, s)y(s)ds \tag{2.42}$$

unde λ este un parametru real. În primul subparagraf stabilim teoreme pentru cazul neliniar, în subparagraful 2.2 extindem aceste teoreme la cazul ecuaţiilor cu singularitate slabă, iar în ultimul paragraf studiem dependenţa continuă de date şi derivabilitatea soluţiilor în raport cu parametrul λ. Pe parcursul demonstraţiilor folosim tehnica operatorilor Picard (vezi I.A. Rus [**101**]), a operatorilor Picard pe fibre (vezi I.A. Rus [**102**] şi [**103**]) şi a operatorilor definiţi pe produs cartezian (vezi M.A. Şerban [**112**]). În cazul ecuaţiilor cu singularitate slabă folosim technica operatorilor iteraţi. În majoritatea situaţiilor rezultatele obţinute se pot extinde şi la cazul în care soluţiile se caută în spaţiul $C([a, b], X)$, unde X este un spaţiu Banach. Rezultatele din acest capitol au fost publicate în lucrările [**8**] şi [**14**].

2.1. Cazul neliniar. Pentru a stabili o teoremă de existenţă şi unicitate avem nevoie de următorul rezultat ajutător.

Teorema 2.1. *(Sz. András [**8**]) Dacă (X_i, d_i) sunt spaţii metrice complete pentru $i = \overline{1, n}$ şi operatorii $T_i : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to X_i$*

satisfac condiţiile

$$d_i\left(T_i(\overline{x}), T_i(\overline{y})\right) \leq \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot d_j(x_j, y_j),$$

unde c_{ij} *sunt constante reale pentru* $i, j = \overline{1, n}$, $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, *şi matricea* $C = (c_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ *este convergentă la zero, atunci*

a) *operatorul* $T : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ *definit prin*

$$T(x_1, x_2, ..., x_n) =$$

$$(T_1(x_1, x_2, ..., x_n), T_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., T_n(x_1, x_2, ..., x_n))$$

este un operator Picard, deci şirurile

$$x_i^{(m+1)} = T_i\left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}\right), \ m \in \mathbb{N}$$

sunt convergente la elementele x_i^*, *unde*

$$T\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right) = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right);$$

b) *avem următoarea inegalitate*

$$\begin{bmatrix} d_1\left(x_1^*, x_1^{(m)}\right) \\ d_2\left(x_2^*, x_2^{(m)}\right) \\ \ldots \\ d_n\left(x_n^*, x_n^{(m)}\right) \end{bmatrix} \leq C^m (I_n - C)^{-1} \begin{bmatrix} d_1\left(x_1^{(1)}, x_1^{(0)}\right) \\ d_2\left(x_2^{(1)}, x_2^{(0)}\right) \\ \ldots \\ d_n\left(x_n^{(1)}, x_n^{(0)}\right) \end{bmatrix}, \ m \geq 1.$$

Demonstraţie. Considerăm şirurile

$$x_i^{(m+1)} = T_i(x_1^{(m)},\ x_2^{(m)},\ ..., x_n^{(m)})$$

unde $x_1^{(0)} \in X_i$ pentru $i \in \{1,\ 2,\ ..., n\}$. Din condiţiile date deducem

$$\begin{bmatrix} d_1\left(x_1^{(m+1)},\, x_1^{(m)}\right) \\ d_2\left(x_2^{(m+1)},\, x_2^{(m)}\right) \\ \ldots \\ d_n\left(x_n^{(m+1)},\, x_n^{(m)}\right) \end{bmatrix} \le C \begin{bmatrix} d_1\left(x_1^{(m)},\, x_1^{(m-1)}\right) \\ d_2\left(x_2^{(m)},\, x_2^{(m-1)}\right) \\ \ldots \\ d_n\left(x_n^{(m)},\, x_n^{(m-1)}\right) \end{bmatrix} \text{ deci}$$

$$\begin{bmatrix} d_1\left(x_1^{(m+p)},\, x_1^{(m)}\right) \\ d_2\left(x_2^{(m+p)},\, x_2^{(m)}\right) \\ \ldots \\ d_n\left(x_n^{(m+p)},\, x_n^{(m)}\right) \end{bmatrix} \le \left(\sum_{j=m}^{m+p-1} C^j\right) \begin{bmatrix} d_1\left(x_1^{(1)},\, x_1^{(0)}\right) \\ d_2\left(x_2^{(1)},\, x_2^{(0)}\right) \\ \ldots \\ d_n\left(x_n^{(1)},\, x_n^{(0)}\right) \end{bmatrix}.$$

De aici rezultă

$$\begin{bmatrix} d_1\left(x_1^{(m+p)},\, x_1^{(m)}\right) \\ d_2\left(x_2^{(m+p)},\, x_2^{(m)}\right) \\ \ldots \\ d_n\left(x_n^{(m+p)},\, x_n^{(m)}\right) \end{bmatrix} \le M_n(m,p) \begin{bmatrix} d_1\left(x_1^{(1)},\, x_1^{(0)}\right) \\ d_2\left(x_2^{(1)},\, x_2^{(0)}\right) \\ \ldots \\ d_n\left(x_n^{(1)},\, x_n^{(0)}\right) \end{bmatrix},$$

unde $M_n(m,p) = C^m\,(I_n - C^p)\,(I_n - C)^{-1}$. Din condiţia $C^m \to O_n$ deducem că şirurile $\left(x_k^{(m)}\right)_{m\ge 0}$ sunt şiruri Cauchy pentru $k \in \{1,\, 2,\, ...,n\}$. Pe de altă parte spaţiile (X_i, d_i) sunt complete, deci şirurile precedente sunt convergente. Dacă notăm cu x_k^* limita şirului $\left(x_k^{(m)}\right)_{m\ge 0}$, atunci

$$\begin{bmatrix} d_1\left(x_1^{*},\, x_1^{(m)}\right) \\ d_2\left(x_2^{*},\, x_2^{(m)}\right) \\ \ldots \\ d_n\left(x_n^{*},\, x_n^{(m)}\right) \end{bmatrix} \le C^m (I_n - C)^{-1} \begin{bmatrix} d_1\left(x_1^{(1)},\, x_1^{(0)}\right) \\ d_2\left(x_2^{(1)},\, x_2^{(0)}\right) \\ \ldots \\ d_n\left(x_n^{(1)},\, x_n^{(0)}\right) \end{bmatrix}$$

Inegalităţile

$$\begin{bmatrix} d_1\left(T_1(x_1^{(*)},\,...,x_n^{(*)}),\,x_1^{(m+1)}\right) \\ d_2\left(T_2(x_1^{(*)},\,...,x_n^{(*)}),\,x_2^{(m+1)}\right) \\ ... \\ d_n\left(T_n(x_1^{(*)},\,...,x_n^{(*)}),\,x_n^{(m+1)}\right) \end{bmatrix} \le C \begin{bmatrix} d_1\left(x_1^*,\,x_1^{(m)}\right) \\ d_2\left(x_2^*,\,x_2^{(m)}\right) \\ ... \\ d_n\left(x_n^*,\,x_n^{(m)}\right) \end{bmatrix} \le$$

$$\le C^{m+1}\left(I_n - C\right)^{-1} \begin{bmatrix} d_1\left(x_1^{(1)},\,x_1^{(0)}\right) \\ d_2\left(x_2^{(1)},\,x_2^{(0)}\right) \\ ... \\ d_n\left(x_n^{(1)},\,x_n^{(0)}\right) \end{bmatrix}$$

implică $T_j\left(x_1^*,\,x_2^*,\,...,x_n^*\right) = x_j^*$ pentru $j = \overline{1,\,n}$, deci demonstraţia teoremei este completă. ■

Observaţia 2.1. *Această teoremă este în fond teorema lui Perov pentru spaţiul $X_1 \times X_2 \times \ldots X_n$. Dacă $X_1 = X_2 = ... = X_n$ şi considerăm aceeaşi metrică în fiecare spaţiu X_i, atunci obţinem teorema 4.3.8 din M.A. Şerban* [**112**].

Pentru a aplica această teoremă la studiul ecuaţiei

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K_1(x,s,y(s);\lambda)ds + \int_a^b K_2(x,s,y(s);\lambda)ds$$

considerăm spaţiile

$$X = (C[a,b], \|\cdot\|_B) \text{ şi } Y = (C[a,b], \|\cdot\|_C),$$

unde $\|x\|_B = \max\limits_{t\in[a,b]}\left[|x(t)|e^{-\tau(t-a)}\right]$ şi $\|y\|_C = \max\limits_{t\in[a,b]}|y(t)|$ sunt normele Bielecki respectiv Cebişev şi operatorii

$$T_1 : X \times Y \to X,\ T_2 : X \times Y \to Y$$

definiţi prin egalitatea

$$T_i(x,y)(t) = f(t) + \int\limits_a^t K_1(t,s,x(s),\lambda)ds + \int\limits_a^b K_2(t,s,y(s),\lambda,)ds$$

unde $i \in \{1,2\}$. Pentru aceşti operatori avem

$$|T_i(x_1,y_1)(t) - T_i(x_2,y_2)(t)| \leq$$
$$\leq \int\limits_a^t |K_1(t,s,x_1(s),\lambda) - K_1(t,s,x_2(s),\lambda)|\, ds +$$
$$+ \int\limits_a^b |K_2(t,s,y_1(s),\lambda) - K_2(t,s,y_2(s),\lambda)|\, ds.$$

Astfel dacă L_1 şi L_2 sunt constantele Lipschitz în raport cu cea de a treia variabilă pentru K_1 şi K_2, atunci

$$|T_i(x_1,y_1)(t) - T_i(x_2,y_2)(t)| \leq$$
$$\leq L_1 \int\limits_a^t |x_1(s) - x_2(s)|\, ds + L_2 \int\limits_a^b |y_1(s) - y_2(s)|\, ds \leq$$
$$\leq L_1 \int\limits_a^t |x_1(s) - x_2(s)|\, e^{-\tau(s-a)} e^{\tau(s-a)} + L_2 \int\limits_a^b \|y_1 - y_2\|_C ds \leq$$
$$\leq L_1 \|x_1(s) - x_2(s)\|_B \int\limits_a^t e^{\tau(s-a)} + L_2 \|y_1 - y_2\|_C (b-a) \leq$$
$$\leq \frac{L_1}{\tau} \|x_1(s) - x_2(s)\|_B \left[e^{\tau(t-a)} - 1\right] + L_2 \|y_1 - y_2\|_C (b-a).$$

Din această inegalitate deducem

$$\begin{aligned} &\|T_2(x_1,y_1) - T_2(x_2,y_2)\|_C \leq \\ &\leq \frac{L_1}{\tau} \|x_1(s) - x_2(s)\|_B \left[e^{\tau(b-a)} - 1\right] + L_2 \|y_1 - y_2\|_C (b-a) \end{aligned} \tag{2.43}$$

şi

$$\begin{aligned} &\|T_1(x_1,y_1)-T_1(x_2,y_2)\|_B \leq \\ &\leq \frac{L_1}{\tau}\|x_1(s)-x_2(s)\|_B + L_2\|y_1-y_2\|_C(b-a). \end{aligned} \tag{2.44}$$

Teorema 2.1 se poate aplica dacă valorile proprii ale matricii

$$C = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{\tau} & L_2(b-a) \\ \frac{L_1}{\tau}\left[e^{\tau}(b-a)-1\right] & L_2(b-a) \end{bmatrix}$$

sunt în interiorul discului unitate. Ecuaţia caracteristică a acestei matrici este

$$(g(u)=)u^2 - \left(\frac{L_1}{\tau} + L_2(b-a)\right)u + \frac{L_1L_2(b-a)}{\tau}\left(2-e^{\tau(b-a)}\right) = 0.$$

Discriminantul acestei ecuaţii este pozitiv, deci rădăcinile sunt pozitive. Astfel condiţiile necesare şi suficiente pentru ca valorile proprii să fie în interiorul discului unitate sunt:

$$g(-1) > 0, g(1) > 0 \text{ şi } -2 < \tfrac{L_1}{\tau} + L_2(b-a) < 2.$$

Dar $g(1) > 0$ implică $g(-1) > 0$ deoarece coeficientul lui u este negativ, deci avem nevoie de condiţii necesare şi suficiente pentru existenţa unui τ cu proprietatea:

$$\tfrac{L_1}{\tau} + L_2(b-a) < 2 \text{ şi } \tfrac{L_1}{\tau} + L_2(b-a) < 1 + \tfrac{L_1L_2(b-a)}{\tau}\left(2-e^{\tau(b-a)}\right)$$

Ecuaţia $1 = \frac{L_1L_2(b-a)}{\tau}\left(2-e^{\tau(b-a)}\right)$ are o singură rădăcină pozitivă (deoarece derivata funcţiei $n(\tau) = \tau + \left(e^{\tau(b-a)}-2\right)L_1L_2(b-a)$ este pozitivă şi $n(0) < 0$). Dacă notăm cu τ_0 această rădăcină pozitivă, atunci putem avea două cazuri.

Cazul 1. Dacă există τ astfel încât $\tau > \frac{L_1}{2-L_2(b-a)}$ şi $\tau < \tau_0$, atunci matricea C este convergentă la zero. Această inegalitate este posibilă dacă şi numai dacă $\frac{L_1}{2-L_2(b-a)} < \tau_0$, adică

$$\frac{L_1}{2-L_2(b-a)} + \left(e^{\frac{L_1(b-a)}{2-L_2(b-a)}} - 2\right) L_1 L_2(b-a) < 0.$$

Cazul 2. Dacă există τ astfel încât $\tau > \tau_0$ şi

$$\frac{L_1}{\tau} + L_2(b-a) < 1 + \frac{L_1 L_2(b-a)}{\tau}\left(2 - e^{\tau(b-a)}\right),$$

atunci matricea C este convergentă la zero. Dar funcţia

$$m(\tau) = \tau\left(1 - L_2(b-a)\right) + L_1 L_2(b-a)\left(2 - e^{\tau(b-a)}\right) - L_1$$

admite un maxim în punctul $\tau_1 = \frac{1}{b-a}\ln\frac{1-L_2(b-a)}{(b-a)^2 L_1 L_2}$, deci condiţia necesară şi suficientă pentru existenţa unui astfel de τ este $m(\tau_0) > 0$ sau $\tau_1 > \tau_0$ şi $m(\tau_1) > 0$. Pe de altă parte $m(\tau_0) > 0$ este echivalent cu $\frac{L_1}{2-L_2(b-a)} < \tau_0$, deci din această inegalitate nu obţinem alte condiţii. Astfel avem următoarele condiţii:

Condiţii

C^1) $\frac{L_1}{2-L_2(b-a)} + \left(e^{\frac{L_1(b-a)}{2-L_2(b-a)}} - 2\right) L_1 L_2(b-a) < 0$;

C^2) $\frac{1}{b-a}\ln\frac{1-L_2(b-a)}{(b-a)^2 L_1 L_2} + \left(\frac{1-L_2(b-a)}{(b-a)^2} L_1 L_2 - 2\right)(b-a) L_1 L_2 > 0$ şi

$$\frac{1}{b-a}\ln\frac{1-L_2(b-a)}{(b-a)^2 L_1 L_2}\left(1 - L_2(b-a)\right) +$$

$$+ (b-a) L_1 L_2\left(2 - \frac{1-L_2(b-a)}{(b-a)^2 L_1 L_2}\right) - L_1 > 0.$$

OBSERVAŢIA 2.2. (1) *Dacă* $L_1 = 0$, *atunci obţinem condiţia* $1 - L_2(b-a) > 0$, *ceea ce reprezintă condiţia clasică în cazul ecuaţiilor Fredholm.*

(2) *Dacă* $L_2 = 0$, *atunci inegalităţile din condiţia* C^2) *sunt adevărate, deci nu avem nevoie de condiţii suplimentare în cazul ecuaţiilor Volterra.*

Cu notaţiile precedente putem aplica teorema 2.1 şi obţinem următoarele proprietăţi referitoare la ecuaţia 2.41:

TEOREMA 2.2. *(Sz. András [**8**]) Dacă funcţiile*

$$K_i : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \times [\lambda_m, \lambda_M] \to \mathbb{R}$$

sunt continue şi au proprietatea Lipschitz în raport cu a treia variabilă, având constantele Lipschitz L_1, respectiv L_2, $f \in C[a, b]$ şi are loc una din condiţiile C^1) sau C^2), atunci

a) *ecuaţia (2.41) are soluţie unică x^* în $C[a, b]$;*
b) *şirul aproximaţiilor succesive converge către x^* pentru orice element iniţial;*
c) *are loc următoarea estimare:*

$$\begin{bmatrix} \|x^* - x_1^{(m)}\|_B \\ \|x^* - x_1^{(m)}\|_C \end{bmatrix} \le C^m (I_2 - C)^{-1} \begin{bmatrix} d_1(x_1^{(1)}, x_1^{(0)}) \\ d_2(x_2^{(1)}, x_2^{(0)}) \end{bmatrix},$$

unde $C = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{\tau} & L_2(b-a) \\ \frac{L_1}{\tau}\left[e^{\tau(b-a)} - 1\right] & L_2(b-a) \end{bmatrix}.$

2.2. Cazul liniar. În cazul liniar, pentru ecuaţia

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K_1(x, s) y(s) ds + \lambda \int_a^b K_2(x, s) y(s) ds,$$

constantele Lipschitz corespunzătoare teoremei 2.2 sunt

$$L_1 = \max |K_1(x, s)| \text{ şi } L_2 = \max |K_2(x, s)|$$

(în ambele cazuri maximul se calculează pe domeniul $[a, b] \times [a, b]$). Astfel obţinem următorul rezultat:

TEOREMA 2.3. *(Sz. András [**8**]) Pentru ecuaţia integrală*

$$y(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^x K_1(x,s)y(s)ds + \lambda \int\limits_a^b K_2(x,s)y(s)ds$$

nucleele iterate sunt definite de relaţiile

$$K_1^{(n+1)}(x,s) = \int\limits_s^x K_1(x,t)K_1^{(n)}(t,s)dt$$

şi

$$K_2^{(n+1)}(x,s) = \int\limits_a^x K_1(x,t)K_2^{(n)}(t,s)dt +$$

$$+ \int\limits_a^b K_2(x,t)K_2^{(n)}(t,s)dt + \int\limits_s^b K_2(x,t)K_1^{(n)}(t,s)dt.$$

Nucleele rezolvente sunt de forma

$$R_1(x,s,\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j K_1^{(j)}(x,s) \text{ şi } R_2(x,s,\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j K_2^{(j)}(x,s)$$

iar soluţia se poate reprezenta sub forma

$$y(x) = f(x) + \int\limits_a^x R_1(x,s,\lambda)f(s)ds + \int\limits_a^b R_2(x,s,\lambda)f(s)ds.$$

Seriile care definesc nucleele rezolvente sunt convergente în $C[a,b]$ *dacă numerele* $L_1 = \max|K_1(x,s)|$ *şi* $L_2 = \max|K_2(x,s)|$ *satisfac una din condiţiile* C^1 *sau* C^2. *Nucleele rezolvente satisfac ecuaţiile integrale:*

$$R_1(x,s,\lambda) = \lambda K_1(x,s) + \lambda \int\limits_s^x K_1(x,t)R_1(t,s,\lambda)dt$$

şi

$$R_2(x,s,\lambda)=\lambda K_2(x,s)+\lambda\int\limits_a^x K_1(x,t)R_2(t,s,\lambda)dt+$$

$$+\int\limits_a^b K_2(x,t)R_2(t,s,\lambda)ds+\int\limits_s^b K_2(x,t)R_1(t,s,\lambda)ds.$$

Demonstraţie. Din teorema 2.2 deducem că operatorul $A: C[a,b]\to C[a,b]$ definit prin

$$Ay(x)=f(x)+\lambda\int\limits_a^x K_1(x,s)y(s)ds+\lambda\int\limits_a^b K_2(x,s)y(s)ds$$

este un operator Picard, deci şirul aproximaţiilor succesive definit de relaţia

$$y_{n+1}(x)=Ay_n(x)=f(x)+\lambda\int\limits_a^x K_1(x,s)y_n(s)ds+\lambda\int\limits_a^b K_2(x,s)y_n(s)ds$$

este convergent. Folosind metoda inducţiei matematice demonstrăm că

$$y_n(x)=f(x)+\sum_{j=1}^n\lambda^k\left(\int\limits_a^x K_1^{(j)}(x,s)f(s)ds+\int\limits_a^b K_2^{(j)}(x,\,s)f(s)ds\right)$$

Pentru $n\in\{0,1\}$ această relaţie este adevărată. Pe de altă parte

$$A\left(f(s)+\sum_{j=1}^n\lambda^k\left(\int\limits_a^s K_1^{(j)}(s,t)f(t)dt+\int\limits_a^b K_2^{(j)}(s,\,t)f(t)dt\right)\right)=$$

$$=f(x)+\lambda\int\limits_a^x K_1(x,s)f(s)ds+$$

$$+\sum_{j=1}^n\lambda^{k+1}\left(\int\limits_a^x\left(\int\limits_t^x K_1(x,s)K_1^{(j)}(s,t)ds\right)f(t)dt+\right.$$

$$+\int_a^b\left(\int_t^b K_2(x,\ s)K_1^{(j)}(s,t)ds\right)f(t)dt\right)+$$

$$+\lambda\int_a^b K_2(x,\ s)f(s)ds+$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda^{k+1}\left(\int_a^b\left(\int_a^x K_1(x,s)K_2^{(j)}(s,\ t)ds\right)f(t)dt+\right.$$

$$\left.+\int_a^b\left(\int_a^b K_2(x,\ s)K_2^{(j)}(s,\ t)ds\right)f(t)dt\right)=$$

$$=f(x)+\sum_{j=1}^{n+1}\lambda^k\left(\int_a^x K_1^{(j)}(x,t)f(t)dt+\int_a^b K_2^{(j)}(x,\ t)f(t)dt\right),$$

deoarece

$$K_1^{(j+1)}(x,t)=\int_t^x K_1(x,s)K_1^{(j)}(s,t)ds$$

şi

$$K_2^{(j+1)}(x,t)=\int_a^x K_1(x,s)K_2^{(j)}(s,t)ds+$$

$$+\int_a^b K_2(x,s)K_2^{(j)}(s,t)ds+\int_t^b K_2(x,s)K_1^{(j)}(s,t)ds.$$

Conform principiului inducţiei matematice

$$y_n(x)=f(x)+\sum_{j=1}^{n}\lambda^k\left(\int_a^x K_1^{(j)}(x,s)f(s)ds+\int_a^b K_2^{(j)}(x,\ s)f(s)ds\right),$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}$. Datorită teoremei 2.1 şirul aproximaţiilor succesive converge uniform la unica soluţie a ecuaţiei, deci

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R_1(x, s, \lambda)f(s)ds + \int_a^b R_2(x, s, \lambda)f(s)ds,$$

unde

$$R_1(x, s, \lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j K_1^{(j)}(x, s)$$

şi

$$R_2(x, s, \lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j K_2^{(j)}(x, s).$$

Dacă calculăm integralele

$$\int_s^x K_1(x,t)R_1(t,s,\lambda)dt, \quad \int_a^x K_1(x, t)R_2(t, s, \lambda)dt,$$

$$\int_a^b K_2(x, t)R_2(t, s, \lambda)dt \text{ şi } \int_s^b K_2(x, t)R_1(t, s, \lambda)dt$$

folosind definiţia nucleelor rezolvente şi relaţiile de recurenţă pentru nucleele iterate, obţinem ecuaţia nucleelor rezolvente (seria este convergentă din cauza convergenţei uniforme a şirului y_n):

$$R_1(x, s, \lambda) = \lambda K_1(x, s) + \lambda\int_s^x K_1(x, t)R_1(t, s, \lambda)dt \text{ şi}$$

$$R_2(x, s, \lambda) =$$

$$\lambda K_2(x, s) + \lambda\int_a^x K_1(x, t)R_2(t, s, \lambda)dt + \lambda\int_a^b K_2(x, t)R_2(t, s, \lambda)dt+$$

$$+\lambda\int_s^b K_2(x, t)R_1(t, s, \lambda)dt.$$

■

OBSERVAŢIA 2.3. *Convergenţa se poate studia direct folosind faptul că şirul majorantelor pentru valorile absolute ale nucleilor iteraţi este şirul aproximaţiilor succesive pentru o altă ecuaţie integrală. Din relaţiile*

$$K_1^{(j+1)}(x,t) = \int_t^x K_1(x,s)K_1^{(j)}(s,t)ds \text{ şi } K_2^{(j+1)}(x,t) =$$

$$\int_a^x K_1(x,s)K_2^{(j)}(s,t)ds + \int_a^b K_2(x,s)K_2^{(j)}(s,t)ds + \int_t^b K_2(x,s)K_1^{(j)}(s,t)ds.$$

deducem că $\left|K_1^{(j)}(s,t)\right|$ *şi* $\left|K_2^{(j)}(s,t)\right|$ *pot fi majorate cu şirul aproximaţiilor succesive ale ecuaţiei*

$$y(x,\, s) = L_1\int_s^x y(x,\, t)dt + L_2\int_a^b y(x,\, t)dt,$$

unde $L_1 = \max|K_1(x,s)|$ *şi* $L_2 = \max|K_1(x,s)|$. *Pentru a studia această ecuaţie putem aplica teorema 2.1 în spaţiile*

$$X = (C([a,\, b] \times [a,\, b]), \|\cdot\|_B) \text{ şi } Y = (C([a,\, b] \times [a,\, b]), \|\cdot\|_C)\,,$$

unde $\|x\|_B = \max\limits_{t,s\in[a,\,b]}\left[|x(t,\, s)|\, e^{-\tau(t-s)}\right]$ *şi* $\|y\|_C = \max\limits_{t,s\in[a,\,b]}|y(t,\, s)|$ *sunt normele Bielecki şi Cebisev iar operatorii* $T_1 : X \times Y \to X$, $T_2 : X \times Y \to Y$ *sunt definiţi prin*

$$T_{1,2}(y_1,\, y_2)(x,\, s) = L_1\int_s^x y_1(x,\, t))dt + L_2\int_a^b y_2(x,\, t)dt.$$

Ca şi în teorema 2.2 deducem:

$$\|T_2(x_1,\, y_1) - T_2(x_2,\, y_2)\|_C \leq$$
$$\tfrac{L_1}{\tau}\, \|x_1(s) - x_2(s)\|_B \left[e^{\tau(b-a)} - 1\right] + L_2\, \|y_1 - y_2\|_C\, (b-a) \text{ şi}$$
$$\|T_1(x_1,\, y_1) - T_1(x_2,\, y_2)\|_B \leq$$
$$\tfrac{L_1}{\tau}\, \|x_1(s) - x_2(s)\|_B + L_2\, \|y_1 - y_2\|_C\, (b-a).$$

Astfel obţinem aceeaşi matrice C *ca şi în teorema 2.2. Acesta garantează convergenţa uniformă a seriilor*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\lambda^j K_1^{(j)}(x,\, s) \text{ şi } \sum_{j=1}^{\infty}\lambda^j K_2^{(j)}(x,\, s).$$

Observaţia 2.4. *Teorema 2.2 şi teorema 2.3 se poate extinde şi la sisteme de ecuaţii respectiv la ecuaţii care conţin funcţii cu valori într-un spaţiu Banach.*

2.3. Ecuaţii Fredholm-Volterra cu singularitate slabă. În acest paragraf demonstrăm că teoremele anterioare pot fi extinse şi la cazul în care nucleele K_1 şi K_2 nu sunt funcţii continue, dar posedă numai o singularitate slabă.

Definiţia 2.1. *([**56**], [**88**]) Ecuaţia integrală*

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K_1(x,s)u(s)ds, \tag{2.45}$$

cu $f \in C[a,b]$ se numeţe slab singulară (sau cu singularitate slabă) dacă există $L_1 \in C([a,b] \times [a,b])$ şi $\alpha \in (0,1)$ astfel încât $K_1(x,s) = \frac{L_1(x,s)}{|x-s|^\alpha}$ $\forall\ x,s \in [a,b]$ cu $x \neq s$. În acest caz spunem că nucleul K_1 are o singularitate slabă.
Ecuaţia integrală

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K_1(x,s)u(s)ds + \int_a^b K_2(x,s)u(s)ds, \tag{2.46}$$

cu $f \in C[a,b]$ se numeşte ecuaţie cu singularitate slabă dacă cel puţin unul din nucleele K_1 şi K_2 are o singularitate slabă.

Prima dată demonstrăm o teoremă de existenţă şi unicitate pentru ecuaţii de tip Volterra cu singularitate slabă. Pentru ecuaţia 2.46 studiem mai întâi cazul în care K_1 este cu singularitate slabă şi K_2 este continuu, iar apoi cazul în care atât K_1 cât şi K_2 au singularitate slabă. Avem nevoie de următoarele proprietăţi:

TEOREMA 2.4. *Dacă* X *este o mulţime , $n \in \mathbb{N}$, si pentru funcţia* $T : X \to X$, *ecuaţia* $T^n(u) = u$ *are o soluţie unică* u^*, *atunci* u^* *este soluţia unică a ecuaţiei* $Tu = u$.

TEOREMA 2.5. *Dacă* (X, d) *este un spaţiu metric generalizat complet,* $T : X \to X$ *un operator pentru care* T^k *este contracţie, atunci şirul* $u_{n+1} = T(u_n)$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$ *este convergent la unicul punct fix al operatorului* T^k.

TEOREMA 2.6. *Dacă* $K(x, s) = \frac{L(x,s)}{|x-s|^\alpha}$ *cu* $0 < \alpha < 1$ *şi* $L \in C([a, b] \times [a, b])$, *atunci operatorul* $T : C[a, b] \to C[a, b]$,

$$T(u)(x) = \int\limits_a^x K(x, s)u(s)ds$$

este bine definit ($T(u) \in C[a, b]$).

DEMONSTRAŢIE. Dacă $a \leq x < x' \leq b$ şi $\delta_1 > 0$, atunci

$$|T(u)(x') - T(u)(x)| \leq \int\limits_a^{x-\delta_1} |K(x', s) - K(x, s)||u(s)|ds+$$

$$+\int\limits_{x-\delta_1}^{x'-\delta_1} |K(x', s)||u(s)|ds + \int\limits_{x-\delta_1}^{x} |K(x, s)||u(s)|ds+$$

$$+\int\limits_{x'-\delta_1}^{x'} |K(x', s)||u(s)|ds.$$

Fie $u \in C[a, b]$ şi fie $M = \max\limits_{s\in[a,b]} |u(s)|$. Funcţia

$$K : [x - \frac{\delta_1}{2}, b] \times [a, x - \delta_1] \to \mathbb{R}$$

fiind continuă pe o mulţime compactă, este uniform continuă. Astfel $\forall\ \epsilon > 0$ există $\delta_2 > 0$ cu proprietatea

$$|K(x',s)-K(x,s)|<\tfrac{\epsilon}{2M(b-a)} \text{ dacă } |x-x'|<\delta_2 \text{ şi } s\le x-\delta_1.$$

De aici deducem

$$|T(u)(x')-T(u)(x)|\le\frac{\epsilon}{2}+M\cdot\int\limits_{x-\delta_1}^{x'-\delta_1}|K(x',s)|ds+$$

$$+M\cdot\int\limits_{x-\delta_1}^{x}|K(x,s)|+M\cdot\int\limits_{x'-\delta_1}^{x'}|K(x',s)|ds,$$

dacă $|x-x'|<\delta_2$. Pe de altă parte

$$\int\limits_{x-\delta_1}^{x'-\delta_1}|K(x',s)|ds\le P\cdot\int\limits_{x-\delta_1}^{x'-\delta_1}\frac{ds}{(x'-s)^\alpha}=P\left(-\frac{(x'-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_{x-\delta_1}^{x'-\delta_1}\right)$$

$$=\frac{P}{1-\alpha}\left((x'-x+\delta_1)^{1-\alpha}-\delta_1^{1-\alpha}\right)\le\frac{P}{1-\alpha}\cdot(2(x'-x))^{1-\alpha}<\frac{\epsilon}{6M}$$

unde $|x'-x|<\delta_3$ şi $P=\max\limits_{x,s\in[a,b]}|L(x,s)|$. De asemenea

$$\int\limits_{x-\delta_1}^{x}|K(x,s)|\le P\cdot\int\limits_{x-\delta_1}^{x}\frac{ds}{(x-s)^\alpha}=\frac{P}{1-\alpha}\left(-(x-s)^{1-\alpha}\Bigg|_{x-\delta_1}^{x}\right)=$$

$$=\frac{P}{1-\alpha}\cdot\delta_1^{1-\alpha}<\frac{\epsilon}{6M}$$

pentru $\delta_1\le\delta_4$ şi

$$\int\limits_{x'-\delta_1}^{x'}|K(x',s)|\le\frac{P}{1-\alpha}\delta_1^{1-\alpha}<\frac{\epsilon}{6M}$$

pentru $\delta_1\le\delta_3$. Din aceste inegalităţi rezultă că

$$|T(u)(x')-T(u)(x)|<\epsilon$$

dacă $|x-x'|<\min(\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4)$, deci operatorul T este bine definit.

∎

TEOREMA 2.7. *Dacă K_1 sau K_2 este cu singularitate slabă, atunci operatorul $T : C[a,b] \to C[a,b]$,*

$$(Tu)(x) = \int\limits_a^x K_1(x,s)u(s)ds + \int\limits_a^b K_2(x,s)u(s)ds$$

este bine definit ($Tu \in C[a,b]$).

DEMONSTRAŢIE. Se poate demonstra (ca şi teorema 2.6) că operatorul $T_2 : C[a,b] \to C[a,b]$,

$$(T_2u)(x) = \int\limits_a^b K_2(x,s)u(s)ds$$

este bine definit, dacă K_2 are singularitate slabă. Astfel T este bine definit fiind suma a doi operatori corect definiţi. ■

TEOREMA 2.8. *([**56**], [**88**]) Dacă K_1 şi K_2 au singularităţi slabe*

$$|K_1(x,s)| \le \frac{P_1}{|x-s|^{\alpha}_{1}}, \quad |K_2(x,s)| \le \frac{P_2}{|x-s|^{\alpha}_{2}},$$

unde $P_1, P_2 \in \mathbb{R},\ 0 \le \alpha_1 < 1,\ 0 \le \alpha_2 < 1$, atunci funcţia

$$K_3(x,s) = \int\limits_a^b K_1(x,t)K_2(t,s)dt$$

posedă următoarele proprietăţi:

1. *Dacă $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$, atunci funcţia $K_3(x,s)$ are singularitate slabă şi*

   $$|K_3(x,s)| < \frac{P_3}{|x-s|^{\alpha_1+\alpha_2-1}},$$

   unde $P_3 \in \mathbb{R}$.

2. *Dacă* $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, *atunci funcţia* $K_3(x, s)$ *este continuă pentru* $x \neq s$ *şi*

$$|K_3(x, s)| < P_3 + P_4 \ln |x - s|,$$

unde $P_3, P_4 \in \mathbb{R}$.

3. *Dacă* $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$, *atunci funcţia* $K_3(x, s)$ *este continuă în* $D = [a, b] \times [a, b]$.

O proprietate analoagă se poate demonstra şi pentru operatorii integrali de tip Volterra.

Teorema 2.9. *(Sz. András* [**14**]*) Dacă funcţiile* K_1 *şi* K_2 *au singularităţi slabe şi*

$$|K_1(x, s)| \leq \frac{P_1}{(x - s)^{\alpha_1}}$$

$$|K_2(x, s)| \leq \frac{P_2}{(x - s)^{\alpha_2}}$$

pentru $x \geq s$, *atunci funcţia*

$$K_3(x, s) = \int_s^x K_1(x, t) K_2(t, s) dt$$

posedă următoarele proprietăţi:

1. *Dacă* $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$, *atunci* K_3 *are singularitate slabă şi*

$$|K_3(x, s)| \leq \frac{P_3}{(x - s)^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1}}.$$

2. *Dacă* $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, *atunci* K_3 *este continuă şi* $|K_3(x, s)| \leq P_4$.
3. *Dacă* $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$, *atunci* K_3 *este continuă şi*

$$|K_3(x, s)| \leq P_4 \cdot (x - s)^{1 - \alpha_1 - \alpha_2}.$$

Cu ajutorul acestor teoreme putem demonstra următoarea propoziţie:

Teorema 2.10. *(Sz. András* [**14**]*) Dacă* $K(x,s,\lambda) = \frac{L(x,s,\lambda)}{(x-s)^{\alpha}}$ *cu* $L \in C\left([a,b] \times [a,b] \times [\lambda_1, \lambda_2]\right)$ *şi* $0 < \alpha < 1$, *atunci ecuaţia*

$$u(x) = f(x) + \int\limits_a^x K(x,s,\lambda)u(s)ds \tag{2.47}$$

unde $f \in C[a,b]$ *şi* $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, *are soluţie unică în* $C[a,b]$. *Mai mult această soluţie aparţine spaţiului* $C([a,b] \times [\lambda_1, \lambda_2])$.

Demonstraţie. Datorită teoremei 2.6, operatorul

$$T : C[a,b] \to C[a,b],\ (Tu)(x) = f(x) + \int\limits_a^x K(x,s,\lambda)u(s)ds$$

este corect definit. Teorema 2.9 implică existenţa unui număr $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ pentru care $K^{(n)}$ definit prin $K^{(1)}(x,s,\lambda){=}K(x,s,\lambda)$ şi $K^{(j+1)}(x,s,\lambda) = \int\limits_s^x K(x,t,\lambda) \cdot K^{(j)}(t,s,\lambda)dt\ \forall\ j \geq 1$ este continuă. Dar orice soluţie a ecuaţiei 2.47 satisface ecuaţia iterată

$$u(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \int\limits_a^x K^{(i)}(x,s,\lambda)f(s)ds + \int\limits_a^x K^{(n)}(x,s,\lambda)u(s)ds, \tag{2.48}$$

deci aplicând teorema 2.1 operatorului $\bar{T} : C[a,b] \to C[a,b]$

$$(\bar{T}u)(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \int\limits_a^x K^{(i)}(x,s,\lambda)f(s)ds + \int\limits_a^x K^{(n)}(x,s,\lambda)u(s)ds. \tag{2.49}$$

cu nucleu continuu (putem alege o metrică Bielecki în $C[a,b]$ astfel încât $\bar{T}$ să fie o contracţie) deducem că ecuaţia $\bar{T}u = u$ are o soluţie unică u^* în $C[a,b]$. Din teorema 2.4 rezultă că u^* este unica soluţie a ecuaţiei $Tu = u$ (deoarece $\bar{T} = T^n$) şi din teorema 2.5 rezultă convergenţa şirului de aproximaţii succesive $u_{n+1} = T(u_n)$

la u^* pentru orice $u_0 \in C[a,b]$. Astfel ecuaţia 2.47 are o soluţie unică şi această soluţie se poate aproxima prin aproximaţii succesive. Aplicând acelaşi raţionament ecuaţiei

$$u(x,\lambda) = f(x) + \int_a^x K(x,s,\lambda)u(s,\lambda)ds \tag{2.50}$$

deducem că u^* este unica soluţie în $C([a,b]\times[\lambda_1,\lambda_2])$, deci soluţia este continuă în raport cu parametrul λ. ■

Observaţia 2.5. *Putem folosi şi o demonstraţie directă (fără operatori iteraţi) dacă folosim următoarea inegalitate:*

$$|Tu(x) - Tv(x)| \leq \int_a^x \frac{\max\limits_{x,s\in[a,b],\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]} |L(x,s,\lambda)|}{|x-s|^\alpha} \cdot |u(s)-v(s)|ds \leq$$

$$\leq L^*||u-v||\cdot \int_a^x \frac{e^{\tau(s-a)}}{(x-s)^\alpha}ds \leq \left(\int_a^x \frac{ds}{(x-s)^{\alpha p}}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^x e^{\tau(s-a)q}ds\right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{(b-a)^{1-\alpha\cdot p}}{1-\alpha\cdot p}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \frac{e^{\tau(x-a)}}{(\tau\cdot q)^{\frac{1}{q}}},$$

unde $\alpha\cdot p<1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $L^* = \max\limits_{x,s\in[a,b],\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]} |L(x,s,\lambda)|$ *şi*

$$||u-v|| = \max_{x\in[a,b],\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]} |u(x,\lambda)-v(x,\lambda)|\cdot e^{-\tau(x-a)}.$$

Se poate alege τ astfel încât operatorul T să fie o contracţie faţă de norma Bielecki corespunzătoare.

Prin teorema următoare extindem rezultatul conţinut în teorema 2.3 pentru cazul în care nucleul K_1 este continuu şi K_2 are singularitate slabă.

TEOREMA 2.11. *(Sz. András [**14**]) Pentru ecuaţia*

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K_1(x,s,\lambda)y(s)ds + \int_a^b K_2(x,s,\lambda)y(s)ds \tag{2.51}$$

cu

$$L_1 = \max_{x,s\in[a,b],\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]} |K_1(x,s,\lambda)|$$

şi

$$L_2 = \frac{2\cdot \max\limits_{x,s\in[a,b],\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]} |L(x,s,\lambda)|}{1-\alpha}\cdot(b-a)^{1-\alpha}$$

unde $K_1, L \in C([a,b]\times[a,b]\times[\lambda_1,\lambda_2])$ *şi* K_2 *are singularitate slabă* ($K_2(x,s,\lambda) = \frac{L(x,s,\lambda)}{|x-s|^\alpha}$, $0<\alpha<1$) *nucleele iterate sunt*

$$K_1^{(n+1)}(x,s,\lambda) = \int_s^x K_1(x,t,\lambda)K_1^{(n)}(t,s,\lambda)dt \tag{2.52}$$

şi

$$K_2^{(n+1)}(x,s,\lambda) = \int_a^x K_1(x,t,\lambda)K_2^{(n)}(t,s,\lambda)dt+ \tag{2.53}$$

$$+\int_a^b K_2(x,t,\lambda)K_2^{(n)}(t,s,\lambda)dt + \int_a^b K_2(x,t,\lambda)K_1^{(n)}(t,s,\lambda)dt$$

iar nucleele rezolvente au forma

$$R_1(x,s,\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} K_1^{(j)}(x,s,\lambda), \tag{2.54}$$

$$R_2(x,s,\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} K_2^{(j)}(x,s,\lambda). \tag{2.55}$$

Dacă L_1 şi L_2 satisfac condiţia (C^1) sau (C^2), atunci există o soluţie unică a ecuaţiei 2.51, această soluţie depinde continuu de parametrul λ şi se poate reprezenta sub forma

$$u(x) = f(x) + \int_a^x R_1(x,s,\lambda) f(s) ds + \int_a^b R_2(x,s,\lambda) f(s) ds.$$

(În acest caz seriile (2.54) şi (2.55) sunt convergente)

Demonstraţie. Datorită teoremei 2.7 putem aplica raţionamentul folosit la demonstrarea teoremei 2.3. ■

În cazul în care fiecare nucleu este cu singularitate slabă, obţinem următoarea teoremă:

Teorema 2.12. *(Sz. András [**14**]) Dacă în ecuaţia 2.51,*

$$K_1(x,s,\lambda) = \frac{L_1^*(x,s,\lambda)}{|x-s|^{\alpha_1}} \text{ şi } K_2(x,s,\lambda) = \frac{L_2^*(x,s,\lambda)}{|x-s|^{\alpha_2}}$$

cu $L_1^*, L_2^* \in C([a,b]\times[a,b]\times[\lambda_1,\lambda_2])$, $0<\alpha_1<1$, $0<\alpha_2<1$ şi numerele

$$L_1 = \max_{x,s\in[a,b],\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]} |K_1^{(n)}(x,s,\lambda)| \tag{2.56}$$

şi

$$L_2 = \max_{x,s\in[a,b],\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]} |K_2^{(n)}(x,s,\lambda)| \tag{2.57}$$

satisfac una din condiţiile (C^1) sau (C^2) (din teorema 2.11), atunci ecuaţia 2.51 are o soluţie unică în $C[a,b]\times[\lambda_1,\lambda_2]$.

Demonstraţie. Ecuaţia iterată este

$$u(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{n-1} \int_a^x K_1^{(j)}(x,s,\lambda)\cdot f(s)ds + \sum_{j=1}^{n-1} \int_a^b K_2^{(j)}(x,s,\lambda)\cdot f(s)ds +$$

$$+\int_a^x K_1^{(n)}(x,s,\lambda)u(s)ds+\int_a^b K_2^{(n)}(x,s,\lambda)u(s)ds$$

unde nucleele iterate sunt definite de relaţiile 2.52 şi 2.53. Datorită teoremei 2.6 şi 2.7, funcţia

$$g_1(x,\lambda)=f(x)+\sum_{j=1}^{n-1}\int_a^x K_1^{(j)}(x,s,\lambda)\cdot f(s)ds+$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}\int_a^b K_2^{(j)}(x,s,\lambda)\cdot f(s)ds$$

este continuă. Din teoremele 2.8 şi 2.9 deducem că dacă

$$\max(\alpha_1,\alpha_2)<\tfrac{n-1}{n} \text{ şi } \max\left(\tfrac{\alpha_2}{1-\alpha_1},\tfrac{\alpha_1}{1-\alpha_2}\right)<n,$$

atunci $K_1^{(n)}$ şi $K_2^{(n)}$ sunt continue, deci putem aplica teorema 2.2 (deoarece L_1 şi L_2 satisfac (C^1) sau (C^2)). De aici rezultă că ecuaţia iterată are o soluţie unică u^* în $C([a,b]\times[\lambda_1,\lambda_2])$. Această funcţie u^* este şi soluţia unică a ecuaţiei 2.51 datorită teoremei 2.4 şi poate fi aproximată folosind şirul aproximaţiilor succesive conform teoremei 2.5. ■

3. Derivabilitatea soluţiilor în raport cu parametrul λ

Studiem derivabilitatea soluţiilor în raport cu parametrul λ folosind teorema 5.1 (I.A. Rus [**103**] şi [**102**]) sau teorema 5.2 (M.A. Şerban, [**112**]). Pentru a obţine derivabilitatea soluţiilor în cazul ecuaţiei 2.41 aplicăm teorema 5.1 pentru spaţiile $V=W=X\times Y$ cu $X=(C([a,b]\times[\lambda_m,\lambda_M]),\|\cdot\|_B)$, $Y=(C([a,b]\times[\lambda_m,\lambda_M]),\|\cdot\|_C)$

şi operatorii $B : V \to V$, $C : V \times W \to V \times W$ definiţi prin relaţiile

$$B(x,y) = (T_1(x,y), T_2(x,y)) \tag{3.58}$$

$$C((x,y),(x_1,y_1)) = (x^1, y^1), \tag{3.59}$$

unde

$$\begin{aligned} x^1(t,\lambda) &= \int_a^t \frac{\partial K_1(t,s,x(s,\lambda);\lambda)}{\partial \lambda} ds + \int_a^b \frac{\partial K_2(t,s,y(s,\lambda);\lambda)}{\partial \lambda} ds \\ y^1(t,\lambda) &= \int_a^t \frac{\partial K_1(t,s,x(s,\lambda);\lambda)}{\partial x} x_1(s,\lambda) ds + \\ &\quad + \int_a^b \frac{\partial K_2(t,s,y(s,\lambda);\lambda)}{\partial y} y_1(s,\lambda) ds. \end{aligned}$$

(Primul element este din X şi al doilea din Y). În spaţiile V şi W definim metrica generalizată prin

$$d_p : X \times Y \to \mathbb{R}^2, d_p((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \begin{bmatrix} d_B(x_1,x_2) \\ d_C(y_1,y_2) \end{bmatrix}.$$

Datorită teoremei 2.1 operatorul B este un operator Picard şi avem

$$d\left(C((x,y),(x_1,y_1)), C((x,y,),(x_2,y_2))\right) = d((x^1,y^1),(x^2,y^2)) =$$

$$= \begin{bmatrix} d_B(x^1,x^2) \\ d_C(y^1,y^2) \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} \frac{L_1}{\tau} & L_2(b-a) \\ \frac{L_1}{\tau}\left(e^{\tau(b-a)} - 1\right) & L_2(b-a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_B(x_1,x_2) \\ d_C(y_1,y_2) \end{bmatrix},$$

unde L_1 şi L_2 sunt margini superioare pentru $\frac{\partial K_1(t,s,x;\lambda)}{\partial x}$ respectiv $\frac{\partial K_2(t,s,y,\lambda)}{\partial y}$ pe $[a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R} \times [\lambda_m, \lambda_M]$.

Dacă una din condiţiile C^1 sau C^2 este satisfăcută, atunci matricea

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{\tau} & L_2(b-a) \\ \frac{L_1}{\tau}\left(e^{\tau(b-a)} - 1\right) & L_2(b-a) \end{bmatrix}$$

este convergentă la 0, şi astfel condiţiile teoremei 5.1 sunt verificate. Astfel avem următoarea teoremă:

TEOREMA 3.1. *(Sz. András [**8**]) Dacă*

(1) *funcţiile* $K_i : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R} \times [\lambda_m, \lambda_M] \to \mathbb{R}$ *sunt continue,* $f \in C[a,b]$*;*

(2) *funcţiile* $K_i : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R} \times [\lambda_m, \lambda_M] \to \mathbb{R}$ *sunt derivabile în raport cu ultimele două variabile;*

(3) $\left|\frac{\partial K_1(t,s,x;\lambda)}{\partial x}\right| \leq L_1$ *şi* $\left|\frac{\partial K_2(t,s,y;\lambda)}{\partial y}\right| \leq L_2$ *în* $[a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R} \times [\lambda_m, \lambda_M]$;

(4) *pentru numerele* L_1 *şi* L_2 *are loc una din condiţiile* C^1 *sau* C^2,

atunci

a) *ecuaţia (2.41) are o soluţie unică* $x^*(t,\lambda)$ *în spaţiul*

$$C([a,b] \times [\lambda_m, \lambda_M]);$$

b) $x^*(t,\lambda)$ *este derivabilă în raport cu* λ *şi derivata parţială satisface ecuaţia integrală*

$$\frac{\partial x^*(t,\lambda)}{\partial \lambda} = \int_a^t \frac{\partial K_1(t,s,x^*(s,\lambda);\lambda)}{\partial \lambda} ds + \int_a^b \frac{\partial K_2(t,s,x^*(s,\lambda);\lambda)}{\partial \lambda} ds +$$

$$+ \int_a^t \frac{\partial K_1(t,s,x^*(s,\lambda);\lambda)}{\partial x} \frac{\partial x^*(s,\lambda)}{\partial \lambda} ds +$$

$$+ \int_a^b \frac{\partial K_2(t,s,x^*(s,\lambda);\lambda)}{\partial y} \frac{\partial x^*(s,\lambda)}{\partial \lambda} ds;$$

c) *şirul aproximaţiilor succesive pentru operatorul* $A = (B, C)$ *converge la* x^*.

Pentru a studia derivabilitatea soluţiilor ecuaţiei 2.41 în cazul în care apar singularităţi slabe aplicăm teorema 5.1 pentru următoarele spaţii şi operatori:

a) $V = C([a,b] \times [\lambda_1, \lambda_2])$ şi

$$(Bu)(x) = g_1(x,\lambda) + \int_a^x K_1^{(n)}(x,s,\lambda)u(s)ds + \int_a^b K_1^{(n)}(x,s,\lambda)u(s)ds$$

b) $W = C([a,b] \times [\lambda_1, \lambda_2])$ şi

$$C(v,w)(x,\lambda) = \frac{\partial g_1(x,\lambda)}{\partial \lambda} + \int_a^x K_1^{(n)}(x,s,\lambda) \cdot w(s,\lambda)ds +$$

$$+ \int_a^x \frac{\partial K_1^{(n)}}{\partial \lambda} \cdot v(s,\lambda)ds + \int_a^b K_2^{(n)}(x,s,\lambda) \cdot w(s,\lambda)ds + \int_a^b \frac{\partial K_2^{(n)}}{\partial \lambda} \cdot v(s,\lambda)ds,$$

unde

$$\frac{\partial g_1(x,\lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{j=1}^{n-1} \int_a^x \frac{\partial K_1^{(j)}(x,s,\lambda)}{\partial \lambda} \cdot f(s)ds + \sum_{j=1}^{n-1} \int_a^b \frac{\partial K_2^{(j)}(x,s,\lambda)}{\partial \lambda} \cdot f(s)ds$$

Operatorul $A = (B,C)$ satisface condiţiile teoremei 5.1 deoarece în $C([a,b] \times [\lambda_1, \lambda_2])$ folosim metrica Bielecki şi $K^{(n)}$ este o funcţie continuă. De aici rezultă convergenţa uniformă a şirului $v_{n+1} = B(v_n)$ la unica soluţie u^* a ecuaţiei 2.51 şi convergenţa uniformă a şirului $w_{n+1} = C(v_n, w_n)$ la o funcţie w^*. Dacă alegem $v_0 \in C^1[a,b] \times [\lambda_1, \lambda_2]$ şi $w_0 = \frac{\partial v_0}{\partial \lambda}$ atunci datorită formei operatorului C (care a fost obţinut printr-o derivare formală operatorului B) avem $w_n = \frac{\partial v_n}{\partial \lambda}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Teorema lui Weierstrass implică continuitatea funcţiei w^* şi $w^*(x,\lambda) = \frac{\partial u^*(x,\lambda)}{\partial \lambda}$. Astfel soluţia u^* este derivabilă în raport cu parametrul λ.

OBSERVAŢIA 3.1. (1) *Condiţiile 2.56 şi 2.57 se pot transfera inductiv la nucleele originale.*

(2) *Utilizând aceeaşi inegalitate ca şi în observaţia 2.5 putem evita folosirea operatorilor iteraţi.*

(3) *În mod analog putem obţine şi condiţii pentru derivabilitatea soluţiilor unei ecuaţii de tip Volterra cu singularităţi.*

4. Ecuaţii Fredholm-Volterra cu argument modificat

În acest paragraf stabilim teoreme de existenţă şi unicitate pentru ecuaţia

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K_1(x, s, y(g_1(s)); \lambda)ds + \int_a^b K_2(x, s, y(g_2(s)); \lambda)ds, \tag{4.60}$$

unde g_1 şi g_2 sunt două funcţii fixate. Cele două funcţii g_1 şi g_2 pot produce o modificare mixtă a argumentului în cele două integrale. Prima dată vom presupune că funcţiile g_1 şi g_2 produc o întârziere a argumentului în prima integrală şi o avansare a argumentului în cea de-a doua. Dacă $Im(g_1) = [a_1, a_2]$, $Im(g_2) = [b_2, b_1]$ şi $a_1 \le a \le a_2 \le b$ respectiv $a \le b_2 \le b \le b_1$, atunci pentru a formula o teoremă de existenţă sau o teoremă de existenţă şi unicitate avem nevoie de două funcţii $\varphi_1 : [a_1, a] \to \mathbb{R}^n$ şi $\varphi_2 : [b, b_1] \to \mathbb{R}^n$. Astfel, prin soluţia ecuaţiei 4.60 înţelegem o funcţie $y : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^n$ pentru care

$$y(x) = \varphi_1(x),\ \forall x \in [a_1, a),\ y(x) = \varphi_2(x),\ \forall x \in (b, b_1],$$

şi are loc relaţia 4.60 pentru orice $x \in [a, b]$. Pentru a ilustra dificultăţile care apar la rezolvarea acestor ecuaţii considerăm următorul exemplu:

EXEMPLUL 4.1. *Să se determine toate funcţiile* $y : [-1, 3] \to \mathbb{R}$ *care satisfac ecuaţia*

$$y(x) = \int_0^x y(s-1)ds + \int_0^2 y(s+1)ds, \ \forall x \in [0, 2]$$

şi relaţiile

$$y(x) = e^x, \, \forall x \in [-1, 0),$$

$$y(x) = e^{2x}, \, \forall x \in (2, 3].$$

Soluţie. $\int_0^2 y(s+1)ds$ este un număr real, deci cu notaţia $c = \int_0^2 y(s+1)ds$ obţinem relaţia $y(x) = \int_0^x y(s-1)ds + c, \ \forall x \in [0, 2]$. Dacă $x \in [0, 1)$, atunci obţinem

$$y(x) = \int_0^x y(s-1)ds + c = \int_0^x e^{s-1}ds + c = e^{x-1} + c - \frac{1}{e}.$$

Pentru $x \in [1, 2)$ avem

$$y(x) = \int_0^x y(s-1)ds + c = \int_0^1 e^{s-1}ds + \int_1^x \left(e^{s-2} + c - \frac{1}{e}\right) ds + c =$$

$$= e^{x-2} + x\left(c - \frac{1}{e}\right) + 1 - \frac{1}{e}.$$

Astfel funcţiile care verifică ecuaţia dată sunt de forma

$$y(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [-1, 0) \\ e^{x-1} + c - \frac{1}{e}, & x \in [0, 1) \\ e^{x-2} + x\left(c - \frac{1}{e}\right) + 1 - \frac{1}{e}, & x \in [1, 2] \\ e^{2x}, & x \in (2, 3] \end{cases}$$

(valoarea în punctul $x = 2$ se obţine din continuitatea funcţiei în punctul $x = 1$). Din condiţia $c = \int_0^2 y(s+1)ds$ obţinem

$$c = \frac{7}{e} - e^6 - 3,$$

deci există o singură funcţie care satisface condiţiile cerute. Menţionăm că această funcţie nu este continuă în capetele intervalului $[0, 2]$, dar cu excepţia acestor două puncte soluţia este continuă în punctele intervalului $[-1, 3]$. ■

Pentru existenţa soluţiei în spaţiul $C([a_1, b_1], \mathbb{R}^n)$ trebuie să impunem condiţii foarte dure asupra funcţiilor $\varphi_1, \varphi_2, K_1, K_2$ şi f. Ilustrăm acest fapt considerând numai operatorul de tip Fredholm cu nucleul K_2 degenerat. Dacă

$$K_2(x, s) = \sum_{i=1}^{m} u_i(x) \cdot v_i(s), \ \forall (x, s) \in [a, b] \times [a, b],$$

şi studiem ecuaţia

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K_2(x, s) y(s+h) ds$$

cu condiţia $y(x) = \varphi_2(x)$, $\forall x \in [b, b+h]$, atunci obţinem soluţia

$$y(x) = \begin{cases} f(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} c_i \cdot u_i(x), & \forall x \in [a, b] \\ \varphi_2(x), & \forall x \in [b, b+h] \end{cases}, \tag{4.61}$$

unde

$$c_i = \int_a^b v_i(s) y(s+h) ds.$$

Din aceste relaţii obţinem sistemul liniar

$$\begin{aligned} c_i = \int_{a+h}^{b} v_i(t-h)f(t)dt + \int_{b}^{b+h} v_i(t-h)\varphi_2(t)dt+ \\ + \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \int_{a+h}^{b} v_i(t-h)u_j(t)dt, \end{aligned} \tag{4.62}$$

unde $i=\overline{1,m}$. Chiar dacă acest sistem are soluţii, funcţia definită prin relaţia 4.61 este continuă în b dacă şi numai dacă are loc relaţia

$$\varphi_2(b) = f(b) + \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot u_i(b). \tag{4.63}$$

Deci condiţia de existenţă a soluţiei continue este relaţia 4.63 unde $(c_i)_{i=\overline{1,m}}$ sunt soluţiile sistemului 4. Fără această condiţie putem avea o soluţie cu un singur punct de discontinuitate fără a avea soluţii continue (cu toate că funcţiile care apar în ecuaţie sunt continue).

În cazul ecuaţiei 4.60 discontinuitatea poate apărea atât în a cât şi în b. Pentru a garanta continuitatea soluţiilor în capetele intervalului impunem condiţiile

$$\begin{aligned} f(a) &= \varphi_1(a) \\ f(b) &= \varphi_2(b) \\ K_2(a,s,u) &= 0,\ \forall s \in [a,b] u \in \mathbb{R}^n \\ K_1(b,s,u) &= K_2(b,s,u) = 0,\ \forall s \in [a,b] u \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{4.64}$$

Folosind acelaşi raţionament ca în teoremele 2.2 şi 3.1 obţinem următoarele teoreme:

Teorema 4.1. *(Sz. András) Dacă*

1. *funcţiile* $K_i : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [\lambda_m, \lambda_M] \to \mathbb{R}^n, i = \overline{1,2}$ *sunt continue şi au proprietatea Lipschitz în raport cu a treia variabilă, având constantele Lipschitz* L_1*, respectiv* L_2*;*

2. *$f \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$ şi au loc relaţiile 4.64;*
3. *$g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue şi injective cu proprietatea $Im(g_1) = [a_1, a_2]$, $Im(g_2) = [b_2, b_1]$ şi $a_1 \le a \le a_2 \le b$, respectiv $a \le b_2 \le b \le b_1$;*
4. *$g_1(s) \le s$, $\forall s \in [a,b]$;*
5. *funcţiile $\varphi_1 : [a_1, a] \to \mathbb{R}^n$ şi $\varphi_2 : [b, b_1] \to \mathbb{R}^n$ sunt continue;*
6. *are loc una din condiţiile C^1) sau C^2),*

atunci

a) *ecuaţia (4.60) are soluţie unică x^* în $C([a_1,b_1],\mathbb{R}^n)$;*

b) *şirul aproximaţiilor succesive converge către x^* pentru orice element iniţial;*

c) *are loc următoarea aproximare:*

$$\begin{bmatrix} \|x^* - x_1^{(m)}\|_B \\ \|x^* - x_1^{(m)}\|_C \end{bmatrix} \le C^m (I_2 - C)^{-1} \begin{bmatrix} d_1(x_1^{(1)}, x_1^{(0)}) \\ d_2(x_2^{(1)}, x_2^{(0)}) \end{bmatrix},$$

$$\text{unde } C = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{\tau} & L_2(b-a) \\ \frac{L_1}{\tau}\left[e^{\tau(b-a)} - 1\right] & L_2(b-a) \end{bmatrix}.$$

Teorema 4.2. *(Sz. András) Dacă*

(1) *funcţiile $K_i : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [\lambda_m, \lambda_M] \to \mathbb{R}^n$ sunt continue;*

(2) *$f \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$ şi au loc condiţiile 4.64;*

(3) *componentele funcţiilor*

$$K_i : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [\lambda_m, \lambda_M] \to \mathbb{R}^n$$

sunt derivabile în raport cu ultimele $n+1$ variabile;

(4) *dacă* $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)$, $K_1=(K_{11},K_{12},...,K_{1n})$ *şi* $K_2=(K_{21},K_{22},...,K_{2n})$, *atunci*

$$\left|\frac{\partial K_{1j}(t,s,x;\lambda)}{\partial x_i}\right|\leq L_1 \text{ şi } \left|\frac{\partial K_{2j}(t,s,y;\lambda)}{\partial y_i}\right|\leq L_2$$

în $[a,b]\times[a,b]\times\mathbb{R}^n\times[\lambda_m,\lambda_M]$, $\forall i,j=\overline{1,n}$;

(5) $g_1,g_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ *sunt funcţii continue cu proprietatea* $Im(g_1)=[a_1,a_2]$, $Im(g_2)=[b_2,b_1]$ *şi* $a_1\leq a\leq a_2\leq b$, *respectiv* $a\leq b_2\leq b\leq b_1$;

4. $g_1(s)\leq s$, $\forall s\in[a,b]$;

(6) *funcţiile* $\varphi_1:[a_1,a]\to\mathbb{R}^n$ *şi* $\varphi_2:[b,b_1]\to\mathbb{R}^n$ *sunt continue;*

(7) *pentru numerele* L_1 *şi* L_2 *are loc una din condiţiile* C^1 *sau* C^2,

atunci

a) *ecuaţia (4.60) are o soluţie unică* $x^*(t,\lambda)$ *în spaţiul*

$$C([a,b]\times[\lambda_m,\lambda_M],\mathbb{R}^n);$$

b) *funcţiile* $x_j^*(t,\lambda)$ $j=\overline{1,n}$ *sunt derivabile în raport cu* λ *şi derivatele parţiale satisfac sistemul de ecuaţii integrale*

$$\frac{\partial x_j^*(t,\lambda)}{\partial\lambda}=\int_a^t\frac{\partial K_{1j}(t,s,x^*(g_1(s),\lambda);\lambda)}{\partial\lambda}ds+$$

$$+\int_a^b\frac{\partial K_{2j}(t,s,x^*(g_2(s),\lambda);\lambda)}{\partial\lambda}ds+$$

$$+\sum_{i=1}^n\int_a^t\frac{\partial K_{1j}(t,s,x^*(g_1(s),\lambda);\lambda)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i^*(g_1(s),\lambda)}{\partial\lambda}ds$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_a^b \frac{\partial K_{2j}(t,s,x^*(g_2(s),\lambda);\lambda)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i^*(g_2(s),\lambda)}{\partial\lambda}ds,\ j=\overline{1,n};$$

c) *dacă operatorii* B *şi* C *sunt definiţi prin*

$$B(x,y)=(T_1(x,y),T_2(x,y)) \tag{4.65}$$

$$C((x,y),(x_1,y_1))=(x^1,y^1), \tag{4.66}$$

unde operatorii T_1, T_2 *sunt definiţi prin*

$$T_{1,2}(x,y)(t)=f(t)+\int_a^t K_1(t,s,\lambda,x(g_1(s)))ds+$$

$$+\int_a^b K_2(t,s,\lambda,y(g_2(s)))ds\ \text{şi}$$

$$x_j^1(t,\lambda)=\int_a^t \frac{\partial K_{1j}(t,s,x(g_1(s),\lambda);\lambda)}{\partial\lambda}ds+$$

$$+\int_a^b \frac{\partial K_{2j}(t,s,y(g_2(s),\lambda);\lambda)}{\partial\lambda}ds$$

$$y_j^1(t,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\int_a^t \frac{\partial K_{1j}(t,s,x(g_1(s),\lambda);\lambda)}{\partial x_i}x_{1i}(g_1(s),\lambda)ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_a^b \frac{\partial K_{2j}(t,s,y(g_2(s),\lambda);\lambda)}{\partial y_i}y_{1i}(g_2(s),\lambda)ds,\ j=\overline{1,n},$$

atunci şirul aproximaţiilor succesive pentru operatorul $A=(B,C)$ *converge la* x^*.

OBSERVAŢIA 4.1. 1. *În cazul sistemelor se pot stabili condiţii mai generale folosind o construcţie similară cu cea folosită la teorema 5.3.*

2. *Dacă renunţăm la condiţiile 4.64, atunci teorema de punct fix 2.1 şi tehnica operatorilor Picard pe fibre se poate aplica construind spaţiile corespunzătoare pe intervalul $[a,b]$. Astfel şirul aproximaţiilor succesive converge către o funcţie cu discontinuităţi în capetele intervalului chiar şi fără condiţiile 4.64 (a se vedea cazul ecuaţiei din exemplul 4.1).*
3. *În cazul ecuaţiilor liniare cu argument modificat iteratele se pot calcula mult mai greu decât în cazul obişnuit. Chiar şi în cazul cel mai simplu $g_1(s) = s - h$ şi $g_2(s) = s + h$ dacă $l = \left[\frac{b-a}{h}\right]$, $l_x = \left[\frac{x-a}{h}\right]$, împărţim intervalul $[a-h, b+h]$ în subintervalele $I_j = [a + (j-1)h, a + jh]$ pentru $j \in \{0, 1, \ldots, l\}$, $I_{l+1} = \left[a + \left[\frac{b-a}{h}\right]h, b\right]$, $I_{l+2} = [b, b+h]$ şi căutăm iteratele sub forma $y_{(k)}(x) = y_{(k,j)}(x)$, $\forall x \in I_j$, $j = \overline{0, l+2}$ cu condiţiile $y_{(k,0)} = \varphi_1$, $y_{(k,l+2)} = \varphi_2$. Obţinem următoarele recurenţe:*

$$y_{(k+1,j)} = f(x) + \sum_{j=1}^{l_x} \int\limits_{I_j} K_1(x,s) y_{(k,j-1)}(s-h) ds +$$

$$+ \int\limits_{a+hl_x}^{x} K_1(x,s) y_{(k,l_x-1)}(s-h) ds +$$

$$+ \sum_{j=0}^{l} \int\limits_{I_{j+1}} K_2(x,s) y_{(k,j+2)}(s+h) ds, \quad j = \overline{1, l+1}.$$

4. *Aceste rezultate rămân valabile şi pentru cazul ecuaţiilor cu singularitate slabă.*

5. *Rezultatele de mai înainte se pot generaliza şi pentru cazul nucleilor cu o mulţime finită de discontinuităţi (de speţa I. relativ la prima variabilă) construind spaţii Banach cu funcţii segmentar continue şi având un număr finit de salturi în puncte fixate. Astfel putem demonstra existenţa şi unicitatea soluţiei în spaţii mai restrictive decât* $L^1[a,b]$ *sau* $L^2[a,b]$.
6. *Astfel de ecuaţii apar din multe tipuri de probleme (probleme periodice, ecuaţii funcţional diferenţiale) şi din multe aplicaţii practice. Pentru mai multe detalii se pot consulta lucrările lui J. Mallet-Paret (*[**70**]*), A. Rustichini (*[**108**]*), L.S. Schulman (*[**109**]*), V. Dârzu (*[**36**], [**37**]*).*

5. Teoreme de comparaţie

Folosind tehnica operatorilor Picard şi rezultatele generale de comparaţie pentru operatori slab Picard (I.A.Rus [**106**]) putem obţine teoreme de comparaţie şi în cazul ecuaţiilor Fredholm-Volterra (condiţia C^1 sau C^2 garantează calitatea de operator slab Picard). Astfel obţinem următoarele teoreme:

TEOREMA 5.1. *(Sz. András) Dacă funcţiile*

$$K_i : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R} \times [\lambda_m, \lambda_M] \to \mathbb{R}, \text{ şi}$$

$$\overline{K}_i : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R} \times [\lambda_m, \lambda_M] \to \mathbb{R} \; i \in 1,2$$

satisfac condiţiile teoremei 2.2, $f_1, f_2 \in C[a,b]$ *şi în plus au loc implicaţiile*

$$u \le v \Rightarrow K_1(x,s,u) \le \overline{K}_1(x,s,v),$$

$$u \le v \Rightarrow K_2(x,s,u) \le \overline{K}_2(x,s,v),$$

atunci pentru soluţiile y^* *şi* $\overline{y}^*$ *ale ecuaţiilor*

$$y(x) = f_1(x) + \int_a^x K_1(x,s,y(s);\lambda)ds + \int_a^b K_2(x,s,y(s);\lambda)ds, \tag{5.67}$$

şi

$$y(x) = f_2(x) + \int_a^x \overline{K}_1(x,s,y(s);\lambda)ds + \int_a^b \overline{K}_2(x,s,y(s);\lambda)ds, \tag{5.68}$$

are loc inegalitatea $y^*(x) \le \overline{y}^*(x), \; \forall x \in [a,b]$.

DEMONSTRAŢIE. Considerăm funcţiile y_0 şi $\overline{y}_0$ din $C[a,b]$ cu proprietatea $y_0(x) \le \overline{y}_0(x), \; \forall x \in [a,b]$ şi construim şirurile de aproximaţii succesive $y_{n+1} = Ty_n$ respectiv $\overline{y}_{n+1} = \overline{T}y_n$ pentru $n \ge 0$ (T şi $\overline{T}$ sunt operatorii integrali definiţi cu ajutorul membrului drept al ecuaţiilor). Datorită condiţiilor din teoremă şirurile $(y_n)_{n\geq 0}$ şi $(\overline{y}_n)_{n\geq 0}$ converg către y^* respectiv $\overline{y}^*$ şi are loc inegalitatea $y_n(x) \leq \overline{y}_n(x)$ pentru orice $x \in [a,b]$ şi $n \in \mathbb{N}$. Trecând la limită când $n \to \infty$ obţinem inegalitatea din teoremă. ■

OBSERVAŢIA 5.1.

1. *Dacă asupra funcţiilor* $\overline{K}_i : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R} \times [\lambda_m, \lambda_M] \to \mathbb{R}$ $i \in 1,2$ *se pun condiţii care să asigure numai existenţa soluţiilor (vezi teoremele 1.1, 1.2 şi 1.3) sau se presupune direct existenţa unei soluţii* $\overline{y}^*$ *pentru ecuaţia 5.68, atunci dintr-un raţionament analog rezultă inegalitatea* $y^*(x) \leq \overline{y}^*(x)$, $\forall x \in [a,b]$, *unde* y^* *este unica soluţie a ecuaţiei 5.67 şi* $\overline{y}^*$ *o soluţie oarecare a ecuaţiei 5.68.*
2. *Teorema rămâne valabilă şi pentru sisteme de ecuaţii integrale sau ecuaţii pentru funcţii cu valori într-un spaţiu Banach ordonat.*

TEOREMA 5.2. *(Sz. András) Dacă funcţiile*

$$K_i : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R} \times [\lambda_m, \lambda_M] \to \mathbb{R},$$

$$\overline{K}_i : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R} \times [\lambda_m, \lambda_M] \to \mathbb{R} \ i \in \{1,2\},$$

$f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ *şi* $\varphi_1, \overline{\varphi}_1 : [a_1, a] \to \mathbb{R}$, $\varphi_2, \overline{\varphi}_2 : [b, b_1] \to \mathbb{R}$ *satisfac condiţiile teoremei 4.1, sunt verificate inegalităţile* $\varphi_1 \leq \overline{\varphi}_1$, $\varphi_2 \leq \overline{\varphi}_2$ *şi* $f_1 \leq f_2$ *şi în plus au loc implicaţiile*

$$u \leq v \Rightarrow K_1(x,s,u) \leq \overline{K}_1(x,s,v),$$

$$u \leq v \Rightarrow K_2(x,s,u) \leq \overline{K}_2(x,s,v),$$

atunci pentru soluţiile unice y^* *şi* $\overline{y}^*$ *ale ecuaţiilor*

(5.69)

$$y(x) = f_1(x) + \int_a^x K_1(x,s,y(g_1(s)))ds + \int_a^b K_2(x,s,y(g_2(s)))ds,$$

şi

(5.70)

$$y(x) = f_2(x) + \int_a^x \overline{K}_1(x,s,y(g_1(s)))ds + \int_a^b \overline{K}_2(x,s,y(g_2(s)))ds,$$

are loc inegalitatea $y^*(x) \le \overline{y}^*(x),\ \forall x \in [a,b]$.

Observaţia 5.2. *Se pot aplica toate teoremele referitoare la operatori Picard şi slab Picard, obţinând astfel monotonia operatorului* T^∞ *dacă* T *este monoton, estimarea distanţei soluţiilor a două ecuaţii în funcţie de distanţa nucleilor, inegalităţi de tip Gronwall etc.*

Ecuaţii Fredholm-Volterra în $L^2[a, b]$

În acest capitol studiem existenţa şi unicitatea soluţiei ecuaţiilor 2.41 şi 4.60 în spaţiul $L^2[a, b]$. În primul paragraf stabilim condiţii pentru existenţa şi unicitatea soluţiei şi studiem continuitatea şi diferenţiabilitatea operatorului soluţie $\lambda \to y(\cdot, \lambda)$ în cazul $b < \infty$. În al doilea paragraf considerăm ecuaţii mixte pe intervalul $[a, \infty)$. Teoremele demonstrate în acest capitol completează rezultatele cunoscute conţinute în [**88**], [**44**], [**15**]. Rezultatele din acest capitol sunt în curs de publicare în lucrarea [**7**].

1. Ecuaţii Fredholm-Volterra pe un interval compact

În studiul dependenţei de date avem nevoie de următoarea lemă:

LEMA 1.1. *(Sz. András [**7**]) Dacă $I = [a, b]$ este un interval compact, $k \in L^2(I^2)$ şi funcţia cu valori nenegative $u \in L^2(I)$ satisface inegalitatea*

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^b k(t, s)u(s)ds, \; a.p.t. \, t \in I, \tag{1.71}$$

unde $\alpha > 0$ şi $\|k\|_{L^2(I^2)} < 1$, atunci are loc inegalitatea

$$\|u\|_{L^2(I)} \leq \frac{\alpha\sqrt{2(b-a)}}{1 - \|k\|_{L^2(I^2)}}.$$

DEMONSTRAŢIE. Considerăm mulţimile

$$A = \{t \in I \mid u(t) \leq \alpha\} \text{ şi } B = \{t \in I \mid u(t) > \alpha\}.$$

Aceste mulţimi sunt măsurabile deoarece u este o funcţie măsurabilă. Dacă $t \in B$, atunci din inegalitatea Cauchy-Buniakovski avem

$$(u(t)-\alpha)^2 \leq \left(\int_a^b k(t,s)u(s)ds\right)^2 \leq \int_a^b k^2(t,s)ds \cdot \int_a^b u^2(s)ds.$$

Integrând această inegalitate pe mulţimea B, obţinem

$$\int_B u^2(s)ds \leq 2\alpha \int_B u(t)dt - \alpha^2 \cdot \mu(B) + \int_B \int_a^b k^2(t,s)dsdt \cdot \|u\|^2_{L^2(I)} \leq$$

$$\leq 2\alpha \int_B u(t)dt - \alpha^2 \cdot \mu(B) + \int_a^b \int_a^b k^2(t,s)dsdt \cdot \|u\|^2_{L^2(I)} \leq$$

$$\leq 2\alpha \sqrt{\mu(B)\int_a^b u^2(t)dt} - \alpha^2 \cdot \mu(B) + \|k\|^2_{L^2(I^2)} \cdot \|u\|^2_{L^2(I)}.$$

Pe de altă parte avem $u^2(t) \leq \alpha^2$, dacă $t \in A$, deci

$$\int_A u^2(t)dt \leq \alpha^2 \cdot \mu(A).$$

Din cele două inegalităţi rezultă că

$$\left(\|u\|_{L^2(I)} - \alpha\sqrt{\mu(B)}\right)^2 \leq \alpha^2 \mu(A) + \|k\|^2_{L^2(I^2)} \cdot \|u\|^2_{L^2(I)},$$

deci

$$\|u\|_{L^2(I)} - \alpha\sqrt{\mu(B)} \leq \sqrt{\alpha^2\mu(A) + \|k\|^2_{L^2(I^2)} \cdot \|u\|^2_{L^2(I)}}.$$

Din inegalităţile

$$\sqrt{\alpha^2\mu(A) + \|k\|^2_{L^2(I^2)} \cdot \|u\|^2_{L^2(I)}} \leq \alpha\sqrt{\mu(A)} + \|k\|_{L^2(I^2)} \cdot \|u\|_{L^2(I)}$$

şi

$$\sqrt{\mu(A)} + \sqrt{\mu(B)} \leq \sqrt{2(b-a)}$$

deducem inegalitatea din enunţ. ■

OBSERVAŢIA 1.1. *Folosind inegalitatea lui Minkovski şi inegalitatea Cauchy-Buniakovski obţinem o îmbunătăţire a acestei inegalităţi:*

$$\|u\|_{L^2(I)} \leq \frac{\alpha\sqrt{(b-a)}}{1-\|k\|_{L^2(I^2)}}.$$

Din inegalitatea 1.71 rezultă că

$$\|u\|_{L^2(I)} \leq \left\| \alpha + \sqrt{\int_a^b k^2(t,s)ds \cdot \int_a^b u^2(s)ds} \right\|_{L^2(I)} \leq$$

$$\leq \alpha\sqrt{b-a} + \|k\|_{L^2(I^2)} \cdot \|u\|_{L^2(I)}.$$

Printr-un raţionament analog obţinem şi următoarea proprietate:

Dacă $k \in L^2(I^2)$, $g \in L^2(I)$ şi funcţia cu valori nenegative $u \in L^2(I)$ satisface inegalitatea

$$u(t) \leq g(t) + \int_a^b k(t,s)u(s)ds, \ a.p.t.\, t \in I,$$

unde $\|k\|_{L^2(I^2)} < 1$, atunci are loc inegalitatea

$$\|u\|_{L^2(I)} \leq \frac{\|g\|_{L^2(I)}}{1-\|k\|_{L^2(I^2)}}.$$

OBSERVAŢIA 1.2. *După stabilirea teoremelor de existenţă şi unicitate inegalităţile precedente se pot demonstra folosind lema abstractă Gronwall.*

În demonstraţia teoremelor din acest capitol folosim noţiunea de diferenţială pentru funcţii cu valori într-un spaţiu Banach şi generalizarea teoremei lui Weierstrass referitoare la diferenţiabilitatea limitei unui şir uniform convergent. Pentru claritatea demonstraţiilor enunţăm această teoremă.

Definiţia 1.1. *Dacă* $S : [\lambda_1, \lambda_2] \to L^2(I)$ *este o funcţie continuă, atunci vom spune, că această funcţie este diferenţiabilă în punctul* λ, *dacă există* $z_\lambda \in L^2(I)$ *cu proprietatea*

$$\lim_{\overline{\lambda} \to \lambda} \frac{\|S(\overline{\lambda}) - S(\lambda) - (\overline{\lambda} - \lambda) z_\lambda\|_{L^2(I)}}{\overline{\lambda} - \lambda} = 0.$$

Pentru simplificarea exprimării vom identifica diferenţiala (funcţie liniară $t \to t z_\lambda$*) cu elementul* z_λ.

Teorema 1.1. *Dacă şirul de funcţii* $y_n(\cdot, \lambda) \in L^2(I)$, $n \geq 0$ *converge în* $L^2(I)$ *la* $y^*(\cdot, \lambda)$ *pentru orice* $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, *operatorii* $S_n : [\lambda_1, \lambda_2] \to L^2(I)$ *definiţi prin* $S_n(\lambda)(t) = y_n(t, \lambda)$, $\forall t \in I$, $\forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ *sunt diferenţiabili, diferenţialele acestora converg în* $L^2(I)$ *la* $z^*(\cdot, \lambda)$, *şi convergenţele sunt uniforme în raport cu* λ, *atunci operatorul* $S : [\lambda_1, \lambda_2] \to L^2(I)$ *definit prin* $S(\lambda)(t) = y^*(t, \lambda)$, $\forall t \in I$, $\forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ *este diferenţiabil şi* $z^*(\cdot, \lambda)$ *este diferenţiala lui* S *în punctul* λ.

Demonstraţie. Datorită teoremei de medie pentru funcţii cu valori într-un spaţiu Banach (a se vedea [**67**] 2-5) avem inegalitatea:

$$\frac{\|[y_m(\cdot, \overline{\lambda}) - y_n(\cdot, \overline{\lambda})] - [y_m(\cdot, \lambda) - y_n(\cdot, \lambda)]\|_{L^2(I)}}{\overline{\lambda} - \lambda} \leq$$

$$\leq \sup_{\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]} \|z_m(\cdot, \lambda) - z_n(\cdot, \lambda)\|_{L^2(I)},$$

unde $z_m(\cdot, \lambda)$ este diferenţiala lui $S_n(\lambda)(\cdot)$. Din condiţia $\|z_n(\cdot, \lambda) - z^*(\cdot, \lambda)\|_{L^2(I)} \to 0$ independent de λ, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ cu proprietatea

(1.72)
$$\frac{\|[y^*(\cdot, \overline{\lambda}) - y^*(\cdot, \lambda)] - [y_n(\cdot, \overline{\lambda}) - y_n(\cdot, \lambda)]\|_{L^2(I)}}{\overline{\lambda} - \lambda} \leq \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall n \geq n_1(\varepsilon).$$

Pe de altă parte pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ cu proprietatea

$$\|z_n(\cdot,\lambda) - z^*(\cdot,\lambda)\|_{L^2(I)} \le \frac{\varepsilon}{3},\ \forall n \ge n_2(\varepsilon) \tag{1.73}$$

şi există $\delta > 0$ astfel încât

$$\frac{\|y_n(\cdot,\overline{\lambda}) - y_n(\cdot,\lambda) - (\overline{\lambda}-\lambda)z_n(\cdot,\lambda)\|_{L^2(I)}}{\overline{\lambda}-\lambda} \le \frac{\varepsilon}{3}, \tag{1.74}$$

dacă $|\overline{\lambda}-\lambda| < \delta$. Din aceste relaţii deducem

$$\lim_{\overline{\lambda}\to\lambda} \frac{\|y^*(\cdot,\overline{\lambda}) - y^*(\cdot,\lambda) - (\overline{\lambda}-\lambda)z^*(\cdot,\lambda)\|_{L^2(I)}}{\overline{\lambda}-\lambda} = 0,$$

ceea ce implică diferenţiabilitatea operatorului S în punctul λ şi faptul că această diferenţială este chiar $z^*(\cdot,\lambda)$. ■

Referitor la ecuaţia

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K_1(x,s,\lambda,y(s))ds + \int_a^b K_2(x,s,\lambda,y(s))ds, \tag{1.75}$$

avem următorul rezultat:

Teorema 1.2. *(Sz. András* [**7**]*) Dacă*

I. *(condiţii de tip Carathéodory) funcţiile* $K_i : I^2 \times [\lambda_1,\lambda_2] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,2\}$ *cu* $I = [a,b]$ *satisfac condiţiile*
   a) $K_i(\cdot,\cdot,\lambda,u)$ *este măsurabilă pe* $I^2 = [a,b]\times[a,b]$ *pentru orice* $u \in \mathbb{R}$ *şi orice* $\lambda \in [\lambda_1,\lambda_2]$;
   b) $K_i(x,s,\lambda,\cdot)$ *este continuă pe* $\mathbb{R}$ *aproape pentru toate perechile* $(x,s) \in I^2$ *şi orice* $\lambda \in [\lambda_1,\lambda_2]$.

II. *(condiţii pentru invarianţa spaţiului)* $f \in L^2(I)$, $K_i(\cdot,\cdot,\lambda,0) \in L^2(I^2)$ *pentru orice* $\lambda \in [\lambda_1,\lambda_2]$, $i \in \{1,2\}$ *şi există* $M_1 > 0$ *cu proprietatea* $\|K_i(\cdot,\cdot,\lambda,0)\|_{L^2(I^2)} < M_1$ *pentru orice* $\lambda \in [\lambda_1,\lambda_2]$;

III. *(condiţii de tip Lipschitz) există $k_i \in L^2(I^2)$, $i \in \{1,2\}$, cu proprietatea*

$$|K_i(t,s,\lambda,u) - K_i(t,s,\lambda,v)| \le k_i(t,s)|u-v|,$$
$$\forall t,s \in I, \lambda \in [\lambda_1,\lambda_2], u,v \in \mathbb{R};$$

IV. *(condiţia de contracţie)*

$$L^2 := \int_a^b \int_a^t (k_1(t,s) + k_2(t,s))^2 ds dt + \int_a^b \int_t^b k_2^2(t,s) ds dt < 1 \tag{1.76}$$

atunci

1. *pentru orice $\lambda \in [\lambda_1,\lambda_2]$ există o soluţie unică $y^*(\cdot,\lambda) \in L^2(I)$ a ecuaţiei 1.75;*
2. *şirul aproximaţiilor succesive*

$$y_{n+1}(x) = f(x) + \int_a^x K_1(x,s,\lambda,y_n(s))ds + \int_a^b K_2(x,s,\lambda,y_n(s))ds$$

converge în $L^2(I)$ către $y^*(\cdot,\lambda)$, pentru orice $y_0(\cdot) \in L^2(I)$ şi orice $\lambda \in [\lambda_1,\lambda_2]$;

3. *pentru orice $n \in \mathbb{N}$ are loc inegalitatea*

$$\|y_n(\cdot) - y^*(\cdot,\lambda)\|_{L^2(I)} \le \frac{L^n}{1-L}\|y_1(\cdot) - y_0(\cdot)\|_{L^2(I)}.$$

Dacă în plus are loc condiţia

I.c) *funcţiile $(K_i(x,s,\cdot,u))_{x,s\in I, u\in\mathbb{R}}$ sunt echicontinue,*

atunci operatorul $S : [\lambda_1,\lambda_2] \to L^2(I)$ definit prin

$$S(\lambda)(x) = y^*(x,\lambda),\ \forall x \in I,\ \forall \lambda \in [\lambda_1,\lambda_2]$$

este continuu.

Dacă în locul condiţiilor I.b), I.c) şi III. au loc condiţiile

I.b') *$K_i(x,s,\lambda,\cdot)$ este de clasă $C^1(\mathbb{R})$ pentru orice $\lambda \in [\lambda_1,\lambda_2]$, a.p.t. $(x,s) \in I^2$, şi există $k_i \in L^2(I^2)$, $i \in \{1,2\}$, cu proprietatea*

$$\left|\frac{\partial K_i(t,s,\lambda,u)}{\partial u}\right| \leq k_i(t,s),\ \forall t,s \in I, \forall \lambda \in [\lambda_1,\lambda_2], \forall u \in \mathbb{R};$$

I.c') *$K_i(x,s,\cdot,u)$ este de clasă $C^1[\lambda_1,\lambda_2]$ pentru orice $u \in \mathbb{R}$, a.p.t. $(x,s) \in I^2$, derivatele parţiale satisfac condiţii de tipul I., $\frac{\partial K_i}{\partial \lambda}(\cdot,\cdot,\lambda,u) \in L^2(I^2), i \in \{1,2\}$ şi există $M_2 > 0$ cu proprietatea*

$$\left\|\frac{\partial K_i}{\partial \lambda}(\cdot,\cdot,\lambda,u)\right\|_{L^2(I^2)} < M_2,\ \forall \lambda \in [\lambda_1,\lambda_2],\ \forall u \in \mathbb{R},$$

atunci operatorul S este diferenţiabil.

Demonstraţie. Demonstrăm că pentru λ fixat operatorul $T : L^2(I) \to L^2(I)$ definit prin

$$T[y](x) = f(x) + \int_a^x K_1(x,s,\lambda,y(s))ds + \int_a^b K_2(x,s,\lambda,y(s))ds$$

este o contracţie. Din condiţia Lipschitz obţinem

$$\int_a^b K_2(t,s,\lambda,y(s))ds \leq \int_a^b K_2(t,s,\lambda,0) + k_2(t,s)|y(s)|ds.$$

Folosind inegalitatea lui Minkovski şi inegalitatea Cauchy-Buniakovski deducem:

$$\int_a^b \left(\int_a^b K_2(t,s,\lambda,y(s))ds\right)^2 dt \leq$$

$$\leq \left(\sqrt{b-a}\|K_2(\cdot,\cdot,\lambda,0)\|_{L^2(I^2)} + \|k_2\|_{L^2(I^2)} \cdot \|y\|_{L^2(I)}\right)^2 < \infty.$$

În mod identic obţinem

$$\int_a^b \left(\int_a^t K_1(t,s,\lambda,y(s))ds \right)^2 dt < \infty,$$

deci cum $f \in L^2(I)$ rezultă $T[y] \in L^2(I)$. Astfel operatorul T este bine definit. Pe de altă parte

$$|Ty_1(t) - Ty_2(t)| \leq \int_a^t |K_1(t,s,\lambda,y_1(s)) - K_1(t,s,\lambda,y_2(s))|ds+$$

$$+\int_a^b |K_2(t,s,\lambda,y_1(s)) - K_2(t,s,\lambda,y_2(s))|ds \leq$$

$$\leq \int_a^t k_1(t,s)|y_1(s) - y_2(s)|ds + \int_a^b k_2(t,s)|y_1(s) - y_2(s)|ds =$$

$$= \int_a^b (\overline{k}_1(t,s) + k_2(t,s))|y_1(s) - y_2(s)|ds,$$

unde $\overline{k}_1(t,s) = \begin{cases} k_1(t,s), & t \geq s \\ 0, & t < s \end{cases}$. Folosind inegalitatea Cauchy-Buniakovski obţinem inegalitatea

$$\|T[y_1](\cdot) - T[y_2](\cdot)\|^2_{L^2(I)} \leq L^2 \cdot \|y_1(\cdot) - y_2(\cdot)\|^2_{L^2(I)},$$

unde L^2 este definit în relaţia (1.76). Această inegalitate garantează că operatorul T este contracţie, deci din principiul contracţiilor obţinem concluziile teoremei.

Dacă are loc condiţia I.c), atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\varepsilon_1 = \frac{(1-L)\varepsilon}{2(b-a)\sqrt{2(b-a)}}$ şi $\delta > 0$ astfel încât pentru $|\lambda - \overline{\lambda}| < \delta$ să avem

$$|K_i(t,s,\lambda,u) - K_i(t,s,\overline{\lambda},u)| \leq \varepsilon_1,$$

pentru orice $u \in \mathbb{R}$ şi a.p.t. $(t,s) \in I^2$. Dacă y^*_λ şi $y^*_{\overline{\lambda}}$ sunt cele două soluţii unice corespunzătoare lui λ, respectiv $\overline{\lambda}$, atunci

$$|y^*_\lambda(t) - y^*_{\overline{\lambda}}(t)| \leq \int_a^t |K_1(t,s,\lambda,y^*_\lambda(s)) - K_1(t,s,\overline{\lambda},y^*_{\overline{\lambda}}(s))|ds+$$

$$+\int_a^b |K_2(t,s,\lambda,y_\lambda^*(s)) - K_2(t,s,\overline{\lambda},y_{\overline{\lambda}}^*(s))|ds \leq$$

$$\leq 2(b-a)\varepsilon_1 + \int_a^t |K_1(t,s,\lambda,y_\lambda^*(s)) - K_1(t,s,\lambda,y_{\overline{\lambda}}^*(s))|ds+$$

$$+\int_a^b |K_2(t,s,\lambda,y_\lambda^*(s)) - K_2(t,s,\lambda,y_{\overline{\lambda}}^*(s))|ds \leq$$

$$\leq 2(b-a)\varepsilon_1 + \int_a^b (\overline{k}_1(t,s) + k_2(t,s))|y_\lambda^*(s) - y_{\overline{\lambda}}^*(s)|ds.$$

Din această inegalitate rezultă (conform lemei 1.1) că

$$\|y_\lambda^*(\cdot) - y_{\overline{\lambda}}^*(\cdot)\|_{L^2(I)} \leq \frac{2(b-a)\varepsilon_1\sqrt{2(b-a)}}{1-L},$$

unde L este definit în relaţia 1.76. Din definiţia valorii ε_1 rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ cu proprietatea:

$$|\lambda - \overline{\lambda}| < \delta \Rightarrow \|y_\lambda^*(\cdot) - y_{\overline{\lambda}}^*(\cdot)\|_{L^2(I)} < \varepsilon,$$

deci operatorul S este continuu.

Dacă au loc condiţiile I.b') şi I.c'), atunci putem folosi tehnica operatorilor Picard pe fibre pentru a studia diferenţiabilitatea operatorului S. Considerăm spaţiile $V = W = L^2(I)$ şi operatorii $B : V \to V$, $C : V \times W \to W$ definiţi prin relaţiile

$$B[v](t) = f(t) + \int_a^t K_1(t,s,\lambda,y(s))ds + \int_a^b K_2(t,s,\lambda,y(s))ds$$

şi

$$C[(v,w)](t) = \int_a^t \frac{\partial K_1(t,s,v(s);\lambda)}{\partial\lambda}ds + \int_a^b \frac{\partial K_2(t,s,v(s);\lambda)}{\partial\lambda}ds+$$

$$+\int_a^t \frac{\partial K_1(t,s,v(s);\lambda)}{\partial v}w(s)ds + \int_a^b \frac{\partial K_2(t,s,v(s);\lambda)}{\partial v}w(s)ds.$$

Datorită condiţiilor date operatorul B este un operator Picard (condiţia I.b') implică condiţia III.) şi operatorul C satisface condiţia

$$\|C[(v,w_1)] - C[(v,w_2)]\|_{L^2(I)} \leq L_1\|w_1 - w_2\|_{L^2(I)},$$

unde $L_1 = \sqrt{\int_a^b\int_a^t (k_1(t,s)+k_2(t,s))^2 dsdt + \int_a^b\int_t^b k_2^2(t,s)dsdt}$. Conform teoremei 5.1 operatorul triunghiular $A[v,w] = (B[v], C[v,w])$ este un operator Picard şi astfel şirul aproximaţiilor succesive $(y_{n+1}, z_{n+1}) = A[y_n, z_n]$ converge în $L^2(I)$ la unicul punct fix. Dacă alegem ca punct de pornire o funcţie $y_0(\cdot,\lambda)$ de clasă C^1 în ultima variabilă, şi $z_0 = \frac{\partial y_0}{\partial\lambda}$, atunci conform condiţiilor vom avea $z_n = \frac{\partial y_n}{\partial\lambda}$. Pe de altă parte operatorii $S_n : [\lambda_1,\lambda_2] \to L^2(I)$ definiţi prin $S_n(\lambda)(t) = y_n(t)$, $\forall t \in I$, $\forall\lambda \in [\lambda_1,\lambda_2]$ sunt diferenţiabili şi diferenţiala lui S_n în punctul λ este chiar z_n. Astfel putem aplica teorema 1.1 şi rezultă diferenţiabilitatea operatorului S. ■

Observaţia 1.3. 1. *Dacă considerăm mulţimea*

$$Y = \left\{ y : I \times \Lambda \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} y(\cdot,\lambda) \in L^2[I],\ \forall\lambda\in\Lambda, \\ y(t,\cdot) \in C(\Lambda)\, a.p.t.\, t \in I \end{array} \right\},$$

unde $\Lambda = [\lambda_1,\lambda_2]$ *şi norma* $\|y\|_Y = \max\limits_{\lambda\in\Lambda} \|y(\cdot,\lambda)\|_{L^2(I)}$, *atunci* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *este un spaţiu Banach şi lucrând în acest spaţiu Banach obţinem aceleaşi rezultate.*

2. *Teorema 1.2 se poate extinde şi la sisteme de ecuaţii mixte.*

Folosind acelaşi raţionament pentru ecuaţii Fredholm-Volterra cu argument modificat (4.60) obţinem următoarea teoremă

Teorema 1.3. *(Sz. András, [**7**]) Dacă*

a) *funcţiile* $K_i : I \times I \times [\lambda_1,\lambda_2] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, i = \overline{1,2}$ *satisfac condiţiile I.-IV. din teorema 1.2;*

b) *funcţiile injective şi măsurabile* $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ *satisfac condiţiile* $Im(g_1) = [a_1, a_2]$, $Im(g_2) = [b_2, b_1]$ *cu* $a_1 \leq a \leq a_2 \leq b$, *respectiv* $a \leq b_2 \leq b \leq b_1$;

c) $\varphi_1 \in L^2([a_1, a])$ *respectiv* $\varphi_2 \in L^2([b, b_1])$;

atunci

1) *ecuaţia (4.60) are soluţie unică* $y^*(\cdot, \lambda)$ *în* $L^2(I_1)$ *pentru orice* $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, *unde* $I_1 = [a_1, b_1]$;

2) *şirul aproximaţiilor succesive converge în* $L^2(I_1)$ *către* $y^*(\cdot, \lambda)$ *pentru orice element iniţial admisibil* $y_0(\cdot, \lambda)$, *unde mulţimea funcţiilor admisibile este*

$$Y_a = \left\{ y(\cdot, \lambda) \in L^2(I_1) \;\middle|\; \begin{array}{l} y_0(t, \lambda) = \varphi_1(t),\ \forall t \in [a_1, a], \\ y_0(t, \lambda) = \varphi_2(t),\ \forall t \in [b, b_1] \end{array} \right\};$$

3) *are loc estimarea:*

$$\|y_n(\cdot) - y^*(\cdot, \lambda)\|_{L^2(I_1)} \leq \frac{L^n}{1-L} \|y_1(\cdot) - y_0(\cdot)\|_{L^2(I_1)},$$

unde L *este definit de relaţia 1.76.*

Dacă în plus are loc condiţia I.c), atunci operatorul soluţie $S : [\lambda_1, \lambda_2] \to L^2(I_1)$ *definit prin*

$$S(\lambda)(x) = y^*(x, \lambda),\ \forall x \in [a_1, b_1],\ \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$$

este continuu.

Dacă în locul condiţiilor I.b), I.c) şi III. avem condiţiile I.b') şi I.c'), atunci operatorul S *este diferenţiabil.*

Observaţia 1.4. *Diferenţiabilitatea operatorului* S *implică existenţa derivatei parţiale* $\frac{\partial y^*(\cdot,\lambda)}{\partial \lambda}$ *şi astfel din construcţia operatorului* C *rezultă* *că această derivată parţială satisface ecuaţia*

$$\frac{\partial y^*(t,\lambda)}{\partial \lambda} = \int\limits_a^t \frac{\partial K_1(t,s,\lambda,y^*(s,\lambda))}{\partial \lambda} ds + \int\limits_a^b \frac{\partial K_2(t,s,\lambda,y^*(s,\lambda))}{\partial \lambda} ds +$$

$$+ \int\limits_a^t \frac{\partial K_1(t,s,\lambda,y^*(s,\lambda))}{\partial y^*} \frac{\partial y^*(s,\lambda)}{\partial \lambda} ds +$$

$$+ \int\limits_a^b \frac{\partial K_2(t,s,\lambda,y^*(s,\lambda))}{\partial y^*} \frac{\partial y^*(s,\lambda)}{\partial \lambda} ds;$$

în cazul teoremei 1.2 şi ecuaţia

$$\frac{\partial y^*(t,\lambda)}{\partial \lambda} = \int\limits_a^t \frac{\partial K_1(t,s,\lambda,y^*(g_1(s),\lambda))}{\partial \lambda} ds +$$

$$+ \int\limits_a^b \frac{\partial K_2(t,s,\lambda,y^*(g_2(s),\lambda))}{\partial \lambda} ds +$$

$$+ \int\limits_a^t \frac{\partial K_1(t,s,\lambda,y^*(g_1(s),\lambda))}{\partial y^*} \cdot \frac{\partial y^*(g_1(s),\lambda)}{\partial \lambda} ds +$$

$$+ \int\limits_a^b \frac{\partial K_2(t,s,\lambda,y^*(g_2(s),\lambda))}{\partial y^*} \cdot \frac{\partial y^*(g_2(s),\lambda)}{\partial \lambda} ds$$

în cazul teoremei 1.3.

2. Ecuaţii Fredholm-Volterra pe intervale necompacte

Dacă $I = [a, b)$ cu $b < \infty$, atunci putem folosi acelaşi raţionament atât în stabilirea teoremelor de existenţă şi unicitate cât şi în studiul dependenţei de parametru. Dacă $b = \infty$, atunci inegalităţile folosite în studiul dependenţei de parametru nu garantează continuitatea operatorului soluţie. Din acest motiv avem nevoie de alte condiţii.

TEOREMA 2.1. *(Sz. András [**7**]) Dacă sunt satisfăcute condiţiile I.-III. din teorema 1.2 cu $I = [a, \infty)$ şi*

(2.77)
$$L^2 := \int_a^\infty \int_a^t (k_1(t,s) + k_2(t,s))^2 ds dt + \int_a^\infty \int_t^\infty k_2^2(t,s) ds dt < 1,$$

atunci

1. *pentru orice $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ există o soluţie unică $y^*(\cdot, \lambda) \in L^2(I)$;*
2. *şirul aproximaţiilor succesive*

$$y_{n+1}(x) = f(x) + \int_a^x K_1(x, s, \lambda, y_n(s)) ds + \int_a^\infty K_2(x, s, \lambda, y_n(s)) ds$$

   converge în $L^2(I)$ către $y^*(\cdot, \lambda)$, pentru orice $y_0(\cdot) \in L^2(I)$;
3. *pentru orice $n \in \mathbb{N}$ are loc inegalitatea*

$$\|y_n(\cdot) - y^*(\cdot, \lambda)\|_{L^2(I)} \le \frac{L^n}{1-L} \|y_1(\cdot) - y_0(\cdot)\|_{L^2(I)}.$$

Dacă în plus are loc condiţia

I.c) *există $\Lambda_i : [\lambda_1, \lambda_2] \times [\lambda_1, \lambda_2] \to \mathbb{R}$, şi $g_i : I^2 \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$ cu proprietăţile*

i)

(2.78)
$$|K_i(x, s, \lambda, u) - K_i(x, s, \overline{\lambda}, u)| \le \Lambda_i(\lambda, \overline{\lambda}) \cdot g_i(t, s),$$

$\forall u \in \mathbb{R}, \lambda, \overline{\lambda} \in [\lambda_1, \lambda_2], a.p.t.(t,s) \in I^2, i \in \{1,2\};$

ii) $\lim\limits_{\overline{\lambda}\to\lambda} \Lambda(\lambda, \overline{\lambda}) = 0;$

iii) $\int\limits_a^\infty \left[\left(\int\limits_a^t g_1(s,t)ds \right)^2 + \left(\int\limits_a^\infty g_2(s,t) \right)^2 \right] dt < +\infty$

atunci operatorul $S : [\lambda_1, \lambda_2] \to L^2(I)$ *definit prin* $S(\lambda)(x) = y^*(x, \lambda)$, $\forall x \in I$, $\forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ *este continuu.*

Dacă în locul condiţiilor I.b) şi III. avem condiţia I.b') din teorema 1.2 şi

I.c') $K_i(x, s, \cdot, u)$ *este de clasă* $C^1[\lambda_1, \lambda_2]$ *pentru orice* $u \in \mathbb{R}$, *a.p.t.* $(x,s) \in I^2$, *derivatele parţiale satisfac condiţii de tipul I., şi există* $M_3 > 0$ *cu proprietatea*

$$\int_a^\infty \left(\int_a^t \frac{\partial K_1}{\partial \lambda}(t, s, \lambda, u)ds \right)^2 dt + \int_a^\infty \left(\int_a^t \frac{\partial K_1}{\partial \lambda}(t, s, \lambda, u)ds \right)^2 dt,$$

pentru orice $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ *şi orice* $u \in \mathbb{R}$,

atunci operatorul S *este diferenţiabil.*

Demonstraţie. Ca şi în teorema 1.2 pentru λ fixat operatorul $T : L^2(I) \to L^2(I)$ definit prin

$$T[y](x) = f(x) + \int\limits_a^x K_1(x, s, \lambda, y(s))ds + \int\limits_a^\infty K_2(x, s, \lambda, y(s))ds$$

este o contracţie cu constanta L. Notăm cu y^*_λ şi $y^*_{\overline{\lambda}}$ cele două soluţii unice corespunzătoare lui λ respectiv $\overline{\lambda}$. Dacă are loc condiţia I.c), atunci

$$\int\limits_a^\infty \left(\int\limits_a^t |K_1(t, s, \lambda, y^*_{\overline{\lambda}}(s)) - K_1(t, s, \overline{\lambda}, y^*_{\overline{\lambda}}(s))|ds \right)^2 dt \leq$$

$$\leq \Lambda_1^2(\lambda, \overline{\lambda}) \cdot \int_a^\infty \left(\int_a^t g_1(t,s)ds \right)^2 dt$$

şi

$$\int_a^\infty \left(\int_a^\infty |K_2(t,s,\lambda, y_\lambda^*(s)) - K_2(t,s,\overline{\lambda}, y_{\overline{\lambda}}^*(s))|ds \right)^2 dt \leq$$

$$\leq \Lambda_2^2(\lambda, \overline{\lambda}) \cdot \int_a^\infty \left(\int_a^\infty g_2(t,s)ds \right)^2 dt.$$

Astfel din şirul de inegalităţi

$$|y_\lambda^*(t) - y_{\overline{\lambda}}^*(t)| \leq \int_a^t |K_1(t,s,\lambda, y_\lambda^*(s)) - K_1(t,s,\overline{\lambda}, y_{\overline{\lambda}}^*(s))|ds+$$

$$+ \int_a^b |K_2(t,s,\lambda, y_\lambda^*(s)) - K_2(t,s,\overline{\lambda}, y_{\overline{\lambda}}^*(s))|ds \leq$$

$$\leq \int_a^t |K_1(t,s,\lambda, y_{\overline{\lambda}}^*(s)) - K_1(t,s,\overline{\lambda}, y_{\overline{\lambda}}^*(s))|ds+$$

$$+ \int_a^b |K_2(t,s,\lambda, y_{\overline{\lambda}}^*(s)) - K_2(t,s,\overline{\lambda}, y_{\overline{\lambda}}^*(s))|ds+$$

$$+ \int_a^t |K_1(t,s,\lambda, y_\lambda^*(s)) - K_1(t,s,\lambda, y_{\overline{\lambda}}^*(s))|ds+$$

$$+ \int_a^b |K_2(t,s,\lambda, y_\lambda^*(s)) - K_2(t,s,\lambda, y_{\overline{\lambda}}^*(s))|ds \leq$$

$$\leq \int_a^t |K_1(t,s,\lambda, y_{\overline{\lambda}}^*(s)) - K_1(t,s,\overline{\lambda}, y_{\overline{\lambda}}^*(s))|ds+$$

$$+ \int_a^b |K_2(t,s,\lambda, y_{\overline{\lambda}}^*(s)) - K_2(t,s,\overline{\lambda}, y_{\overline{\lambda}}^*(s))|ds+$$

$$+ \int_a^b (\overline{k}_1(t,s) + k_2(t,s))|y_\lambda^*(s) - y_{\overline{\lambda}}^*(s)|ds.$$

pe baza inegalitatăţii lui Minkovski deducem

$$\|y_\lambda^*(\cdot) - y_{\overline{\lambda}}^*(\cdot)\|_{L^2(I)} \leq \frac{\Lambda}{1-L},$$

unde L este definit în relaţia (2.77) şi

$$\Lambda = \Lambda_1(\lambda, \overline{\lambda}) \sqrt{\int_a^\infty \left(\int_a^t k_1(s,t)ds \right)^2 dt} +$$

$$+\Lambda_2(\lambda, \overline{\lambda}) \sqrt{\int_a^\infty \left(\int_a^\infty k_2(s,t) \right)^2 dt}.$$

Această inegalitate implică continuitatea operatorului S.

Dacă au loc condiţiile I.b') şi I.c'), atunci putem folosi technica operatorilor Picard pe fibre pentru a studia diferenţiabilitatea operatorului S. Considerăm spaţiile $V = W = L^2(I)$ şi operatorii $B : V \to V$, $C : V \times W \to W$ definiţi prin relaţiile

$$B[v](t) = f(t) + \int_a^t K_1(t,s,\lambda,y(s))ds + \int_a^\infty K_2(t,s,\lambda,y(s))ds$$

şi

$$C[(v,w)](t) = \int_a^t \frac{\partial K_1(t,s,v(s);\lambda)}{\partial \lambda} ds + \int_a^\infty \frac{\partial K_2(t,s,v(s);\lambda)}{\partial \lambda} ds +$$

$$+ \int_a^t \frac{\partial K_1(t,s,v(s);\lambda)}{\partial v} w(s)ds + \int_a^\infty \frac{\partial K_2(t,s,v(s);\lambda)}{\partial v} w(s)ds.$$

Datorită condiţiilor date operatorul B este un operator Picard (condiţia I.b') implică condiţia III.) şi operatorul C satisface condiţia

$$\|C[(v,w_1)] - C[(v,w_2)]\|_{L^2(I)} \leq L_1 \|w_1 - w_2\|_{L^2(I)},$$

unde $L_1 = \sqrt{\int_a^\infty \int_a^t (k_1(t,s) + k_2(t,s))^2 ds dt + \int_a^\infty \int_t^\infty k_2^2(t,s) ds dt}$. Conform teoremei 5.1 operatorul triunghiular $A[v,w] = (B[v], C[v,w])$ este un operator Picard şi astfel şirul aproximaţiilor succesive $(y_{n+1}, z_{n+1}) = A[y_n, z_n]$ converge în $L^2(I)$ la unicul punct fix. Dacă alegem ca punct de pornire o funcţie $y_0(\cdot, \lambda)$ de clasă C^1 în ultima variabilă, şi $z_0 = \frac{\partial y_0}{\partial \lambda}$, atunci conform condiţiilor vom avea $z_n = \frac{\partial y_n}{\partial \lambda}$. Pe de altă parte operatorii $S_n : [\lambda_1, \lambda_2] \to L^2(I)$ definiţi prin $S_n(\lambda)(t) = y_n(t, \lambda)$, $\forall t \in I$, $\forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ sunt diferenţiabili şi diferenţiala lui S_n în punctul λ este chiar z_n. Astfel putem aplica teorema 1.1 şi rezultă diferenţiabilitatea operatorului S. ∎

OBSERVAŢIA 2.1.

1. *În cazul ecuaţiilor de tip Hammerstein condiţia I.c) (respectiv I.c')) devine mai simplă, prin garantarea unei mărginiri apriori.*
2. *În mod analog se poate trata şi ecuaţia 4.60 şi toate teoremele din acest capitol pot fi extinse şi pentru studiul soluţiilor în* $L^p[a,b]$ *cu* $p > 1$.

Bibliografie

[1] J.J. ABDUL, *Linear difference equations with discrete transform methods.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.

[2] R.P. AGARWAL şi D O'REGAN, Fixed point theory for contraction on spaces with two metrics. *Journal Math. Anal. and Appl.*, 248(2000):402–414.

[3] R.P. AGARWAL, *Difference equations and inequalities*, Marcel Dekker Inc., New York, 1992.

[4] R.P. AGARWAL, M. MEEHAN şi D. O'REGAN, *Fixed point theory and applications*, Cambridge University Press, 2001.

[5] R.P. AGARWAL şi D. O'REGAN, *Infinite interval problems for differential, difference and integral equations*, Kluwer Academic Publishers, 2001.

[6] A. AMBROSETTI, *Variational methods and nonlinear problems: classical results and recent advances, Topological Nonlinear Analysis.* Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1995.

[7] SZ. ANDRÁS, Data dependence of solution for Fredholm-Volterra equations in $L^2[a,b]$–în curs de apariţie

[8] SZ. ANDRÁS, Fredholm-Volterra equations, *PU.M.A.*, 13(2002):1-2, 21–30.

[9] SZ. ANDRÁS, Gronwall type inequalities via subconvex sequences, *Seminar on Fixed Point Theory*, 3(2002), 183–189.

[10] SZ. ANDRÁS, Fiber Picard operators and convex contractions, *Seminar on Fixed Point Theory*, 4(2003):2, 209–217.

[11] SZ. ANDRÁS, Fiber φ -contractions on generalized metric spaces and application, *Mathematica*, 45(68)(2003):1, 3-8. Cluj Napoca.

[12] SZ. ANDRÁS, A note on Perov's fixed point theorem, *Seminar on Fixed Point Theory*, 4(2003):1, 105–108.

[13] SZ. ANDRÁS, Subconvex sequences and the Banach contraction principle, *Revue D'Analyse Numerique et de Theorie de l'Approximation*, 2003, Cluj Napoca.

[14] SZ. ANDRÁS, Weakly singular Volterra and Fredholm-Volterra integral equations, *Studia Univ. "Babes-Bolyai", Mathematica*, XLVIII(2003):3, 147–155.

[15] P.M. ANSELONE, *Nonlinear integral equations*, The University of Wisconsin Press, 1964.

[16] K.I. ARGYROS, Quadratic equations and applications to Chandrasekhar's and related equations, *Bull. Austral. Math. Soc*, 32(1985), 275–292.

[17] K.I. ARGYROS, On a class of nonlinear integral equations arising in neutron transport, *Aequationes Mathematical*, 36(1988), 99–111.

[18] I. BANDS şi M. LECKO Existence theorems for some quadratic integral equations, *Journal of Math. Anal. and Appl.*, 222(1998):1, 276–285.

[19] A. BEGE, *Teoria discretă a punctului fix şi aplicaţii*, Presa Universitară Clujeană, 2002.

[20] V. BERINDE, *Contracţii generalizate şi aplicaţii*, Cub Press 22, 1997.

[21] I. BIHARI, Notes on a nonlinear integral equation, *Studia Sci. Math. Hungar*, 2(1967):1-2, 1–6.

[22] J.C.F TELLES, L.C. WROBEL şi C.A. BREBBIA, *Boundary element techniques*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1984.

[23] H. BREZIS, *Analyse fonctionelle, théorie et applications*, Masson, Paris-Milan-Barcelone-Bonn, 1992.

[24] D. BĂRBOSU şi M. ANDRONACHE, Asupra convergenţei şirurilor subconvexe, *Gazeta Matematică*, 102(1997):1, 3–4.

[25] A. BUICĂ, *Principii de coincidenţă şi aplicaţii*, Presa Universitară Clujeană, 2001.

[26] A. BUICĂ, Gronwall-type nonlinear integral inequalities, *Mathematica (Cluj)*, 44, 2002, în curs de apariţie.

[27] T.A. BURTON, *Volterra integral and differential equations*, Academic Press, New York, 1983.

[28] I.W. BUSBRIDGE, On the H-function of Chandrasekhar, *Quart. J. Math. Oxford*, 8(1957), 133–140.

[29] I.W BUSBRIDGE, On solution of Chandrasekhar's integral equation, *Transactions AMS*, 105(1962), 112–117.

[30] A. CHAKRABARTI şi G. VAN DEN BERGE Numerical solution of singular integral equations, Technical report, Elsevier Preprint, 2002.

[31] L.B. ĆIRIĆ, On common fixed points in uniform spaces, *Publ. Inst. Math.*, 24(38)(1978):1, 39–43.

[32] GH. COMAN, *Analiza numerică*, Editura LIBRIS, 1995.

[33] C. CORDUNEANU, *Integral equations and stability of feedback systems*, Academic Press, New York, 1973.

[34] C. CORDUNEANU, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale*, Universitatea Iaşi, 1974.

[35] C. CORDUNEANU, *Integral equations and applications*, Cambridge University Press, New York, 1991.

[36] V. DÂRZU, Wheeler-Feynman problem on a compact interval, *Fixed Point Theory, Cluj-Napoca*, 3(2002):2, 398–392.

[37] V. DÂRZU, Functional differential equation of mixed type, via weakly Picard operators, *Proc. 6th Conf. of the Romanian Math. Soc.*, pages 276–284, 2003.

[38] K. DEIMLING, *Nonlinear functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1985.

[39] G. DEZSŐ, *Ecuaţii hiperbolice cu argument modificat*, Presa Universitară Clujeană, 2003.

[40] S.S. DRAGOMIR, Some Gronwall type inequalities and applications, Technical report, Victoria University of Technology, 2002.

[41] A. GRANAS şi J. DUGUNDJI, *Fixed point theory*, Monografie Matematyczne, PWN, Warsaw, 1982.

[42] R. ESTRADA şi R.P. KANWAL *Singular integral equations*, Birkhauser, 2000.

[43] C.I. GHEORGHIU, *A constructive introduction to finite element method*, Quo Vadis, Cluj-Napoca, 1999.

[44] V. GORENFLO şi V. VESSELLA *Abel integral equation*, Springer-Verlag, 1991.

[45] D. GUO, Solutions of nonlinear integrodifferential equations of mixed type in Banach spaces, *Journal of Applied Mathematics and Simulation*, 2(1989):1, 1–11.

[46] L. HACIA, On approximate solution of integral equations of the Fredholm-Volterra type, *FASC. MATH.*, 7(1973), 45–51.

[47] L. HACIA, On solving of Fredholm-Volterra equations, *Fasc. Math.*, 13(1981), 21–30.

[48] L. HACIA, On certain applications of Fredholm-Volterra integral equations, *FASC. MATH.*, 14(1985), 16–26.

[49] L. HACIA, On approximate solution for integral equations of mixed type, *Zeit. Ang. Math. Mech.*, 76(1996):1, 415–416.

[50] L. HACIA, Numerical methods for mixed integral equations, *Proc. of the 5th Hellenic European Research on Computer Mathematics and its Applications*, pages 137–142, 2001.

[51] L. HACIA, Computational methods for linear Volterra-Fredholm integral equations, *Comput. Meth. SC. Techn.*, 2(2002):8.

[52] L. HACIA, A reliable treatment for mixed Volterra-Fredholm integral equations, *Applied Mathematics and Computation*, 127(2002), 405–414.

[53] M. HADIZADEH, Posteriori error estimates for nonlinear Volterra-Fredholm integral equations, *Computers Math. Applic.*, 45(2003):4-5, 677–687.

[54] V. LAKSHMIKANTHAM şi S. HEIKKILÄ, *Monotone iterative techniques for discontinuous nonlinear differential equations*, Marcel Dekker, New York, 1994.

[55] M.V. HIRSCH şi C.C. PUGH, Stable manifolds and hyperbolic sets, *Proc. Symp. in Puer Math.*, 14(1970), 133–163.

[56] D.V. IONESCU, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1972.

[57] V. ISTRĂŢESCU, Fixed point theorems for convex contraction mappings and convex nonexpansive mappings, *Libertas Mathematica*, I.(1981), 151–165.

[58] F. IZSÁK, An existence theorem for Volterra integrodifferential equations with infinite delay, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2003, Nr. 4., 1-9.

[59] T. JANKOWSKI, Delay integro-differential equations of mixed type in Banach spaces, *Glasnik Matematički*, 37(57)(2002), 321–330.

[60] R. KANNAN, Some results on fixed points, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 10(1968), 71–76.

[61] L. AKILOV şi G. KANTOROVITCH, *Analyse fonctionelle*, Mir Publishers, Moscow, 1981,

[62] M.A. KRASNOSELSKII, *Positive solutions of operator equations*, P. Noordhoff, Groningen, 1964.

[63] M.A. KRASNOSELSKII, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, Pergamon Press, Oxford-London-New York-Paris, 1964.

[64] M. KWAPISZ şi J. TURO, On the existence and convergence of succesive approximations for some functional equations in Banach spaces, *J. Differential Equations*, 16(1974):2, 298–318.

[65] M. KWAPISZ şi J. TURO, Some integral-functional equations, *Funkcialaj Ekvacioj*, 18(1975):2, 107–162.

[66] D. GUO şi V. LAKSHMIKANTHAM, *Nonlinear problems in abstract cones*, Academic Press, Boston, 1988.

[67] D. GUO, X. LIU şi V. LAKSHMIKANTHAM, *Nonlinear integral equations in abstract spaces*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1996.

[68] J. van de LUNE, Proposed problem, Nieuw Archief voor Wiskunde.

[69] M.G. MAIA, Un'osservazione sulle contrazioni metriche, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 40(1968), 139–143.

[70] J. MALLET-PARET, The Fredholm alternative for functional differential equations of mixed type, *J. Dynam. Diff. Eq.*, 11(1999):1, 1–46.

[71] V.M. MAMEDOV şi Ja.D. MUSAEV, On the theory of solutions of nonlinear operator equations, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 195(1970):1, 1420–1424.

[72] J.E. McFARLAND, An iterative solution of the quadratic equation in Banach space, *Proceedings AMS*, 12(1958), 824–830.

[73] M. MEEHAN şi D. O'REGAN, Positive L^p solutions of Hammerstein integral equations, Arch. Math. 76(2001):5, 366–376.

[74] M. MEEHAN şi D. O'REGAN *Existence theory for nonlinear integral and integrodifferential equations*, Kluwer Academic Publishers, 1998.

[75] GH. MICULA şi S. MICULA, *Handbook of splines*, Kluwer Academic Publishers, 1998.

[76] J.A. WONG, J.S.W MILLER şi R.K. NOHEL, A stability theorem for nonlinear mixed integral equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 25(1969):2, 446–449.

[77] V. RĂDULESCU şi D. MOTREANU, *Variational and non-variational methods in nonlinear analysis and boundary value problems*, Kluwer Academic Publishers, Boston-Dordrecht-London, 2002.

[78] I. NAROŞI, A remark on Fredholm-Volterra integral equations, *Preprint*, 1986, Nr. 3, 259–260. Universitatea Babeş-Bolyai.

[79] R. PRECUP şi D. O'REGAN, *Theorems of Leray-Schauder type and applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 2001.

[80] B.G. PACHPATTE, On the existence and uniqueness of solutions of Volterra-Fredholm integral equations, *Mathematics Seminar Notes*, 10(1982):733–742.

[81] B.G. PACHPATTE, On the discrete generalizations of Gronwall's inequality, *J. Indian Math. Soc.*, 37(1987), 147–156.

[82] B.G. PACHPATTE, On a new inequality suggested by the study of certain epidemic models, *Journal of Math. Anal. and Appl.*, 195(1995), 638–644.

[83] B.G. PACHPATTE, Inequalities arising in the theory of differential and difference equations, *Octogon Math. Mag.*, 6(1998):2, 36–42.

[84] L. PANAITOPOL şi I.C. DRĂGHICESCU *Polinoame şi ecuaţii algebrice*, Editura Albatros, 1980.

[85] S. SBURLAN şi D. PASCALI, *Nonlinear mappings of monotone type*, Editura Academiei, Bucureşti, Sijthoff & Nordhoff International Publishers Alphen aan den Rijn, 1978.

[86] D. TRIF şi T. PETRILĂ, *Metode numerice şi computaţionale în dinamica fluidelor*, Digital Data Cluj, 2002.

[87] A. PETRUŞEL, Fredholm-Volterra integral equations and Maia's theorem, *Preprint*, 1988, Nr. 3., 79–82. Universitatea Babeş-Bolyai.

[88] W POGORZEKLSKI, *Integral equations and their applications*, Pergamon Press, 1966.

[89] R. PRECUP, *Ecuaţii integrale neliniare*, Cluj Napoca, 1993.

[90] R. PRECUP, Existence and approximation of positive fixed points of non-expansive maps, *Rev.Anal.Numer.Theor.Approx*, 26(1997), 203–208.

[91] R. PRECUP, *Methods in nonlinear integral equations*, Kluwer Academic Publishers, 2002.

[92] S. SILBERMANN şi B. PRÖSSDORF, *Numerical analysis for integral and related operator equations*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1991.

[93] L.B. RALL, Quadratic equations in Banach space, *Rend. Circ. math. Palermo*, 10(1961), 314–332.

[94] S. REICH, Remarks on fixed points, *Rend. Acad. Naz. Lincei*, 52(1972), 689–697.

[95] B.E. RHOADES, A comparison of various definitons of contractive mappings, *Transactions AMS*, 226(1977), 257–290.

[96] D.K. RUCK şi P.J. Van FLEET On multipower equations: Some iterative solutions and applications, *Journal for Analysis and its Applications*, 15(1996):1, 201–222.

[97] IOAN. A. RUS, An abstract point of view for some integral equations from applied mathematics, *Proceed. Int. conf., Timişoara*, 1997, 256–270.

[98] IOAN A. RUS, *Principii de punct fix şi aplicaţii*, Editura Dacia, Cluj Napoca, 1979.

[99] IOAN A. RUS, Weakly Picard mappings, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 34(1993):4, 769–773.

[100] IOAN A. RUS, *Ecuaţii diferenţiale, ecuaţii integrale şi sisteme dinamice*, Transilvania Press, 1996.

[101] IOAN A. RUS, Picard operators and applications, Technical report, Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, 1996. Preprint Nr. 3.

[102] IOAN A. RUS, Fiber Picard operators and applications, *Mathematica*, 1999. Cluj Napoca.

[103] IOAN A. RUS, Fiber Picard operators on generalized metric spaces and application, *Scripta Scientenarum Mathematicarum*, 1(1999):2, 355–363.

[104] IOAN A. RUS, Who authored the first integral equations book in the world, *Seminar on Fixed Point Theory*, 1(2000):1-4, 81–86.

[105] IOAN A. RUS, *Generalized contractions*, Cluj University Press, 2001.

[106] IOAN A. RUS, Picard operators and applications, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 58(2003):1, 191–219.

[107] IOAN A. RUS şi S. MUREŞAN, Data dependence of the fixed point set of weakly Picard operators, *Studia Univ. Babeş-Bolyai*, 43(1998):1, 79–83.

[108] A. RUSTICHINI, Functional differential equations of mixed type: The linear autonomous case, *J. Dynam. Diff. Eq.*, 1(1989):2, 121–143.

[109] L.S. SCHULMAN, Some differential difference equations containing advance and retardation, *J. Math. Phys.*, 15(1974):2, 195–198.

[110] M.A. ŞERBAN, Data dependence of the fixed point set of triangular operators, în curs de publicare.

[111] M.A. ŞERBAN, Fiber $\varphi-$contractions, *Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica*, 44(1999):3, 99–108.

[112] M.A. ŞERBAN, *Teoria punctului fix pentru operatori definiţi pe produs cartezian*, PhD thesis, Universitatea Babeş-Bolyai, 2000.

[113] S.M. ŞOLTUZ, Upon the convergence of subconvex sequences, *Octogon Mathematical Magazine*, 6(1998):2, 120–121.

[114] H.M. SRIVASTAVA şi R.G. BUSCHMAN *Theory and applications of convolution integral equations*, Kluwer Academic Publishers, 1992.

[115] J. STOER şi R. BULIRSCH *Introduction to numerical analysis*, Springer, New York, 1992.

[116] M.R. TASCOVIĆ, Monotonic mappings on ordered sets, a class of inequalities with finite differences and fixed points, *Publ. Inst. Math. NS*, 17(31)(1974), 163–172.

[117] J.I. WU şi G. YANG On discrete Gronwall's inequalities, *Tamkang Journal of mathematics*, 12(1981):2, 161–170.

[118] K. YOSIDA, *Functional Analysis*, Springer Verlag, 1965.

[119] A. ZAFER, Applications of the Langenhop inequality to difference equations: lower bounds and oscillations, *Applied Mathematics E-notes*, 3(2003), 80–87.

[120] E. ZEIDLER, *Nonlinear functional analysis and its applications*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1986.

[121] M. ZIMA, The abstract Gronwall lemma for some nonlinear operators, *Demonstratio Math.*, 31(1998), 325–332.

[122] A.R. ZOKAYI şi M. HADIZADEH, On the Volterra-Fredholm integral equations of mixed type with exponential nonlinearity, *Italian J. Pure and Appl. Math.*

Indice tematic

Indice de autori