András Szilárd　　　　Mureşan Marian

Matematikai analízis és alkalmazásai

Editura Didactică şi Pedagogică

Bucureşti, 2005

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României

ANDRÁS SZILÁRD, MARIAN MUREŞAN
Matematikai analízis és alkalmazásai/ András Szilárd,
Marian Mureşan
Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică, 2005
p. 370; cm. 24
ISBN 973-30-1833-3

517(075.8)

Tiparul executat sub comanda nr. 52/2005
la Imprimeria Status, Miercurea-Ciuc
http://www.status.com.ro/

A munka a láthatóvá tett szeretet.
Kahil Gibran

Diákjainknak,
akik lehetővé teszik, hogy
észleljünk, érezzünk és
lássunk ...
olyat is, amire magunktól
képtelenek vagyunk

Oamenii muncesc în general
prea mult pentru a mai putea fi
ei înşişi.
Emil Cioran

Előszó

Jegyzetünk elsődleges célja bepillantást nyújtani a matematikai analízis eszköztárába, különös tekintettel egyes eszközök más területeken való alkalmazására. Igyekszünk rávilágítani néhány olyan alkalmazásra, amely nemcsak matematikusoknak lehet szükséges, hanem fizikusok, informatikusok, közgazdászok munkája során is nélkülözhetetlen, különösen ha felhasználó szintnél mélyebben is érteni szeretnék állandóan változó szakmájukat. Szeretnénk figyelmeztetni azokat, akik a matematikát fölösleges tehernek tekintik, hogy a matematika nagyon sok ága fejlődött ki gyakorlati problémák tanulmányozásából, illetve megoldásából, és így majdnem minden tudományterületen találkozhatunk olyan problémával, amelynek nemcsak a megoldása de már a megértése is komoly matematikai alapokat igényel. A kételkedőknek ajánljuk, hogy alaposan tájékozódjanak mielőtt döntéseket hoznak a kiugrott anyagrészeket illetően. Informatikusoknak érdemes elolvasni D. Knuth alapvető munkáját ([44]), illetve a Konkrét Matematika alapkönyvét ([31]). Fizikusoknak és biológusoknak csak egy-egy kérdést teszünk fel:

> Miért nem lehet tetszőleges egy gőzgép centrifugális regulátorának a tengellyel bezárt szöge, avagy miért volt művészet egy gőzmozdony elvezetése? (lásd [60])
>
> Miért van az, hogy két X kromoszóma jelenléte bizonyos betegségek (például hemofília vagy Daltonizmus) előfordulási arányát megsokszorozza? (lásd [39])

A megfogalmazott problémák sokaságának és a matematika belső fejlődésigényének következtében matematikai látóhatárunk és tudásbázisunk egyre tágul, sőt a gyarapodás sebessége egyre fokozódik. Másrészt a különböző tudományágak matematikai szükséglete állandóan változik, és ugyanakkor az elsajátításra fordítható idő rohamosan csökken. Így hát akár egy pillanatnyi válasz megtalálása sem egyszerű feladat az örökös „Kinek, mit és hogyan tanítsunk?" tanári dillemára. Úgy gondoljuk, hogy egy tanár és diák által egyaránt használható jegyzet összeállítása bonyolult feladat és többbrendbeli visszacsatolást igényel, ezért jegyzetünket kisérleti jellegűnek tekintjük és felkérünk minden olvasót, hogy megjegyzéseit, kiegészítéseit hozza tudomásunkra.

Végezetül szeretnénk köszönetet mondani Zsombori Gabriellának, aki fáradtságot nem kimélve végigolvasta a kéziratot, és így sikerült sok hibát kiküszöbölnünk.

A szükséges előismeretek elsajátítása céljából ajánljuk a középiskolai tankönyveinket (lásd [2],[3],[4],[5]) és a további, alaposabb tanulmányozás céljából a következő munkákat: [10], [16], [21], [22], [26], [33], [34], [47], [50], [51], [52], [59], [62], [67].

Tartalom

Előszó v

1. Halmazok **1**

1.1 Halmazok 1

1.1.1 A halmaz fogalma 1

1.1.2 Műveletek halmazokkal 3

1.1.3 Relációk és függvények 7

1.1.4 Gyakorlatok 12

1.2 Számhalmazok 14

1.2.1 Egy példa 14

1.2.2 A valós számhalmaz 15

1.2.3 Algebrai tulajdonságok 22

1.2.4 Topológiai tulajdonságok 28

1.2.5 A valós számok halmazának lezárása 34

1.3 Gyakorlatok és feladatok 35

2. Normált terek és metrikus terek **49**

2.1 Vektorterek 49

2.1.1 Az $\mathbb{R}^k$ vektortér 49

2.1.2 Vektorterek 52

2.1.3 Normált terek 56

2.1.4 Hilbert terek 58

2.1.5 Egyenlőtlenségek 60

2.2 Metrikus terek 64

2.3 Kompakt halmazok 73

3. Sorozatok és sorok **85**

3.1 Számsorozatok 85

3.1.1 Konvergens sorozatok 85

3.1.2 Részsorozatok 88

3.1.3 Cauchy sorozatok 89

3.1.4 Monoton sorozatok 92

3.1.5 Alsó és felső határértékek 97

3.1.6 A Cesaro-Stolz tétel és néhány következménye 99

3.1.7 Néhány ismert sorozat . . . 104
3.1.8 Szubkonvex sorozatok . . . 115
3.2 Függvénysorozatok . . . 120
3.3 Számsorok . . . 123
3.3.1 Nemnegatív tagú sorok . . . 127
3.3.2 Konvergencia kritériumok pozitív tagú sorokra . . . 133
3.3.3 Hatványsorok . . . 137
3.3.4 Abel-féle összegzés . . . 139
3.3.5 Abszolút konvergens és feltételesen konvergens sorok . . . 141
3.3.6 A Riemann-féle $\zeta(s)$ függvény . . . 144
3.3.7 Gyakorlatok . . . 146
3.4 Függvénysorok . . . 147
3.5 Kitűzött feladatok . . . 149

4. Határértékek és folytonosság **153**
4.1 Határértékek . . . 153
4.1.1 Függvényhatárértékek . . . 153
4.1.2 Jobboldali és baloldali határértékek . . . 157
4.2 Folytonosság . . . 158
4.2.1 Folytonosság és kompaktitás . . . 164
4.2.2 Egyenletes folytonosság . . . 166
4.2.3 Folytonosság és összefüggőség . . . 170
4.2.4 Szakadási pontok . . . 171
4.2.5 Monoton függvények . . . 171
4.2.6 Sharkovski tétele . . . 175
4.3 Periodikus függvények . . . 192
4.4 Darboux tulajdonságú függvények . . . 193
4.5 Lipschitz tulajdonságú függvények . . . 197
4.6 Konvex függvények . . . 200
4.6.1 Konvex függvények . . . 200
4.6.2 Jensen-konvex függvény . . . 204
4.7 Korlátos változású függvények . . . 205
4.8 Függvénysorozatok határértékének folytonossága . . . 211
4.9 Függvénysorok folytonossága . . . 213
4.10 Kitűzött feladatok . . . 213

5. Differenciálszámítás $\mathbb{R}$-en **217**
5.1 Valós függvény deriváltja . . . 217
5.2 Középértéktételek . . . 222
5.2.1 A középértéktételek következményei . . . 228
5.3 Darboux tétele . . . 233
5.4 L'Hospital tétele . . . 233
5.5 Magasabb rendű deriváltak . . . 235

5.6 Konvex függvények és deriválhatóság . . . 239
5.6.1 Egyenlőtlenségek . . . 242
5.7 Függvénysorozatok és függvénysorok differenciálhatósága . . . 244
5.8 Hatványsorok és Taylor-féle sorbafejtés . . . 245
5.8.1 Műveletek hatványsorokkal . . . 248
5.8.2 Néhány elemi függvény Taylor sora . . . 251
5.9 Primitiválható függvények . . . 254
5.9.1 A primitív függvény fogalma . . . 254
5.9.2 Folytonos függvények primitiválhatósága . . . 256
5.9.3 Primitiválható függvényekkel végzett műveletek . . . 258
5.9.4 Gyakorlatok . . . 260
5.10 Kitűzött feladatok . . . 264

6. Integrálszámítás **267**
6.1 A Darboux integrál . . . 267
6.2 Függvénysorok integrálhatósága . . . 276
6.3 Improprius integrálok . . . 277
6.4 Paramétertől függő integrálok . . . 283
6.4.1 A gamma függvény . . . 283
6.5 Az e és a π transzcendens . . . 285
6.6 A Grönwall egyenlőtlenség . . . 289
6.7 Kitűzött feladatok . . . 291

7. Differenciálszámítás $\mathbb{R}^n$-ben **295**
6.1 Lineáris és korlátos leképezések . . . 295
6.1.1 Bilineáris és kvadratikus leképezések . . . 298
6.1.2 Kvadratikus alakok . . . 300
6.2 Differenciálható függvények . . . 301
6.2.1 Variációk . . . 301
6.2.2 A Gâteaux differenciál . . . 303
6.2.3 A Fréchet differenciál . . . 304
6.3 Parciális deriváltak . . . 310
6.3.1 Az inverz függvény és az implicit függvény tétele . . . 313
6.3.2 Iránymenti deriváltak és a gradiens . . . 314
6.4 Magasabbrendű differenciálok és parciális deriváltak . . . 315
6.4.1 Az $X = \mathbb{R}^n$ eset . . . 315
6.5 A Taylor-féle képlet . . . 317
6.6 Lokális szélsőértékek . . . 318
6.6.1 Szükséges feltételek . . . 318
6.6.2 Másodrendű feltételek . . . 319
6.6.3 Kötött szélsőértékek . . . 320
6.7 Kitűzött feladatok . . . 323

8. Állandók **327**
8.1 A Pithagorász-féle állandó . . . 327
8.1.1 A $\sqrt{2}$ közelítése . . . 328
8.2 Az Arkhimédesz-féle állandó . . . 329
8.2.1 A π közelítése . . . 329
8.2.2 A Buffon-féle probléma . . . 331
8.2.3 A π n-edik számjegyének kiszámítása . . . 331
8.3 A számtani-mértani közép . . . 331
8.4 Az e szám . . . 332
8.5 $\ln 2$ . . . 335
8.6 Az optimális megállás problémája . . . 336
8.7 Általánosított Fubini számok . . . 337

Szakirodalom . . . 343
Szimbólumok . . . 349
Névmutató . . . 351
Tárgymutató . . . 353

1. Fejezet

Halmazok

Felfedezni valamit annyit jelent,
mint látni azt, amit mindenki lát,
csak éppen mást gondolni róla,
mint amit bárki más eddig gondolt róla.
Szentgyörgyi Albert

Ennek a fejezetnek a célja néhány halmazokra vonatkozó alaptulajdonság felsorolása. A legtöbb bizonyítást mellőzzük és egyáltalán nem foglalkozunk a halmazelmélet axiomatikus felépítésével.

1.1 Halmazok

1.1.1 A halmaz fogalma

A halmazelmélet majdnem minden alapvető fogalmát és tételét G. Cantor [1] fedezte fel, a végtelen halmazok összehasonlításából kiindulva. Eredményei forradalmi változásokat idéztek elő a matematika minden területén. Így a matematikai analízis szabatos megalapozása sem lehetséges a halmazelmélet nélkül. Mi csak a jelenségek megértéséhez szükséges tulajdonságokat tárgyaljuk, részletesebb és teljesebb tárgyalást találhatunk a [32] és [66] könyvekben.

A halmaz intuitív fogalmát ismertnek tételezzük fel. Azt mondjuk, hogy egy *halmaz* (*gyűjtemény, osztály, család*) egyértelműen azonosítható objektumok együttese, gyűjteménye.

Egy halmazt az *elemei* segítségével értelmezünk. A halmazelmélet axiomatikus felépítése az „eleme" (vagy „hozzátartozik") alapfogalomra épül ([41]).

Mi a teljes elmélet felépítése helyett inkább az intuícióra és az elemi logikára (mondhatni „józan észre") épülő „naiv" halmazelméletet fogjuk használni (lásd [33]).

Elfogadjuk az alábbi egyezményes jelöléseket. Halmazok elemeit kisbetűkkel jelöljük: $a,\ b,\ c,\ \ldots,\ x,\ y,\ z,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots.$ A halmazokat nagy nyomtatott

[1] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, 1845-1918

betűkkel jelöljük: $A,\ B,\ C,\ \ldots X,\ Y,\ \ldots$. A halmazcsaládokat nagy írott betűkkel jelöljük: $\mathcal{A},\ \mathcal{B},\ \mathcal{C},\ \ldots$.

Egy halmazt leggyakrabban az elemei valamilyen jellemző tulajdonságával értelmezünk. Ha $P(x)$ egy kijelentés, akkor azoknak az x elemeknek a halmazát, amelyekre $P(x)$ igaz, az $\{x \mid P(x)\}$ szimbólummal jelöljük (olvasd: azon x elemek, amelyekre $P(x)$ igaz).

Annak jelölésére, hogy az x objektum *eleme* az A halmaznak, az $x \in A$ szimbólumot használjuk, míg az $x \notin A$ szimbólummal azt jelöljük, hogy x *nem eleme* az A halmaznak (x *nem tartozik hozzá* az A halmazhoz).

Az $\emptyset$ jel azt a halmazt jelöli, amelynek nincs egyetlen eleme sem, ezt *üres* halmaznak nevezzük.

Egy tetszőleges x objektum esetén $\{x\}$ azt a halmazt jelöli, amelynek egyetlen eleme az x. Így $x \in \{x\}$, de $x \neq \{x\}$. Ehhez hasonlóan az $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ jelölés azt a halmazt jelöli, amelynek elemei pontosan $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$. Megjegyezzük, hogy egy halmaz elemeinek felsorolásakor minden elemet csak egyszer említünk, tehát például $\{x, x\} = \{x\}$. Ha az elemekhez többszörösségi mutatót is rendelünk, akkor már elemrendszerről beszélünk és nem halmazról (erre érdemes odafigyelni, mert egy n-ed fokú $Q \in \mathbb{R}[X]$ polinom gyökeinek összege többszörös gyökök esetén nem ugyanaz, mint az $\{x \mid Q(x) = 0\}$ halmaz elemeinek összege stb.).

1.1. Példák. Az alábbiakban felsorolunk néhány halmazt:

(a) a természetes számok halmaza $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$;[2]

(b) az egész számok halmaza $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$;

(c) a pozitív egész számok halmaza $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$;

(d) a racionális számok halmaza $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\right\}$,[3] itt a $\frac{p}{q}$ törtnek p a *számlálója* és q a *nevezője*;

(e) a 7-nél kisebb pozitív egészek halmaza ($\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$);

(f) az öt milliónál több lakossal rendelkező romániai városok halmaza ($\emptyset$);

(g) az angol ábécé magánhangzóinak S halmaza (látható, hogy az $S = \{a, e, i, o, u\}$ és $S = \{x \mid x \text{ magánhangzó az angol nyelvben}\}$ megadási módokkal ugyanazt a halmazt értelmeztük). $\triangle$

Ha A és B két halmaz és az A minden eleme a B-nek is eleme, akkor azt mondjuk, hogy az A *részhalmaza* a B-nek. Ezt az $A \subset B$ vagy $B \supset A$ szimbólummal

[2] A természetes számhalmaz axiomatikus felépítése sok könyvben megtalálható, lásd például [61, 1. Fejezet].

[3] A természetes, egész és racionális számhalmaz egy axiomatikus tárgyalása megtalálható [53, I.§2-§4]-ben.

jelöljük. Ha $A \subset B$ és $B \subset A$, akkor a két halmazt egymással egyenlőnek nevezzük és ezt az $A = B$ jelöléssel fejezzük ki. Az $A \neq B$ szimbólumot az $A = B$ tagadásaként használjuk. Ha $A \subset B$ és $A \neq B$, akkor az A halmazt a B *valódi részhalmazának* nevezzük, és ezt az $A \subsetneq B$ szimbólummal jelöljük.

Világos, hogy ha A nem részhalmaza B-nek, akkor létezik olyan x, amelyre $x \in A$ és $x \notin B$.

Megjegyezzük, hogy az előbb bevezetett halmazegyenlőség alapján az üreshalmaz egyértelmű (ha $\emptyset_1$ és $\emptyset_2$ két üres halmaz, akkor $\emptyset_1 \subset \emptyset_2$ és $\emptyset_2 \subset \emptyset_1$, tehát $\emptyset_1 = \emptyset_2$).

Ha A egy halmaz, akkor $\mathcal{P}(A)$ az A halmaz részhalmazainak halmazát jelöli. Így $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ és $A = \{1, 2\}$ esetén $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

1.1.2 Műveletek halmazokkal

Jelöljön A és B két halmazt. Azoknak az elemeknek a halmazát, amelyek a két halmaz közül legalább az egyikhez hozzátartoznak, a két halmaz *egyesítésének* nevezzük és az $A \cup B$ szimbólummal jelöljük (lásd az 1.1. ábrát). Értelmezés alapján

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}.$$

Ha $\mathcal{A}$ egy halmazcsalád, akkor a halmazcsalád egyesítése az

$$\cup\mathcal{A} = \{x \mid x \in A, \text{ valamely } A \in \mathcal{A} \text{ esetén }\}$$

halmaz. Ha $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ egy I indexhalmaz szerint indexelt halmazcsalád, akkor a halmazcsalád egyesítése az

$$\cup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \mid x \in A_\alpha, \text{ valamely } \alpha \in I \text{ esetén }\}$$

halmaz.

Azoknak az elemeknek a halmazát, amelyek mindkét halmazhoz hozzátartoznak, a két halmaz *metszetének* nevezzük és $A \cap B$-vel jelöljük (lásd az 1.2. ábrát). Pontosabban

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}.$$

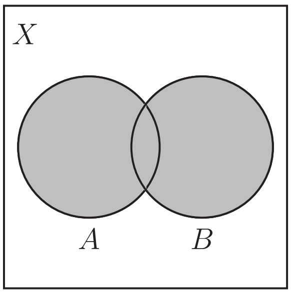
A $\mathcal{A}$ halmazcsalád metszetén az

$$\cap\mathcal{A} = \{x \mid x \in A, \text{ minden } A \in \mathcal{A} \text{ esetén }\}$$

halmazt értjük. Ha a halmazcsalád egy I indexhalmaz segítségével értelmezett ($\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$), akkor a metszete a

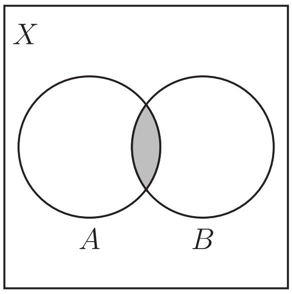
$$\cap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \mid x \in A_\alpha, \text{ minden } \alpha \in I \text{ esetén }\}$$

halmaz.



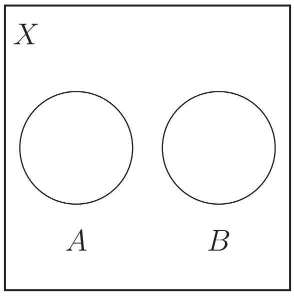
$A \cup B$

1.1. Ábra: Egyesítés



$A \cap B$

1.2. Ábra: Metszet



$A \cap B = \emptyset$

1.3. Ábra: Diszjunkt halmazok

1.1. Tétel. *Ha A, B és C három tetszőleges halmaz, akkor*

(i)	$A \cup B = B \cup A$	(i')	$A \cap B = B \cap A$	*kommutativitás;*
(ii)	$A \cup A = A$	(ii')	$A \cap A = A$	*idempotencia;*
(iii)	$A \cup \emptyset = A$	(iii')	$A \cap \emptyset = \emptyset;$	
(iv)	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	(iv')	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	*asszociativitás;*
(v)	$A \subset A \cup B$	(v')	$A \cap B \subset A;$	
(vi)	$A \subset B \iff A \cup B = B$	(vi')	$A \subset B \iff A \cap B = A.$	

1.2. Tétel. *Ha A, B és C tetszőleges halmazok, akkor*

(i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, *a metszet disztributív az egyesítésre nézve;*

(ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, *az egyesítés disztributív a metszetre nézve.*

1.3. Tétel. *Ha X egy halmaz és $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ egy halmazcsalád, akkor*

(i) $$X \cup (\cup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \cup_{\alpha \in I}(X \cup A_\alpha);$$

(ii) $$X \cap (\cap_{\alpha \in I} A_\alpha) = \cap_{\alpha \in I}(X \cap A_\alpha);$$

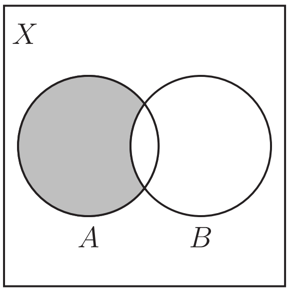
(iii) $$X \cup (\cap_{\alpha \in I} A_\alpha) = \cap_{\alpha \in I}(X \cup A_\alpha);$$

(iv) $$X \cap (\cup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \cup_{\alpha \in I}(X \cap A_\alpha).$$

Az A és B halmazok *diszjunktak*, ha $A \cap B = \emptyset$ (lásd az 1.3. ábrát). Az $\mathcal{A}$ halmazcsaládot *páronként diszjunkt* halmazokból álló halmazcsaládnak nevezzük, ha a halmazcsalád minden halmazpárja diszjunkt. Ha az $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ halmazcsalád egy indexhalmaz segítségével értelmezett, akkor az előbbi feltétel a következőképpen írható: $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$, ha $\alpha, \beta \in I$ és $\alpha \neq \beta$.

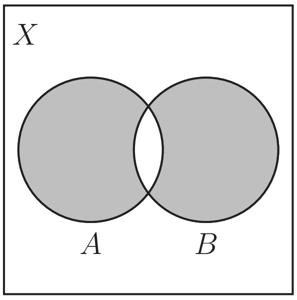
Egy nemüres halmazokból álló $\mathcal{A}$ halmazcsaládot az S halmaz egy *partíciójának* (vagy *osztályfelbontásának*) nevezünk, ha

(i) $S = \cup_{A \in \mathcal{A}} A$;



$A \setminus B$

1.4. Ábra: Különbség



$A \triangle B$

1.5. Ábra: Szimmetrikus különbség

(ii) $\mathcal{A}$ páronként diszjunkt halmazokból áll.

Ha A és B két halmaz, akkor az

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}$$

halmazt az A és B *különbségének* nevezzük (lásd az 1.4. ábrát).

Ha A részhalmaza egy X halmaznak, akkor az $\{x \mid x \in X,\ x \notin A\}$ halmazt az A-nak az X-re vonatkozó *kiegészítő* (vagy *komplementáris*) halmazának nevezzük. Ezt a halmazt a $\complement_X A$ vagy a $\complement A$ szimbólummal jelöljük.

1.1. Tulajdonság. *Ha A az X egy részhalmaza, akkor $\complement_X(\complement_X A) = A$.*

1.4. Tétel. (de Morgan[4] törvényei)

(a) $\complement(A \cup B) = (\complement A) \cap (\complement B)$ *(ha egy elem nincs benne két halmaz egyesítésében, akkor egyik halmazban sincs benne)*

(b) $\complement(A \cap B) = (\complement A) \cup (\complement B)$ *(ha egy elem nincs benne két halmaz metszetében, akkor a kettő közül legalább az egyikhez nem tartozik hozzá)*

(c) $\complement(\cup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \cap_{\alpha \in I} \complement A_\alpha$;

(d) $\complement(\cap_{\alpha \in I} A_\alpha) = \cup_{\alpha \in I} \complement A_\alpha$.

Ha A és B két halmaz, akkor az $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ halmazt $A \triangle B$-vel jelöljük és az A és B *szimmetrikus különbségének* nevezzük (lásd az 1.5. ábrát). Az $A \triangle B$ halmaz pontosan azokat az elemeket tartalmazza, amelyek a két halmaz közül pontosan az egyiknek elemei. A szimmetrikus különbséget az

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

[4] August de Morgan, 1806-1871

összefüggéssel is értelmezhetjük.

Gyakran előfordul, hogy egy halmaz elemeinek sorrendje is fontos. Így például az (x_1, x_2) szimbólumot az x_1 és x_2 elemekből alkotott *rendezett pár* jelölésére használjuk. Ez azt jelenti, hogy x_1 az első elem és x_2 a második. Értelmezés alapján az (x, y) és (u, v) párok pontosan akkor egyenlők egymással, ha $x = u$ és $y = v$.

Ha X és Y két halmaz, akkor az (x, y) rendezett párokból alkotott halmazt, ahol $x \in X$ és $y \in Y$, az X és Y halmazok *Descartes* [5] *féle szorzatának* nevezzük.

Az X és Y halmaz Descartes-szorzatát $X \times Y$-nal jelöljük, tehát

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}.$$

Megjegyzés. $(1, 2) \neq (2, 1)$, de $\{1, 2\} = \{2, 1\}$. $\triangle$

Az X, Y, Z halmazok Descartes szorzatán (ebben a sorrendben) az

$$(X \times Y) \times Z = X \times (Y \times Z) = X \times Y \times Z = \{(x, y, z) \mid x \in X, y \in Y, z \in Z\}.$$

halmazt értjük, és általában

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n\}.$$

Az $X \times X$ helyett gyakran használjuk az X^2 jelölést, illetve általánosan

$$X^n = \underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{n \text{ darab}} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in X,\ i = 1, 2, \dots, n\}.$$

1.2. Tulajdonság. *Ha A, B és C tetszőleges halmazok, akkor*

(a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

(b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;

(c) $C \neq \emptyset \neq D$ *esetén* $C \times D \subset A \times B \iff C \subset A$ *és* $D \subset B$;

(d) $A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset$ *vagy* $B = \emptyset$;

(e) $A \times B = B \times A \iff A = B$.

Egy tetszőleges X véges halmaz elemeinek számát $|X|-$szel jelöljük. Középiskolából ismert, hogy $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ stb.

1.1. Alkalmazás. *Ha egy populációban valamely a betegségben szenvedők körében nagyobb az x szimptóma előfordulási aránya, mint az a-ban nem szenvedők körében, akkor az x szimptómával rendelkezők körében is gyakoribb az a betegség, mint az x szimptómával nem rendelkezők körében.*

[5] René Du Perron Descartes, 1596-1650, latinul Renatus Cartesius

Megoldás. Jelölje A az a betegségben szenvedők halmazát és X az x szimptómával rendelkezők halmazát. A feladatban megadott feltétel a következő egyenlőtlenséggel egyenértékű:

$$\frac{|A \cap X|}{|A|} > \frac{|\overline{A} \cap X|}{|\overline{A}|}.$$

Igazolnunk kell, hogy

$$\frac{|A \cap X|}{|X|} > \frac{|A \cap \overline{X}|}{|\overline{X}|}.$$

Az $|A| = |A \cap X| + |A \cap \overline{X}|$, $|\overline{A}| = |\overline{A} \cap X| + |\overline{A} \cap \overline{X}|$, $|X| = |X \cap A| + |X \cap \overline{A}|$, valamint $|\overline{X}| = |\overline{X} \cap A| + |X \cap \overline{A}|$ összefüggések alapján mindkét egyenlőtlenség egyenértékű a $|A \cap X| \cdot |\overline{A} \cap \overline{X}| > |\overline{A} \cap X| \cdot |A \cap \overline{X}|$ egyenlőtlenséggel, tehát az egyenlőtlenségek egymással is ekvivalensek. ♦

1.1.3 Relációk és függvények

Ha X és Y két halmaz, akkor az $X \times Y$ szorzat egy tetszőleges részhalmazát *bináris relációnak* nevezzük.

Megjegyzés. Tulajdonképpen az (X, Y, R) hármast nevezik bináris relációnak, ahol $R \subset X \times Y$. A továbbiakban reláció alatt általában bináris relációt értünk és csak az R halmaz segítségével hivatkozunk rá. $\triangle$

Ha R egy reláció, akkor a $\mathrm{Dom}R := \{x \mid (x, y) \in R,$ valamely y esetén $\}$ halmazt az R *doméniumának* nevezzük és a $\mathrm{Range}R := \{y \mid (x, y) \in R,$ valamely x esetén$\}$ halmazt az R *(kép)tartományának*. Az R^{-1} szimbólumot az R *inverzének* jelölésére használjuk. Pontosabban $R^{-1} := \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$.

Ha R és Q két reláció, akkor a *szorzatukon* (*összetevésükön*) a

$$Q \circ R := \{(x, z) \mid \text{ létezik } y \text{ úgy, hogy } (x, y) \in R \text{ és } (y, z) \in Q\}$$

relációt értjük. Az R és Q relációk szorzata lehet üres halmaz is, ha az R és Q tartománya illetve doméniuma nem metszik egymást.

$$Q \circ R \neq \emptyset \iff (\mathrm{Range}R) \cap (\mathrm{Dom}Q) \neq \emptyset.$$

1.3. Tulajdonság. *Ha R, Q és S relációk, A és B halmazok, akkor*

(i)	$(R^{-1})^{-1} = R$	(ii)	$(R \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ R^{-1}$;
(iii)	$R \circ (Q \circ S) = (R \circ Q) \circ S$	(iv)	$(R \circ Q)(A) = R(Q(A))$;
(v)	$R(A \cup B) = R(A) \cup R(B)$	(vi)	$R(A \cap B) \subset R(A) \cap R(B)$.

Egy tetszőleges X halmazon értelemezett $\sim\, \subset X \times X$ relációt *ekvivalencia relációnak* nevezünk, ha tetszőleges $x, y, z \in X$ esetén teljesülnek a következő tulajdonságok:

(i) $x \sim x$ (reflexív);

(ii) ha $x \sim y$, akkor $y \sim x$ (szimmetrikus);

(iii) ha $x \sim y$ és $y \sim z$, akkor $x \sim z$ (tranzitív).

1.2. Példák

(a) Az egyenlőség („$=$”) egy ekvivalencia reláció a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmazán.

(b) Rögzítsünk egy tetszőleges n természetes számot, és értelmezzük az egész számok halmazán a következő relációt: Az $a, b \in \mathbb{Z}$ számokról azt mondjuk, hogy „*a azonos (kongruens) b-vel modulo n*”, ha létezik olyan $k \in \mathbb{Z}$, amelyre $a - b = kn$. Az így értelemezett „kongruens modulo n” reláció egy ekvivalencia reláció az $\mathbb{Z}$ halmazon. Ha $n = 0$, akkor az egyenlőséget kapjuk, tehát az így értelmezett reláció általánosabb, mint az egyenlőség. Mi a következő jelölést használjuk:

$$a = b \text{ (mod n)} \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ úgy, hogy } a - b = kn. \quad \triangle$$

Ha P egy nemüres halmaz, akkor a $\leq \subset P \times P$ relációt *(parciális) rendezésnek* nevezzük P-n, ha bármely x, y és z P-beli elemek esetén igazak az alábbi tulajdonságok:

(i) $x \leq x$ (reflexív);

(ii) ha $x \leq y$ és $y \leq x$, akkor $y = x$ (antiszimmetrikus);

(iii) ha $x \leq y$ és $y \leq z$, akkor $x \leq z$ (tranzitív).

Ha $\leq$ egy rendezési reláció P-n, akkor azt mondjuk, hogy a $(P, \leq)$ pár egy rendezett halmaz.

1.3. Példák

(a) Egy X nemüres halmaz részhalmazainak halmazán értelmezzük a következő relációt: $A \leq B$ pontosan akkor, ha $A \subset B$. Az így értelmezett „$\leq$” reláció egy parciális rendezés.

(b) A természetes számok halmazán értelmezzük a $\leq$ relációt a következőképpen: $m, n \in \mathbb{N}$ esetén az $m \leq n$ pontosan akkor teljesül, ha létezik $k \in \mathbb{N}^*$ úgy, hogy $m = kn$. Az így értelmezett „$\leq$” reláció egy parciális rendezés $\mathbb{N}$-en. $\triangle$

Ha a $\leq$ rendezési reláció teljesíti a (iv)-es feltételt, akkor *teljes rendezésnek* nevezzük:

(iv) ha $x, y \in P$, akkor $x \leq y$ vagy $y \leq x$.

Ha a $\leq$ reláció egy teljes rendezés P-n, akkor a $(P, \leq)$ pár egy *teljesen rendezett halmaz.*

Ha $x \leq y$ és $x \neq y$, akkor az $x < y$ jelölést használjuk, az $x \geq y$ szimbólum jelentése $y \leq x$ és $x > y$ egyenértékű az $y < x$ relációval.

Az előbbi jelölések segítségével az (iv) feltétel megfogalmazható a következő módon is: „egy teljesen rendezett halmaz tetszőleges x és y elemeire az $x < y$, $x = y$ és $x > y$ összefüggések közül pontosan az egyik teljesül." Ezt nevezik *trichotómiának.*

1.4. Példák

(a) A racionális számokon értelmezett $\leq$ (szokásos nagyságrendi viszony) reláció egy teljes rendezés $\mathbb{Q}$-n;

(b) Ha egy nemüres A halmaz részhalmazainak halmazán értelmezzük a bennfoglalási ($\subset$) relációt (lásd az 1.3. a) példát), akkor $(P(A), \subset)$ egy rendezett halmaz, de nem teljesen rendezett. $\triangle$

Ha $\leq$ egy teljes rendezés P-n, és teljesül az (v)-ös feltétel, akkor a $\leq$ rendezést *jólrendezésnek* nevezzük, és a $(P, \leq)$ rendezett halmazt *jólrendezett halmaznak*:

(v) bármely $\emptyset \neq A \subset P$ halmazban létezik $a \in A$ úgy, hogy $a \leq x$ minden $x \in A$ esetén (a az A halmaz *legkisebb eleme*).

1.1. Példa. A természetes számok $\mathbb{N}$ halmaza a megszokott nagyságrendi viszonnyal egy jólrendezett halmaz, míg az egész számok halmaza ($\mathbb{Z}$) a megszokott $\leq$ rendezéssel nem jólrendezett. $\triangle$

A $(P, \leq)$ teljesen rendezett halmazban tetszőleges $x, y \in P$ esetén értelmezhetjük ezek közül a nagyobbat:

$$\max\{x, y\} := \begin{cases} y, & \text{ha } x \leq y, \\ x, & \text{ha } y \leq x. \end{cases}$$

Tetszőleges véges $\{x_1, \ldots, x_n\}$ halmaz esetén értelmezhetjük a halmaz legnagyobb elemét a $\max\{x_1, \ldots, x_n\} := \max\{x_n, \max\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}\}$ összefüggéssel. Hasonlóan értelmezzük a legkisebb elemet is (véges halmaz esetén).

$$\min\{x, y\} := \begin{cases} x, & \text{ha } x \leq y; \\ y, & \text{ha } y \leq x, \end{cases}$$

és $\min\{x_1, \ldots, x_n\} := \min\{x_n, \min\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}\}$.

Ha A egy nemüres részhalmaza a $(P, \leq)$ rendezett halmaznak és $x \in P$, akkor az x elemet

(i) *az A alsó korlátjának* nevezzük, ha $x \leq y$, bármely $y \in A$ esetén (az A halmazt *alulról korlátosnak* nevezzük, ha létezik legalább egy alsó korlátja);

(ii) *az A felső korlátjának* nevezzük, ha $y \leq x$, bármely $y \in A$ esetén (az A halmazt *felülről korlátosnak* nevezzük, ha létezik legalább egy felső korlátja);

(iii) az A halmaz *legnagyobb alsó korlátjának* (vagy *infimumának*) nevezzük, ha teljesül a következő két feltétel:

(iii$_1$) x alsó korlátja A-nak;

(iii$_2$) ha y alsó korlátja A-nak, akkor $y \leq x$;

(iv) az A halmaz *legkisebb felső korlátjának*(vagy *szuprémumának*) nevezzük, ha teljesül a következő két feltétel:

(iv$_1$) x felső korlátja A-nak;

(iv$_2$) ha y felső korlátja A-nak, akkor $x \leq y$.

Egy rendezett halmaz valamely A részhalmazát *korlátosnak* nevezzük, ha alulról is és felülről is korlátos, ellenkező esetben *nemkorlátosnak* (vagy korlátlannak) nevezzük.

1.1. Megjegyzés. Általában egy halmaznak több alsó, illetve felső korlátja lehet, de infimuma és szuprémuma csak egy. Az A halmaz infimumát $\inf A$-val, a szuprémumát $\sup A$-val jelöljük. $\triangle$

Példa. Ha A az $1/n$ alakú számok halmaza, ahol $n \in \mathbb{N}^*$, akkor a racionális számok szokásos $\leq$ rendezésére nézve A korlátos, $\sup A = 1$, $\inf A = 0$, és $1 \in A$, valamint $0 \notin A$ (tehát legnagyobb eleme van a halmaznak de legkisebb eleme nincs). $\triangle$

Ha f egy reláció és A egy halmaz, akkor az A *képe az f-ben* az

$$f(A) := \{y \mid \text{ létezik } x \in A \text{ úgy, hogy } (x,y) \in f\}$$

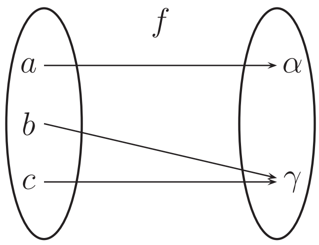
halmaz. Látható, hogy $f(A) \neq \emptyset \iff A \cap \mathrm{Dom} f \neq \emptyset$. Ha $f(A) \subset B$, akkor azt mondjuk, hogy az f reláció az A halmazt B-be képezi. Egy A halmaz *f-en keresztüli inverz képe* az

$$f^{-1}(A) := \{x \mid \text{ létezik } y \in A \text{ úgy, hogy } (x,y) \in f\}$$

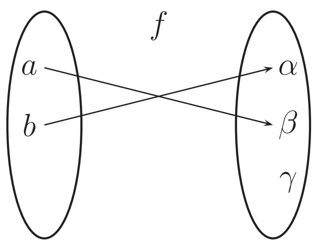
halmaz. Az itt említett fgogalmakról részletesebben olvashatunk [55, §3.2]-ben, [56, §1.1]-ben vagy [57, §2.3]-ban.

Egy f relációt *egyértékűnek* nevezünk, ha $(x,y) \in f$-ből és $(x,z) \in f$-ből következik, hogy $y = z$. Ebben az esetben írhatjuk, hogy $f(x) = y$. Az egyértékű relációkat *függvényeknek* (*leképezésnek*, *transzformációnak*, *operátornak*) nevezzük. [6] Ha f is és f^{-1} is egyértékű reláció, akkor f-et *invertálható függvénynek* nevezzük, és f^{-1}-t az f *inverzének* (lásd az 1.8. ábrát).

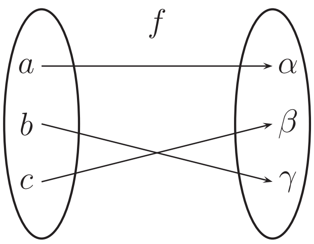
[6] A matematika különböző területein a különböző megnevezések meghatározott tulajdonságokat jelentenek.



1.6. Ábra



1.7. Ábra



1.8. Ábra

1.5. Tétel. *Ha az X halmaz egy részhalmazcsaládja $\{A_i\}_{i\in I}$, az Y egy részhalmazcsaládja $\{B_j\}_{j\in J}$, és $f \subset X\times Y$ egy reláció, akkor igazak a következő tulajdonságok:*

(a) $f(\cup_{i\in I}A_i) = \cup_{i\in I}f(A_i)$;

(b) $f^{-1}(\cup_{j\in J}B_j) = \cup_{j\in J}f^{-1}(B_j)$;

(c) $f(\cap_{i\in I}A_i) \subset \cap_{i\in I}f(A_i)$.

Ha f egy függvény, az alábbi egyenlőségek teljesülnek, de ezek tetszőleges relációk esetén általában nem igazak:

(d) $f^{-1}(\cap_{j\in J}B_j) = \cap_{j\in J}f^{-1}(B_j)$;

(e) $f^{-1}(\complement_Y B) = \complement_X(f^{-1}(B)),\ \ B\subset Y$;

(f) $f(f^{-1}(B)\cap A) = B\cap f(A),\ \ A\subset X,\ \ B\subset Y$.

Ha az f függvényre $\mathrm{Dom} f = X$ és $\mathrm{Range} f \subset Y$, akkor azt mondjuk, hogy f az X halmazt az Y-ba képezi, és ezt az $f : X\to Y$ szimbólummal jelöljük. Ha $\mathrm{Range} f = Y$, azt mondjuk, hogy az f függvény *szürjektív* (minden elem képelem vagyis $f(X) = Y$). Így az $f : X\to Y$ függvény pontosan akkor szürjektív, ha bármely $y\in Y$ esetén létezik $x\in X$ úgy, hogy $y = f(x)$.

Az $f : X\to Y$ függvényt *injektívnek* nevezzük, ha bármely $x, t\in X$ és $y\in Y$ esetén az $f(x) = y$ és $f(t) = y$ egyenlőségekből következik, hogy $x = t$ (különböző elemek képei is különböznek). Gyakorlatban a legtöbb esetben ellenőrizzük, hogy ha $x, t\in X$, akkor az $f(x) = f(t)$ egyenlőségből következik-e, hogy $x = t$. Azokat a függvényeket, amelyek injektívek is és szürjektívek is, *bijektíveknek* nevezzük. Az 1.6. ábrán egy szürjektív, de nem injektív függvény, az 1.7. ábrán egy injektív, de nem szurjektív, míg az 1.8. ábrán egy bijektív függvény látható.

1.6. Tétel. *Ha X és Y nemüres halmazok, akkor az $f : X\to Y$ függvény invertálhatóságának szükséges és elégséges feltétele az f bijektivitása.*

Sorozatnak nevezzük azokat a függvényeket, amelyek értelmezési tartománya $\mathbb{N}^*$ vagy $\mathbb{N}$. Ha $x : \mathbb{N}^* \to X$ egy függvény, akkor általában $x(n)$ helyett az x_n jelölést használjuk, és x_n-et a sorozat n-edik *tagjának* nevezzük. Az előbbi sorozat jelölésére az $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(x_n)_n$ vagy (x_n) jelölést használjuk. Ha $(x_n) \in X$, $\forall n \geq 1$, akkor X-beli sorozatról beszélünk.

1.1.4 Gyakorlatok

1. Határozd meg az $f(S)$ halmazt, ha $S = \{0, \pm 1, \pm 2, 3\}$, $\mathbb{Q}$ a racionális számok halmaza és az $f : S \to \mathbb{Q}$ függvényt az $f(t) = t^2 - 1$, bármely $t \in S$ összefüggéssel értelmeztük.
2. Tanulmányozd az alábbi függvények injektivitását és szürjektivitását:

(i) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$, $\quad n \in \mathbb{N}$;

(ii) $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(p,q) = p$, $\quad p, q \in \mathbb{Q}$;

(iii) $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $f(p,q) = (p, -q)$ $\quad p, q \in \mathbb{Q}$.

3. Az M halmaz elemeinek száma m és az N halmaz elemeinek száma n, ahol $m, n \geq 1$. Bizonyítsd be, hogy

(i) az M-et N-be képező $f : M \to N$ függvények száma n^m;

(ii) ha $m = n$, akkor az M-et N-be képező bijektív függvények száma $m!$;

(iii) ha $m \leq n$, akkor az M-et N-be képező injektív függvények száma
$$n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1);$$

(iv) ha $m \geq n$, akkor az M-et N-be képező szürjektív függvények száma

$$n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m - \binom{n}{3}(n-3)^m + \dots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}.$$

4. Tekintsük az A és B halmazokat és az $f : A \to B$ függvényt. Értelmezzük az $f_* : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ és $f^* : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ függvényeket az $f_*(M) = f(M)$, illetve $f^*(N) = f^{-1}(N)$ összefüggésekkel, ahol $M \subset A$ és $N \subset B$.

(a) Bizonyítsd be, hogy a következő kijelentések egyenértékűek:

- (i) f injektív;
- (ii) f_* injektív;
- (iii) f^* szürjektív;
- (iv) $f(M \cap N) = f(M) \cap f(N)$, bármely $M, N \in \mathcal{P}(A)$-ra;
- (v) $f(\complement_A M) \subset \complement_B f(M)$, bármely $M \in \mathcal{P}(A)$-ra.

(b) Bizonyítsd be, hogy az alábbi állítások ekvivalensek:

(i) f szürjektív;

(ii) f_* szürjektív;

(iii) f^* injektív;

(iv) $\complement_B f(M) \subset f(\complement_A M)$, bármely $M \in \mathcal{P}(A)$ esetén.

(c) Bizonyítsd be, hogy a következő kijelentések egyenértékűek:

(i) f bijektív;

(ii) f_* bijektív;

(iii) f^* bijektív;

(iv) $f(\complement_A M) = \complement_B f(M)$, bármely $M \in \mathcal{P}(A)$ esetén.

5. A és B tetszőleges halmazok és $f : A \to B$ egy függvény.

(a) Bizonyítsd be, hogy a következő kijelentések egyenértékűek:

(i) f injektív;

(ii) bármely $g, h : C \to A$ esetén az $f \circ g = f \circ g$ egyenlőségből következik, hogy $g = h$.

(b) Bizonyítsd be, hogy a következő kijelentések egyenértékűek:

(i) f szürjektív;

(ii) bármely $g, h : B \to C$ esetén a $g \circ f = h \circ f$ egyenlőségből következik, hogy $g = h$.

6. A $\sim$ reláció egy ekvivalencia reláció az $M \neq \emptyset$ halmazon. Minden $x \in M$ esetén tekintjük az $R_x = \{y \in M \mid y \sim x\}$ halmazt. Bizonyítsd be, hogy

(a) $R_x \neq \emptyset$, $\forall x \in M$;

(b) ha $x \sim y$, akkor $R_x = R_y$, és ellenkező esetben $R_x \cap R_y = \emptyset$;

(c) $M = \cup_{x \in M} R_x$.

Az R_x halmazt az x elem *ekvivalencia osztályának* nevezzük. Az $M/\sim$ szimbólummal a $\sim$ ekvivalencia reláció által az M-ben meghatározott *ekvivalencia osztályok* halmazát jelöljük. Ezt *faktorhalmaznak* is nevezzük.

7. Tekintsük az M nemüres halmazt és a $\sim$ ekvivalencia relációt M-en. Bizonyítsd be, hogy az $S : M \to M/\sim$, $S(x) = R_x$ függvény szürjektív, és az $S(x) = S(y)$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $R_x = R_y$.

Bizonyítsd be, hogy ha $f : M \to N$ egy szürjektív függvény, akkor az

$$x \sim y \iff f(x) = f(y)$$

összefüggéssel értelmezett $\sim$ reláció egy ekvivalencia reláció.

8. Bizonyítsd be, hogy ha $\{M_i\}_{i\in I}$ az M nemüres halmaz egy partíciója, akkor létezik olyan ekvivalencia reláció M-en (és egyértelműen meghatározott), amelyre $\{M_i\}_{i\in I} = \{R_x\}_{x\in M}$.

1.2 Számhalmazok

Az analízis alapfogalmainak (konvergencia, folytonosság, differenciálhatóság, integrálhatóság) tárgyalása szükségessé teszi a számfogalom tisztázását. Nem szándékszunk a természetes, egész és racionális számok halmazának axiomatikus értelmezésére, úgy gondoljuk, hogy az analízis szempontjából kiindulópontnak (ismertnek) választhatjuk a racionális számhalmazt.

1.2.1 Egy példa

Talán a legrégebbi példa, amely rávilágít arra, hogy a racionális számhalmaz a körülöttünk levő világ leírására nem alkalmas (nem elégséges), az egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója és befogója közti arány racionális számokkal való kifejezése. Diogenész [7] szerint annak felfedezése, hogy az egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogójának és befogójának aránya nem racionális szám, a Pitagorászi iskola egyik tagjától, Hippaszosztól [8] származik, akit társai a felfedezése miatt tengerbe dobtak (egyes történészek ezt ma már kétségbe vonják, de e tulajdonság kijelentésének korábbi létezését még senki sem igazolta, annak ellenére, hogy a Pitagorász tételt már az ókori babilóniaiak is ismerték i.e. 2000 körül).

Példa. Bizonyítsuk be, hogy a

$$p^2 = 2 \tag{2.1}$$

egyenletnek nincs egyetlen racionális megoldása sem.

Az indirekt bizonyítási módszert alkalmazzuk. Feltételezzük, hogy a (2.1) egyenletnek a $p = m/n$ racionális szám megoldása. Feltételezhetjük, hogy m és n relatív prímek, vagyis az m/n törtet nem lehet tovább egyszerűsíteni. Az (2.1) egyenletből következik, hogy

$$m^2 = 2n^2, \tag{2.2}$$

tehát m^2 páros. Ez csak úgy lehetséges, ha m is páros (ellenkező esetben m is és m^2 is páratlan lenne), és így m^2 osztható 4-gyel. Ebből következik, hogy a (2.2) egyenlőség jobb oldala osztahtó 4-gyel, vagyis n^2 páros. Ez ismét csak akkor lehetséges, ha n is páros, és ez ellentmond a feltevésünknek.

[7] Diogensz Laertiosz, i.e. 414-323

[8] metapontumi Hippaszosz, i.e. 450

Az előbbiek alapján a (2.1) egyenletnek nem lehet racionális gyöke, tehát az egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogójának és befogójának aránya nem racionális.

Vizsgáljuk meg részletesebben a problémát. Tekintsük a $p^2 < 2$ egyenlőtlenség A, illetve a $p^2 > 2$ egyenlőtlenség B megoldáshalmazát a pozitív racionális számok halmazában. Vizsgáljuk meg, hogy A-ban van-e legnagyobb elem, és B-ben van-e legkisebb elem.

Ha $p \in A$, és valamilyen $0 < h < 1$ esetén $q = p + h$, akkor a

$$h < \frac{2 - p^2}{2p + 1}$$

egyenlőtlenségből következik, hogy

$$q^2 = p^2 + (2p + h)h < p^2 + (2p + 1)h < p^2 + (2 - p^2) = 2.$$

Mivel h megválasztható úgy, hogy teljesüljenek az előbbi egyenlőtlenségek, $q > p$ és $q \in A$ alapján következik, hogy A-ban nincs legnagyobb elem.

Ha $p \in B$, akkor $p^2 > 2$, tehát a

$$q = p - \frac{p^2 - 2}{2p} = \frac{p}{2} + \frac{1}{p}$$

racionális számra teljesülnek a $0 < q < p$ egyenlőtlenségek. Másrészt

$$q^2 = p^2 - (p^2 - 2) + \left(\frac{p^2 - 2}{2p}\right)^2 > p^2 - (p^2 - 2) = 2,$$

tehát $q \in B$. $\triangle$

Megjegyzés. Az előbbiek alapján látható, hogy a racionális számhalmaz lyukacsos szerkezetű, annak ellenére, hogy bármely két racionális szám közt van további racionális szám ($p < (p + q)/2 < q$). Egy ennél mélyebb eredményt tartalmaz a 2.9 következmény. $\triangle$

1.2.2 A valós számhalmaz

A valós számhalmazt sok különböző módon felépíthetjük (lásd például [10]). Mi megelégszünk egy lehetséges axiómarendszerrel.

Az X halmazt *valós számhalmaznak* nevezzük, ha értelmezett rajta egy „összeadás” és egy „szorzás”

$$X \times X \ni (x, y) \mapsto x + y \in X,$$
$$X \times X \ni (x, y) \mapsto xy \in X$$

valamint egy „rendezés” úgy, hogy teljesüljenek a következő tulajdonságok:

(R_1) $(x+y)+z = x+(y+z), \ \forall\, x,y,z \in X$;

(R_2) létezik $0 \in X$ (*zéruselem* vagy *nullelem*), amelyre $x+0 = x, \ \forall\, x \in X$;

(R_3) bármely $x \in X$ esetén létezik a $-x \in X$ elem (az x *ellentettje*), amelyre $x+(-x) = 0$;

(R_4) $x+y = y+x, \ \forall\, x,y \in X$;

(R_5) $(xy)z = x(yz), \ \forall\, x,y,z \in X$;

(R_6) létezik az $1 \in X \setminus \{0\}$ elem (*egységelem*), amelyre $x1 = x, \ \forall\, x \in X$;

(R_7) minden $x \in X \setminus \{0\}$ elem esetén létezik $x^{-1} \in X$ (az x inverze) úgy, hogy $xx^{-1} = 1$;

(R_8) $xy = yx, \ \forall\, x,y \in X$;

(R_9) $x(y+z) = xy+xz, \ \forall\, x,y,z \in X$;

(R_{10}) $x \le x, \ \forall\, x \in X$;

(R_{11}) ha $x \le y$ és $y \le x$, akkor $x = y, \ \forall\, x,y \in X$;

(R_{12}) ha $x \le y$ és $y \le z$, akkor $x \le z, \ \forall\, x,y,z \in X$;

(R_{13}) bármely $x,y \in X$ esetén $x \le y$ vagy $y \le x$;

(R_{14}) ha $x \le y$, akkor $x+z \le y+z, \ \forall\, x,y,z \in X$;

(R_{15}) ha $x \ge 0$ és $y \ge 0$, akkor $xy \ge 0$;

(R_{16}) ha (A,B) egy nemüres halmazokból álló halmazpár ($A,B \subset X$) és $x \le y$ bármely $x \in A$ és $y \in B$ esetén, akkor létezik $z \in X$ úgy, hogy

$$x \le z \le y, \qquad \text{bármely } x \in A \text{ és } y \in B \text{ esetén.}$$

Megjegyzések. Az (R_1) - (R_4) axiómák alapján $(X,+)$ egy *Abel-féle*[9] (*kommutatív*) csoport, az (R_5) - (R_8) tulajdonságok biztosítják, hogy $(X \setminus \{0\}, \cdot)$ is egy *Abel-féle* (*kommutatív*) csoport; az (R_1) - (R_9) tulajdonságok alapján $(X,+,\cdot)$ egy *kommutatív test*; az (R_{10}) - (R_{13}) tulajdonságok alapján $(X,\le)$ egy *teljesen rendezett halmaz*; az (R_1) - (R_{15}) tulajdonságok alapján $(X,+,\cdot,\le)$ egy *teljesen rendezett kommutatív test.* Az (R_{14}) and (R_{15}) összefüggések azt fejezik ki, hogy a rendezés összeférhető az algebrai struktúrával. Látható, hogy $(\mathbb{Q},+,\cdot,\le)$ egy teljesen rendezett kommutatív test, és ez a test nem teljesíti az (R_{16}) axiómát (ezt láttuk be a fejezet elején tárgyalt példa segítségével). Világos, hogy az (R_{16}) axióma

[9]Niels Henrik Abel, 1802-1829

garantálja a bemutatott példában látott lyukacsos szerkezet eltűnését. Ezt az axiómát R. Dedekind[10] vezette be 1872-ben.

Az (R_7) által biztosított $x^{-1} \in X \setminus \{0\}$ elemet általában $\dfrac{1}{x}$-szel jelöljük ($\dfrac{y}{x} = yx^{-1}$). $\triangle$

A következő négy kijelentésben összefoglaltunk néhány olyan tulajdonságot, amely az (R_{16}) axióma nélkül is teljesül.

2.1. Tulajdonság. *Ha* x, y, z, x_i, y_i *az* X *valós számhalmaz elemei,* $i \in \{1, 2\}$, *akkor az* (R_1) - (R_{15}) *axiómák alapján igazolható, hogy*

(1) (a) *ha* $x_1 \leq x_2$ *és* $y_1 \leq y_2$, *akkor* $x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2$;
(b) *ha* $x_1 < x_2$ *és* $y_1 \leq y_2$, *akkor* $x_1 + y_1 < x_2 + y_2$;

(2) (a) $x > 0$ *pontosan akkor, ha* $x^{-1} > 0$;
(b) *ha* $x \geq 0$, *akkor* $-x \leq 0$;
(c) *ha* $x > 0$, *akkor* $-x < 0$;

(3) (a) *ha* $x \leq y$ *és* $z > 0$, *akkor* $xz \leq yz$;
(b) *ha* $x < y$ *és* $z > 0$, *akkor* $xz < yz$;
(c) *ha* $x \leq y$ *és* $z < 0$, *akkor* $xz \geq yz$;
(d) *ha* $x < y$ *és* $z < 0$, *akkor* $xz > yz$;

(4) *ha* $xy > 0$, *akkor az* $x \leq y$ *reláció ekvivalens az* $1/x \geq 1/y$ *relációval*;

(5) (a) *ha* $0 \leq x_1 \leq x_2$ *és* $0 \leq y_1 \leq y_2$, *akkor* $x_1 y_1 \leq x_2 y_2$;
(b) *ha* $0 < x_1 < x_2$ *és* $0 < y_1 \leq y_2$, *akkor* $x_1 y_1 < x_2 y_2$;
(c) *ha* $x_1 \leq x_2 \leq 0$ *és* $y_1 \leq y_2 \leq 0$, *akkor* $x_1 y_1 \geq x_2 y_2$;
(d) *ha* $x_1 < x_2 \leq 0$ *és* $y_1 \leq y_2 < 0$, *akkor* $x_1 y_1 > x_2 y_2$.

Az *abszolút érték függvényt* a következő összefüggésekkel értelmezzük:

$$\text{ha } x \in X, \text{ akkor} \quad |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

2.2. Tulajdonság. *Az* (R_1) - (R_{15}) *axiómákból következik, hogy bármely* $x, y \in X$ *esetén*

(1) (a) $|x| \geq 0$;
(b) $|x| = 0 \iff x = 0$;
(c) $|x| = |-x|$;

(2) (a) $|x + y| \leq |x| + |y|$;
(b) $|x - y| \geq \big|\,|x| - |y|\,\big|$;

[10] Richard Dedekind, 1831-1916

(3) (a) $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a;$

(b) $|x| < a \iff -a < x < a;$

(4) (a) $|xy| = |x| \cdot |y|;$

(b) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|},\ ha\ y \neq 0;$

(c) $|x^n| = |x|^n,\ n \in \mathbb{N}^*.$

Az abszolút érték segítségével értelmezzük a *távolságfüggvényt,* a

$$d : X \times X \to X \quad d(x, y) = |x - y|$$

összefüggések segítségével.

2.3. Tulajdonság. *A 2.2 tulajdonság alapján igazak a következő kijelentések:*

$$d(x, y) = 0 \iff x = y;$$
$$d(x, y) = d(y, x), \quad \forall\, x, y \in X;$$
$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad \forall\, x, y, z \in X.$$

Figyelem. Több valós számhalmaz létezik, de ezek algebrailag és rendezés szempontjából mind izomorfak (lásd [34, 5.34. tétel]).

A továbbiakban kiválasztunk ezek közül egy tetszőlegeset, és ezt nevezzük a *valós számok halmazának.* Ezt jelöljük $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$-vel. Az $\mathbb{R}$ halmaz elemeit nevezzük *valós számoknak.* Azokat az x valós számokat, amelyekre $0 \leq x$ *nemnegatív* valós számoknak, míg azokat, amelyekre $0 < x$ *pozitív* valós számoknak nevezzük. Hasonlóan, azokat az x valós számokat, amelyekre $0 \geq x$ *nempozitívaknak,* illetve a $0 > x$ egyenlőtlenséget teljesítő számokat *negatívaknak* nevezzük.

2.4. Tulajdonság. *Az* 1 *valós szám pozitív.*

Bizonyítás. Feltételezzük, hogy 1 nempozitív, vagyis $1 \leq 0$. Ha mindkét oldalhoz hozzáadunk -1-et, a $0 \leq -1$ relációhoz jutunk. Ha ennek mindkét oldalát megszorozzuk a -1 nemnegatív számmal, az (R_{15}) alapján következik, hogy $0 \leq (-1)(-1)$ vagyis $0 \leq 1$. A rendezés antiszimmetriája és az előbbi relációk alapján $0 = 1$. Ez viszont ellentmond az (R_6) axiómának, tehát $1 > 0$. □

Világos, hogy ha az $X \subset \mathbb{R}$ halmaznak van infimuma, akkor X nemüres és alulról korlátos. Ennek a fordítottja is igaz, de a bizonyításban szükséges az (R_{16}) tulajdonság.

2.1. Tétel. *Ha* A *nemüres és alulról korlátos részhalmaza* $\mathbb{R}$*-nek, akkor* A*-nak van infimuma.*

Bizonyítás. Jelöljük A_0-val az A alsó korlátainak halmazát. Mivel A alulról korlátos, $A_0 \neq \emptyset$. Ugyanakkor az (A_0, A) halmazpár teljesíti az (R_{16}) feltételeit, mert bármely $x \in A_0$ és $y \in A$ esetén $x \leq y$. Így létezik egy z valós szám, amelyre

$$x \leq z \leq y \ \text{ minden } x \in A_0 \text{ és } y \in A \text{ esetén.}$$

Az előbbi relációk alapján z alsó korlátja A-nak, és ugyanakkor A_0 legnagyobb eleme is, tehát z infimuma A-nak. $\square$

2.1. Következmény. *Ha A egy alulról korlátos, nemüres részhalmaza $\mathbb{R}$-nek és B az A egy nemüres részhalmaza, akkor*

$$\inf A \le \inf B.$$

2.2. Tétel. *Ha A egy felülről korlátos, nemüres részhalmaza $\mathbb{R}$-nek, akkor A-nak létezik szuprémuma.*

2.2. Következmény. *Ha A egy felülről korlátos, nemüres részhalmaza $\mathbb{R}$-nek és B nemüres részhalmaza A-nak, akkor*

$$\sup A \ge \sup B.$$

2.3. Tétel. *Ha X egy teljesen rendezett kommutatív test (teljesíti az* (R_1) - (R_{15}) axiómákat), *és minden nemüres, felülről korlátos részhalmazának létezik szuprémuma, akkor X teljesíti az* (R_{16}) *axiómát is.*

Bizonyítás. Tekintsük az (A, B) rendezett halmazpárt, amelyre tetszőleges $x \in A$ és $y \in B$ esetén $x \le y$. Az A halmaz nem üres és felülről korlátos (B minden eleme felső korlátja A-nak). A feltételek alapján létezik $z \in X$ úgy, hogy

$$z = \sup A. \tag{2.3}$$

Világos, hogy $x \le z, \forall x \in A$, tehát elégséges igazolni, hogy $z \le y$, minden $y \in B$ esetén. Ha ez nem teljesülne, akkor létezne $y_0 \in B$ úgy, hogy $y_0 < z$. Mivel y_0 felső korlátja A-nak, az előbbi egyenlőtlenség ellentmondana (2.3)-nak, tehát $z \le y$, $\forall y \in B$. $\square$

2.4. Tétel. *Ha az X teljesen rendezett kommutatív test minden nemüres és alulról korlátos részhalmazának létezik infimuma, akkor az* (R_{16}) *axióma teljesül.*

Megjegyzés. Láttuk, hogy az infimum és a szuprémum létezését az (R_{16}) axióma segítségével igazoltuk. Másrészt az (R_{16}) következik az előbbi két tétel közül akármelyikből, tehát a valós számhalmaz értelmezésében (R_{16}) helyettesíthető az előbbi két tétel közül az egyik kijelentésével.

Aszerint, hogy az (R_{16})-os axiómát mivel helyettesítjük, a matematikai analízis további felépítésénél (például az elemi függvények szabatos értelmezésénél) különböző technikai nehézségekbe ütközünk. $\triangle$

2.5. Tétel. (Arkhimédesz[11] tulajdonság, [16, 6.5.1 tétel, 72 oldal]) *Ha x, y valós számok és $y > 0$, akkor létezik olyan n természetes szám, amelyre $x < ny$.*

[11] Arkhimédesz $({}'A\rho\chi\iota\mu\acute{\eta}\delta\eta\varsigma)$, i.e. 287-212

Bizonyítás. A tétel feltételei alapján értelmezhetjük az

$$A = \{u \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}^*,\ u < ny\}$$

halmazt. Mivel $y \in A$, következik, hogy $A \neq \emptyset$. A lehetetlenre való visszavezetés segítségével igazoljuk, hogy $A = \mathbb{R}$. Ha $A \neq \mathbb{R}$, akkor a $B = \mathbb{R} \setminus A$ halmaz sem üres és tetszőleges $u \in A$, illetve $v \in B$ esetén $u < v$. (Ha $u \in A$, akkor létezik n úgy, hogy $u < ny$. Mivel $v \notin A$, és $\mathbb{R}$ teljesen rendezett, az előbbi n-re teljesül az $ny \leq v$ egyenlőtlenség. Így $u < ny \leq v$, tehát $u < v$.)

Az (R_{16}) axióma alapján az (A, B) halmazpárra létezik olyan z valós szám, amelyre

$$u \leq z \leq v, \quad \forall\, u \in A, v \in B. \tag{2.4}$$

A $z - y$ valós szám az A halmazban van, ellenkező esetben a $z - y \in B$, és a (2.4) összefüggés alapján

$$z \leq z - y \implies y \leq 0,$$

és ez ellentmond a feltételeknek. Tehát létezik olyan n természetes szám, amelyre $z - y < ny$. Így viszont

$$z + y = (z - y) + 2y < (n + 2)y,$$

tehát $z+y \in A$. A $z+y \leq z$ egyenlőtlenségből következik, hogy $y \leq 0$. Ez ellentmond a feltételeknek, tehát $A = \mathbb{R}$, és a tétel bizonyítása teljes. □

Megjegyzés. Igazolható, hogy az (R_{16}) axióma egyenértékű az Arkhimédesz-féle tulajdonsággal. △

2.3. Következmény. *Bármely $\varepsilon > 0$ valós szám esetén létezik olyan n természetes szám, amelyre $0 < 1/n < \varepsilon$.*

2.4. Következmény. *A természetes számok halmaza nem korlátos.*

A 2.3 következmény alapján adható a szuprémumra egy más jellemzés is.

2.6. Tétel. *Az a valós szám pontosan akkor szuprémuma az $A \subset \mathbb{R}$ halmaznak, ha*

(i) *bármely $x \in A$ esetén $x \leq a$;*

(ii) *bármely $\varepsilon > 0$ valós számra létezik $y \in A$ úgy, hogy $y > a - \varepsilon$.*

Bizonyítás. (i) alapján a egy felső korlátja A-nak és (ii) biztosítja, hogy ne létezzen a-nál kisebb felső korlát. □

Hasonló tulajdonság igaz az infimumra is.

2.7. Tétel. *Az a valós szám pontosan akkor infimuma az $A \subset \mathbb{R}$ halmaznak, ha*

(i) *bármely $x \in A$ esetén $x \geq a$;*

(ii) *bármely* $\varepsilon > 0$ *valós számra létezik* $y \in A$ *úgy, hogy* $y < a + \varepsilon$.

2.8. Tétel. ([62, 1.37 tétel, 11. oldal]) *Bármely* $x > 0$ *valós számra és bármely* $n > 0$ *természetes számra pontosan egy olyan* $y > 0$ *valós szám létezik, amelyre* $y^n = x$.

Megjegyzés. A tételben megjelenő y valós számot az $\sqrt[n]{x}$ vagy $x^{1/n}$ szimbólummal jelöljük, és az $x > 0$ valós szám n*-edrendű gyökének,* vagy n*-edik gyökének* nevezzük. A másodrendű gyököt *négyzetgyöknek,* a harmadrendű gyököt *köbgyöknek* is nevezzük.

Bizonyítás. Ha $n = 1$, akkor $y = x$, tehát feltételezhetjük, hogy $n \geq 2$.

Világos, hogy egynél több y nem létezhet, mert ha $0 < y_1 < y_2$, akkor $y_1^n < y_2^n$. Jelöljük E-vel azoknak a t pozitív valós számoknak a halmazát, amelyekre $t^n < x$.

Ha $t_1 = x/(1+x)$, akkor $0 < t_1 < 1$, tehát $t_1^n < t_1 < x$, és így E nem üreshalmaz ($t_1 \in E$).

Másrészt, ha $t_2 = 1 + x$, akkor $t_2 > 1$, és így $t_2^n > t_2 > x$. Tehát $t_2 \notin E$, és t_2 az E halmaz egy felső korlátja. A 2.2 tétel alapján létezik az $y = \sup E$ valós szám.

Ha $y^n < x$, akkor megválaszthatjuk a h valós számot úgy, hogy teljesüljenek a $0 < h < 1$ és

$$h < \frac{x - y^n}{(1+y)^n - y^n}$$

egyenlőtlenségek. Ebben az esetben

$$\begin{aligned}(y+h)^n &= y^n + \binom{n}{1} y^{n-1} h + \cdots + h^n \leq y^n + h\left[\binom{n}{1} y^{n-1} + \cdots + 1\right] = \\ &= y^n + h[(1+y)^n - y^n] < y^n + (x - y^n) = x,\end{aligned}$$

tehát $y + h \in E$, és ez ellentmond annak, hogy y az E egy felső korlátja.

Ha $y^n > x$, akkor válasszuk k-t úgy, hogy teljesüljenek a $0 < k < 1$, $k < y$ és

$$k < \frac{y^n - x}{(1+y)^n - y^n}$$

egyenlőtlenségek. Ebben az esetben, ha $t \geq y - k$, akkor

$$\begin{aligned}t^n \geq (y-k)^n &= y^n - \binom{n}{1} y^{n-1} k + \binom{n}{2} y^{n-2} k^2 - \cdots + (-1)^n k^n = \\ &= y^n - k\left[\binom{n}{1} y^{n-1} - \binom{n}{2} y^{n-2} k + \cdots + (-1)^{n-1} k^{n-1}\right] \geq \\ &\geq y^n - k\left[\binom{n}{1} y^{n-1} + \binom{n}{2} y^{n-2} + \cdots + 1\right] = \\ &= y^n - k[(1+y)^n - y^n] > y^n + (x - y^n) = x.\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy $y - k$ az E egy felső korlátja, és ez ellentmond annak, hogy y a legkisebb felső korlát.

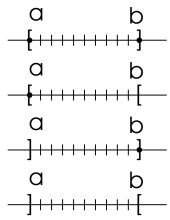
Az előbbiek és a trichotómia alapján $y^n = x$. $\square$

Megjegyzés. A [3] tankönyvünkben a szuprémum axiómájára alapozva értelmeztük az exponenciális függvényt és igazoltuk annak néhány tulajdonságát (101-114 oldal). Ennek a megközelítésnek az előnye az, hogy nem használja a határérték fogalmát.

A valós számok $\mathbb{R}$ halmazának egy A részhalmazát *intervallumnak* nevezzük, ha tetszőleges $x, y \in A$ esetén az $x \le z \le y$ egyenlőtlenségekből következik, hogy $z \in A$. Egy alulról is és felülről is korlátos intervallumot *korlátos intervallumnak nevezünk*, ellenkező esetben *nemkorlátos* intervallumról beszélünk. Nemüres és korlátos A intervallum esetén az $l(A) = \sup A - \inf A$ számot az intervallum *hosszának* nevezzük.

Megjegyezzük, hogy tetszőleges $a \le b$ valós számok esetén az a és b által meghatározott korlátos intervallumokat az 1.9. ábrán láthatjuk.

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$ zárt intervallum;
$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$ balról zárt és jobbról nyílt intervallum;
$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$ balról nyílt és jobbról zárt intervallum;
$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ nyílt intervallum.



1.9. Ábra: Korlátos intervallumok

1.2.3 Algebrai tulajdonságok

2.9. Tétel. *Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén pontosan egy olyan $k \in \mathbb{Z}$ létezik, amelyre $k \le x < k + 1$.*

Ha x egy valós szám, akkor az előbbi tételben megjelenő, egyértelműen meghatározott k egész számot az x *(alsó) egész részének* nevezzük, és az $[x]$ szimbólummal jelöljük. Gyakorlatilag egy $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ függvényt értelmezünk az

$$[x] = k \iff k \le x < k + 1$$

összefüggésekkel. Ezt a függvényt *egészrész* függvénynek nevezzük. Az egészrész függvény segítségével értelmezhetjük a $\{\cdot\} : \mathbb{R} \to [0, 1)$, $\{x\} = x - [x]$ *törtrész* függvényt is.

Gyakorlat. ([74, 1969, 268, 408, 456 oldal]) Bizonyítsuk be, hogy ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{2^2}\right] + \cdots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] + \cdots = n, \tag{2.5}$$

ahol $[t]$ a t valós szám egészrésze.

Bizonyítás. Létezik olyan $k_0 \in \mathbb{N}^*$, amelyre $n < 2^{k_0}$. Így $\left[\dfrac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] = 0$, minden $k \ge k_0$-ra, tehát a baloldali összeg egy véges összeg.

Másrészt minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x] - [x]. \tag{2.6}$$

Ha ez alapján felbontjuk az összeg minden tagját, és az így kapott különbségeket összeadjuk, a bizonyítandó egyenlőséghez jutunk. $\triangle$

Gyakorlat. Egy p prímszám esetén értelmezzük az $x_p, y_p : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ függvényeket a következő módon:

- $x_p(n)$ az n szám p alapú számrendszerbeli reprezentációjában a számjegyek összege;
- $y_p(n)$ a p hatványkitevője az $(n!)^{p-1}$ prímtényezős felbontásában.

Bizonyítsuk be, hogy $n = x_p(n) + y_p(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bizonyítás. Ha az n szám p alapú reprezentációja $n = \overline{a_1 a_2 \dots a_{k(p)}}$, akkor

$$a_1 = \left[\frac{n}{p^{k-1}}\right],$$

$$a_2 = \left[\frac{n - a_1 p^{k-1}}{p^{k-1}}\right] = \left[\frac{n}{p^{k-2}}\right] - a_1 p,$$

$$a_3 = \left[\frac{n - a_1 p^{k-1} - a_2 p^{k-2}}{p^{k-3}}\right] = \left[\frac{n}{p^{k-3}}\right] - a_1 p^2 - a_2 p,$$

és általában

$$a_j = \left[\frac{n - a_1 p^{k-j} - \sum_{i=1}^{j-1} a_i p^{k-i}}{p^{k-j}}\right] = \left[\frac{n}{p^{k-j}}\right] - \sum_{i=1}^{j-1} a_i p^{j-i},$$

ha $1 \leq j \leq k$. Ha az előbbi egyenlőségek megfelelő oldalait összeadjuk, a

$$\sum_{j=1}^{k} a_j = n + \sum_{j=1}^{k-1} \left[\frac{n}{p^{k-j}}\right] - \sum_{j=1}^{k-1} a_j p \cdot \frac{p^{k-j} - 1}{p - 1}$$

egyenlőséghez jutunk. Ebből következik, hogy

$$x_p(n) = n - (p-1) \sum_{j=1}^{k-1} \left[\frac{n}{p^j}\right].$$

Másrészt a Legendre képlet alapján

$$y_p(n) = (p-1) \sum_{j=1}^{k-1} \left[\frac{n}{p^j}\right],$$

tehát a bizonyítandó egyenlőség igaz. $\triangle$

Megjegyzés. A [7] és [25] könyvekben megtalálhatjuk az egészrész és törtrész függvény nagyon sok ismert tulajdonságát.

2.10. Tétel. *Bármely $x < y$ valós számokra létezik olyan u racionális szám, amelyre $x < u < y$.*

Bizonyítás. Az Arkhimédesz-féle tulajdonság alapján (2.5 tétel) az $y - x$ pozitív valós számhoz létezik olyan n természetes szám, amelyre $1 < n(y - x)$. Erre az n természetes számra

$$1/n < y - x. \tag{2.7}$$

A 2.9 tétel alapján létezik olyan m egész szám, amelyre

$$m \leq nx < m + 1. \tag{2.8}$$

Az $u = (m+1)/n$ szám racionális és $x < u$. Továbbá (2.8) bal oldala és (2.7) alapján

$$u = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \leq x + \frac{1}{n} < y,$$

tehát a bizonyítás teljes. □

Azokat a valós számokat, amelyek nem racionálisak, *irracionálisaknak* nevezzük.

2.5. Következmény. *Bármely két valós szám (x és y) közt létezik irracionális szám is.*

Bizonyítás. Válasszunk egy tetszőleges v_0 irracionális számot (láttuk, hogy a $\sqrt{2}$ megfelel). Az $x - v_0 < y - v_0$ egyenlőtlenség és az 2.10 tétel alapján létezik olyan racionális u szám, amelyre $x - v_0 < u < y - v_0$. Így $x < v_0 + u < y$ és $v = v_0 + u$ irracionális (ellenkező esetben a $v_0 = (v_0 + u) - u$ is racionális lenne). □

Egy valós számot *algebrai* számnak nevezünk, ha gyöke valamely egész együtthatós polinomnak. Ha egy valós szám nem algebrai, akkor *transzcendens* számnak nevezzük.

Tekintsük a $P \in \mathbb{R}[X]$

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

n-ed fokú polinomot, ahol $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, és $a_n \neq 0$.

2.11. Tétel. *Ha a p/q irreducibilis tört gyöke P-nek, akkor p osztója az a_0-nak és q osztója az a_n-nek.*

Bizonyítás. Ha p/q gyöke P-nek, akkor $q^n P(p/q) = 0$, tehát

$$a_0 q^n + a_1 q^{n-1} p + \cdots + a_{n-1} q p^{n-1} = -a_n p^n.$$

A bal oldal osztható q-val, tehát q osztja az $a_n p^n$ szorzatot. De p és q relatív prímek, tehát q osztója a_n-nek. Hasonlóan látható be, hogy p osztja az a_0 együtthatót. □

2.6. Következmény. *Az*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

egyenlet valós gyökei vagy egész számok, vagy irracionálisak.

2.7. Következmény. *Az*

$$x^2 - m = 0$$

egyenlet valós gyökei irracionálisak, ha m *nem teljes négyzet.*

Az eddigiek alapján látható, hogy a természetes, az egész, a racionális, az irracionális és a valós számok halmaza végtelen. Ahhoz, hogy az előbbi végtelen halmazok közt különbséget tehessünk, további szempontokra, újabb fogalmakra van szükségünk. Ha A és B két halmaz, akkor azt mondjuk, hogy ez a két halmaz *ekvivalens* vagy *azonos számosságú* ($A \sim B$ -vel jelöljük), ha létezik $f : A \to B$ bijektív függvény.

2.12. Tétel. *Az előbb értelmezett* $\sim$ *reláció egy ekvivalencia reláció.*

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $\mathbb{N}^*_n$ -el jelöljük az $1, 2, \ldots, n$ számokból álló halmazt. Egy A halmazról azt mondjuk, hogy

(a) *véges,* ha A üreshalmaz vagy létezik olyan $n \in \mathbb{N}^*$, amelyre $A \sim \mathbb{N}^*_n$. Az A véges halmaz *számosságán* (vagy elemeinek számán) azt az $n \in \mathbb{N}^*$ számot értjük, amelyre $A \sim \mathbb{N}^*_n$, és a számosság jelölésére a $|A| = n$ szimbólumot használjuk. Értelmezés alapján $|\emptyset| = 0$.

(b) *végtelen,* ha A nem véges halmaz.

(c) *megszámlálható,* ha $A \sim \mathbb{N}^*$. A megszámlálhatóság jelölésére a $|A| = \aleph_0$ szimbólumot használjuk.

(d) *megszámlálhatatlan,* ha A nem véges és nem megszámlálható. A megszámlálhatatlan halmazok számosságára az $|A| \geq \aleph_1 > \aleph_0$ jelölést használjuk.

(e) *legfeljebb megszámlálható,* ha A véges vagy megszámlálható. ($A \sim \mathbb{N}^*$ vagy $A \sim \mathbb{N}^*_n$, valamely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén). A legfeljebb megszámlálható halmazok jelölésére az $|A| \leq \aleph_0$ szimbólumot használjuk.

2.1. Megjegyzések. (a) Ha A és B két véges halmaz, akkor $A \sim B$ pontosan akkor teljesül, ha A -nak ugyanannyi eleme van, mint B -nek. Végtelen halamzokra ez nem ilyen egyszerű, hisz az intuíciónak ellentmondó jelenségekre bukkanunk. Például ha M a nullánál nagyobb, páros természetes számok halmaza ($M = \{2, 4, 6, \ldots\}$), akkor M egy valódi részhalmaza $\mathbb{N}^*$ -nak, és mégis $\mathbb{N}^* \sim M$, mert az $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, $f(n) = 2n$ függvény bijektív.

$$\begin{array}{cccccc}
x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \cdots & A_1 \\
x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & \cdots & A_2 \\
x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & \cdots & A_3 \\
x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & \cdots & A_4 \\
\cdots & & & & &
\end{array}$$

1.10. Ábra: Végtelen táblázat

(b) Az $\{1,-1,2,-2,3,-3,\dots\}$ és $\{0,1,-1,2,-2,3,-3,\dots\}$ halmazok ekvivalensek, mert a

$$b_k = \begin{cases} 0, & k = 1, \\ a_{k-1}, & k > 1 \end{cases}$$

megfeleltetés (a_k az első halmaz k -adik eleme és b_k a második halmaz k -adik eleme) bijektív.
(a) és (b) alapján látható, hogy az $\mathbb{N}^*$ és $\mathbb{Z}$ halmazok ekvivalensek, tehát $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$.
$\triangle$

Gyakorlat. Bizonyítsd be, hogy ha A véges halmaz, akkor $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

2.13. Tétel. *Egy megszámlálható halmaz minden végtelen részhalmaza megszámlálható.*

2.14. Tétel. *Ha $\{A_n\}$, $n = 1, 2, \dots,$ egy megszámlálható halmazokból álló sorozat, akkor a*

$$B = \cup_{n=1}^{\infty} A_n \tag{2.9}$$

halmaz is megszámlálható. (Megszámlálhatóan sok megszámlálható halmaz egyesítése megszámlálható.)

Bizonyítás. Az A_n halmaz elemeit egy $(x_{n\,k})_k$ sorozatként is felírhatjuk minden $n \geq 1$ esetén. Az 1.10. ábrán látható nyilak mentén a B elemei is egy sorozatként kezelhetők:

$$x_{11},\ x_{21},\ x_{12},\ x_{31},\ x_{22},\ x_{13},\ \dots . \tag{2.10}$$

Ha az előbbi felsorolásban valamelyik elem többször is szerepel, akkor azt a második megjelenésétől kezdve kiugorhatjuk, és így a 2.13 tétel alapján B megszámlálható.
$\square$

2.15. Tétel. *Ha A egy megszámlálható halmaz és $B_n = A^n$, valamilyen $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, akkor B_n is megszámlálható.*

Bizonyítás. $B_1 = A$, tehát B_1 megszámlálható. Ha B_{n-1} megszámlálható, akkor B_n elemei

$$(b, a) \quad (b \in B_{n-1},\ a \in A) \tag{2.11}$$

alakúak, tehát rögzített b esetén a (b, a), $a \in A$ párok halmaza ekvivalens A-val. Így B_n megszámlálhatóan sok megszámlálható halmaz egyesítéseként állítható elő, tehát a 2.14 tétel alapján B_n is megszámlálható. A matematikai indukció elve alalpján a tétel állítása igaz. □

2.8. Következmény. (Cantor) *A racionális számok halmaza megszámlálható.*

Bizonyítás. A racionális számok halmaza a $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ szorzat egy végtelen részhalmaza, tehát a 2.15 és a 2.13 tétel alapján megszámlálható. Tehát $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$. □

2.9. Következmény. *Ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$, akkor az $]a, b[\cap \mathbb{Q}$ halmaz megszámlálható.*

Bizonyítás. A 2.10 tétel alapján létezik olyan $u, v \in \mathbb{Q}$, amelyekre $a < u < v < b$. Ha m, n pozitív egészek, akkor $(ma + nb)/(a + b) \in \mathbb{Q}$ és $a < (ma + nb)/(a + b) < b$, tehát a vizsgált halmaz nem véges halmaz. A vizsgált halmaz végtelen részhalmaza a $\mathbb{Q}$ halmaznak, és így a 2.13 tétel alapján megszámlálható. □

2.16. Tétel. *Ha A az összes olyan sorozatok halmaza, amelyeknek minden tagja* 0 *vagy* 1, *akkor A megszámlálhatatlan.*

Bizonyítás. Ha B egy megszámlálható részhalmaza A-nak, akkor feltételezhetjük, hogy B elemei az $s_1, s_2, \ldots$ sorozatok. Az s sorozatot a következő módon szerkesztjük meg: ha az s_n sorozat n-edik tagja 1, akkor az s sorozat n-edik tagját 0-nak választjuk, ellenkező esetben 1-nek. Világos, hogy az s sorozat különbözik a B halmaz minden elemétől (az s_n sorozattól az n-edik tagban biztosan eltér), tehát $s \in A$, és $s \notin B$. Így A minden megszámlálható részhalmaza valódi részhalmaz, tehát A megszámlálhatatlan. □

2.10. Következmény. *A* $[0, 1]$ *intervallum megszámlálhatatlan.*

Bizonyítás. A $[0, 1]$ intervallum elemeinek végtelen diadikus törtként való reprezentálásával pontosan a 2.16 tételben szereplő sorozatok egy részhalmazát kapjuk. A bizonyítás alapgondolata ebben a részhalmazban is működik. □

2.11. Következmény. *Ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$, akkor az $[a, b]$ intervallum megszámlálhatatlan.*

2.12. Következmény. (Cantor) *A valós számok halmaza megszámlálhatatlan.*

A valós számok halmazának számosságát $\aleph_1$-gyel jelöljük, tehát $|\mathbb{R}| = \aleph_1$.

2.17. Tétel. (Cantor) *Az algebrai számok halmaza megszámlálható.*

Bizonyítás. Ha $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ egy n-ed fokú, egész együtthatós polinom, és a $h(P)$ számot a következő összefüggéssel értelmezzük

$$h(P) := n - 1 + |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|,$$

akkor rögzített $M > 0$ esetén a $h(P) \leq M$ egyenlőtlenséget teljesítő polinomok gyökeinek U_m halmaza véges. Másrészt az algebrai számok halmaza felírható $\cup_{m=1}^{\infty} U_m$ alakban, tehát az algebrai számok halmaza megszámlálható. $\square$

2.13. Következmény. (Cantor) *A transzcendens számok halmaza megszámlálhatatlan.*

Megjegyzés. A 2.17 tétel és a 2.13 következmény alapján látható, hogy „majdnem minden" valós szám transzcendens. $\triangle$

1.2.4 Topológiai tulajdonságok

Az $A \subset \mathbb{R}$ halmazt *nyílt* halmaznak nevezzük, ha bármely $x \in A$ esetén létezik ε úgy, hogy $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A$.

2.18. Tétel. *Ha $\mathcal{O}$ az $\mathbb{R}$ nyílt részhalmazainak családja, akkor*

(a) $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{O}$;

(b) *nyílt halmazok egyesítése is nyílt;*

(c) *véges sok nyílt halmaz metszete is nyílt halmaz.*

Megjegyzés. Az előbbi tétel (c) állításában a véges sok halmaz nem helyettesíthető tetszőlegesen sok halmazzal, mert tetszőleges $n \in \mathbb{N}^*$ esetén a $]-1/n, 1/n[$ halmaz nyílt, $\cap_{n\in\mathbb{N}^*}]-1/n, 1/n[= \{0\}$, és a $\{0\}$ halmaz nem nyílt. $\triangle$

Ha A egy nemüres részhalmaza az $\mathbb{R}$-nek és $x \in A$, akkor azt mondjuk, hogy x egy *belső pontja* az A halmaznak, ha létezik olyan O nyílt halmaz, amelyre $x \in O \subset \subset A$. Az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz belső pontjainak halmazát $\operatorname{int} A$-val jelöljük, és A *belsejének* nevezzük. Ha $\operatorname{int} A = \emptyset$, azt mondjuk, hogy A-nak nincs belső pontja. Ilyen halmaz például az $A = \{1\}$, az $A = \{1/n \mid n = 1, 2, \dots\}$, vagy az $A = \mathbb{Q}$. Az értelmezés alapján nyilvánvaló, hogy $\operatorname{int} A \subset A$, és A pontosan akkor nyílt, ha $A = \operatorname{int} A$. Ezt tétel formájában is megfogalmazzuk.

2.19. Tétel. *Ha $A \subset \mathbb{R}$, akkor*

(a) $\operatorname{int} A$ *az A-ban levő összes nyílt halmaz egyesítése, tehát* $\operatorname{int} A$ *is nyílt halmaz;*

(b) *A pontosan akkor nyílt, ha $A = \operatorname{int} A$;*

(c) *az* A *belseje a bennfoglalásra nézve a legnagyobb nyílt részhalmaza* A*-nak;*

(d) *ha* $A \subset B \subset \mathbb{R}$, *akkor* $\operatorname{int}(A) \subset \operatorname{int}(B)$;

(e) *ha* $A, B \subset \mathbb{R}$, *akkor* $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$;

(f) *ha* $A \subset \mathbb{R}$, *akkor* $\operatorname{int}(\operatorname{int}(A)) = \operatorname{int}(A)$;

(g) $\operatorname{int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ *és* $\operatorname{int}\mathbb{Q} = \emptyset$.

Bizonyítás. (a) Az $\operatorname{int} A$ értelmezésének azonnali következménye.

(b) Ha A nyílt halmaz, akkor minden $x \in A$ esetén létezik olyan pozitív ε, amelyre $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A$. Tehát $x \in \operatorname{int} A$, és így $A \subset \operatorname{int} A$. Az előbbi alpontban láttuk, hogy $\operatorname{int} A \subset A$, tehát $A = \operatorname{int} A$.

(c) Elégséges igazolni, hogy ha $\operatorname{int} A \subset B \subset A$ és B nyílt halmaz, akkor $\operatorname{int} A = B$. Ha $\operatorname{int} A \neq B$, akkor létezik $x \in B \setminus \operatorname{int} A$, vagyis létezik $\varepsilon > 0$ úgy, hogy $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset B$ és $B \subset A$. Az előbbi két bennfoglalásból következik, hogy $x \in \operatorname{int} A$, és ez ellentmondás, tehát $\operatorname{int} A = B$.

(d) Az értelmezés alapján nyilvánvaló.

(e) Ha $x \in \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$, akkor létezik olyan O_1 és O_2 nyílt halmaz, amelyre $x \in O_1 \subset A$ és $x \in O_2 \subset B$. Az előbbiek alalpján $x \in O_1 \cap O_2 \subset A \cap B$, és így $x \in \operatorname{int}(A \cap B)$, mert az $O_1 \cap O_2$ halmaz nyílt halmaz.

Ha $x \in \operatorname{int}(A \cap B)$, akkor létezik olyan O nyílt halmaz, amelyre $x \in O \subset (A \cap B)$. De ez alapján $x \in O \subset A$ és $x \in O \subset B$, tehát $x \in \operatorname{int} A$ és $x \in \operatorname{int} B$, vagyis $x \in \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$.

Az előbbi két tulajdonság alapján a bizonyítás teljes.

(f) Az $\operatorname{int}(A)$ halmaz nyílt az (a) tulajdonság alapán, tehát a bizonyítandó egyenlőség következik a (b) tulajdonságból.

(g) Igazoltuk, hogy $\mathbb{R}$ nyílt, tehát a (b) tulajdonság alapján következik az első egyenlőség. Másrészt bármely két racionális szám között létezik irracionális szám, tehát a $\mathbb{Q}$ nem tartalmazza egyetlen pontjának egyetlen környezetét sem. $\square$

2.20. Tétel *Minden nyílt intervallum nyílt halmaz is.*

Bizonyítás. Az (a, b) nyílt intervallum minden pontja belső pont, tehát az előbbi tétel (b) alpontja alapján az (a, b) intervallum nyílt halmaz. $\square$

Az $A \subset \mathbb{R}$ halmazt *zárt* halmaznak nevezzük, ha a $\complement_{\mathbb{R}} A$ halmaz nyílt.

2.21. Tétel. *Jelöljük* $\mathcal{C}$*-vel az* $\mathbb{R}$ *zárt részhalmazainak családját. Igazak a következő állítások:*

(a) $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{C}$;

(b) *zárt halmazok metszete is zárt halmaz;*

(c) *véges sok zárt halmaz egyesítése is zárt halmaz.*

Bizonyítás. A de Morgan törvények alapján a tulajdonságok visszavezetődnek a nyílt halmazok tulajdonságaira.

(a) $\complement_{\mathbb{R}}\,\mathbb{R}=\emptyset$ és $\complement_{\mathbb{R}}\,\emptyset=\mathbb{R}$.

(b) a 2.18 tétel (b) pontját és az 1.4-es tételt használjuk.

(c) a 2.18 tétel (c) pontja és az 1.4 tétel alapján következik. □

Megjegyzés. A (c) pontban a véges sok halmaz itt sem helyettesíthető tetszőleges számú halmazzal, mert az $[1/n,1]$ alakú zárt halmazok egyesítése a $]0,1]$ nyílt halmaz $(\cup_{n\in\mathbb{N}^*}[1/n,1]=]0,1])$. △

2.5. Tulajdonság. *Ha az* $A\subset\mathbb{R}$ *halmaz nyílt és a* $B\subset\mathbb{R}$ *halmaz zárt, akkor az* $A\setminus B$ *halmaz nyílt és a* $B\setminus A$ *halmaz zárt.*

Bizonyítás. Az $A\setminus B=A\cap\complement_{\mathbb{R}}B$ és $B\setminus A=B\cap\complement_{\mathbb{R}}A$ összefüggések alapján az állítás nyilvánvaló. □

Ha $A\subset\mathbb{R}$, az A halmaz *lezárásán* azt a (bennfoglalásra nézve) legkisebb zárt halmazt értjük, amely tartalmazza az A halmazt. Az A halmaz lezárását $\operatorname{cl}A$-val jelöljük és megszerkeszthetjük $\operatorname{cl}A=\cap\{C\mid A\subset C\subset\mathbb{R},\ C\ \text{zárt}\}$ alakban is. Az értelmezés alapján világos, hogy $A\subset\operatorname{cl}A$.

Egy halmaz belseje és lezárása közt igen szoros kapcsolat van, ezt fejezi ki az alábbi tétel:

2.22. Tétel. *Ha* $A,B\subset\mathbb{R}$, *akkor*

$$\complement_{\mathbb{R}}(\operatorname{cl}A)=\operatorname{int}(\complement_{\mathbb{R}}A),\quad \complement_{\mathbb{R}}(\operatorname{int}A)=\operatorname{cl}(\complement_{\mathbb{R}}A).$$

Bizonyítás. Csak az első egyenlőséget igazoljuk, a második bizonyítása hasonlóan történik.

Ha $x\in\complement_{\mathbb{R}}(\operatorname{cl}A)$, akkor

$$x\notin\operatorname{cl}A\implies\exists C\ \text{zárt},\ A\subset C,\ \text{úgy, hogy}\ x\notin C\implies$$
$$\implies\exists O(=\complement_{\mathbb{R}}C)\ \text{nyílt},\ O\subset\complement_{\mathbb{R}}A,\ x\in O\implies x\in\operatorname{int}(\complement_{\mathbb{R}}A).\quad\square$$

2.14. Következmény. *Ha* $A\subset\mathbb{R}$, *akkor* $\operatorname{int}(A)=\complement_{\mathbb{R}}\operatorname{cl}\left(\complement_{\mathbb{R}}A\right)$ *és* $\operatorname{cl}A==\complement_{\mathbb{R}}\left(\operatorname{int}\left(\complement_{\mathbb{R}}A\right)\right)$.

2.23. Tétel. *Ha* $A\subset\mathbb{R}$, *akkor*

(a) $\operatorname{cl}A$ *zárt halmaz;*

(b) A *pontosan akkor zárt, ha* $A=\operatorname{cl}A$;

(c) $\operatorname{cl}A=\cap\{C\mid A\subset C\subset\mathbb{R},\ C\ \text{zárt}\}$;

(d) *ha* $A\subset B$, *akkor* $\operatorname{cl}(A)\subset\operatorname{cl}(B)$;

(e) *ha* $A,B\subset\mathbb{R}$, *akkor* $\operatorname{cl}(A\cup B)=\operatorname{cl}(A)\cup\operatorname{cl}(B)$;

(f) $\operatorname{cl}(\operatorname{cl} A) = \operatorname{cl} A$;

(g) $\operatorname{cl} \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

Bizonyítás. (a) A lezárás értelmezéséből azonnal adódik.

(b) $A = \operatorname{cl} A$, mert A teljesíti az értelmezés feltételeit, és annál kisebb halmaz nem tartalmazza A-t.

Ha $A = \operatorname{cl} A$, akkor az (a) pont alapján A zárt.

(c) Ha $A_0 = \cap\{C \mid A \subset C \subset \mathbb{R},\ C \text{ zárt}\}$, akkor a zárt halmazok tulajdonságai alapján A_0 is zárt és $A \subset A_0$. Tehát $\operatorname{cl} A \subset A_0$ (hisz $\operatorname{cl} A$ a legkisebb olyan zárt halmaz, amely tartalmazza A-t). Másrészt az A_0 értelmezésében szereplő metszet egyik tagja $\operatorname{cl} A$, tehát $A_0 \subset \operatorname{cl} A$ és így $A_0 = \operatorname{cl} A$.

(d) Ha $A \subset B$, akkor $\complement_{\mathbb{R}} B \subset \complement_{\mathbb{R}} A$, és a nyílt halmazok tulajdonságai alapján (2.19 tétel (d) pontja) $\operatorname{int} \complement_{\mathbb{R}} B \subset \operatorname{int} \complement_{\mathbb{R}} A$. A 2.22 tétel alapján $\complement_{\mathbb{R}} \operatorname{cl} B \subset \complement_{\mathbb{R}} \operatorname{cl} A$, és így $\operatorname{cl} B \subset \operatorname{cl} A$.

(e) A 2.22 tétel és az 1.1 tulajdonság alapján

$$\begin{aligned} \complement_{\mathbb{R}} \operatorname{cl}(A \cup B) &= \operatorname{int} \complement_{\mathbb{R}}(A \cup B) = \operatorname{int}(\complement_{\mathbb{R}} A \cap \complement_{\mathbb{R}} B) \\ &= \operatorname{int}(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap \operatorname{int}(\complement_{\mathbb{R}} B) = (\complement_{\mathbb{R}} \operatorname{cl} A) \cap (\complement_{\mathbb{R}} \operatorname{cl} B) = \complement_{\mathbb{R}}(\operatorname{cl} A \cup \operatorname{cl} B). \quad \square \end{aligned}$$

(f) Az (a) alpont alapján a $\operatorname{cl} A$ egy zárt halmaz, tehát a (b) alapján következik a bizonyítandó egyenlőség.

(g) Az üreshalmaz nyílt, tehát a komplementere zárt.

2.6. Tulajdonság. *Ha $A, B \subset \mathbb{R}$ diszjunkt nyílt halmazok, akkor*

(a) *az egyik lezárása nem metszi a másikat;*

(b) $(\operatorname{int} \operatorname{cl} A) \cap (\operatorname{int} \operatorname{cl} B) = \emptyset$.

Bizonyítás. (a) Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor $B \subset \complement_{\mathbb{R}} A$ és $\operatorname{cl} B \subset \complement_{\mathbb{R}} A$, tehát $\operatorname{cl} B \cap A = \emptyset$.

(b) Az (a) alapján $A \cap \operatorname{cl} B = \emptyset$. Így $A \cap (\operatorname{int} \operatorname{cl} B) = \emptyset$. Ugyanakkor az $\operatorname{int} \operatorname{cl} B$ nyílt halmaz, tehát az előbbi gondolatmenetet erre a halmazra és A-ra megismételve a tétel állítását kapjuk. $\square$

Az A halmazt az $x \in \mathbb{R}$ pont *környezetének* nevezzük, ha létezik olyan nyílt O intervallum, amelyre $x \in O \subset A$. Az x pont összes környezeteinek halmazát $\mathcal{V}(x)$-szel jelöljük.

2.7. Tulajdonság. *Ha $A \subset \mathbb{R}$, akkor a következő kijelentések egyenértékűek:*

(a) $x \in \operatorname{cl} A$;

(b) *bármely $V \in \mathcal{V}(x)$ esetén $V \cap A \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. Igazoljuk, hogy az (a) kijelentésből következik a (b) kijelentés. Ha az implikáció nem igaz, akkor létezik olyan $x \in \operatorname{cl} A$ pont és ennek olyan $V \in \mathcal{V}(x)$ nyílt környezete, amelyre $V \cap A = \emptyset$. Ebből következik, hogy $A \subset \complement_{\mathbb{R}} V$, és így $\complement_{\mathbb{R}} V \in \mathcal{C}$. Ez viszont azt jelenti, hogy $\operatorname{cl} A \subset \complement_{\mathbb{R}} V$, és így ellentmondáshoz ($x \in \operatorname{cl} A \cap \complement_{\mathbb{R}} A$) jutunk.

A fordított implikáció bizonyítása. Ha $x \notin \operatorname{cl} A$, akkor létezik olyan zárt F halmaz, amelyre $A \subset F$ és $x \notin F$. Ha $V = \complement_{\mathbb{R}} F$, akkor V nyílt, $x \in V$ és $V \cap A = \emptyset$. Ez ellentmond (b)-nek. $\square$

2.15. Következmény. *Ha V egy nyílt halmaz és $V \cap A = \emptyset$, akkor $V \cap \operatorname{cl} A = \emptyset$.*

Bizonyítás. Ha létezne legalább egy $x \in V \cap \operatorname{cl} A$ elem, akkor a 2.7 tulajdonság alapján teljesülne a $V \cap A \neq \emptyset$ összefüggés is. Ez ellentmondás. $\square$

Az $x \in \mathbb{R}$ számot az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz *határpontjának* vagy *torlódási pontjának* nevezzük, ha minden $V \in \mathcal{V}(x)$ környezet tartalmazza az A-nak legalább egy x-től különböző pontját ($V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$).

Az A halmaz torlódási pontjainak halmazát A'-vel jelöljük. Az $A \subset \mathbb{R}$ halmazt az $\mathbb{R}$ *sűrű részhalmazának* nevezzük, ha $\operatorname{cl} A = \mathbb{R}$.

A 2.10 tétel alalpján a következő tételhez jutunk.

2.16. Következmény. *$\mathbb{Q}$ sűrű részhalmaza $\mathbb{R}$-nek.*

2.24. Tétel. *Ha $A, B, A_\alpha \subset \mathbb{R}$, $\alpha \in I$, akkor*

(i) $\operatorname{cl} A = A \cup A'$;

(ii) *$A \subset B$-ből következik, hogy $A' \subset B'$;*

(iii) $(A \cup B)' = A' \cup B'$;

(iv) $\cup_{\alpha \in I} A'_\alpha = (\cup_{\alpha \in I} A_\alpha)'$.

2.17. Következmény. *Az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor zárt, ha $A' \subset A$.*

2.25. Tétel. *Ha A egy felülről korlátos zárt halmaz és $y = \sup A$, akkor $y \in A$.*

Bizonyítás. Ha $y \notin A$, akkor $y \in \complement_{\mathbb{R}} A$. Mivel $\complement_{\mathbb{R}} A$ nyílt halmaz, létezik $\varepsilon > 0$ úgy, hogy $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\subset \complement_{\mathbb{R}} A$. Ez viszont azt jelenti, hogy az $y - \frac{1}{2}\varepsilon$ szám is felső korlátja A-nak, tehát y nem szuprémuma A-nak. Az előbbi ellentmondás alapján állíthatjuk, hogy $y \in A$. $\square$

2.18. Következmény. *Ha B egy alulról korlátos zárt halmaz, és $y = \inf B$, akkor $y \in B$.*

Bizonyítás. Az $A = -B := \{-b \mid b \in B\}$ halmaz zárt és felülről korlátos. Ugyanakkor $y = -\sup A$, tehát az előbbi tétel alapján $y \in B$. $\square$

Az x pont az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz *aderens pontja,* ha x minden környezete tartalmazza az A legalább egy elemét.

2.26. Tétel. *Egy* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ *halmaz pontosan akkor zárt, ha egyenlő az aderens pontjainak halmazával.*

Bizonyítás. Jelölje B az A aderens pontjainak halmazát.

Ha $A = B$, akkor $\complement_{\mathbb{R}} A = \complement_{\mathbb{R}} B$, és minden $x \in \complement_{\mathbb{R}} A$ esetén létezik x-nek olyan V környezete, amelyre $V \cap A = \emptyset$, vagyis $V \subset \complement_{\mathbb{R}} A$. Így x belső pontja a $\complement_{\mathbb{R}} A$ halmaznak. Mivel az x pontot tetszőlegesen válsztottuk a $\complement_{\mathbb{R}} A$ halmazból, következik, hogy A zárt.

Világos, hogy $A \subset B$. Ha A zárt, akkor $\complement_{\mathbb{R}} A$ nyílt, tehát minden $x \notin A$ esetén $\complement_{\mathbb{R}} A$ az x-nek olyan környezete, amely nem metszi az A-t. Így $x \notin B$, tehát $B \subset A$, és ebből következik, hogy $A = B$. $\square$

Az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz *határa* a $(\operatorname{cl} A) \cap (\operatorname{cl} \complement_{\mathbb{R}} A)$ halmaz. Ezt a halmazt $\operatorname{fr} A$-val jelöljük. Az értelmezése alapján látható, hogy $\operatorname{fr} A$ zárt halmaz. Például $\operatorname{fr} [0,1] = \operatorname{fr}]0,1[= \operatorname{fr} \{0,1\} = \{0,1\}$.

2.27. Tétel. *Az* $A \subset \mathbb{R}$ *halmaz pontosan akkor nyílt, ha* $A \cap \operatorname{fr} A = \emptyset$.

2.28. Tétel. *Ha* $A, B \subset \mathbb{R}$, *akkor*

(i)	$\operatorname{int} A = A \setminus \operatorname{fr} A$;	(v)	$\operatorname{fr} (\mathbb{R} \setminus A) = \operatorname{fr} A$;
(ii)	$\operatorname{cl} A = A \cup \operatorname{fr} A$;	(vi)	$\mathbb{R} = \operatorname{int} A \cup \operatorname{fr} A \cup \operatorname{int} (\mathbb{R} \setminus A)$;
(iii)	$\operatorname{fr} (A \cup B) \subset \operatorname{fr} A \cup \operatorname{fr} B$;	(vii)	$\operatorname{fr} (\operatorname{cl} A) = \operatorname{fr} A$;
(iv)	$\operatorname{fr} (A \cap B) \subset \operatorname{fr} A \cup \operatorname{fr} B$;	(viii)	$\operatorname{fr} (\operatorname{int} A) \subset \operatorname{fr} A$;

(ix) A *pontosan akkor nyílt, ha* $\operatorname{fr} A = \operatorname{cl} A \setminus A$;
(x) A *pontosan akkor zárt, ha* $\operatorname{fr} A = A \setminus \operatorname{int} A$.

Az $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ intervallumsorozatot pontosan akkor nevezzük *egymásbaágyazottnak*, ha

$$I_{k+1} \subset I_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.12}$$

2.29. Tétel. *Ha* $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *egymásbaágyazott nemüres és zárt intervallumok sorozata, akkor*

$$\cap_{k \in \mathbb{N}} I_k \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. Ha $I_k = [a_k, b_k]$, $k \in \mathbb{N}$, akkor (2.12) alapján

$$a_k \leq a_{k+1} \leq b_{k+1} \leq b_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.13}$$

Az $A = \{x \mid x = a_k,$ valamilyen $k \in \mathbb{N}\}$ és $B = \{y \mid y = b_k,$ valamilyen $k \in \mathbb{N}\}$ halmazokra érvényes a következő tulajdonság:
Ha $x \in A$ és $y \in B$, akkor $x \leq y$. Ellenkező esetben létezne $a_k \in A$ és $b_m \in B$ úgy, hogy

$$b_m < a_k.$$

Ha $m < k$, akkor
$$b_m < a_k \leq b_k,$$
és ez ellentmondana a feltételeknek.

Az (R_{16}) axióma alapján létezik olyan $z \in \mathbb{R}$, amelyre
$$a_k \leq z \leq b_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$
Az így szerkesztett z valós számra $z \in I_k$, minden $k \in \mathbb{N}$ esetén, tehát $z \in \cap_{k\in\mathbb{N}} I_k$. $\square$

Megjegyzés. Hasonló állítás nemkorlátos zárt intervallumokra nem igaz. $\triangle$

1.2.5 A valós számok halmazának lezárása

A 2.23 tétel (g) alpontjában láttuk, hogy az $\mathbb{R}$ halmaz zárt (is és nyílt is). Különösen a határértékszámítás kapcsán szükségünk lesz az $\mathbb{R}$ halmaznak a következő lezárására. A valós számok halmazának lezárásán az $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ halmazt értjük, ahol a $+\infty$ és $-\infty$ szimbólumoknak a következő tulajdonságai vannak:

(a) ha $x \in \mathbb{R}$, akkor $-\infty < x < +\infty$, és
$$x + \infty = +\infty, \;\; x - \infty = -\infty, \;\; \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0;$$

(b) ha $x > 0$, akkor $x(+\infty) = +\infty$, $x(-\infty) = -\infty$;

(c) ha $x < 0$, akkor $x(+\infty) = -\infty$, $x(-\infty) = +\infty$.

Az $\mathbb{R}$ elemeit végeseknek, a $+\infty$ és $-\infty$ szimbólumokat pedig végteleneknek nevezzük.

A későbbiekben látni fogjuk, hogy ez a kompakt lezárása $\mathbb{R}$-nek.

Ha a nemüres $A \subset \mathbb{R}$ halmaz felülről nem korlátos, akkor azt mondjuk, hogy $\sup A = +\infty$. Hasonló módon, ha $A \subset \mathbb{R}$ nemüres és alulról nem korlátos, akkor azt mondjuk, hogy $\inf A = -\infty$.

Az így bevezetett két szimbólum segítségével értelmezhetjük a következő korlátlan intervallumokat:
$$\begin{aligned}
&[a,+\infty[\, = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}; &&]a,+\infty[\, = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\};\\
&[a,+\infty] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq +\infty\}; &&]a,+\infty] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq +\infty\};\\
&]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}; &&]-\infty,a[\, = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\};\\
&[-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty \leq x \leq a\}; && [-\infty,a[\, = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty \leq x < a\};\\
&[-\infty,\infty] = \overline{\mathbb{R}}; &&]-\infty,\infty[\, = \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

1.3 Gyakorlatok és feladatok

3.1. Gyakorlat. *Bizonyítsd be, hogy tetszőleges A, B, és C halmazok esetén igazak az alábbi egyenlőségek:*

(i) $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$;

(ii) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

(iii) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

(iv) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$;

(v) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap B) \setminus (B \cap C)$.

3.2. Gyakorlat. *Bizonyítsd be, hogy az $(A \setminus B) \subset C$ reláció pontosan akkor teljesül, ha $A \subset B \cup C$.*

3.3. Gyakorlat. *Bizonyítsd be, hogy tetszőleges A, B, és C halmazok esetén igazak a következő egyenlőségek:*

(i) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

(ii) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;

(iii) $(A \cup C) \setminus B \subset (A \setminus B) \cup C$.

3.4. Gyakorlat. *Határozd meg, hogy az X és Y halmazok közt milyen bennfoglalási reláció ($X \subset Y$, $X = Y$, vagy $X \supset Y$) teljesül, ha*

(i) $X = A \cup (B \setminus C)$, $Y = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$;

(ii) $X = (A \cap B) \setminus C$, $Y = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;

(iii) $X = A \setminus (B \cup C)$, $Y = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

(iv) $X = (A \times B) \cup (C \times B)$, $Y = (A \cup C) \times B$;

(v) $X = (A \times B) \cup (C \times D)$, $Y = (A \times C) \cup (B \times D)$;

(vi) $X = (A \cap B) \times (C \cap B)$, $Y = (A \times C) \cap (B \times D)$;

(vii) $X = (A \cup B) \times (C \cup B)$, $Y = (A \times C) \cup (B \times D)$.

3.5. Gyakorlat. *Tekintsük az A_n, $n \in \mathbb{N}$, halmazcsaládot.*

(i) *Bizonyítsd be, hogy ha $B_n = \cup_{i=0}^{n} A_i$, $n \in \mathbb{N}$, akkor*

$$\cup_{n=0}^{\infty} B_n = \cup_{n=0}^{\infty} A_n;$$

(ii) *Bizonyítsd be, hogy ha* $B_n = \cap_{i=0}^{n} A_i,\ \ n \in \mathbb{N},$ *akkor*

$$\cap_{n=0}^{\infty} B_n = \cap_{n=0}^{\infty} A_n.$$

3.6. Gyakorlat. *Tekintsük az* $A_{m,n},\ \ m, n \in \mathbb{N},$ *halmazcsaládot. Az alábbi két bennfoglalás közül melyik teljesül*

(i) $\cup_{m=0}^{\infty}(\cap_{n=0}^{\infty} A_{m,n}) \subset \cap_{n=0}^{\infty}(\cup_{m=0}^{\infty} A_{m,n})$;

(ii) $\cup_{m=0}^{\infty}(\cap_{n=0}^{\infty} A_{m,n}) \supset \cap_{n=0}^{\infty}(\cup_{m=0}^{\infty} A_{m,n})$?

3.7. Gyakorlat. *Bizonyítsd be, hogy ha* A *és* B *tetszőleges halmazok, akkor*

(i) $\complement_X \emptyset = X$ *és* $\complement_X X = \emptyset$;

(ii) $\complement(A \setminus B) = (\complement A) \cup B$;

(iii) $(A \cap \complement B) \cup (\complement A \cap B) = (A \cup B) \cap (\complement A \cup \complement B) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

(iv) $A \subset B \implies \complement B \subset \complement A$.

3.8. Gyakorlat. *Adott* A, B, *és* U *halmazok esetén határozd meg az* $X \subset U$ *halmazt úgy, hogy teljesüljön a*

$$\complement(X \cup A) \cup (X \cup \complement A) = B$$

egyenlőség, ha $A \subset U$ *és* $B \subset U$.

3.9. Gyakorlat. *Bizonyítsd be, hogy a következő halmazok megszámlálhatóak:*

(i) $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$;

(ii) *a racionális koordinátájú pontok halmaza a síkban;*

(iii) *a racionális koordinátájú csúcsokkal rendelkező háromszögek halmaza;*

(iv) *a racionális együtthatójú polinomok halmaza.*

3.1. Tulajdonság. *Ha* A, B *tetszőleges halmazok, akkor*

(i) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$;

(ii) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B) \iff A \subset B$ *vagy* $B \subset A$;

(iii) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$;

(iv) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subset \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$.

3.2. Tulajdonság. *Ha* A *egy véges halmaz és* $|A| = m$, *akkor az*

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$$

egyenlet megoldásainak száma $(2^k - 1)^m$.

Bizonyítás. Minden $x \in A$ elem az A_i halmazok közül legalább az egyikhez hozzátartozik, tehát az x-et tartalmazó A_i halmazok indexeiből készített halmaz az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz egy nemüres részhalmaza. Így ennek az indexhalmaznak a kiválasztására $2^k - 1$ lehetőség létezik. Mivel ez minden $x \in A$ esetén érvényes, összesen $(2^k - 1)^m$ a lehetőségek száma. $\square$

3.3. Tulajdonság. *(Szitaformula) Bizonyítsd be, hogy ha az* $A_1, A_2 \dots, A_n$ *halmazok végesek, akkor*

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= \sum |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + \\ &+ (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|, \\ |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| &= \sum |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cup A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cup A_j \cup A_k| - \dots + \\ &+ (-1)^{n+1} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|.\end{aligned}$$

3.4. Tulajdonság. *Bizonyítsd be, hogy ha* $x \geq 1$, *akkor*

$$2\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x} < \frac{1}{\sqrt{x}} < 2\sqrt{x} - 2\sqrt{x-1}. \tag{3.1}$$

Bizonyítás. A (3.1) egyenlőtlenséget szorozzuk végig $\sqrt{x}$-szel. Az első egyenlőtlenség ekvivalens a $(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^2 > 0$, míg a második egyenlőtlenség a $(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})^2 > 0$ egyenlőtlenséggel, és ezek igazak. $\square$

3.5. Tulajdonság. (Bernoulli[12] egyenlőtlenség) *Ha* $n \in \mathbb{N}^*$, *és az* $x_i \geq -1$, $i = 1, 2, \dots, n$ *számok azonos előjelűek, akkor*

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n. \tag{3.2}$$

Bizonyítás. A matematikai indukció módszerét használjuk. $\square$

3.6. Tulajdonság. *Ha* $n \in \mathbb{N}^*$ *és* $x \geq -1$, *akkor*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx. \tag{3.3}$$

Bizonyítás. A (3.2) egyenlőtlenségben válasszunk $x_i = x$-et, minden $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén. $\square$

[12] Johann (I) Bernoulli, 1667-1748

3.7. Tulajdonság. (Középarányosok közti egyenlőtlenség) *Ha $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_m$ pozitív valós számok, akkor a mértani középarányosuk nem nagyobb a számtani középarányosuknál, vagyis*

$$\sqrt[m]{x_1x_2\dots x_m} \le \frac{x_1+x_2+\dots+x_m}{m}. \tag{3.4}$$

3.1. Következmény. *Ha $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_m$ pozitív valós számok, akkor a harmonikus középarányosuk nem nagyobb, mint a mértani középarányosuk, vagyis*

$$\frac{m}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_m}} \le \sqrt[m]{x_1x_2\dots x_m}. \tag{3.5}$$

Bizonyítás. Helyettesítsünk x_i helyett $1/x_i$ -t a (3.4) egyenlőtlenségbe. □

A 3.7 tulajdonság bizonyítása

Cauchy[13] bizonyítása. Első lépésként igazoljuk az egyenlőtlenséget $m = 2^k$ alakú számokra.

Ha $k = 1$, akkor az egyenlőtlenség ekvivalens az $(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2 \ge 0$ egyenlőtlenséggel, és ez igaz. $k = 2$ esetén

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} &= \sqrt{\sqrt{x_1x_2}\sqrt{x_3x_4}} \le \frac{\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_3x_4}}{2}\\ &\le \frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2} = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}.\end{aligned}$$

Ha a (3.4) egyenlőtlenség igaz $m = 2^k$ -ra, akkor

$$\sqrt[2^k]{x_1x_2\dots x_{2^k}} \le \frac{x_1+x_2+\dots+x_{2^k}}{2^k} \tag{3.6}$$

tetszőleges $x_1, x_2, ..., x_{2^k} \ge 0$ számokra. Ez alapján írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}\sqrt[2^{k+1}]{x_1x_2\dots x_{2^{k+1}}} &= \sqrt{\sqrt[2^k]{x_1\dots x_{2^k}}\ \sqrt[2^k]{x_{2^k+1}\dots x_{2^{k+1}}}}\\ &\le \frac{\sqrt[2^k]{x_1\dots x_{2^k}}+\sqrt[2^k]{x_{2^k+1}\dots x_{2^{k+1}}}}{2}.\end{aligned}$$

A (3.6) egyenlőtlenség alapján

$$\sqrt[2^{k+1}]{x_1x_2\dots x_{2^{k+1}}} \le \frac{x_1+x_2+...+x_{2^k}+x_{2^k+1}+...+x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}},$$

tehát a matematikai indukció elve alapján a (3.4) egyenlőtlenség teljesül, ha m kettőnek hatványa.

Ha m nem egész kitevőjű hatványa a 2-nek, akkor létezik olyan $k \in \mathbb{N}^*$, amelyre $m < 2^k$. Ha

$$l := \frac{x_1+x_2+\dots+x_m}{m}\ (>0),$$

[13]Augustin Louis Cauchy, 1789-1857

és alkalmazzuk a (3.6) egyenlőtlenséget az $x_1, x_2, \ldots, x_m$ tetszőleges és

$$x_{k+1} = \cdots = x_{2^k} =: l$$

pozitív valós számokra, akkor a következő összefüggésekhez jutunk:

$$\sqrt[2^k]{x_1 x_2 \ldots x_m} \cdot l^{\frac{2^k - m}{2^k}} \leq \frac{ml + (2^k - m)l}{2^k} = l$$
$$\sqrt[2^k]{x_1 x_2 \ldots x_m} \leq l^{\frac{m}{2^k}} \Longleftrightarrow x_1 \ldots x_m \leq l^m. \quad \square$$

Második bizonyítás. Előbb igazoljuk az egyenlőtlenség egy sajátos esetét a matematikai indukció módszerével. Igazoljuk, hogy

(3.7) $$x_1, \ldots, x_m > 0,\ x_1 \ldots x_m = 1 \implies x_1 + x_2 + \cdots + x_m \geq m.$$

Ha $m = 1$ vagy $m = 2$, a (3.7) egyenlőtlenség nyilvánvaló. Feltételezzük, hogy $m = n$ esetén a (3.7) egyenlőtlenség teljesül, vagyis

(3.8) $$x'_1, \ldots, x'_n > 0,\ x'_1 \ldots x'_n = 1 \implies x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n \geq n.$$

Ha adott $n+1$ pozitív valós szám, amelyekre $x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1} = 1$, akkor feltételezhetjük (esetleg újraindexeljük a számokat), hogy ezek közül x_n a legnagyobb, és x_{n+1} a legkisebb. Ha $x_{n+1} = 1$ vagy $x_n = 1$, akkor $x_i = 1$, minden $i \in \{1, 2, 3, \cdots, n+1\}$ esetén, és így az egyenlőtlenség teljesül. A továbbiakban feltételezhetjük, hogy $x_{n+1} < 1$ és $x_n > 1$.

Alkalmazzuk a (3.8) tulajdonságot a következő számokra:

$$x'_i = x_i,\ i \in \{1, 2, \ldots, n-1\},\ x'_n = x_n \cdot x_{n+1}.$$

Az indukciós feltevés alapján

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n x_{n+1} \geq n.$$

Ez alapján

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} \geq n - x_n x_{n+1} + x_n + x_{n+1} = n + 1 + (1 - x_{n+1})(x_n - 1) \geq$$
$$\geq n + 1,$$

tehát a matematikai indukció elve alapján a (3.8) implikáció igaz, minden $m \in \mathbb{N}^*$ esetén. $\square$

Gyakorlatok. (a) Ha $a_1, \ldots, a_n$ pozitív valós számok és $s = a_1 + \cdots + a_n$, ahol $n \geq 2$, akkor

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{s}{s - a_k} \geq \frac{n^2}{n-1}.$$

(b) Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$n! \leq 2\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

Megoldás. (a) Az első egyenlőtlenség a harmonikus középarányos és a számtani középarányos közti egyenlőtlenségből következik az alábbi módon:

$$(n-1)s\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s-a_k} = \sum_{k=1}^{n}(s-a_k)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s-a_k} \geq n^2.$$

(b) A (3.4) egyenlőtlenségben legyen $m = n$ és $x_i = i$, ha $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, és $x_n = n/2$. $\triangle$

Gyakorlatok. (a) Ha $a_1, \ldots, a_n$ pozitív számok, akkor

$$\left(\frac{\sum a_1a_2\ldots a_{k-1}}{\binom{n}{k-1}}\right)^k \geq \left(\frac{\sum a_1a_2\ldots a_k}{\binom{n}{k}}\right)^{k-1}, \quad k \leq n.$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

(b)

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \left(\frac{\sum a_1a_2\ldots a_k}{\binom{n}{k}}\right)^{1/k}.$$

Ezt nevezzük *Maclaurin*[14]*-féle egyenlőtlenségnek.* Az egyenlőtlenség $k = 1$ esetén azonosságra redukálódik, míg $k = n$ esetén a közepek közti egyenlőtlenségre.

A Maclaurin-féle egyenlőtlenség bizonyítása megtalálható [74, 20(1969), 214-219]-ben. $\triangle$

3.8. Tulajdonság. (Lagrange[15] azonosság) *Ha a_i és b_i valós számok, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, akkor*

$$\left(\sum_{i=1}^{m}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{m}b_i^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{m}a_ib_i\right)^2 + \sum_{1\leq i<j\leq m}(a_ib_j - a_jb_i)^2. \tag{3.9}$$

Bizonyítás. A matematikai indukció módszerével, vagy direkt számolással. $\square$

3.2. Következmény. *Ha a_i és b_i valós számok $i \in \{1, \ldots, m\}$ esetén, akkor*

$$\left(\sum_{i=1}^{m}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{m}b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{m}a_ib_i\right)^2. \tag{3.10}$$

[14] Colin Maclaurin, 1698-1746

[15] Joseph Louis Lagrange (Giuseppe Lodovico Lagrangia), 1736-1813

3.3. Következmény. *Az a_i és b_i $(i \in \{1, \ldots, m\}$) valós számokra a*

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{m} b_i^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i b_i\right)^2$$

egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a_i b_j - a_j b_i = 0$, *minden* $1 \le i < j \le m$ *esetén.*

3.4. Következmény. *Ha* $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, *akkor*

$$\frac{|a_1 + a_2 + \cdots + a_m|}{m} \le \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_m^2}{m}}.$$

Bizonyítás. A (3.10) egyenlőtlenségben válasszunk $b_i = 1$-et, minden $i \in \{1, \ldots, m\}$ esetén.

□

3.9. Tulajdonság. (Csebisev[16] egyenlőtlenség) *Ha*

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n \quad \text{és} \quad b_1 < b_2 < \cdots < b_n,$$

akkor

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) < n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Bizonyítás. A $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$ összeg n^2 tagot tartalmaz, és ezeket a tagokat két osztályba sorolhatjuk:

(i) $a_k b_k$ alakú tagok, ebből n darab van. Ezek összege $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$;

(ii) $n(n-1)$ darab $a_i b_j$ alakú tag, ahol $i \neq j$. Ezek összege $\sum_{i \neq j} a_i b_j$.

A (ii) csoport tagjai páronként csoportosíthatók $a_i b_j + a_j b_i$ alakú összegekbe. Másrészt

$$a_i b_j + a_j b_i = (a_i b_i + a_j b_j) - (a_i - a_j)(b_i - b_j) < a_i b_i + a_j b_j,$$

tehát az $\sum_{i \neq j} a_i b_j$ összeg nem nagyobb, mint $n(n-1) \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$. □

3.5. Következmény. (Csebisev egyenlőtlenség) *Ha*

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \quad \text{és} \quad b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n,$$

akkor

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \le n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Az előbbi egyenlőtlenségben pontosan akkor van egyenlőség, ha

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n, \quad \text{vagy} \quad b_1 = b_2 = \cdots = b_n.$$

[16] Pafnuti Lvovich Chebyshev, 1821-1894

3.10. Tulajdonság. (Weierstrass[17]) *Ha* $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq 1$, *akkor*

$$\prod_{k=1}^{n}(1-a_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{3.11}$$

Bizonyítás. A matematikai indukció módszerét használjuk. $n = 1$ esetén azonossághoz jutunk. Ha $n = 2$, akkor

$$\prod_{k=1}^{2}(1-a_k) = 1 - a_1 - a_2 + a_1a_2 \geq 1 - a_1 - a_2 = 1 - \sum_{k=1}^{2} a_k.$$

Ha az egyenlőtlenség teljesül $n = m$-re, akkor írhatjuk, hogy

$$\prod_{k=1}^{m+1}(1-a_k) = (1-a_{m+1})\prod_{k=1}^{m}(1-a_k) = \prod_{k=1}^{m}(1-a_k) - a_{m+1}\prod_{k=1}^{m}(1-a_k) \geq$$

$$\geq \prod_{k=1}^{m}(1-a_k) - a_{m+1} \geq 1 - \sum_{k=1}^{m+1} a_k.$$

Tehát a matematikai indukció elve alapján a (3.11) egyenlőtlenség minden $n \in \mathbb{N}$ esetén igaz. $\square$

3.6. Következmény. (Lengyel olimpia, 1965-1966) *Ha az* $a_1, \ldots, a_n$ *nemnegatív valós számokra*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq \frac{1}{2},$$

akkor

$$(1-a_1)\ldots(1-a_n) \geq \frac{1}{2}.$$

3.11. Tulajdonság. ([40, 6. IMC, 1999, Második nap, 3. feladat]) *Ha az* $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq -1$ *valós számokra* $\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 0$, *akkor* $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq n/3$.

Bizonyítás. A

$$0 \leq x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = (x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

egyenlőtlenség teljesül, minden $x \geq -1$ valós számra. Ha rendre $x_1, x_2, \ldots, x_n$-et helyettesítünk és tagonként összeadjuk a kapott egyenlőtlenségeket, akkor a következő egyenlőtlenségekhez jutunk:

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i^3 - \frac{3}{4}x_i + \frac{1}{4}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 - \sum_{i=1}^{n}\frac{3}{4}x_i + \frac{n}{4} = 0 - \frac{3}{4}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{n}{4},$$

tehát $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq n/3$. $\square$

Megjegyzés. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $n = 9k$, az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számok közül k darab -1-gyel egyenlő, és $8k$ darab $1/2$-del. $\triangle$

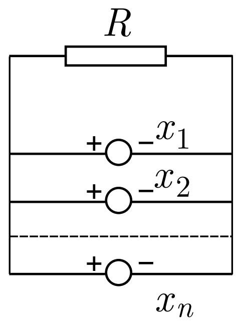
[17] Wilhelm Theodor Karl Weierstrass, 1815-1897

3.2. Alkalmazás. *n darab áramforrás belső ellenállását jelöljük r_i-vel és kapocsfeszültségét x_i-vel, ha $1 \leq i \leq n$. A párhuzamosan kapcsolt áramforrásokhoz egy R ellenállást csatlakoztattunk, amelynek működéséhez U feszültség szükséges. Bizonyítsuk be, hogy az áramforrások belső ellenállásain elveszett hőenergia (Joule-Lenz törvény) akkor minimális, ha $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = U\left(1 + \frac{1}{R\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j}}\right)$.*

Megoldás. A mellékelt ábrán látható kapcsolási rajznak megfelelően $U = R\sum\limits_{j=1}^{n} I_j$, ahol $I_j = \frac{x_j - U}{r_j}$, ha $1 \leq j \leq n$. Így a belső ellenállásokon elveszett hőmennyiség

$$\Delta Q = \sum_{j=1}^{n} \Delta Q_j = \sum_{j=1}^{n} r_j I_j^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{(x_j - U)^2}{r_j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j} x_j^2 - 2U \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j} x_j + U^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j}.$$



A Lagrange azonosság (lásd a 3.8 tulajdonságot) alapján írhatjuk, hogy

$$\Delta Q = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j}} \left[\frac{U^2}{R^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{(x_i - x_j)^2}{r_i r_j}\right].$$

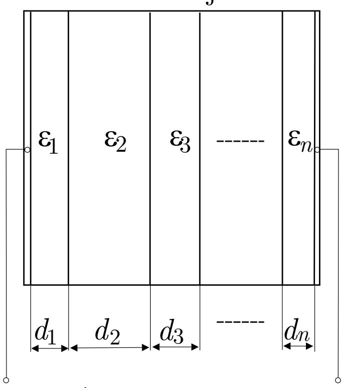
Ebből látható, hogy a ΔQ pontosan akkor minimális, ha $x_i = x_j$, minden $i, j \in \in \{1, 2, \ldots n\}$ esetén. Ha az x_1, $x_2, \ldots$, x_n feszültségek egymással egyenlők, akkor az első egyenlőségből következik, hogy $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = U\left(1 + \frac{1}{R\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j}}\right)$. ♦

Megjegyzés. A vizsgált feltétel biztosítja az áramkör hatásfokának a maximumát. A hatásfok maximuma

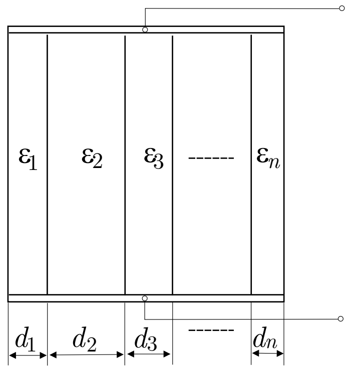
$$\eta_{max} = \frac{1}{1 + \frac{1}{R\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j}}}.$$

3.3. Alkalmazás. *Két darab, d oldalhosszú, négyzet alakú lemez közti tér n darab, téglatest alakú, homogén dielektrikummal van kitöltve. A dielektrikumok abszolút permittivitása rendre $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$. Bizonyítsd be, hogy ha a lemezek távolsága d, akkor soros kapcsolás esetén (1.11. ábra) a kondenzátor kapacitása kisebb, mint párhuzamos kapcsolás esetén (1.12. ábra).*

Megoldás. Kiszámítjuk mindkét esetben a keletkező kondenzátor kapacitását.



1.11. Ábra: Soros kapcsolás



1.12. Ábra: Párhuzamos kapcsolás

Az első esetben a kondenzátortelep kapacitása

$$C_1 = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{C_j}} = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{\frac{\varepsilon_j S}{d_j}}} = \frac{d^2}{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{d_j}{\varepsilon_j}},$$

a második esetben

$$C_2 = \sum_{j=1}^{n} C_j^* = \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon_j S}{d} = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j d_j.$$

A Cauchy-Buniakovski (vagy a harmonikus és számtani középarányos közti) egyenlőtlenség alapján írhatjuk, hogy

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{d^2} \left(\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j d_j \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{d_j}{\varepsilon_j} \right) \geq 1,$$

tehát $C_2 \geq C_1$. ♦

Kitűzött feladatok

1. Bizonyítsd be, hogy ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tetszőleges halmazok, akkor az $A_1 \Delta A_2 \Delta \ldots \Delta A_n$ halmazban pontosan azok az elemek vannak, amelyek az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halmazok közül pontosan páratlan soknak az elemei.

2. Bizonyítsd be, hogy $p_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{n} C_n^i p_i$, $p_0 = 1$, ahol p_n az n elemű halmazon értelmezhető ekvivalencia relációk száma.

3. (Cantor-Bernstein[18]) Bizonyítsd be, hogy ha az A és B halmazra léteznek az $f : A \to B$ és $g : B \to A$ injektív függvények, akkor létezik $h : A \to B$ bijektív függvény is.

[18]Serghei Bernstein, 1880-1968

4. Azt mondjuk, hogy az A rendezett halmaz

   a) kielégíti a minimumfeltételt, ha A-nak minden nem üres részhalmaza tartalmaz legalább egy minimális elemet;
   b) kielégíti a csökkenő sorozatok megszakadásának feltételét, ha A-ban minden szigorúan csökkenő sorozat véges;
   c) induktív, ha minden T tulajdonságra teljesül a következő feltétel: ha minden $a \in A$ elemre abból, hogy az a alatti elemek teljesítik T-t, következik, hogy a is teljesíti T-t, akkor A minden elemére teljesül T.

   Igazold, hogy az előbbi három tulajdonság egymással egyenértékű!

5. Bizonyítsd be, hogy az egyenes pontjainak bármely nem üres, nyitott H halmaza előállítható megszámlálható sok olyan, páronként egymásba nem nyúló, nyitott intervallum egyesítéseként, amelyek végpontjai nem tartoznak H-ba.

6. (Borel[19]) Bizonyítsd be, hogy ha a $H \subset \mathbb{R}$ ponthalmaz korlátos és zárt, akkor minden nyílt lefödéséből kiválasztható egy véges lefödés (nyílt lefödés alatt egy olyan nyílt halmazokból álló rendszert értünk, amelynek az egyesítése tartalmazza H-t).

7. (Riesz[20]) Ha korlátos és zárt halmazok valamely $(H_i)_{i\in I}$ rendszerének bármely véges részrendszere rendelkezik közös ponttal, akkor a rendszerbe tartozó valamennyi halmaznak van közös pontja.

8. (Cantor-Bendixon[21]) Minden H zárt halmaz előállítható egy önmagában sűrű (perfekt) és egy megszámlálható halmaz egyesítéseként.

9. A Bernoulli egyenlőtlenség segítségével igazold, hogy ha $u, v, b > 0$, akkor
$$uv^b < \left(\frac{u+bv}{b+1}\right)^{b+1}.$$

10. Bizonyítsd be, hogy ha $x_i \geq 0$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, akkor
$$x_n^n \geq x_1(2x_2 - x_1)(3x_3 - 2x_2)\ldots(nx_n - (n-1)x_{n-1}).$$

11. Bizonyítsd be, hogy ha $a_j \geq 0$, $j \in \mathbb{N}^*$ és $A_k = \frac{1}{k}\sum\limits_{j=1}^{k} a_j$, $G_k = \sqrt[k]{\prod\limits_{j=1}^{k} a_j}$, akkor
$$nG_n - (n-1)G_{n-1} \leq a_n - \frac{n-1}{n}(\sqrt{G_{n-1}} - \sqrt{a_n})^2 \text{ és}$$

[19] Emile Borel, 1871-1956
[20] Riesz Frigyes, 1880-1956
[21] Ivar Bendixon, 1861-1935

$$k(A_k - G_k) \geq (k-1)(A_{k-1} - G_{k-1}).$$

12. (Bencze Mihály[22]-Marian Dincă[23]) Ha $a_i \geq 0$, minden $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén, akkor
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i - \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \geq \frac{1}{n^2} \sum_{1 \geq i < j \geq n} (\sqrt{x_i} - \sqrt{x_j})^2.$$

13. Igazold, hogy az előbbi egyenlőtlenségekből következik a számtani-mértani közepek közti egyenlőtlenség.

14. (Bencze Mihály) Ha az $(a_k)_{k=\overline{1,n}}$ és $(b_k)_{k=\overline{1,n}}$ sorozatok azonos rendezésűek, valamint $(c_k)_{k=\overline{1,n}}$ és $(d_k)_{k=\overline{1,n}}$ két tetszőleges pozitív sorozat, akkor
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} d_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k d_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} c_k\right) \geq$$
$$\geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k c_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k d_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k c_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k d_k\right)$$

15. Bizonyítsd be, hogy a Csebisev egyenlőtlenség bizonyítása során felhasznált tulajdonságból (ha az $(a_k)_{k=\overline{1,n}}$ és $(b_k)_{k=\overline{1,n}}$ sorozatok azonos rendezésűek, akkor a $\sum_{k=1}^{n} a_k b_{\sigma(k)}$ maximuma az identikus permutációra van, és minimuma a fordított rendezésre) következik a számtani-mértani közepek közti egyenlőtlenség.

16. (Hurwitz[24], 1891) Ha f egy függvény, akkor
$$Pf(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} f\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right)$$
(ha f k változós, akkor csak az első k változót vesszük figyelembe, tehát $Px^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (n-1)! \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^n$). Bizonyítsd be, hogy ha $\phi_j = P\left[\left(x_1^{n-j} - x_2^{n-j}\right)(x_1 - x_2)x_3 \ldots x_{j+1}\right]$, akkor
$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^n}{n} - x_1 x_2 \ldots x_n = \frac{1}{2n!} \sum_{k=1}^{n} \phi_k.$$

Igazold, hogy ebből következik a számtani-mértani közepek közti egyenlőtlenség.

[22] 505600 Sacele, Str. Harmanului 6, Jud. Braşov
[23] marianprofesoru@yahoo.com
[24] Adolf Hurwitz, 1859-1919

17. (José Luis Diáz-Barrero[25]) Bizonyítsd be, hogy ha $\alpha \in \mathbb{C}$ tetszőleges és $(a_k)_{k=\overline{1,n}}$, valamint $(b_k)_{k=\overline{1,n}}$ két komplex számsorozat, akkor
$$\operatorname{Re}\left(\overline{\alpha}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) \le \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + |\alpha|^2 \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right).$$

18. Bizonyítsd be, hogy ha $(a_k)_{k\ge 1}$ és $(b_k)_{k\ge 1}$ két valós számsorozat, akkor az
$$E_n = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$
sorozat növekvő (ezt nevezik az indexhalmaz szerinti monotonitásnak).

19. (Bencze Mihály) Ha $a_k, b_k > 0$, minden $k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ esetén, akkor
$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n+1} b_k\right) \ge \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{1\le i<j\le n} (a_i b_j + a_j b_i) +$$
$$+2\sqrt{a_{n+1}b_{n+1}}\left(\sqrt{a_n b_1} + \sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{a_k b_{k+1}}\right) \ge \left(\sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{a_k b_k}\right)^2.$$

20. (Pólya[26]-Szegő[27]) Bizonyítsd be, hogy ha $a_k \in [m_1, M_1]$ és $b_k \in [m_2, M_2]$, ha $1 \le k \le n$, akkor
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \le \frac{(m_1 m_2 + M_1 M_2)^2}{4 m_1 m_2 M_1 M_2}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2.$$

21. (Aczél[28]) Bizonyítsd be, hogy ha $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, minden $1 \le k \le n$ esetén és $a_1^2 > \sum_{k=2}^{n} a_k^2$, akkor
$$\left(a_1^2 - \sum_{k=2}^{n} a_k^2\right)\left(b_1^2 - \sum_{k=2}^{n} b_k^2\right) \le \left(a_1 b_1 - \sum_{k=2}^{n} a_k b_k\right)^2.$$

22. (Walther Janous[29]) Bizonyítsd be, hogy ha $I \subset (0, \infty)$, és $f : I \to \mathbb{R}$ egy növekvő függvény, akkor tetszőleges $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ esetén
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j f(x_j)}{s - x_j} \ge \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} f(x_j),$$
ahol $s = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j$.

[25] jose.luis.diaz@upe.edu
[26] Pólya György, 1887-1985
[27] Szegő Gábor, 1895-1985
[28] Aczél János, 1924-
[29] walther.janous@tirol.com

23. Bizonyítsd be, hogy ha $m, n \in \mathbb{N}^*$, akkor

$$\frac{(4m)!(4n)!}{m!n!(2m+n)!(m+2n)!} \in \mathbb{N}.$$

24. Bizonyítsd be, hogy ha $p \in \mathbb{N}$ egy páratlan természetes szám, akkor nem létezik olyan $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, amelyre $f(f(x)) = x + p$, $\forall x \in \mathbb{N}$.

25. (András Szilárd)

    a) Bizonyítsd be, hogy ha $x, y, z \in \mathbb{R}$, akkor

    $$(x+y+z)^5 = \sum(-x+y+z)^5 + 80xyz(x^2+y^2+z^2);$$

    b) Bizonyítsd be, hogy ha a, b és c egy háromszög oldalainak hosszai, akkor

    $$(a+b+c)^5 \geq 81abc(a^2+b^2+c^2).$$

2. Fejezet

Normált terek és metrikus terek

Mindent felfedeztek már.
Csak a banalitások tájékán
maradtak még feltáratlan területek.
Stanislaw Jerzy Lec

Ebben a fejezetben felsorolunk néhány alapfogalmat és tulajdonságot, normált terekre és metrikus terekre vonatkozóan.

2.1 Vektorterek

2.1.1 Az $\mathbb{R}^k$ vektortér

Minden k pozitív egész esetén $\mathbb{R}^k$-nal jelöljük a rendezett valós szám k-asok halmazát. Az

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$$

valós szám k-as ($x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$) elemeit az x *koordinátáinak* nevezzük. Az $\mathbb{R}^k$ halmaz elemeit *vektoroknak* vagy *pontoknak*[30] nevezzük. Ha $y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ és α egy valós szám, akkor az

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_k + y_k), && + : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k; \\ \alpha x &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_k), && \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k \end{aligned}$$

összefüggésekkel értelmezhetünk egy belső („ + ”) és egy külső („ $\cdot$ ”) műveletet. Az első műveletet a vektorok *összeadásának*, a másodikat a *vektoroknak skalárral való szorzásának* nevezzük. Az alábbi tulajdonságok a műveletek értelmezésének azonnali következményei.

1.1. Tétel. (a) $(\mathbb{R}^k, +)$ *kommutatív csoport;*
(b) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, *bármely* $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^k$ *esetén;*
(c) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, *bármely* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^k$ *esetén;*
(d) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, *bármely* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^k$ *esetén.*

---

[30] $k \in \{1, 2, 3\}$ esetén kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van az egyenes, sík, illetve tér geometriai értelmeben vett pontjai és $\mathbb{R}^k$ elemei közt.

Az $\mathbb{R}^k$ halmaz az előbb értelmezett műveletekkel egy *valós vektortér* (*valós lineáris tér*). Ez a tér a legegyszerűbb modellje a véges dimenziós vektortereknek, ezért előbb ennek a térnek néhány tulajdonságát soroljuk fel, majd az itt megjelenő fogalmakat értelmezzük általános esetben is. A geometriai analógia alapján az $\mathbb{R}^k$ vektorteret *véges dimenziósnak,* pontosabban k-dimenziósnak nevezzük. A megszokott geometriai távolságfogalom és a skaláris szorzat ($\mathbb{R}^2$-ban vagy $\mathbb{R}^3$-ban) általánosítható az $\mathbb{R}^k$ térre is. Az $\mathbb{R}^k$ vektorteret k-dimenziós *euklideszi*[31] térnek nevezzük, ha értelmezett benne egy skaláris szorzat, és az ebből származó távolság. Ezeknek a megnevezéseknek pontos értelmezése és motivációja a továbbiakban jelenik meg (lásd például a 54. oldalt).

A $(\mathbb{R}^k,+)$ csoport semleges elemét 0-val jelöljük és a tér *nulleleménék* vagy *origónak* nevezzük. Ez a jelölés általában nem vezet félreértéshez, mert az összefüggésekből általában kiderül, hogy a 0 szimbólum a 0 valós számot vagy az $\mathbb{R}^k$ tér nullelemét (azaz $(0,0,\dots,0)$-t) jelöli.

1.1. Tulajdonság. (Számolási szabályok $\mathbb{R}^k$-ban)
(a) $0\cdot x=0,\ \forall x\in\mathbb{R}^k$ *(az első 0 a nulla skalár, a második 0 a nullvektor);*
(b) $\alpha\cdot 0=0,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$ *(mindkét 0 a tér nullvektorát jelöli);*
(c) $(-1)x=(-x_1,\dots,-x_n),\ \forall x\in\mathbb{R}^k$;
(d) $\alpha(x_1+\cdots+x_n)=\alpha x_1+\cdots+\alpha x_n,\ \forall\ \alpha\in\mathbb{R},$ *és* $x_i\in\mathbb{R}^k,\ i=1,2,\dots,n$ *esetén;*
(e) $(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)x=\alpha_1 x+\cdots+\alpha_n x,\ \forall\ \alpha_i\in\mathbb{R},\ i=1,2,\dots,n,$ *és* $x\in\mathbb{R}^k$ *esetén.*

Az $x,y\in\mathbb{R}^k$ vektorok *skaláris szorzatát* az $\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$,

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^k x_iy_i$$

összefüggésekkel értelmezzük.

1.2. Tétel. *Bármely $x,y\in\mathbb{R}^k$ vektorok és $\alpha\in\mathbb{R}$ valós szám esetén érvényesek a következő összefüggések:*

(a) $\langle x,x\rangle\ge 0$;

(b) $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$;

(c) $\langle x,0\rangle=0$;

(d) $\langle\alpha x,y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle$.

Egy tetszőleges $x\in\mathbb{R}^k$ vektor *euklideszi normája* a

$$\|x\|_2=\sqrt{\langle x,x\rangle}=\left(\sum_{i=1}^k x_i^2\right)^{1/2}$$

[31] Euklidesz, $(E\upsilon\kappa\lambda\iota\delta\eta\varsigma)$, (i.e.) $\sim 325-\sim 265$

valós szám. Az $x \in \mathbb{R}^k$ vektor *Minkowski*[32] *normája* (vagy l^1 *-normája*) a

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_k|$$

valós szám, és a *Csebisev normája* (vagy l^∞ *-normája*)

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_k|\}.$$

Általánosan, ha $1 \leq p < +\infty$, értelmezhetjük az $x \in \mathbb{R}^k$ vektor l^p *-normáját* az

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + \cdots + |x_k|^p\right)^{1/p}$$

egyenlőséggel. Látható, hogy az $\mathbb{R}^k$ vektortéren több különböző normát értelmezhetünk. Ezek $k = 1$-re a valós számokon értelmezett távolságfüggvényt származtatják, tehát mindegyiket tekinthetjük távolságfüggvénynek az $\mathbb{R}^k$ vektortérben. A továbbiakban, ha egy tetszőleges normára hivatkozunk, akkor a $\|\cdot\|$ jelölést használjuk, míg ha az itt értelmezett normákra hivatkozunk, akkor a $\|\cdot\|_p$ és $\|\cdot\|_\infty$ szimbólumokat használjuk.

1.3. Tétel. *Ha* $x, y, z \in \mathbb{R}^k$, *és* $\alpha \in \mathbb{R}$, *akkor*
(a) $\|x\| \geq 0$;
(b) $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
(c) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;
(d) $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_2\|y\|_2$;
(e) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;
(f) $\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|$.

Bizonyítás. (a), (b), és (c) az értelmezések azonnali következményei.

(d) Ha $y = 0$, a két oldal éppen egyenlő. Ha $y \neq 0$, tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$-re

$$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle.$$

Ha ezt az egyenlőtlenséget $\lambda = -\dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$-ra alkalmazzuk, akkor a

$$0 \leq \langle x, x\rangle - 2\frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle y, y\rangle} + \frac{\langle x, y\rangle^2\langle y, y\rangle}{\langle y, y\rangle^2} = \frac{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle^2}{\langle y, y\rangle}$$

egyenlőtlenséghez jutunk, tehát (d) igaz (ugyanazt az egyenlőtlenséget kapjuk, ha a λ-ban másodfokú egyenlőtlenség diszkriminánsát számítjuk ki, hisz ez nem lehet negatív).

(e) $p \geq 1$ esetén a bizonyítandó egyenlőtlenség éppen a Minkowski egyenlőtlenség (lásd 64. oldal). A Csebisev normára a bizonyítás a következő:

$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty, \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\},$$

tehát az $|x_i + y_i|$ maximális értéke sem lehet nagyobb $\|x\|_\infty + \|y\|_\infty$-nál.

(f) Az előbbi alpontkövetkezménye. □

[32] Hermann Minkowski, 1864-1909

1.1. Következmény. (Cauchy-Buniakovski[33] egyenlőtlenség) *Az előbbi tétel (d) alpontja alapján*

$$|\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \beta_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |\beta_i|^2}, \tag{1.1}$$

ahol $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, *minden* $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$*-ra.*

Azokat a $\|\cdot\| : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre teljesül az 1.3 tétel (a), (b), (c), és (e) állítása, $\mathbb{R}^k$-n értelmezett *normának* nevezzük.

2.1.2 Vektorterek

Az előbbi paragrafus néhány fogalmát általánosabb feltételek közt is értelmezhetjük. Az X nemüres halmazt *vektortérnek* nevezzük a $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$) test fölött, ha

(a) értelmezett egy $+ : X \times X \to X$ belső művelet (*vektorok összeadása*), amelyre $X = (X, +)$ Abel-féle csoport;

(b) értelmezett egy $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ külső művelet (*skalárral való szorzás*), amely teljesíti a következő négy feltételt:

  (b_1) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \ \forall x, y \in X, \ \lambda \in \mathbb{K}$;

  (b_2) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \ \forall x \in X, \ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$;

  (b_3) $(\lambda\mu)x = \lambda\mu x, \ \forall x \in X, \ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$;

  (b_4) $1 \cdot x = x, \forall x \in X$.

Ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, a vektorteret *valós vektortérnek* nevezzük, míg $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén *komplex vektortérnek*. Az X vektortér elemeit *vektoroknak*, míg a $\mathbb{K}$ test elemeit *skalároknak* nevezzük.

1.2. Tulajdonság. *Ha* X *egy* $\mathbb{K}$ *fölötti vektortér, akkor*

(a) *bármely* $x, y \in X, \ \lambda \in \mathbb{K}$ *esetén* $\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y$;

(b) *bármely* $x \in X, \ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *esetén* $(\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x$;

(c) *bármely* $\lambda \in \mathbb{K}$*-ra* $\lambda \cdot 0 = 0$;

(d) *bármely* $x \in X$*-re* $0 \cdot x = 0$;

(e) *bármely* $x \in X$*-re* $(-1)x = -x$;

(f) $\lambda \in \mathbb{K}$ *és* $x \in X$ *esetén a* $\lambda x = 0$ *egyenlőségből következik, hogy* $\lambda = 0$ *vagy* $x = 0$.

[33]Victor Yakovlevich Buniakovski, 1804-1889

Bizonyítás. (a) $\lambda x = \lambda[(x-y)+y] = \lambda(x-y)+\lambda y$;
(b) $\lambda x = [(\lambda-\mu)+\mu]x = (\lambda-\mu)x+\mu x$;
(c) $\lambda 0 = \lambda(x-x) = \lambda x - \lambda x = 0$;
(d) válasszunk $\lambda = \mu$-t (b)-ben;
(e) $0 = 0x = (1-1)x = 1x + (-1)x = x + (-1)x$;
(f) ha $\lambda \neq 0$, akkor $x = (\lambda)^{(-1)}(\lambda x) = 0$. $\square$

Ha Y a $\mathbb{K}$ fölötti X vektortér egy nemüres részhalmaza, és az X-beli műveletekkel Y is vektortér, akkor Y-t az X *alterének* vagy *részterének* nevezzük. Igazolható, hogy Y pontosan akkor altere az X vektortérnek, ha bármely $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ és $x, y \in Y$ esetén $\alpha x + \beta y \in Y$. Az $y_1, y_2, \ldots, y_n \in X$ vektoroknak az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ skalárokkal számolt *lineáris kombinációján* az $x = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n$ vektort értjük. Az $Y \subset X$ halmaz elemeiből képezhető összes lineáris kombináció halmazát az Y *lineáris burkolójának* nevezzük. A 1.3 tulajdonságban igazoljuk, hogy egy Y halmaz burkolója a legkisebb olyan résztér, amely tartalmazza az Y-t, ezért az Y *által kifeszített lineáris résztérnek is nevezzük,* és $\operatorname{lin} Y$-nal jelöljük.

Példák. (a) Ha X egy $\mathbb{K}$ fölötti vektortér, akkor a $\{0\}$ és az X részhalmazok résztrek is. Az előbbi két résztértől különböző résztereket valódi résztereknek nevezzük.
(b) $\mathbb{R}^k$ egy valós vektortér az előbbi paragrafusban értelmezett műveletekkel. A továbbiakban, ha az $\mathbb{R}^k$ vektortérre hivatkozunk (a műveletekre való hivatkozás nélkül), akkor ezt a lineáris térstruktúrát értjük alatta.
(c) Az $X = \mathbb{R}^3$ vektortérnek az

$$Y = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

részhalmaza egy résztér.
(d) Ha az

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldásait $\mathbb{R}^n$ elemének tekintjük, akkor a megoldások Y halmaza egy résztere az $\mathbb{R}^n$ vektortérnek. $\triangle$

1.3. Tulajdonság. *Ha $Y \neq \emptyset$ a $\mathbb{K}$ fölötti X vektortér részhalmaza, akkor*

(a) *$Y \subset \operatorname{lin} Y$ és $\operatorname{lin} Y$ résztere X-nek;*

(b) *X-nek bármely Z résztere esetén, ha $Y \subset Z$, akkor $\operatorname{lin} Y \subset Z$.*

Bizonyítás. (a) Bármely $x \in Y$-ra $x = 1x \in \operatorname{lin} Y$, tehát $Y \subset \operatorname{lin} Y$. Ha $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ és $x, y \in \operatorname{lin} Y$, akkor

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \text{ és } y = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \cdots + \beta_m y_m,$$

valamilyen $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $x_i \in Y$, ha $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\beta_j \in \mathbb{K}$, $y_j \in Y$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ esetén. Így létezik olyan $\gamma_i \in \mathbb{K}$ és $z_i \in Y$, amelyre

$$\alpha x + \beta y = \gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 + \cdots + \gamma_k z_k,$$

ahol $\{z_1, z_2, \dots, z_k\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cup \{y_1, y_2, \dots y_m\}$.

(b) Ha $z \in \operatorname{lin} Y$, akkor z felírható $z = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ alakban valamilyen α_i skalárokkal és valamilyen $x_i \in Y \subset Z$ vektorokkal. Mivel Z résztere X-nek, $z \in Z$. $\square$

A $\mathbb{K}$ fölötti X vektortérben azt mondjuk, hogy az $Y \subset X$ elemei *lineárisan függetlenek,* ha bármely $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, és bármely $x_1, \dots, x_n \in Y$ páronként különböző elemek ($x_i \neq x_j$, ha $i \neq j$) esetén az alábbi implikáció igaz:

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \implies \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

A lineáris függetlenség egy jellemzése a következő:

1.4. Tulajdonság. *A $\mathbb{K}$ fölötti X vektortérben az $Y \subset X$ nemüres halmaz elemei pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha bármely $x \in Y$ esetén $x \notin \operatorname{lin}(Y \setminus \{x\})$.*

A $\mathbb{K}$ fölötti X vektortérben az $Y \subset X$ részhalmaz elemeit *lineárisan függőknek* nevezzük, ha nem lineárisan függetlenek. Ez pontosan akkor teljesül, ha léteznek olyan $\alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{K}$, nem mind 0 skalárok és $x_1, \dots, x_n \in Y$ vektorok, amelyekre $x_i \neq x_j$, ha $i \neq j$, és

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0.$$

Az X vektortér egy B részhalmazát az X egy *bázisának* nevezzük, ha

(a) B lineárisan független;

(b) $\operatorname{lin} B = X$.

1.5. Tulajdonság. *Bármely, legalább két elemet tartalmazó, vektortérnek létezik bázisa.*

1.6. Tulajdonság. *Ha egy vektortérnek létezik $n \in \mathbb{N}^*$ elemből álló bázisa, akkor minden bázisa pontosan n elemet tartalmaz*[34].

Általánosabban:

1.7. Tulajdonság. *Ha B_0 és B_1 az X vektortér két bázisa, akkor $B_0 \sim B_1$, vagyis a két bázisnak ugyanaz a számossága.*

Az előbbi tulajdonság alapján a bázis számossága a tér egy jellemzője. Ezt nevezzük az X vektortér *dimenziójának.*

[34] a bizonyítás megtalálható [6]-ban

$$\dim X = \begin{cases} |B|, & X \neq \{0\}, B \text{ bázisa } X-\text{nek} \\ 0, & X = \{0\} \end{cases}$$

Példák. (a) Az $\mathbb{R}$ halmazt tekinthetjük $\mathbb{R}$ fölötti vektortérnek. Ennek a térnek a dimenziója 1, mert az $e_1 = 1$ elemből álló halmaz bázisa $\mathbb{R}$-nek. Tetszőleges nullától különböző x elemre a $B = \{x\}$ halmaz egy bázis.
(b) Az $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$ valós vektortér *kanonikus bázisának* az

$$\begin{aligned} e_1 =&(1,0,0,\dots,0,0), \quad e_2 = (0,1,0,\dots,0,0), \quad e_3 = (0,0,1,\dots,0,0), \dots \\ e_{k-1} =&(0,0,0,\dots,1,0), \quad e_k = (0,0,0,\dots,0,1) \end{aligned}$$

vektorokból álló halmazt nevezzük. Látható, hogy $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ valóban egy bázis, és ha $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, akkor $x = \sum\limits_{j=1}^{k} x_j e_j$. Ez alapján $\dim \mathbb{R}^k = k$. Az is belátható, hogy $\mathbb{R}^k$-ban végtelen sok bázist szerkeszthetünk. Például a következő rendszer is bázist alkot:

$$\begin{aligned} e_1 =&(1,0,0,\dots,0,0), \quad e_2 = (1,1,0,\dots,0,0), \quad e_3 = (1,1,1,\dots,0,0), \dots \\ e_{k-1} =&(1,1,1,\dots,1,0), \quad e_k = (1,1,1,\dots,1,1). \end{aligned}$$

(c) Tekintsük a valós együtthatójú polinomok $\mathbb{R}[X]$ halmazát a polinomok összeadásával és a polinomoknak skalárral való szorzásával. Ez egy végtelen dimenziós vektortér, és egy bázisa az $1, X, X^2, \dots, X^n, \dots$ polinomrendszer. Látható, hogy minden polinom az előbbi rendszer véges sok elemének lineáris kombinációja, és bármely $n \in \mathbb{N}^*$-re az

$$a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 = 0$$

polinom azonosságból következik, hogy minden együttható 0. Tehát $\dim(\mathbb{R}[X]) = \aleph_0$. $\triangle$

Tekintsük az X és Y vektortereket a $\mathbb{K}$ test fölött. Az $f : X \to Y$ függvényt *additívnak* nevezzük, ha

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall\, x, y \in X.$$

Ha f additív, akkor látható, hogy $f(0) = 0$ és $f(-x) = -f(x)$, minden $x \in X$ esetén.
Az $f : X \to Y$ függvényt *homogénnek* nevezzük, ha

$$f(\alpha x) = \alpha f(x), \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K},\ x \in X.$$

Az $f : X \to Y$ függvényt *lineárisnak* nevezzük, ha additív és homogén, vagyis ha

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y), \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ x, y \in X.$$

Ha $Y = \mathbb{K}$ és $f : X \to \mathbb{K}$, akkor f-et *funkcionálnak* nevezzük.

Példák. (a) Ha X és Y a $\mathbb{K}$ test fölötti vektorterek, akkor az $f : X \to Y,\ f(x) = 0$, $\forall\ x \in X$ függvény lineáris.
(b) Ha X egy vektortér $\mathbb{K}$ fölött, akkor az $f : X \to X,\ f(x) = x,\ \forall x \in X$ *identikus függvény* lineáris.
(c) Ha az $A = (a_{i\,j})_{\substack{1\le i\le m,\\ 1\le j\le n}}$ mátrix elemei a $\mathbb{K}$ testből vannak, akkor az $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$,

$$f(x) = (\sum_{j=1}^{n} a_{1\,j}x_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2\,j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{m\,j}x_j), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \tag{1.2}$$

függvény lineáris.
(d) Ha $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ egy lineáris függvény, akkor létezik olyan A mátrix, amelyre f előállítható az előbbi alpontban megadott (1.2) alakban. A mátrix $a_{i\,j}$ elemeire

$$(a_{1\,j}, a_{2\,j}, \dots, a_{m\,j}) = f(e_j), \quad 1 \le j \le n, \tag{1.3}$$

ahol $e_1, e_2, \dots, e_n$ a $\mathbb{K}^n$ vektortér kanonikus bázisa.
(e) A (c) és (d) alpontok alapján minden $m \times n$-es, $\mathbb{K}$-beli elemeket tartalmazó mátrixhoz tartozik egy $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ lineáris leképezés, amit az (1.2) összefüggéssel értelmezünk, és minden $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ lineáris leképezéshez tartozik egy $m \times n$-es mátrix ((1.3) szerint), amelynek elemei $\mathbb{K}$-ból vannak. Ugyanakkor a két megfeleltetés egymás inverze, tehát azonosíthatjuk az $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ lineáris leképezéseket a hozzájuk tartozó mátrixszal. $\triangle$

2.1.3 Normált terek

Az X nemüres halmazt *normált térnek* nevezzük, ha

(a) X vektortér valamilyen $\mathbb{K}$ test fölött;

(b) értelmezett egy $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ függvény a következő tulajdonságokkal:

- (b_1) $\|x\| \ge 0,\ \forall x \in X$ és $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
- (b_2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|,\ \forall x, y \in X$ és $\lambda \in \mathbb{K}$;
- (b_3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|,\ \forall x, y \in X$ (háromszög egyenlőtlenség).

A $\|\cdot\|$ függvényt *normának* nevezzük. A normált tér jelölésére általában az $(X, \|\cdot\|)$ szimbólumot használjuk. Ha nem vezet félreértéshez (egyértelműen eldönthető, hogy milyen normát használunk), használhatjuk egyszerűen az X jelölést is.
Megjegyzés. A fejezet első paragrafusában láttuk, hogy az $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_p)$, $p \ge 1$, és $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_\infty)$ terek normált terek. $\triangle$

Tekintsünk egy $(X, \|\cdot\|)$ normált teret és egy (x_n) sorozatot X-ben. Az (x_n) sorozatot *konvergensnek* nevezzük, ha létezik $x \in X$ úgy, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. Ezt a $\lim x_n = x$ vagy $x_n \to x$ szimbólummal jelöljük.

Az (x_n) sorozatot *Cauchy sorozatnak* vagy *fundamentális sorozatnak* nevezzük, ha bármely $\varepsilon > 0$ valós számra létezik olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ küszöbszám, amelyre

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon \text{ ha } n, m \in \mathbb{N}^*,\ n, m \geq n_\varepsilon.$$

Egy $(X, \|\cdot\|)$ normált teret *Banach térnek* nevezünk, ha X-ben minden Cauchy sorozat konvergens.

Példák. (a) Ha az $X = \mathbb{R}^n$ vektortérben az euklideszi normát tekintjük, vagyis $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ normája

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{1/2},$$

akkor egy Banach teret kapunk (lásd az 1.8 tételt a 90. oldalon).

(b) Ha $\mathrm{C}[0,1]$-gyel jelöljük a $[0,1]$ intervallumon értelmezett valós értékű folytonos függvények halmazát, akkor a függvények összeadásával és a skalárral való szorzással $\mathrm{C}[0,1]$ egy vektortér. Ezen a vektortéren értelmezzük a

$$\|x\|_\infty = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|$$

függvényt. Ez a függvény egy norma. A (b_1) és (b_2) axiómák azonnaliak, ellenőrizzük a (b_3) axiómát. Ha $x, y \in \mathrm{C}[0,1]$, akkor

$$\begin{aligned} \|x+y\|_\infty &= \max_{t \in [0,1]} |x(t) + y(t)| \leq \max_{t \in [0,1]} [|x(t)| + |y(t)|] \leq \\ &\leq \max_{t \in [0,1]} |x(t)| + \max_{t \in [0,1]} |y(t)| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty, \end{aligned}$$

tehát $(\mathrm{C}[0,1], \|\cdot\|)$ normált tér. Igazolható, hogy ez a tér Banach tér (lásd a 2.1 tételt a 122 oldalon).

(c) Jelölje m a korlátos valós sorozatok halmazát. $x \in m$ esetén értelmezzük a

$$\|x\| = \sup_{k \geq 0} \{|x_k|\}$$

normát. Igazolható, hogy $(m, \|\cdot\|)$ egy normált tér.

1.8. Tulajdonság. *Minden $(X, \|\cdot\|)$ normált térben*

(a) $\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\|$;

(b) $\|\lambda_n x_n - \lambda x\| \leq |\lambda_n| \|x_n - x\| + \|x\| |\lambda_n - \lambda|$;

(c) $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\|$.

1.2. Következmény. *Ha (x_n) és (y_n) két sorozat az $(X, \|\cdot\|)$ normált térben és (λ_n) egy sorozat $\mathbb{K}$-ban, akkor*

(a) $x_n \to x$ *és* $y_n \to y \Rightarrow x_n + y_n \to x + y$;

(b) $x_n \to x$ *és* $\lambda_n \to \lambda \Rightarrow \lambda_n x_n \to \lambda x$;

(c) $x_n \to x \Rightarrow \|x_n\| \to \|x\|$.

2.1.4 Hilbert terek

Tekintsük a H vektorteret a $\mathbb{K}$ test fölött ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ vagy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). A $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \to \mathbb{K}$ függvényt *skaláris szorzatnak* nevezzük, ha bármely $x, y, u, v \in H$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén

(a) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (a felülvonás a komplex konjugálást jelenti, tehát $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$ és valós vektorterekre a szimmetriát jelenti);

(b) $\langle v + u, y \rangle = \langle v, y \rangle + \langle u, y \rangle$;

(c) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$;

(d) $\langle x, x \rangle \geq 0$, és $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

Minden skaláris szorzat származtat egy normát a $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ összefüggés alapján. A norma értelmezéséből a (b_1) és (b_2) axióma azonnal ellenőrizhető, a (b_3) pedig az 1.4 tételből következik. A fordítottja nem igaz, tehát nem minden norma származik skaláris szorzatból.

Azokat a H normált tereket, amelyeknek a normáját valamilyen skaláris szorzat származtatja, *pre-Hilbert tereknek* nevezzük.

Ha egy $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ pre-Hilbert tér minden Cauchy sorozata konvergens, akkor a teret Hilbert[35] térnek nevezzük.

1.4. Tétel. (Cauchy-Buniakovski-Schwarz[36] egyenlőtlenség) *Ha x, y egy $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ pre-Hilbert tér elemei, akkor*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|. \tag{1.4}$$

Bizonyítás. Feltételezhetjük, hogy $y \neq 0$, mert ellenkező esetben (1.4) igaz.

Így $\langle y, y \rangle > 0$, tehát minden $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

$$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \overline{\lambda} \langle y, y \rangle.$$

Ha ezt $\lambda = -\langle x, y \rangle / \langle y, y \rangle$ -ra alkalmazzuk, a

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle y, x \rangle - \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle x, y \rangle + \frac{\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle^2} \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle y, x \rangle$$

egyenlőtlenséghez jutunk, tehát (1.4) igaz, minden $y \in H$ esetén. □

1.3. Következmény. *Ha $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ egy pre-Hilbert tér és $x, y \in H$, akkor*

$$\langle x + y, x + y \rangle \leq (\sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle})^2. \tag{1.5}$$

[35] David Hilbert, 1862-1943

[36] Hermann Amaudus Schwarz, 1843-1921

Bizonyítás. Az (1.4) egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned}\langle x+y, x+y\rangle &= \langle x,x\rangle + 2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \le \\ &\le \langle x,x\rangle + 2\sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle} + \langle y,y\rangle = (\sqrt{\langle x,x\rangle} + \sqrt{\langle y,y\rangle})^2. \quad \square\end{aligned}$$

Minden pre-Hilbert térben értelmezhetünk egy normát a $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ egyenlőség segítségével. A (b_1) és (b_2) tulajdonságok (56. oldal) az értelmezés azonnali következményei, míg a (b_3) tulajdonságot az 1.3 következmény biztosítja.
Megjegyzés. Az előbbiek alapján minden pre-Hilbert tér felfogható normált térnek is. A fordított állítás nem igaz, vagyis nem minden $(X, \|\cdot\|)$ normált térben értelmezhető olyan $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skaláris szorzat, amelyre $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$, minden $x \in X$-re. A következő két tulajdonságból következik, hogy egy normált térben pontosan akkor származtatható a norma egy skaláris szorzatból, ha teljesül a paralelogramma azonosság. $\triangle$

1.9. Tulajdonság. *Ha* $(H, \|\cdot\|)$ *egy pre-Hilbert tér és* $x, y \in H$, *akkor*

(1.6) $\qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ *(paralelogramma szabály).*

1.10. Tulajdonság. *Ha* V *egy valós vektortér és a* $\|x\| : V \to \mathbb{R}$ *operátorra teljesül a következő két tulajdonság:*

(1.7) $\|x\| \ge 0, \quad \forall\, x \in V,$
(1.8) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \forall\, x, y \in V,$ *(paralelogramma szabály),*

akkor teljesül a háromszög egyenlőtlenség is.

Bizonyítás. (1.8) alapján $\|0\| = 0$ és $\|-x\| = \|x\|$, ha $x \in V$. Értelmezzük a $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvényt a

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right)$$

egyenlőséggel. Az értelmezés alapján $\langle x,y\rangle = \|x\|^2$, és $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$. A paralelogramma szabály alapján következik, hogy $\langle x+z, y\rangle = \langle x,y\rangle + \langle z,y\rangle$, tehát $\langle rx, y\rangle = r\langle x,y\rangle$, bármely $r \in \mathbb{Q}$ esetén. Így minden racionális r esetén

$$0 \le \langle rx+y, rx+y\rangle = r^2\langle x,x\rangle + 2r\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle.$$

Ebből következik a Cauchy-Buniakovski-Schwarz egyenlőtlenség, és ez alapján igazolható a háromszög egyenlőtlenség (lásd az 1.4 tételt). $\square$
Példák. (a) A legegyszerűbb példa Hilbert térre az $\mathbb{R}$, ha a skaláris szorzatot az $\langle x,y\rangle = xy$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, összefüggéssel értelmezzük (a teljesség az 1.7 tételből következik, lásd a 90. oldalt).
(b) Az 1.8 tétel (90. oldal) alapján $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_2)$ is Hilbert tér. $\triangle$

2.1.5 Egyenlőtlenségek

Ebben a paragrafusban a Hölder[37] egyenlőtlenség felhasználásával igazoljuk, hogy az $\|\cdot\|_p$ függvények valóban teljesítik a háromszög egyenlőtlenséget. Ehhez szükségünk van a Young egyenlőtlenségre.[38] Ennek két bizonyítását mutatjuk be, az első valamivel bonyolultabb, mint a második, de többet árul el az egyenlőtlenség természetéről.

1.5. Tétel. (Young-féle azonosság) *Ha $f : [a,b] \to [c,d]$ egy bijektív és növekvő függvény, akkor*

$$\int_a^b f(x)dx + \int_c^d f^{-1}(y)dy = bd - ac. \tag{1.9}$$

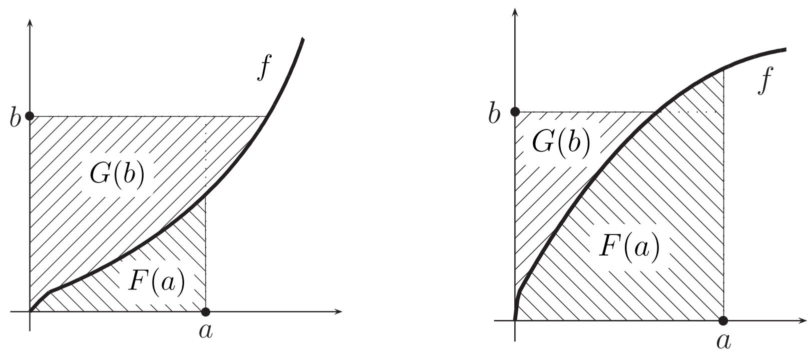
1.6. Tétel. (Young egyenlőtlenség integrálos alakja, [34, 189. oldal]) *Ha $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ folytonos és szigorúan növekvő függvény, amelyre $\lim_{u\to\infty} f(u) = \infty$ és $f(0) = 0$, akkor a*

$$F(x) = \int_0^x f(u)du \quad \text{és} \quad G(x) = \int_0^x f^{-1}(v)dv. \tag{1.10}$$

függvényekre

$$ab \le F(a) + G(b), \ \forall a,b \in [0,\infty[. \tag{1.11}$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $b = f(a)$. (Lásd a 2.1. ábrát.)



2.1. Ábra: Young egyenlőtlenség

1.4. Következmény. (Young egyenlőtlenség, [34, 90. oldal]) *Ha $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ és α, β nem negatív valós számok, akkor*

$$\alpha\beta \le \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}. \tag{1.12}$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\beta = \alpha^{p-1}$.

[37] Otto Ludwig Hölder, 1859-1937

[38] William Henry Young, 1863-1942

Bizonyítás. Alkalmazzuk az előbbi tételt az $f(u) = u^{p-1}$, $u \in [0, \infty[$ függvényre. $\square$

Megjegyzés. Az egyenlőtlenség következik az $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{x^{-q}}{q}$ függvény tanulmányozásából is ($x = 1$ -ben minimumpontja van, tehát $f(1) \leq$ $\leq f(\alpha^{\frac{1}{q}}\beta^{-\frac{1}{p}})$).

A Bernoulli egyenlőtlenség (lásd a 37. oldalt) általánosabb alakja $x^a \leq 1 + ax - a$, ha $0 < a < 1$. Ha ezt alkalmazzuk az $x = \frac{\alpha^p}{\beta^q}$ és $a = \frac{1}{p}$ számokra, éppen a kért egyenlőtlenséghez jutunk. $\triangle$

Ha $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ vagy $\mathbb{C}^n$, az 1.13 összefüggéssel értelmezhetjük az a számok r *-ed rendű hatványközepét* minden $r \neq 0$ esetén.

$$M_r(a) = \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^r \right)^{1/r} = \left(\sum |\alpha_k|^r \right)^{1/r} \tag{1.13}$$

1.11. Tulajdonság. *Ha* $p > 1$, $1/p + 1/q = 1$, *és az* $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, *illetve* $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *számokra* $M_p(a) = M_q(b) = 1$, *akkor*

$$M(ab) = M_1(ab) \leq 1, \tag{1.14}$$

ahol $ab = (\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_n\beta_n)$.

Bizonyítás. Minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ -re alkalmazzuk az (1.12) Young egyenlőtlenséget a $|\alpha_k|$ és $|\beta_k|$ számokra:

$$|\alpha_k\beta_k| \leq \frac{|\alpha_k|^p}{p} + \frac{|\beta_k|^q}{q}. \tag{1.15}$$

Összegezve k lehetséges értékei szerint, írhatjuk, hogy

$$\sum |\alpha_k\beta_k| \leq \frac{1}{p} \sum |\alpha_k|^p + \frac{1}{q} \sum |\beta_k|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad \square$$

1.7. Tétel. (Hölder egyenlőtlenség $p > 1$ és $q > 1$ esetén) *Ha* $p > 1$, $1/p + 1/q = 1$ *és az* $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *rendezett szám* n *-esek egyike sem azonosan* 0, *akkor*

$$M(ab) = \sum |\alpha_k\beta_k| \leq M_p(a)M_q(b). \tag{1.16}$$

Bizonyítás. Az

$$\overline{\alpha}_k = \frac{\alpha_k}{M_p(a)}, \qquad \overline{\beta}_k = \frac{\beta_k}{M_q(b)},$$
$$\overline{a} = (\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n), \qquad \overline{b} = (\overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_n)$$

számokra $M_p(\overline{a}) = M_q(\overline{b}) = 1$, tehát alkalmazhatjuk az 1.11 tulajdonságot, és így $M(\overline{a}\overline{b}) \leq 1$. Ez ekvivalens a bizonyítandó egyenlőtlenséggel. $\square$

1.8. Tétel. *Az (1.16) egyenlőtlenségben pontosan akkor van egyenlőség (0 -tól különböző számokra), ha az* $\dfrac{|\alpha_k|^p}{|\beta_k|^q}$ *tört* k *-tól független.*

1.5. Következmény. (Cauchy-Buniakovski egyenlőtlenség) *Ha az 1.7 tételben* $p = 2$ *és* $q = 2$, *akkor a*

$$\sum |\alpha_k \beta_k| \leq \sqrt{\sum |\alpha_k|^2} \cdot \sqrt{\sum |\beta_k|^2} \tag{1.17}$$

egyenlőtlenséget kapjuk.

1.9. Tétel. (Hölder egyenlőtlenség pozitív kitevőkre, [59, 2. Rész, 2. fejezet, 81.3-as feladat]) *Ha* $m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$, *rögzített természetes szám,* $a_j = (\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jn})$, $j = 1, \dots, m$, *és a* $p_1, p_2, \dots, p_m > 0$ *valós számokra* $\sum \dfrac{1}{p_j} = 1$, *akkor* $M_{p_j}(a_j) > 0$, $j = 1, \dots, m$ *esetén*

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \prod_{j=1}^{m} \alpha_{jk} \right| \leq \prod_{j=1}^{m} M_{p_j}(a_j). \tag{1.18}$$

Bizonyítás. A matematikai indukció módszerét használjuk. Ha $m = 2$, akkor az 1.9 tétel visszavezetődik az 1.7 tételre, tehát igaz. Ha (1.18) igaz $m-1$ -re, akkor az 1.7 tétel alapján

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \prod_{j=1}^{m} \alpha_{jk} \right| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_{1k}| \left| \prod_{j=2}^{m} \alpha_{jk} \right| \leq M_{p_1}(a_1) \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{j=2}^{m} |\alpha_{jk}| \right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} \right]^{\frac{p_1-1}{p_1}} =$$

$$= M_{p_1}(a_1) \left[\sum_{k=1}^{n} \prod_{j=2}^{m} |\alpha_{jk}|^{\frac{p_1}{p_1-1}} \right]^{\frac{p_1-1}{p_1}}. \tag{1.19}$$

Látható, hogy

$$\frac{p_j(p_1-1)}{p_1} > 0,\ j = 2, \dots, m \quad \text{és} \quad \sum_{j=2}^{m} \frac{p_1}{p_j(p_1-1)} = \frac{p_1}{p_1-1} \sum_{j=2}^{m} \frac{1}{p_j} = 1,$$

tehát az (1.19) kifejezést tovább majorálhatjuk:

$$\leq M_{p_1}(a_1) \left\{ \prod_{j=2}^{m} \left[\sum_{k=1}^{n} |\alpha_{jk}|^{\frac{p_1}{p_1-1} \frac{p_j(p_1-1)}{p_1}} \right]^{\frac{p_1}{p_j(p_1-1)}} \right\}^{\frac{p_1-1}{p_1}} =$$

$$= M_{p_1}(a_1) \prod_{j=2}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_{jk}|^{p_j} \right)^{\frac{1}{p_j}} = \prod_{j=1}^{m} M_{p_j}(a_j). \quad \square \tag{1.20}$$

1.10. Tétel. (Hölder egyenlőtlenség $0 < p < 1$ esetén) *Ha* $0 < p < 1$, $1/p+1/q = 1$, *és* $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, *illetve* $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *pozitív szám* n*-esek, akkor*

$$M(ab) \geq M_p(a) M_q(b). \tag{1.21}$$

Bizonyítás. Az $u = 1/p$ (> 1), és $1/u + 1/v = 1$ összefüggéseknek eleget tevő számokra értelmezzük a $\gamma_k = \beta_k^{-\frac{1}{u}}$, $\delta_k = \beta_k^{\frac{1}{u}} \alpha_k^{\frac{1}{u}}$ számokat, minden $k = 1, \ldots, n$ esetén. Így $\gamma_k^u = \beta_k^q$, tehát az 1.7 tételből következik, hogy

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k^p = \sum_{k=1}^n \gamma_k \delta_k \leq \left(\sum_{k=1}^n \delta_k^u \right)^{\frac{1}{u}} \left(\sum_{k=1}^n \gamma_k^v \right)^{\frac{1}{v}} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k \right)^p \left(\sum_{k=1}^n \beta_k^{-\frac{v}{u}} \right)^{\frac{1}{v}} = \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k \right)^p \left(\sum_{k=1}^n \beta_k^q \right)^{\frac{1}{v}}.$$

Ez alapján

$$M_p(a) M_q(b) \leq M(ab) \quad \square$$

1.11. Tétel. (Hölder egyenlőtlenség negatív kitevőkre, [21]) *Ha* $m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$ *rögzített természetes szám, az* $a_j = (\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{jn})$, $j = 1, \ldots, m$ *véges sorozatok nullától különböző számokból állnak, és a* $p_1, p_2, \ldots, p_{m-1} < 0$, *illetve* $p_m \in]0, 1[$ *valós számokra* $\sum_{j=1}^m 1/p_j = 1$, *akkor*

$$\sum_{k=1}^n \left| \prod_{j=1}^m \alpha_{jk} \right| \geq \prod_{j=1}^m M_{p_j}(a_j). \tag{1.22}$$

Bizonyítás. A matematikai indukció módszerét használjuk. Ha $m = 2$, akkor az egyenlőtlenség visszavezetődik az 1.10 tételre. Feltételezzük, hogy (1.22) teljesül valamilyen $m \geq 2$-re. Ha a $p_1, p_2, \ldots, p_m < 0$ és $p_{m+1} \in \mathbb{R}$ valós számokra $\sum_{j=1}^{m+1} 1/p_j = 1$, és az $a_j = (\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{jn})$ véges sorozatok nem tartalmazzák a 0-t egyetlen $j = 1, \ldots, m+1$ esetén sem, akkor

$$\sum_{k=1}^n \left| \prod_{j=1}^{m+1} \alpha_{jk} \right| = \sum_{k=1}^n |\alpha_{1k}| \left| \prod_{j=2}^{m+1} \alpha_{jk} \right| \geq M_{p_1}(a_1) \left[\sum_{k=1}^n \left(\prod_{j=2}^{m+1} |\alpha_{jk}| \right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} \right]^{\frac{p_1-1}{p_1}} =$$

$$= M_{p_1}(a_1) \left[\sum_{k=1}^n \prod_{j=2}^{m+1} |\alpha_{jk}|^{\frac{p_1}{p_1-1}} \right]^{\frac{p_1-1}{p_1}}. \tag{1.23}$$

Másrészt

$$\frac{p_j(p_1-1)}{p_1} < 0,\ j = 2, \ldots, m, \quad \frac{p_{m+1}(p_1-1)}{p_1} > 0, \quad \text{és} \ =$$

$$\sum_{j=2}^{m+1} \frac{p_1}{p_j(p_1-1)} = \frac{p_1}{p_1-1} \sum_{j=2}^{m+1} \frac{1}{p_j} = 1,$$

tehát az (1.23) kifejezés

$$
\begin{aligned}
\geq & M_{p_1}(a_1) \left\{ \prod_{j=2}^{m+1} \left[\sum_{k=1}^{n} |\alpha_{jk}|^{\frac{p_1}{p_1-1} \frac{p_j(p_1-1)}{p_1}} \right]^{\frac{p_1}{p_j(p_1-1)}} \right\}^{\frac{p_1-1}{p_1}} = \\
= & M_{p_1}(a_1) \prod_{j=2}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_{jk}|^{p_j} \right)^{\frac{1}{p_j}} = \prod_{j=1}^{m} M_{p_j}(a_j). \quad \square
\end{aligned}
$$

1.12. Tétel. (Minkowski egyenlőtlenség $p \geq 1$-re) *Ha teljesülnek az 1.7 tétel feltételei, akkor*

$$
M_p(a+b) \leq M_p(a) + M_p(b). \tag{1.24}
$$

Bizonyítás. $p = 1$ esetén az egyenlőtlenség következik a háromszög egyenlőtlenségből.

$p > 1$ esetén alkalmazzuk az (1.16) Hölder egyenlőtlenséget a következő véges sorozatpárokra:

$$
(a_k)_{k=1}^n, \ (|a_k + b_k|^{p-1})_{k=1}^n \quad \text{és} \quad (b_k)_{k=1}^n, \ (|a_k + b_k|^{p-1})_{k=1}^n.
$$

Így

$$
\begin{aligned}
\sum |a_k + b_k|^p \leq \sum |a_k| \cdot |a_k + b_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |b_k| \cdot |a_k + b_k|^{p-1} \leq \\
\leq (M_p(a) + M_p(b)) \left(\sum |a_k + b_k|^p \right)^{1/q},
\end{aligned}
$$

tehát $(\sum |a_k + b_k|^p)^{1/q}$-val való osztás után az (1.24) egyenlőséghez jutunk. $\square$

2.2 Metrikus terek

A $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ függvényt *metrikának* nevezzük, ha X egy nemüres halmaz, és a ρ rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

(a) $\rho(x,y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$ és $\rho(x,y)$ pontosan akkor 0, ha $x = y$;

(b) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$, $\forall x, y \in X$;

(c) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$, bármely $x, y, z \in X$-re.

Az X elemeit pontoknak nevezzük és a $\rho(x, y)$ számot az x és y pontok *távolságának.*

A (c) feltételben $x = y$-t választva a $0 \leq \rho(x, z)$ egyenlőtlenséghez jutunk, tehát ρ nem vehet fel negatív értékeket és ezért az értelmezésből az (a) pont első részét elhagyhatjuk. A (b) feltétel biztosítja a távolságfüggvény szimmetriáját (x-től az y-ig ugyanaz a távolság, mint y-tól x-ig). A (c) feltételt háromszög egyenlőtlenségnek nevezzük.

Példák. (a) Tetszőleges $X \neq \emptyset$ halmaz esetén értelmezhetjük a $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$,

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases} \tag{2.25}$$

függvényt. Ez egy metrika, tehát minden nemüres halmazon értelmezhető legalább egy metrika.

(b) A valós számokon értelmezett norma segítségével (lásd a 18. oldalt) értelmezhetjük a $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$ metrikát. Ezt nevezzük *euklideszi metrikának* az $\mathbb{R}$-en.

(c) A komplex számsíkon értelmezzük a szokásos geometriai távolságot a

$$\begin{aligned} \rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \\ z_k = x_k + iy_k,\ x_k, y_k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2,\ i^2 = -1, \end{aligned} \tag{2.26}$$

összefüggésekkel. Ezt nevezzük a $\mathbb{C}$-n értelmezett *euklideszi metrikának* vagy *euklideszi távolságnak.*

(d) Az $\mathbb{R}^2$ halmazon ételmezhetjük az $u_k = (x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$, $k = 1, 2$ pontok távolságát a következő összefüggésekkel is:

(d_1) $\rho_1(u_1, u_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$;

(d_2) $\rho_2(u_1, u_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$;

(d_3) $\rho_3(u_1, u_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$.

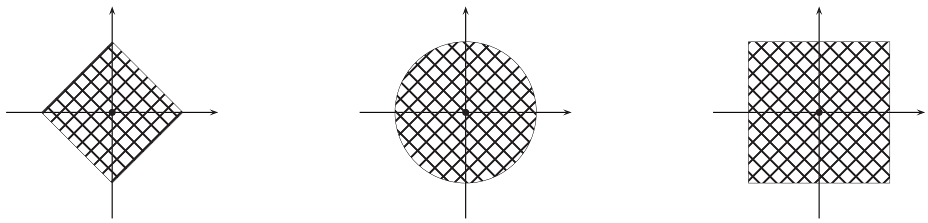
A ρ_1 metrikát *Minkowski*-féle metrikának, a ρ_2 metrikát *euklideszi metrikának* és a ρ_3 metrikát *Csebisev*-féle metrikának nevezzük. Ebből látható, hogy léteznek olyan halmazok, amelyeken több különböző metrikát értelmezhetünk.

(e) Ha $(X, \|\cdot\|)$ egy normált tér, akkor a $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = \|x - -y\|$, $\forall x, y \in X$ függvény egy metrika, ezt nevezzük a norma által származtatott metrikának. Így minden normált tér metrikus tér is. A fordítottja nem igaz, mert nem minden metrika származik normából (metrikát értelmezhetünk lineáris térstruktúra nélkül is). $\triangle$

A paragrafus további részében rögzítünk egy (X, ρ) metrikus teret és ennek a részhalmazait vizsgáljuk.

Az x középpontú, r sugarú *nyílt gömb* a

$$\mathrm{B}(x, r) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}$$



$B_1(0,1)$ $B_2(0,1)$ $B_3(0,1)$

2.2. Ábra: Nyílt gömbök

halmaz. Nyilvánvaló, hogy $x \in \mathrm{B}(x,r)$, bármely $x \in X$ és $r > 0$ esetén.

A 2.2. ábrán a $\mathrm{B}_i(0,1)$, $i = 1,2,3$ gömbök geometriai ábrázolása látható, a d_i, $i = 1,2,3$ metrikák szerint.

Az $A \subset X$ halmazt *nyílt halmaznak* nevezzük, ha bármely $x \in A$ esetén létezik olyan $r > 0$ valós szám, amelyre $\mathrm{B}(x,r) \subset A$. Az üreshalmazt szintén nyílt halmaznak tekintjük. Az értelmezés következménye, hogy az X tér mindig nyílt.

2.1. Tétel. *Ha $\mathcal{O}$-val jelöljük az X nyílt részhalmazainak családját, akkor*

(a) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$;

(b) *$\mathcal{O}$ tetszőleges részcsaládjának az egyesítése is nyílt halmaz;*

(c) *$\mathcal{O}$ tetszőleges véges részcsaládjának a metszete is nyílt halmaz.*

Ha A nemüres része X-nek, és $x \in A$, akkor az x pontot az A halmaz *belső pontjának* nevezzük, ha létezik olyan O nyílt halmaz, amelyre $x \in O \subset A$. Az A belső pontjainak halmazát az A *belsejének* nevezzük, és $\operatorname{int} A$-val jelöljük.

2.2. Tétel. *Ha $A, B \subset X$ (X egy metrikus tér), akkor igazak a következő állítások:*

(a) *$\operatorname{int} A$ az A összes nyílt részhalmazainak egyesítése, tehát nyílt halmaz;*

(b) *A pontosan akkor nyílt, ha $A = \operatorname{int} A$;*

(c) *az $\operatorname{int} A$ halmaz a bennfoglalásra nézve az A-nak a legnagyobb nyílt részhalmaza;*

(d) *ha $A \subset B$, akkor $\operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B$;*

(e) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$;

(f) $\operatorname{int}(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} A$;

(g) $\operatorname{int} X = X$.

2.3. Tétel. *Minden nyílt gömb egyben nyílt halmaz is.*

Bizonyítás. Tekintsük az $A = \mathrm{B}(x,r)$ nyílt gömböt és annak egy tetszőleges y pontját. A gömb értelmezése alapján létezik olyan $h > 0$, amelyre

$$\rho(x,y) = r - h.$$

Ha a $z \in X$ pontra $\rho(y,z) < h$, akkor

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) < r - h + h = r,$$

tehát $z \in A$. Így y az A halmaz egy belső pontja, tehát A nyílt halmaz. $\square$

Az $A \subset X$ halmazt *zártnak* nevezzük, ha $\complement_X A$ nyílt.

2.4. Tétel. *Ha* $\mathcal{C}$ *-vel jelöljük az* X *zárt részhalmazainak családját, akkor*

(a) $\emptyset, X \in \mathcal{C}$;

(b) $\mathcal{C}$ *tetszőleges véges részcsaládjának egyesítése is zárt;*

(c) $\mathcal{C}$ *tetszőleges részcsaládjának metszete is zárt.*

2.12. Tulajdonság. *Ha* $A, B \subset X$ *úgy, hogy* A *nyílt és* B *zárt, akkor* $A \setminus B$ *nyílt és* $B \setminus A$ *zárt.*

Bizonyítás. Csak azt igazoljuk, hogy $A \setminus B$ nyílt halmaz.

$$x \in A \setminus B \implies \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ x \in \complement B \end{array} \right. \implies \exists\ \mathrm{B}(x,r) \subset A \cap \complement B \implies \mathrm{B}(x,r) \subset A \setminus B. \quad \square$$

Az $A \subset X$ halmaz *lezárásának* nevezzük a $\operatorname{cl} A = \cap\{C \mid A \subset C \subset X,\ C \text{ zárt}\}$ halmazt.

Egy halmaz belső pontjainak halmaza és a lezárása egymás duálisainak tekinthetők a következő értelemben:

2.5. Tétel. *Ha* $A \subset X$, *akkor*

$$\complement_X (\operatorname{cl} A) = \operatorname{int} (\complement_X A), \quad \complement_X (\operatorname{int} A) = \operatorname{cl} (\complement_X A).$$

2.6. Következmény. *Ha* $A \subset X$, *akkor* $\operatorname{int} A = \complement_X \operatorname{cl} (\complement_X A)$.

2.6. Tétel. *Ha* $A, B \subset X$, *akkor igazak a következő állítások:*

(a) $\operatorname{cl} A$ *zárt halmaz;*

(b) A *pontosan akkor zárt, ha* $A = \operatorname{cl} A$;

(c) *a* $\operatorname{cl} A$ *halmaz a bennfogalásra nézve a legkisebb olyan halmaz, amely tartalmazza az* A *halmazt;*

(d) $A \subset B \implies \mathrm{cl}\, A \subset \mathrm{cl}\, B$;

(e) $\mathrm{cl}\,(A \cup B) = \mathrm{cl}\,(A) \cup \mathrm{cl}\,(B)$;

(f) $\mathrm{cl}\,(\mathrm{cl}\, A) = \mathrm{cl}\, A$;

(g) $\mathrm{cl}\, X = X$.

2.13. Tulajdonság. *Ha* $A, B \subset X$ *diszjunkt nyílt halmazok, akkor*

(a) *egyiknek a lezárása sem metszi a másikat, vagyis* $B \cap \mathrm{cl}\, A = \mathrm{cl}\,(B) \cap A = \emptyset$;

(b) $(\mathrm{int\,cl}\ A) \cap (\mathrm{int\,cl}\ B) = \emptyset$.

Bizonyítás. (a) $A \cap B = \emptyset \implies B \subset \complement A,$ zárt $\implies A \cap \mathrm{cl}\, B \subset A \cap \complement A = \emptyset$.
(b) Az (a) alpont alapján

$$A \cap B = \emptyset \implies \mathrm{int\,cl}\, B \cap A = \emptyset \implies \mathrm{int\,cl}\, B \cap \mathrm{cl}\, A = \emptyset \implies \mathrm{int\,cl}\, B \cap \mathrm{int\,cl}\, A = \emptyset. \ \square$$

Az x pont *környezetének* nevezünk minden olyan $A \subset X$ halmazt, amelyre létezik $O \in \mathcal{O}$ úgy, hogy $x \in O \subset A$. Az x pont összes környezetének halmazát $\mathcal{V}(x)$-szel jelöljük.

2.14. Tulajdonság. *Ha* $A \subset X$, *akkor a következő kijelentések egyenértékűek:*

(a) $x \in \mathrm{cl}\, A$;

(b) *bármely* $V \in \mathcal{V}(x)$ *környezetre* $V \cap A \neq \emptyset$.

Bizonyítás. Rögzítsünk egy tetszőleges $x \in \mathrm{cl}\, A$ elemet. Feltételezzük, hogy (b) nem igaz, tehát létezik olyan nyílt $V \in \mathcal{V}(x)$ környezet, amelyre $V \cap A = \emptyset$. Így $A \subset \complement V$ és $\complement V$ zárt, tehát $\mathrm{cl}\, A \subset \complement V$. Ez viszont ellentmondás, mert $x \in V$.

Ha (a) nem teljesül, akkor létezik olyan F zárt halmaz, amelyre $A \subset F$ és $x \notin F$. De $V = \complement F$ nyílt halmaz és környezete x-nek ($x \in V$), tehát $V \cap A = \emptyset$. Ez ellentmond (b)-nek, tehát a fordított implikáció is igaz. $\square$

2.7. Következmény. *Ha* V *nyílt halmaz és* $V \cap A = \emptyset$, *akkor* $V \cap \mathrm{cl}\, A = \emptyset$.

Az $x \in X$ pontot az $A \subset X$ halmaz *torlódási pontjának* nevezzük, ha bármely $V \in \mathcal{V}(x)$ esetén a $V \cap A$ halmaz tartalmaz legalább egy x-től különböző A-beli pontot ($V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$). Egy $A \subset X$ halmaz torlódási pontjainak halmazát A'-vel jelöljük.

2.7. Tétel. *Ha* $A, B, A_\alpha \subset X$, $\alpha \in I$, *akkor*

(i) $\mathrm{cl}\, A = A \cup A'$;

(ii) *ha* $A \subset B$, *akkor* $A' \subset B'$;

(iii) $(A \cup B)' = A' \cup B'$;

(iv) $\cup_{\alpha \in I} A'_\alpha = (\cup_{\alpha \in I} A_\alpha)'$.

2.8. Tétel. *Az $A \subset X$ halmaz pontosan akkor zárt, ha tartalmazza az összes torlódási pontját, vagyis ha $A' \subset A$.*

Bizonyítás. Ha A zárt, akkor $\complement_X A$ nyílt, és így minden $\complement_X A$-beli elem környezete. Mivel $A \cap \complement_X A = \emptyset$, a $\complement_X A$ halmaz egyetlen eleme sem torlódási pontja A-nak. Ez pontosan azt jelenti, hogy A tartalmazza az összes torlódási pontját.

Ha $\complement_X A$ egyetlen pontja sem torlódási pontja A-nak, akkor minden $x \in \in \complement_X A$-ra létezik olyan $V \in \mathcal{V}(x)$, amelyre $V \cap A = \emptyset$. Ez alapján $\complement_X A = \cup\{V \mid V \in \mathcal{V}(x),\ x \in \complement_X A\}$ nyílt halmaz, tehát A zárt. □

2.9. Tétel. *Ha (X, ρ) egy metrikus tér és A' az $A \subset X$ halmaz torlódási pontjainak halmaza, akkor A' zárt.*

Bizonyítás. A 2.8 tétel alapján A' pontosan akkor zárt, ha $(A')' \subset A'$.

Ha $y \in (A')'$, akkor minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $x \in A'$ úgy, hogy $0 < \rho(x, y) < < \varepsilon/2$. Mivel $x \in A'$, létezik $v \in A$ úgy, hogy

$$\rho(x, v) < \rho(x, y).$$

Ez alapján $v \neq y$ és

$$0 < \rho(v, y) \leq \rho(x, v) + \rho(x, y) < \varepsilon.$$

Másrészt $v \in A$, tehát y torlódási pontja A-nak, és ezzel a bizonyítás teljes. □

Ha A egy tetszőleges halmaz és A' a torlódási pontjainak halmaza, akkor az A halmaz *lezárásán* a $\operatorname{cl} A = A \cup A'$ halmazt értjük.

2.10. Tétel. *Ha x torlódási pontja az A halmaznak, akkor x minden környezete az A végtelen sok pontját tartalmazza.*

Bizonyítás. Ha az x pont egy V környezete az A-nak csak véges sok pontját tartalmazza, akkor a $V \cap A$ halmaz is véges sok x-től különböző pontból áll. Jelöljük ezeket $y_1, \ldots, y_n$-nel, és legyen

$$r = \min_{1 \leq k \leq n} \rho(x, y_k).$$

Világos, hogy $r > 0$. Másrészt a $V = B(x, r)$ környezet nem tartalmaz egyetlen $y \in A$ pontot sem, amelyre $y \neq x$, tehát x nem torlódási pontja A-nak. Ez ellentmondás, tehát a tétel állítása igaz. □

Ha $x \in A$ és x nem torlódási pontja az A halmaznak, akkor x-et az A *izolált* pontjának nevezzük.

Az $A \subset X$ halmaz *határának* az $(\operatorname{cl} A) \cap (\operatorname{cl} \complement_{\mathbb{R}} A)$ halmazt nevezzük és $\operatorname{fr} A$-val jelöljük. Az értelmezés alapján látható, hogy egy halmaz határa mindig zárt halmaz.

2.11. Tétel. *Az $A \subset X$ halmaz pontosan akkor nyílt, ha $A \cap \operatorname{fr} A = \emptyset$.*

2.12. Tétel. *Ha $A, B \subset X$, akkor*

(i)	$\operatorname{int} A = A \setminus \operatorname{fr} A$;	(v)	$\operatorname{fr}(X \setminus A) = \operatorname{fr} A$;
(ii)	$\operatorname{cl} A = A \cup \operatorname{fr} A$;	(vi)	$X = \operatorname{int} A \cup \operatorname{fr} A \cup \operatorname{int}(X \setminus A)$;
(iii)	$\operatorname{fr}(A \cup B) \subset \operatorname{fr} A \cup \operatorname{fr} B$;	(vii)	$\operatorname{fr}(\operatorname{cl} A) = \operatorname{fr} A$;
(iv)	$\operatorname{fr}(A \cap B) \subset \operatorname{fr} A \cup \operatorname{fr} B$;	(viii)	$\operatorname{fr}(\operatorname{int} A) \subset \operatorname{fr} A$;

(ix) *A pontosan akkor nyílt, ha* $\operatorname{fr} A = \operatorname{cl} A \setminus A$;
(x) *A pontosan akkor zárt, ha* $\operatorname{fr} A = A \setminus \operatorname{int} A$.

Bizonyítás. Csak az (i) és (iii) tulajdonságokat igazoljuk, a többi bizonyítását az olvasóra bízzuk.

(i) $A \setminus \operatorname{fr} A = A \setminus [\operatorname{cl}(A) \cap \operatorname{cl}(X \setminus A)] = (A \setminus \operatorname{cl}(A)) \cup (A \setminus \operatorname{cl}(X \setminus A)) =$
$= A \setminus \operatorname{cl}(X \setminus A) = A \cap \operatorname{int} A = \operatorname{int} A$.

(iii) $\operatorname{fr}(A \cup B) = (\operatorname{cl}(A \cup B)) \cap \operatorname{cl}(\complement(A \cup B)) = (\operatorname{cl}(A) \cup \operatorname{cl}(B)) \cap \operatorname{cl}(\complement(A) \cap \complement(B)) \subset$
$\subset (\operatorname{cl}(A) \cup \operatorname{cl}(B)) \cap [\operatorname{cl}(\complement A) \cap \operatorname{cl}(\complement B)] \subset (\operatorname{cl} A) \cap \operatorname{cl} \complement(A)) \cup (\operatorname{cl} B) \cap \operatorname{cl} \complement(B)) =$
$= \operatorname{fr}(A) \cup \operatorname{fr}(B)$. $\square$

Az X metrikus tér A részhalmazát X*-ben sűrűnek* nevezzük, ha $\operatorname{cl} A = X$.

Az A halmazt *tökéletesnek* nevezzük, ha zárt, és minden pontja egyben határpontja is.

Az A halmazt *korlátosnak* nevezzük, ha létezik olyan m valós szám, amelyre

$$\rho(x, y) \leq m, \text{ bármely } x, y \in A \text{ esetén.}$$

Ha egy halmaz nem korlátos, akkor *korlátlannak* nevezzük.

Ha egy halmaz korlátos és zárt, akkor létezik a

$$\operatorname{diam} A = \max\{\rho(x, y) \mid x, y \in A\}$$

valós szám, és ezt az A halmaz *átmérőjének* nevezzük.

Egy (X, ρ) metrikus térben a nyílt halmazok családját τ-val jelöljük, és a metrika által származtatott *topológiának* nevezzük. Az (X, τ) párost *topologikus térnek* nevezzük. Néha (ha nem vezet félreértéshez) egyszerűen csak az X topologikus térre hivatkozunk. $\tau \neq \emptyset$, mert $\emptyset, X \in \tau$.

Megjegyzések. (a) Ebben a paragrafusban az eddig értelmezett tulajdonságok (zártság, nyíltság, stb.) metrikafüggőek. Általában, ha megváltoztatjuk a metrikát, akkor megváltozik a topológia. Például az $\mathbb{R}$-en a (2.25) összefüggéssel értelmezett metrikában az $\mathbb{R}$ minden részhalmaza nyílt. Ez világos, hogy az euklideszi metrikában nem igaz (például az egy pontból álló halmaz nem nyílt az euklideszi metrikában).

(b) A mi megközelítésünkben a metrikát tekintjük alapvető fogalomnak, természetesen kiindulásnak a topológiát is tekinthetnénk (lásd [27]). $\triangle$

2.13. Tétel. *$\mathbb{R}^k$-ban bármely két $\|\cdot\|_p$, $p \geq 1$, vagy $\|\cdot\|_\infty$ alakú norma ugyanazokat a nyílt halmazokat származtatja.*

Az $f : X \to Y$ függvényt *izometriának* nevezzük, ha (X, ρ_X) és (Y, ρ_Y) két metrikus tér, és $\rho_Y(f(x), f(y)) = \rho_X(x, y)$, minden $x, y \in X$ pontpárra. Ha létezik az X és Y metrikus terek közt izometria, akkor a tereket *izometrikusnak* nevezzük. Nagyon sok szempontból az izometrikus tereket azonosnak tekinthetjük.

2.1. Példák. ([62]) Vizsgáljuk az $\mathbb{R}^2$ következő részhalmazainak topológikus tulajdonságait:

(a) azok a z komplex számok, amelyekre $|z| < 1$;

(b) azok a z komplex számok, amelyekre $|z| \leq 1$;

(c) a véges részhalmazok;

(d) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

(e) $A = \{1/n \mid n = 1, 2, \dots\}$ (A-nak van torlódási pontja ($x = 0$), de az A egyetlen pontja sem torlódási pont);

(f) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

(g) a $]0, 1[$ intervallum.

Az előbbi halmazok néhány tulajdonságát az alábbi táblázat tartalmazza.

	zárt	nyílt	tökéletes	korlátos	
(a)	nem	igen	nem	igen	
(b)	igen	nem	igen	igen	
(c)	igen	nem	nem	igen	
(d)	igen	nem	nem	nem	
(e)	nem	nem	nem	nem	
(f)	igen	igen	igen	nem	
(g)	nem	nem/igen $\mathbb{R}$-ben	nem	igen	$\triangle$

Figyelem. Itt a valós számok halmazán az euklideszi metrika által generált topológiát használtuk. Más metrika szerint a vizsgált halmazok rendelkezhetnek ezektől eltérő tulajdonságokkal is.

Ha $A \subset Y \subset X$, és (X, ρ) egy metrikus tér, akkor az A-t nyíltnak nevezzük X-ben, ha minden $x \in A$ pontra létezik r úgy, hogy $\rho(x, y) < r$, $y \in X$-ből következzen $y \in A$. Ugyanakkor $(Y, \rho|_{Y \times Y})$ szintén metrikus tér, és az előbbi implikáció mintájára értelmezhetjük az Y-ra vonatkozó nyíltságot is. Az A halmazt Y-ra nézve *nyíltnak* nevezzük, ha minden $x \in A$ esetén létezik $r > 0$ úgy, hogy $\rho(x, y) < r$, és $y \in Y$-ból következzen, hogy $y \in A$.

Példa. A 2.1 (g) példájában láttuk, hogy Y-ra nézve lehet nyílt egy halmaz akkor is, ha nem nyílt X-ben. Az alábbi tétel egy jellemzést ad az ilyen esetekre. $\triangle$

2.14. Tétel. *Ha $Y \subset X$, akkor az $A \subset Y$ halmazt Y-ra nézve pontosan akkor nevezzük nyíltnak, ha $A = Y \cap G$ az X valamilyen G nyílt részhalmazára.*

Bizonyítás. Ha A nyílt Y-ra nézve, akkor minden $x \in A$ esetén létezik r_x úgy, hogy a $\rho(x, y) < r_x$ és $y \in Y$ összefüggésekből következzen $y \in A$. Ha V_x az összes olyan $y \in X$ pontok halmaza, amelyre $\rho(x, y) < r_x$, és

$$G = \cup_{x \in A} V_x,$$

akkor G nyílt X-ben.

Mivel $x \in V_x$, minden $x \in A$-ra, $A \subset G \cap Y$. Másrészt V_x szerkesztése alapján $V_x \cap Y \subset A$, ha $x \in A$, és így $G \cap Y \subset A$. Tehát $A = G \cap Y$, és a tétel egyik állítását igazoltuk.

Ha G egy nyílt halmaz X-ben és $A = G \cap Y$, akkor minden $x \in A$-nak létezik $V_x \subset G$ környezete. Így $V_x \cap Y \subset A$, tehát A nyílt Y-ra nézve. $\square$

Az (X, ρ) metrikus teret szétválaszthatónak nevezzük, ha létezik egy megszámlálható és sűrű részhalmaza.

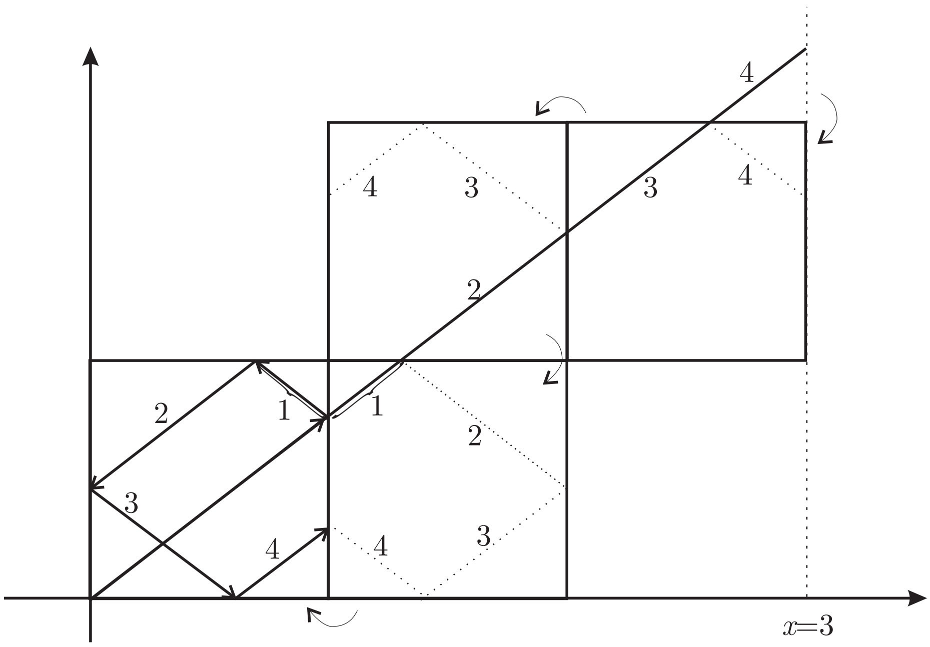
2.15. Tétel. *$\mathbb{Q}$ sűrű része $\mathbb{R}$-nek, tehát $\mathbb{R}$ szétválasztható.*

Bizonyítás. Az első állítás a 2.10 tételből következik (lásd a 23. oldalt), és a második részhez a 2.8 következményt használjuk (lásd a 27. oldalt). $\square$

2.4. Alkalmazás. *Egy négyzet alakú billiárdasztal bal alsó sarkából elindítunk egy golyót (a súrlódást elhanyagoljuk). Bizonyítsd be, hogy ha a kezdősebesség és az egyik oldal által bezárt szög tangense irracionális szám, akkor a golyó pályája sűrű az asztal belsejében.*

Megoldás. Azt igazoljuk, hogy a négyzet oldalain megjelenő ütközési pontok halmaza sűrű részhalmaza az oldalnak. Hasonlóan igazolható, hogy egy tetszőleges d egyenesen, amely párhuzamos az oldalakkal, a golyó pályája által meghatározott metszéspontok halmaza sűrű. A szimmetria tulajdonságai alapján látható, hogy a golyónak az asztalon való mozgása egyenértékű egy végtelen rácson való egyenes vonalú mozgással (lásd a mellékelt ábrát).

Ez alapján az AB-vel való n-edik ütközési pontnak éppen az $y = \mathrm{tg}\alpha \cdot x$ egyenes $x = 2n - 1$ abszcisszájú pontja felel meg. Elégséges tehát azt igazolni, hogy a $\{\{(2n+1)\mathrm{tg}\alpha\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ halmaz sűrű része a $[0, 1]$ intervallumnak ($\{x\}$ az x törtrésze). Igazoljuk, hogy ha $x_0 \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{Q}$, akkor a $H = \{\{nx_0\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ halmaz sűrű része a $[0, 1]$ intervallumnak. Ebből következik a bizonyítandó tulajdonság. A H halmaznak végtelen sok eleme van, mert ha $\{nx_0\} = \{mx_0\}$, akkor $nx_0 - n_1 = mx_0 - m_1$, valamilyen n_1, $m_1 \in \mathbb{N}$-re. Így viszont $(n - m)\, x_0 = n_1 - m_1$, s ha $n \neq m$, akkor $x_0 = \frac{n_1 - m_1}{n - m} \in \mathbb{Q}$, és ez ellentmond $x_0 \notin \mathbb{Q}$-nak. Az előbbiek alapján H végtelen. Másrészt nyilvánvaló, hogy H korlátos (része a $[0, 1]$ intervallumnak), tehát létezik legalább egy l torlódási pontja. A könnyebb tárgyalásmód céljából ábrázoljuk az $\mathbb{R}$



2.3. Ábra: Biliárdgolyó mozgása

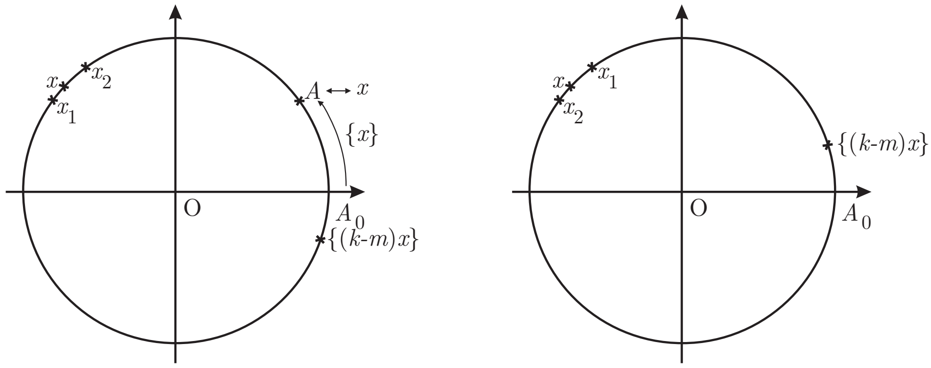
elemeit az egységnyi kerületű körön a következőképpen: minden $x \in \mathbb{R}$-nek megfeleltetjük azt az egyetlen $A \in \mathcal{C}$ pontot, amelyre az A_0A pozitív irányítású körív mértéke $\{x\}$ (lásd a 2.4. ábrát).

Így az $x, y \in \mathbb{R}$ pontoknak a körön pontosan akkor felel meg ugyanaz a pont, ha $x - y \in \mathbb{Z}$ (azt is mondhatjuk, hogy a számtengelyt rátekertük a körre). Eszerint bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $k, m \in \mathbb{N}$, $k > m$ úgy, hogy kx_0 és mx_0 képe a körön ε-nál kisebb távolságra van egymástól. Ez viszont azt jelenti, hogy a $(k-m)x_0$ képének az A_0-tól való távolsága kisebb, mint ε. Ugyanakkor tetszőleges $x \in [0,1]$ esetén létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre x-nek a képe az $x_1 = n(k-m)x_0$ és $x_2 = (n+1)(k-m)x_0$ képe közé kerül. Ez pontosan azt jelenti, hogy $x - x_1$ vagy $x - x_2$ a $[0, \varepsilon]$ intervallumban van. Így az $x \in [0,1]$ tetszőleges környezetében van eleme H-nak, tehát H sűrű $[0,1]$-ben.

2.1. Megjegyzések *Az is igazolható, hogy ha nem a csúcsból indítjuk a golyót, akkor a lehetséges periódikus pályák is sűrű részhalmazt alkotnak a négyzet belsejében. Ez a tulajdonság igaz minden olyan n oldalú sokszögre, amelynek minden szögének mértéke a π-nek racionális többszöröse.* ♦

2.3 Kompakt halmazok

Ebben a paragrafusban is egy (X, ρ) metrikus tér részhalmazainak tulajdonságait vizsgáljuk. Az $A \subset X$ egy lefödése egy olyan $\{G_\alpha\}$ halmazcsaládja az X-nek, amelyre $A \subset \cup_\alpha G_\alpha$.



2.4. Ábra: Az $\mathbb{R}/(mod1)$ reprezentációja

Egy lefödést nyílt lefödésnek *nevezünk, ha a lefödést alkotó halmazcsalád minden tagja nyílt halmaz.*

A $K \subset X$ halmazt kompaktnak *nevezzük, ha minden nyílt lefödéséből kiválasztható egy véges lefödés. Vagyis, ha $\{G_\alpha\}$ egy nyílt lefödése K-nak, akkor létezik az $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ véges indexhalmaz úgy, hogy*

$$K \subset G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n}.$$

Példa. *Minden véges halmaz kompakt.* $\triangle$

Megjegyzés. *Láttuk, hogy ha $A \subset Y \subset X$, akkor az A halmaz Y-ra nézve lehet nyitott anélkül, hogy nyitott lenne X-ben. Tehát egy halmaz zártsága vagy nyíltsága függ a tértől, amelybe beágyaztuk. A következő tétel azt mutatja, hogy a kompaktság nem ilyen jellegű tulajdonság.* $\triangle$

3.1. Tétel. *$K \subset Y \subset X$ esetén a K halmaz pontosan akkor kompakt X-ben, ha kompakt Y-ban.*

Ha K kompakt halmaz az X metrikus térben és $K = X$, akkor az X metrikus teret kompakt metrikus térnek *nevezzük.*

3.2. Tétel. *Egy halmaz pontosan akkor kompakt, ha tetszőleges zárt halmazokból álló halmazcsaládra igaz a következő állítás: ha a halmazcsalád bármely véges részcsaládjának van közös pontja, akkor a teljes halmazcsaládnak is van.*

Bizonyítás. Legyen X egy kompakt halmaz és $\mathcal{F} = \{F_\alpha \mid \alpha \in I\}$ egy zárt halmazokból álló halmazcsalád, amelynek tetszőleges véges részcsaládja rendelkezik közös ponttal. Feltételezzük, hogy

$$\cap_\alpha F_\alpha = \emptyset. \tag{3.1}$$

A $G_\alpha = \complement_X F_\alpha$ halmazok nyíltak minden lehetséges α-ra, tehát a (3.1) alapján a $\{G_\alpha\}$ halmazcsalád az X kompakt halmaz egy nyílt lefödése. A kompaktság értelmezése alapján létezik $\{G_{\alpha_i} \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ véges részcsalád, amelyre

$$\cup_{i=1}^n G_{\alpha_i} = X.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy

$$\cap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \emptyset,$$

és ez ellentmond a feltevésnek. Az ellentmondás csak abból eredhet, hogy (3.1) hamis, tehát a bizonyítás egyik része teljes.

Tekintsük a $\{G_\alpha \mid \alpha \in I\}$ nyílt lefödését X-nek ($X = \cup_\alpha G_\alpha$). Az $F_\alpha = \complement_X G_\alpha$ zárt halmazokra $\cap_\alpha F_\alpha = \emptyset$, tehát létezik olyan $\{F_{\alpha_i} \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ véges részcsalád, amelyre $\cap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \emptyset$. Ez viszont azt jelenti, hogy az eredeti nyílt lefödésből kiválasztható az X egy véges nyílt lefödése ($\{G_{\alpha_i} \mid i = 1, 2, \dots, n\}$), tehát X kompakt. □

Az X halmazt *megszámlálhatóan kompaktnak* nevezzük, ha minden megszámlálható nyílt lefödéséből kiválasztható egy véges lefödés.

Az (X, ρ) metrikus tér $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatát *konvergensnek* nevezzük, ha létezik olyan $x \in X$, amelyre teljesül a következő tulajdonság:
bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $n \geq n_\varepsilon$-re $\rho(x_n, x) < \varepsilon$.

Azt is mondjuk, hogy az (x_n) sorozat x-hez *konvergál,* vagy hogy x a sorozat *határértékpontja* (egyszerűen csak *határértéke.*) Általában az $x_n \to x$, vagy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim x_n = x$$

jelölést használjuk. Ha az (x_n) sorozat nem konvergens, akkor *divergensnek* nevezzük.

Az X halmazt *szekvenciálisan kompaktnak* nevezzük, ha minden sorozatának létezik konvergens részsorozata.

3.3. Tétel. *Az (X, d) metrikus térben a következő kijelentések ekvivalensek:*

(a) *X kompakt;*

(b) *X megszámlálhatóan kompakt;*

(c) *X szekvenciálisan kompakt.*

3.4. Tétel. *Ha $K \subset X$ kompakt részhalmaza az (X, ρ) metrikus térnek, akkor K zárt és korlátos.*

Bizonyítás. Igazoljuk, hogy $\complement_X K$ nyílt.

Ha $K = X$, akkor nincs amit bizonyítani, tehát feltételezhetjük, hogy $\complement_X K \neq \emptyset$. Válasszunk egy tetszőleges $x \in X$, $x \notin K$ elemet. $y \in K$-ra legyen V_y és W_y az x, illetve y két környezete, amelyeknek sugara kisebb, mint $\rho(x, y)/2$. Mivel $x \neq y$, ezek a környezetek léteznek. Mivel K kompakt, a $(W_y)_{y\in K}$ nyílt lefödésből kiválasztható egy véges lefödés, tehát léteznek az $y_1, \dots, y_n$ pontok K-ban úgy, hogy

$$K \subset W_{y_1} \cup \cdots \cup W_{y_n} = W.$$

A $V = V_{y_1} \cap \cdots \cap V_{y_n}$ halmaz az x egy környezete, és $V \cap W = \emptyset$. Így $V \subset \complement_X K$, tehát x belső pontja $\complement_X K$-nek, és mivel x tetszőleges pont, a $\complement_X K$ halmaz nyílt.

Igazoljuk, hogy K korlátos. Tekintsük a $\mathcal{B} = \{\mathrm{B}(x,1) \mid x \in K\}$ nyílt halmazcsaládot. $\mathcal{B}$ egy nyílt lefödése az X-nek, tehát kiválasztható belőle egy $\{\mathrm{B}(x_1,1),\dots,\mathrm{B}(x_m,1)\}$ véges lefödés. Ha $k = \max\{\rho(x_i,x_j) \mid 1 \le i,j \le m\}$, akkor tetszőleges $x,y \in K$-ra létezik $1 \le i,j \le m$ úgy, hogy $x \in \mathrm{B}(x_i,1)$ és $y \in \mathrm{B}(x_j,1)$. Így

$$\rho(x,y) \le \rho(x,x_i) + \rho(x_i,x_j) + \rho(x_j,y) \le 1 + k + 1 = k + 2.$$

Ez alapján $\mathrm{diam} K \le k+2$, tehát a K halmaz korlátos. □

Megjegyzés. A 3.4 tétel fordítottja általában nem igaz. A 3.13 tételben egy olyan esetet láthatunk, amikor a fordított állítás is igaz. Igazolható, hogy végtelen dimenziós normált terekben általában nem igaz a fordított állítás (az egységgömb korlátos és zárt, de nem kompakt). △

3.5. Tétel. *Ha $\{K_\alpha\}$ egy kompakt halmazokból álló halmazcsalád X-ben, és minden véges részcsaládnak a metszete különbözik az üreshalmaztól, akkor a $\cap K_\alpha$ metszet sem üreshalmaz.*

Bizonyítás. Következik a 3.2 és 3.4 tételekből. □

3.6. Tétel. *Kompakt halmaz tetszőleges zárt részhalmaza is kompakt.*

Bizonyítás. Tekintsük az $F \subset K \subset X$ halmazokat, ahol F zárt (X-ben), és K kompakt. Ha $\{V_\alpha\}$ egy nyílt lefödése F-nek, akkor

$$F \subset K \subset \left(\bigcup_\alpha V_\alpha\right) \cup (X \setminus F).$$

Mivel K kompakt, a $\{V_{\alpha_i}\} \cup (X \setminus F)$ nyílt lefödésből kiválasztható egy véges lefödés, amely lefödi K-t. Ez a lefödés az F-et is lefödi. Ha ebből a lefödésből elhagyjuk az $X \setminus F$ halmazt, akkor a többi halmaz még mindig fedi F-et, mert $X \setminus F \cap F = \emptyset$. Így véges sok V_α halmaz lefödi F-et, tehát F kompakt.

3.1. Következmény. *Ha F zárt és K kompakt, akkor a $K \cap F$ halmaz kompakt.*

Bizonyítás. A 3.4 tétel alapján K zárt, tehát a 2.4 tétel szerint $F \cap K$ is zárt. De $F \cap K \subset K$, tehát az előbbi tétel alapján $F \cap K$ is kompakt. □

3.7. Tétel. *Ha A egy végtelen sok elemet tartalmazó részhalmaza a K kompakt halmaznak, akkor K-nak van legalább egy torlódási pontja K-ban.*

Bizonyítás. Ha K egyetlen pontja sem torlódási pontja A-nak, akkor minden $x \in K$-nak létezik V_x környezete, amely az A-nak legfeljebb egy elemét tartalmazza (x-et, ha $x \in A$). Az így szerkesztett nyílt környezetek lefödik K-t. Mivel K kompakt, ebből a lefödésből kiválasztható egy véges lefödés, amely szintén lefödi K-t. Ez a véges lefödés A-t is lefödi, és másrészt csak véges sok A-beli pontot tartalmazhat. Ez ellentmond annak, hogy A-ban végtelen sok elem van, tehát a bizonyítás teljes. □

3.8. Tétel. (Cantor lemma) *Ha a* (K_n) *nemüres és kompakt halmazok egymásba ágyazottak* $(K_{n+1} \subset K_n)$, *és*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} K_n = 0,$$

akkor a $\cap_1^\infty K_n$ *halmaz pontosan egy pontot tartalmaz.*

Bizonyítás. Tekintsük a $K = \bigcap\limits_1^\infty K_n$ halmazt. A 3.5 tétel alapján $K \neq \emptyset$. Ha K egynél több elemet tartalmaz, akkor $\operatorname{diam} K > 0$. Ez viszont ellentmondás, mert minden n-re $K_n \supset K$, és így $\operatorname{diam} K_n \geq \operatorname{diam} K$. $\square$

3.9. Tétel. $\mathbb{R}$*-ben minden zárt és korlátos intervallum kompakt.*

Bizonyítás. Ha $I = [a, b]$ egy zárt és korlátos intervallum, akkor a hossza $\delta = |a - b| = b - a$. Ha létezik I-nek olyan $\{G_\alpha\}$ nyílt lefödése, amelyből nem választható ki egyetlen véges lefödés sem, akkor a $c = (a + b)/2$ jelöléssel ez a tulajdonság a $Q_1 = [a, c]$ és $Q_2 = [c, b]$ intervallumok közül legalább az egyikre átöröklődik. Ezt az intervallumot jelöljük I_1-gyel, és ismételjük meg a gondolatmenetet. A matematikai indukció elve alapján szerkeszthetünk egy olyan $\{I_n\}$ intervallumsorozatot, amelyre

(i) $I \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$;

(ii) I_n nem fedhető le a $\{G_\alpha\}$ lefödés egyetlen véges részrendszerével sem;

(iii) ha $x, y \in I_n$, akkor $|x - y| \leq 2^{-n}\delta$.

Az (i) tulajdonság és a 2.29 tétel alapján (lásd a 33. oldalt) létezik $z \in \cap I_n$. Valamilyen α-ra $z \in G_\alpha$, mert $\{G_\alpha\}$ lefödi I-t. De G_α nyílt, és így létezik olyan $r > 0$, amelyre $\mathrm{B}(z, r) \subset G_\alpha$. Ha n elég nagy ($2^{-n}\delta < r$), akkor az (iii) tulajdonság alapján $I_n \subset G_\alpha$. Ez ellentmond (ii)-nek. $\square$

3.10. Tétel. (Heine[39]-Borel[40]) *Ha az* $A \subset \mathbb{R}$ *halmaz az alábbi tulajdonságok közül egyikkel rendelkezik, akkor rendelkezik a másik kettővel is:*

(a) *A zárt és korlátos;*

(b) *A kompakt;*

(c) *A minden végtelen sok elemet tartalmazó részhalmazának van A-ban legalább egy torlódási pontja.*

Bizonyítás. (a) $\Longrightarrow$ (b). A feltételek alapján létezik olyan zárt és korlátos I intervallum, amelyre $A \subset I$. Így a 3.9 és 3.4 tételekből következik (b).

(b) $\Longrightarrow$ (c). Ez a 3.7 tétel.

[39]Heinrich Eduard Heine, 1821-1881
[40]Emile Borel, 1871-1956

(c) $\Longrightarrow$ (a). Ha A nem korlátos, akkor minden $n \in \mathbb{N}$-re létezik $x_n \in A$ úgy, hogy

$$|x_n| > n.$$

Ezeknek a pontoknak a P halmaza végtelen sok elemet tartalmaz és nincs egyetlen torlódási pontja sem $\mathbb{R}$-ben (tehát A-ban sem). Így (c)-ből következik, hogy A korlátos.

Ha A nem zárt, akkor létezik A-nak olyan $x_0 \in \mathbb{R}$ torlódási pontja, amely nincs A-ban. A torlódási pont értelmezése alapján minden $n = 1, 2, 3, \ldots$ esetén létezik $x_n \in A$ úgy, hogy $|x_n - x_0| < 1/n$. Jelöljük M-mel ezeknek a pontoknak a halmazát. Az M halmaz végtelen sok elemet tartalmaz (ellenkező esetben az $|x_n - x_0|$ kifejezés végtelen sok n-re ugyanazt az értéket venné fel), tehát M-nek az x_0 torlódási pontja. Ha $y \in \mathbb{R}$, $y \neq x_0$, akkor

$$|x_n - y| \geq |x_0 - y| - |x_n - x_0| \geq |x_0 - y| - 1/n \geq \frac{1}{2}|x_0 - y|$$

véges sok n-től eltekintve, tehát y nem torlódási pontja M-nek (2.10 tétel). Ez ellentmondana (c)-nek, tehát ha (c) igaz, akkor (a) is igaz. □

Megjegyzés. A (b) $\Longleftrightarrow$ (c) ekvivalencia igaz minden metrikus térben. Általában (a)-ból nem következik (b) és (c). △

3.11. Tétel. (Weierstrass) *Az $\mathbb{R}$ minden végtelen sok elemet tartalmazó és korlátos halmazának van legalább egy torlódási pontja $\mathbb{R}$-ben.*

Bizonyítás. Ha az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz korlátos, akkor létezik olyan $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallum, amelyre $A \subset I$. A 3.9 tétel alapján I kompakt, és így A-nak a 3.7 tétel alapján van legalább egy torlódási pontja I-ben. □

A 3.9, 3.10, és 3.11 tételek kiterjeszthetők $\mathbb{R}^k$-ra is.

Az $\mathbb{R}^k$-ban *zárt és korlátos intervallumnak* nevezzük az

$$I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k],$$

alakú halmazokat, ahol $[a_i, b_i]$ zárt és korlátos intervallum, minden $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ esetén.

3.12. Tétel. *$\mathbb{R}^k$-ban minden korlátos és zárt I intervallum kompakt.*

3.13. Tétel. *Ha $E \subset \mathbb{R}^k$, akkor a következő kijelentések egyenértékűek:*

(a) *E zárt és korlátos;*

(b) *E kompakt;*

(c) *E-nek minden végtelen sok elemet tartalmazó részhalmazának van legalább egy torlódási pontja E-ben.*

3.14. Tétel. (Weierstrass) $\mathbb{R}^k$ *-ban minden végtelen sok pontot tartalmazó korlátos halmaznak van legalább egy torlódási pontja* $\mathbb{R}^k$ *-ban.*

A tökéletes halmazokat a 70. oldalon értelmeztük.

3.15. Tétel. *Ha* $P \subset \mathbb{R}$ *egy nemüres tökéletes halmaz, akkor* P *megszámlálhatatlan.*

Bizonyítás. Mivel P-nek vannak torlódási pontjai, P nem lehet véges halmaz. Ha P megszámlálható, akkor P pontjai egy $x_1, x_2, \dots$ sorozatba rendezhetők. Induktívan megszerkesztjük a B_n gömböket a következő eljárással:

$\mathrm{B}_1 = \mathrm{B}(x_1, r_1)$ legyen tetszőleges.

Ha B_n-et megszerkesztettük, és $\mathrm{B}_n \cap P \neq \emptyset$, akkor mivel P minden pontja torlódási pontja P-nek, létezik olyan B_{n+1} gömb, amelyre

(i) $\overline{\mathrm{B}}_{n+1} \subset \mathrm{B}_n$;

(ii) $x_n \notin \overline{\mathrm{B}}_{n+1}$;

(iii) $\overline{\mathrm{B}}_{n+1} \cap P \neq \emptyset$.

Az (iii) tulajdonság alapján $\overline{\mathrm{B}}_{n+1}$ teljesíti az indukciós feltételt, tehát a szerkesztés folytatható.

A $K_n = \overline{\mathrm{B}}_n \cap P$ halmazok egymásbaágyazottak és kompaktak, ezért a $\bigcap\limits_1^\infty K_n$ halmaz nem üreshalmaz. Másrészt az $x_n \notin K_{n+1}$ összefüggés alapján P egyetlen pontja sem lehet $\bigcap\limits_1^\infty K_n$-ben. De a K_n halmazok szerkesztése alapján ez csak akkor lehetséges, ha az előbbi metszet üreshalmaz. Ez ellentmondás, tehát a bizonyítás teljes. □

3.2. Következmény. *Minden* $[a, b]$ $(a < b)$ *intervallum megszámlálhatatlan.*

Megjegyzés. A továbbiakban igazoljuk, hogy a Cantor halmaz tökéletes és nem tartalmaz egyetlen valódi intervallumot sem.

A $C_0 = [0, 1]$ intervallumból hagyjuk el a középső harmadát, és jelöljük C_1-gyel a maradék két intervallum egyesítését:

$$C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1].$$

A C_1-et alkotó intervallumok mindegyikéből hagyjuk el a középső harmadukat, és az így kapott halmazt jelöljük C_2-vel:

$$C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 3/9] \cup [6/9, 7/9] \cup [8/9, 1].$$

Általában, ha C_n-et már megszerkesztettük, akkor az őt alkotó összes intervallum középső harmadát elhagyva megkapjuk a C_{n+1} halmazt. Az így szerkesztett C_n halmazsorozat teljesíti a következő feltételeket:

(i) $C_1 \supset C_2 \supset \dots;$

(ii) C_n pontosan 2^n darab intervallum egyesítése, és ezek összhossza 3^{-n}.

A

$$C = \bigcap_1^\infty C_n$$

halmazt *Cantor halmaznak* nevezzük. C kompakt és a 3.5 tétel alapján nem üreshalmaz.

Az (ii) tulajdonság alapján egyetlen

$$\left] \frac{3k+1}{3^m}, \frac{3k+2}{3^m} \right[\tag{3.2}$$

alakú intervallumnak (k és m pozitív egészek) sincs közös pontja C-vel. Mivel minden $]\alpha, \beta[$ intervallum tartalmaz ilyen részintervallumot, a C nem tartalmaz egyetlen intervallumot sem.

Másrészt, ha $x \in C$, és I egy nyílt intervallum, amely tartalmazza x-et, akkor létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $x \in I_n$, ahol I_n a C_n egy részintervalluma. Ha n-et elég nagynak választjuk, elérhető, hogy $I_n \subset I$ is teljesüljön. Ha x_n az I_n-nek az a végpontja, amelyre $x_n \neq x$, akkor C szerkesztése alapján $x_n \in C$. Így x a C torlódási pontja, tehát C tökéletes halmaz. $\triangle$

Kitűzött feladatok

1. Az $\mathbb{R}_+$ halmazon értelmezzük a

$$d : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad d(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{ha } x \neq y \\ 0, & \text{ha } x = y \end{cases}$$

függvényt. Bizonyítsd be, hogy ez egy metrika, és igazold, hogy $(\mathbb{R}_+, d)$ nem teljes metrikus tér.

2. Bizonyítsd be, hogy ha E egy véges halmaz, akkor a $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ halmazon a $d : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, $d(A,B) = |A \Delta B|$, $\forall A, B \subset E$ összefüggéssel értelmezett függvény egy metrika.

3. Az egész számok halmazán értelmezzük a $\|\cdot\|_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ függvényt a

$$\|n\|_2 = \begin{cases} 2^{-k}, & \text{ha } n = 2^k m \text{ és } m \text{ páratlan;} \\ 0, & \text{ha } n = 0 \end{cases}$$

összefüggéssel. Bizonyítsd be, hogy a $d : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = \|x-y\|_2$ összefüggéssel értelmezett leképezés egy metrika $\mathbb{Z}$-n (ezt nevezik *diadikus* metrikának).

4. Ha X a természetes számokból álló sorozatok halmaza, és $\alpha = (a_n)_{n\geq 1}$, valamint $\beta = (b_n)_{n\geq 1}$ két X-beli sorozat, akkor értelmezzük a $d : X \times X \to \mathbb{R}$, $d(\alpha, \beta) = \frac{1}{2^N}$ függvényt, ahol $a_k = b_k$, minden $1 \leq k \leq N$ esetén és $a_{N+1} \neq b_{N+1}$. Bizonyítsd be, hogy (X, d) egy metrikus tér.

5. Az $X = \mathbb{Z}_n^k$ halmazon tekintjük a $d : X \times X \to \mathbb{R}$ függvényt, ahol tetszőleges $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ és $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$ esetén $d(x, y)$ azoknak a j komponenseknek a száma, amelyekre $x_j \neq y_j$. Bizonyítsd be, hogy (X, d) egy metrikus tér (d *a Hamming*[41]*-féle távolság*).

6. Minden tökéletes halmaz, amely sehol sem sűrű, homeomorf a Cantor-féle triadikus halmazzal (a homeomorfizmus egy bijektív és folytonos függvény, amelynek az inverze is folytonos).

7. Bizonyítsd be, hogy az $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallum a
$$d : I \times I \to \mathbb{R}, d(x, y) = |\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}y|$$
metrikával egy teljes metrikus tér.

8. Az (X, d) kompakt metrikus tér zárt halmazainak K családján értelmezzük a $d_H : K \times K \to \mathbb{R}$, $d(A, B) = \sup\limits_{a\in A} d(a, B) + \sup\limits_{b\in A} d(b, A)$ függvényt, ahol $d(a, B) = \inf\limits_{b\in B} d(a, b)$. Bizonyítsd be, hogy (K, d_H) egy metrikus tér (Hausdorff[42]-Pompeiu[43] metrika).

9. Az $X = \{(x_n)_{n\geq 1} | x_n \in [0, 1],\ \forall n \geq 1\}$ halmazon értelmezzük a $d : X \times X \to \mathbb{R}$, $d(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{2^k}$ függvényt. Bizonyítsd be, hogy (X, d) egy metrikus tér (ezt nevezzük *Hilbert kockának*).

10. Az $X = \{(x_n)_{n\geq 1} | x_n \in \{0, 1\},\ \forall n \geq 1\}$ halmazon értelmezzük a $d : X \times X \to$ $\to \mathbb{R}$, $d(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{3^k}$ függvényt. Bizonyítsd be, hogy (X, d) egy metrikus tér, amely homeomorf a Cantor-féle triadikus halmazzal.

11. Hány izometriája létezik az (X, d) metrikus térnek, ahol $X = [-1, 1]^n$ és $d(x, y) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$?

12. Bizonyítsd be, hogy ha (X_i, d_i), $i \geq 1$ metrikus terek, akkor az $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ halmazon a
$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}$$

[41] Richard Hamming, 1915-1998
[42] Felix Hausdorff, 1868-1942
[43] Dimitrie Pompeiu, 1873-1954

kifejezéssel értelmezett $d : X \times X \to \mathbb{R}$ függény egy metrika.

13. (Hlawka[44])

(i) Bizonyítsd be, hogy ha x, y, z az $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ pre-Hilbert tér tetszőleges elemei, akkor

$$\begin{aligned}(\|x\| + \|y\| + \|z\| + \|x+y+z\| - \|x+y\| - \|y+z\| - \|z+x\|)\,\cdot \\ \cdot\,(\|x\| + \|y\| + \|z\| + \|x+y+z\|) = \\ = (\|x\| + \|y\| - \|x+y\|)\,(\|y\| + \|z\| - \|y+z\|)\,(\|z\| + \|x\| - \|z+x\|)\,\cdot \\ \cdot\,(\|x\| + \|x+y+z\| - \|y+z\|)\,(\|y\| + \|x+y+z\| - \|z+x\|) \\ \cdot\,(\|z\| + \|x+y+z\| - \|x+y\|)\,.\end{aligned}$$

(ii) Bizonyítsd be, hogy ha x, y, z az $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ pre-Hilbert tér tetszőleges elemei, akkor

$$\|x+y\| + \|y+z\| + \|z+x\| \le \|x\| + \|y\| + \|z\| + \|x+y+z\|.$$

14. (Djoković[45]) Bizonyítsd be, hogy ha $x_1, x_2, \ldots, x_n$ az $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ prehilbert tér tetszőleges elemei, akkor

$$\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} \|a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_k}\| \le \begin{pmatrix} k-2 \\ n-2 \end{pmatrix} \left(\frac{n-k}{k-1} \sum_{i=1}^{n} \|a_i\| + \|\sum_{i=1}^{n} a_i\| \right).$$

15. (Miron Nicolescu[46]) Bizonyítsd be, hogy ha $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, akkor létezik $i, j \in \{1, 2, \ldots, n+2\}$, $i \ne j$ úgy, hogy

(i) $\langle a_i, a_j\rangle \ge 0$;

(ii) $\|a_i + a_j\| > max\{\|a_i\|, \|a_j\|\}$.

16. (Bessel[47]) Bizonyítsd be, hogy ha az $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ valós pre-Hilbert térben az $\{x_i \,|\, 1 \le i \le n\}$ elemekre teljesül a

$$\langle x_i, x_j\rangle = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \ne j \\ 1, & \text{ha } i = j \end{cases}$$

összefüggés, akkor tetszőleges $x \in X$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k\rangle|^2 \le \|x\|^2,$$

ahol a $\|\cdot\|$ norma a skaláris szorzat által származtatott norma.

17. (Dunkl[48]-Williams[49]) Bizonyítsd be, hogy ha (X, d) egy valós pre-Hilbert tér,

[44] Edmund Hlawka, ehlawka@osiris.tuwien.ac.at
[45] Dragomir Z. Djoković, djokovic@uwaterloo.ca
[46] Miron Nicolescu, 1903-1975
[47] Wilhelm Bessel, 1784-1949
[48] Charles F. Dunkl, cfd5z@virginia.edu
[49] Keneth S. Williams, 1940-

akkor

$$\|a-b\| \geq \frac{1}{2}\left(\|a\|+\|b\|\right)\left\|\frac{a}{\|a\|}-\frac{b}{\|b\|}\right\|.$$

18. (Clarkson[50]) Bizonyítsd be, hogy ha x, y az $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ pre-Hilbert tér két tetszőleges eleme, akkor

    (i) $\|x+y\|^q + \|x-y\|^q \leq \left(\|x\|^p + \|y\|^p\right)^{q-1}$, ha $1 < p \leq 2$ és $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$;

    (ii) $\|x+y\|^p + \|x-y\|^p \leq 2\left(\|x\|^q + \|y\|^q\right)^{p-1}$, ha $p \geq 2$ és $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

19. Bizonyítsd be, hogy ha (X, d) egy kompakt metrikus tér, és az $f : X \to X$ függvényre

$$d(f(x), f(y)) \geq d(x, y) \ \forall x, y \in X,$$

akkor f egy bijektív izometria.

20. A (X, d) egy metrikus tér Cauchy sorozatainak CS halmazán értelmezzük a

$$x \sim y \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$$

relációt, ahol $x = (x_n)_{n\geq 1}$, $y = (y_n)_{n\geq 1}$ Cauchy sorozatok. Bizonyítsd be, hogy az ekvivalencia osztályok X^* halmaza a $d^*(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ metrikával egy teljes metrikus tér.

[50] James A. Clarkson, $\sim$ 1936

3. Fejezet

Sorozatok és sorok

Nem szeretek dolgozni...
de szeretem, hogy a munkában esélyed van
megtalálni magad.
A saját valóságod, saját magadnak,
amit talán senki más nem láthat.
Joseph Conrad

Ebben a fejezetben sorozatok és sorok tulajdonságait vizsgáljuk.

3.1 Számsorozatok

3.1.1 Konvergens sorozatok

Az (X, ρ) metrikus térben az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot *konvergensnek* nevezzük, ha létezik olyan $x^* \in X$ pont, amelyre minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik n_ε úgy, hogy $n \geq n_\varepsilon$-ra $\rho(x_n, x) < \varepsilon$.

Az x^*-ot az (x_n) sorozat határértékének nevezzük, és azt is mondjuk, hogy az (x_n) sorozat konvergál x^*-hoz, vagy egyszerűen csak x_n tart x^*-hoz. Általában az $x_n \to x$, illetve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim x_n = x^*$$

jelölést használjuk. Ha az (x_n) sorozat nem konvergens, akkor *divergensnek* nevezzük.

Megjegyzések. (a) Fontos, hogy a „konvergens sorozat” értelmezése nemcsak a sorozat tagjaitól függ, hanem az X tértől is. Például az (x_n), $x_n = 1/n$ sorozat konvergens $\mathbb{R}$-ben (0-hoz tart), de nem konvergens, ha az $X =]0, \infty[$ halmazt tekintjük a $\rho(x, y) = |x - y|$ metrikával.

(b) Ha (x_n) egy valós számsorozat, akkor

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \cap_{\varepsilon>0} \cup_{m>0} \cap_{n\geq m}]x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon[= \{a\}. \quad \triangle$$

Az (X, ρ) metrikus térben az (x_n) sorozatot korlátosnak nevezzük, ha az $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ halmaz korlátos. (A korlátos halmaz értelmezését lásd a 70. oldalon.)

1.1. Tétel. *Ha (x_n) egy sorozat az (X, ρ) metrikus térben, akkor igazak a következő állítások:*

(a) (x_n) *pontosan akkor konvergál* $x \in X$ *-hez, ha az* x *minden környezete véges sok tag kivételével a sorozat összes tagját tartalmazza;*

(b) *ha* $x, y \in X$ *és* (x_n) *konvergál* x *-hez is és* y *-hoz is, akkor* $x = y$*;*

(c) *ha* (x_n) *konvergens, akkor* (x_n) *korlátos;*

(d) *ha* $A \subset X$ *és* x *torlódási pontja* A *-nak, akkor létezik olyan* (x_n) *sorozat* A *-ban, amelyre* $\lim x_n = x$.

Bizonyítás. (a) Ha $\lim x_n = x$ és $V \in \mathcal{V}(x)$, akkor valamilyen $\varepsilon > 0$-ra a $\rho(y, x) < \varepsilon$, $y \in X$ összefüggésekből következik, hogy $y \in V$. Egy ilyen ε-ra létezik az n_ε küszöbszám úgy, hogy $n \geq n_\varepsilon$ esetén $\rho(x_n, x) < \varepsilon$. Így $n \geq n_\varepsilon$-ra $x_n \in V$.

Fordítva, ha minden $V \in \mathcal{V}(x)$ környezet a sorozat véges sok tagjától eltekintve az összes tagot tartalmazza, akkor a $V = \mathrm{B}(x, \varepsilon)$ választással n_ε-nak választhatunk eggyel nagyobb számot, mint a V-n kívüli tagok indexei közül a legnagyobb. Ez az n_ε létezik, és minden $n \geq n_\varepsilon$ esetén $\rho(x_n, x) < \varepsilon$, tehát a sorozat konvergens.

(b) Rögzített $\varepsilon > 0$ esetén létezik n_ε és m_ε úgy, hogy

$$\begin{aligned} n \geq n_\varepsilon &\implies \rho(x_n, x) < \varepsilon/2, \\ n \geq m_\varepsilon &\implies \rho(x_n, y) < \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Tehát, ha $n \geq \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}$, akkor

$$0 \leq \rho(x, y) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x_n, y) < \varepsilon.$$

Mivel ε tetszőleges volt, ez csak úgy lehetséges, ha $\rho(x, y) = 0$.

(c) Ha $\lim x_n = x$, akkor létezik olyan m természetes szám, amelyre $n > m$ esetén $\rho(x_n, x) < 1$. Az

$$r = \max\{1, \rho(x_1, x), \rho(x_2, x), \ldots, \rho(x_m, x)\}$$

választással $\rho(x_n, x) \leq r$, minden $n = 1, 2, 3\ldots$ esetén.

(d) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik $x_n \in A$ úgy, hogy $\rho(x_n, x) < 1/n$. Minden $\varepsilon > 0$ esetén n_ε-t úgy válasszuk, hogy $\varepsilon n_\varepsilon > 1$. Ha $n > n_\varepsilon$, akkor $\rho(x_n, x) < \varepsilon$, tehát $x_n \to x$. □

Ha $\mathbb{R}^k$-on adott egy norma (lásd az 52. oldalt), akkor a

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^k \tag{1.1}$$

kifejezéssel értelmezett $\rho : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ függvény egy metrika. A folytonosság tanulmányozása során igazoljuk, hogy $\mathbb{R}^k$-ban bármely két norma ekvivalens. A 70. oldalon található 2.13 tétel alapján egyelőre csak annyit láthatunk be, hogy

1.1. Következmény. *Ha egy sorozat konvergens a 2.13 tételben említett metrikák közül valamelyik szerint, akkor konvergens az összes szerint.*

A határérték értelmezése alapján a valós, illetve komplex számsorozatok határértéke és a velük végzett műveletek közt szoros összefüggés létezik.

1.2. Tétel. *Ha* (x_n), (y_n) *valós számsorozatok,* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *és* $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, *akkor*

(a) $\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$;

(b) $\lim_{n\to\infty} c \cdot x_n = cx$, $\lim_{n\to\infty} (c + x_n) = c + x$, *minden* $c \in \mathbb{R}$ *esetén;*

(c) $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = xy$;

(d) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{x}$, *ha* $x_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \dots)$ *és* $x \neq 0$.

Bizonyítás. (a) Bármely $\varepsilon > 0$-ra létezik n_ε és m_ε úgy, hogy

$$\begin{aligned} n \geq n_\varepsilon &\implies |x_n - x| < \varepsilon/2, \\ n \geq m_\varepsilon &\implies |y_n - y| < \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Ha $\overline{n}_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}$, akkor $n \geq \overline{n}_\varepsilon$-ra

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

(b) Az első egyenlőség következik (c)-ből, a második (a)-ból.

(c) Írhatjuk, hogy

$$|x_n y_n - xy| \leq |x_n||y_n - y| + |y||x_n - x|.$$

Mivel (x_n) konvergens, korlátos is, tehát létezik $M > 1$ úgy, hogy $|x_n| < M$ és $|y| < M$. Bármilyen $\varepsilon > 0$-ra létezik n_ε és m_ε úgy, hogy

$$\begin{aligned} n \geq n_\varepsilon &\implies |x_n - x| < \varepsilon/(2M), \\ n \geq m_\varepsilon &\implies |y_n - y| < \varepsilon/(2M). \end{aligned}$$

Ha $\overline{n}_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}$ és $n \geq \overline{n}_\varepsilon$, akkor

$$|x_n y_n - xy| \leq M|x_n - x| + M|y_n - y| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

(d) Válasszuk m-et úgy, hogy $|x_n - x| < (1/2)|x|$, ha $n > m$. Ebben az esetben

$$|x_n| > \frac{1}{2}|x|, \quad n \geq m.$$

Bármely $\varepsilon > 0$-ra létezik $\overline{n}_\varepsilon \geq m$ természetes szám úgy, hogy $n \geq \overline{n}_\varepsilon$ esetén

$$|x_n - x| < \frac{1}{2}|x|^2 \varepsilon.$$

Ha $n \geq \overline{n}_\varepsilon$, akkor

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{x_n - x}{x_n x} \right| < \frac{2}{|x|^2} |x_n - x| < \varepsilon. \quad \square$$

1.3. Tétel. (a) *Tekintjük az* $x_n \in \mathbb{R}^k$, $n = 1, 2, \ldots$ *sorozatokat, ahol*

$$x_n = (\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \ldots, \alpha_{kn}), \quad \forall n \geq 1.$$

Az (x_n) *sorozat pontosan akkor konvergál az* $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ *elemhez, ha*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{jn} = \alpha_j, \quad 1 \leq j \leq k. \tag{1.2}$$

(b) *ha* $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ *konvergens sorozatok* $\mathbb{R}^k$*-ban (* $x_n \to x$, $y_n \to y$ *) és* $(\beta_n)_n$ *konvergens valós számsorozat (* $\beta_n \to \beta$ *), akkor*

$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y,$

$\lim\limits_{n\to\infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x, y \rangle,$

$\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n x_n = \beta x.$

Bizonyítás. Az euklideszi metrikát használjuk.

(a) Ha $x_n \to x$, akkor az

$$|\alpha_{jn} - \alpha_j| \leq \|x_n - x\|_2, \quad j = 1, \ldots, k$$

egyenlőtlenségek következnek a norma értelmezéséből. A határértékek értelmezése alapján (1.2) teljesül.

Fordítva, ha (1.2) teljesül, akkor minden $\varepsilon > 0$-ra létezik olyan n_ε, amelyre $n \geq n_\varepsilon$ esetén

$$|\alpha_{jn} - \alpha_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Így $n \geq n_\varepsilon$ esetén

$$\|x_n - x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{k} |\alpha_{jn} - \alpha_j|^2 \right)^{1/2} < \varepsilon,$$

tehát $x_n \to x$, és így (a) igaz.

(b) következik (a)-ból és az 1.2-as tételből (lásd a 87. oldalt). □

3.1.2 Részsorozatok

Ha (x_n) egy sorozat az (X, ρ) metrikus térben és $(n_k)_k$ egy természetes számokból álló növekvő sorozat ($n_1 < n_2 < \ldots$), akkor az $(x_{n_k})_k$ sorozatot az (x_n) sorozat *részsorozatának* nevezzük.

Megjegyzés. Az (x_n) sorozat pontosan akkor konvergál x-hez, ha (x_n) minden részsorozata x-hez tart.

1.4. Tétel. *Minden* $\mathbb{R}$*-ben korlátos sorozatnak van legalább egy konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Jelöljük E-vel az (x_n) sorozat tagjaiból alkotott halmazt.

Ha E véges, akkor létezik legalább egy $x \in E$ érték és egy $(x_{n_k})_k$ részsorozat úgy, hogy

$$x_{n_1} = x_{n_2} = \cdots = x.$$

Az $(x_{n_k})_k$ részsorozat konvergens, és határértéke x.

Ha E végtelen sok elemet tartalmaz, akkor a 3.11 tétel (lásd a 78. oldalt) alapján E-nek van legalább egy $x \in \mathbb{R}$ torlódási pontja. Válasszuk n_1-et úgy, hogy $|x_{n_1} - x| < 1$. Ha az $n_1, \ldots, n_{i-1}$ indexeket már rögzítettük, akkor a 2.10 tétel (lásd a 70. oldalt) alapján létezik olyan $n_i > n_{i-1}$, amelyre $|x_{n_i} - x| < 1/i$. Az $(x_{n_i})_i$ sorozat konvergál x-hez, tehát a tétel bizonyítása teljes. □

1.5. Tétel. *Egy (X, ρ) metrikus térben az (x_n) sorozat konvergens részsorozatainak határértékei zárt halmazt alkotnak.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 2.9-es tételt (lásd a 69. oldalt). □

Megjegyzés. A következő példákból látható, hogy a konvergens részsorozatok határértékeiből alkotott halmaz gyakorlatilag akármekkora lehet. Ez a sorozat tagjaiból alkotott halmaz torlódási pontjainak halmaza. △

Példa. Az

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots, \frac{2^n+1}{2^n}, \ldots$$

sorozat konvergens részsorozatainak határértékéből alkotott halmaz a $[0, 1]$ intervallum, míg az

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \ldots, \frac{9}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots, \frac{3^n}{2^n}, \ldots$$

sorozat esetén a $[0, \infty[$ intervallum. △

3.1.3 Cauchy sorozatok

Az (X, ρ) metrikus térben az (x_n) sorozatot *Cauchy sorozatnak* vagy *fundamentális sorozatnak* nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan n_ε természetes szám, amelyre $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$, ha $n \geq n_\varepsilon$ és $m \geq n_\varepsilon$.

Az (x_n) sorozat elemeiből megszerkesztjük az $E_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ halmazt. Az (x_n) sorozat pontosan akkor Cauchy sorozat, ha

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} E_n = 0.$$

1.6. Tétel. *Ha (X, ρ) egy metrikus tér és $E \subset X$, akkor*

$$\operatorname{diam} E = \operatorname{diam}(\operatorname{cl} E),$$

ahol $\operatorname{cl} E$ *az* E *lezárása.*

Bizonyítás. Mivel $E \subset \mathrm{cl}E$, világos, hogy

$$\mathrm{diam}E \le \mathrm{diam}(\mathrm{cl}E).$$

Ha $\varepsilon > 0$ rögzített és $x, y \in \mathrm{cl}E$, akkor léteznek az $x', y' \in E$ pontok úgy, hogy $\rho(x, x') < \varepsilon$ és $\rho(y, y') < \varepsilon$. Így

$$\rho(x, y) \le \rho(x, x') + \rho(x', y') + \rho(y', y) \le 2\varepsilon + \rho(x', y') \le 2\varepsilon + \mathrm{diam}E.$$

Ebből következik, hogy

$$\mathrm{diam}(\mathrm{cl}E) \le 2\varepsilon + \mathrm{diam}E,$$

és mivel ε tetszőleges volt, a bizonyítás teljes. □

1.7. Tétel. (a) *Metrikus térben minden konvergens sorozat egyben Cauchy sorozat is.*

(b) $\mathbb{R}$*-ben minden Cauchy sorozat konvergens.*

Bizonyítás. (a) Ha $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ és $\varepsilon > 0$, akkor létezik az n_ε természetes szám, amelyre $\rho(x_n, x) < \varepsilon/2$, ha $n \ge n_\varepsilon$. Ha $n, m \ge n_\varepsilon$, akkor

$$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x) + \rho(x_m, x) < \varepsilon,$$

tehát (x_n) Cauchy sorozat.

(b) Ha (x_n) Cauchy sorozat $\mathbb{R}$-ben, akkor az $E_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ jelöléssel az 1.6. tétel alapján

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}(\mathrm{cl}E_n) = 0. \tag{1.3}$$

A $\mathrm{cl}E_n$ halmazok zártak és korlátosak, tehát kompaktak is. Másrészt $\mathrm{cl}E_n \supset \mathrm{cl}E_{n+1}$, tehát a 3.8 tétel alapján (lásd a 76. oldalt) egyetlen $x \in \mathbb{R}$ pont létezik, amelyre $x \in \mathrm{cl}E_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ha $\varepsilon > 0$ rögzített, akkor az (1.3) összefüggés alapján létezik olyan n_0 természetes szám, amelyre $\mathrm{diam}(\mathrm{cl}E_n) < \varepsilon$, ha $n \ge n_0$. Mivel $x \in \mathrm{cl}E_n$, következik, hogy $|y - x| < \varepsilon$, minden $y \in \mathrm{cl}E_n$-re, tehát minden $y \in E_n$-re is. Vagyis, ha $n \ge n_0$, akkor $|x_n - x| < \varepsilon$. Mivel ε tetszőleges lehet, $x_n \to x$. □

Azokat az (X, ρ) metrikus tereket, amelyekben minden Cauchy sorozat konvergens, *teljes metrikus tereknek* nevezzük.

Megjegyzés. Az $\mathbb{R}$ egy teljes metrikus tér, a $\mathbb{Q}$ viszont nem (mindkét halmazban az euklideszi metrikát használjuk). △

1.8. Tétel. *A* $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_p)$, $1 \le p < \infty$, *és* $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_\infty)$ *terek teljes metrikus terek.*

Csak az $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_2)$ térre végezzük el a bizonyítást, a többi eset is hasonlóan bizonyítható, vagy erre az esetre visszavezethető. A következő lemmára van szükségünk: az $(x_n)_n = (\alpha_{1n}, \dots, \alpha_{kn})_n$ sorozat pontosan akkor Cauchy sorozat az $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_2)$ metrikus térben, ha az $(\alpha_{j,n})_n$, $1 \le j \le k$, sorozatok Cauchy sorozatok $\mathbb{R}$-ben.

A lemma bizonyítása. Ha az (x_n) sorozat $\|\cdot\|_2$-Cauchy, akkor létezik olyan n_ε természetes szám, amelyre $n, m \geq n_\varepsilon$ esetén

$$\|x_n - x_m\|_2 < \varepsilon.$$

Ez alapján

$$|\alpha_{jn} - \alpha_{jm}| \leq \|x_n - x_m\|_2 < \varepsilon, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Fordítva, feltételezzük, hogy minden $\varepsilon > 0$-ra létezik $n_{\varepsilon,j}$ úgy, hogy minden $n, m \geq$ $\geq n_{\varepsilon,j}$ esetén

$$|\alpha_{jn} - \alpha_{jm}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Az $n_\varepsilon = \max\limits_{1 \leq j \leq k} n_{\varepsilon,j}$ küszöbszámra

$$\|x_n - x_m\|_2 < \varepsilon, \text{ ha } m, n \geq n_\varepsilon.$$

Bizonyítás. Ha (x_n) is $\|\cdot\|_2$-Cauchy, akkor az $(\alpha_{jn})_n$, $1 \leq j \leq k$, sorozatok is Cauchy sorozatok. De $\mathbb{R}$-ben a Cauchy sorozatok konvergensek, tehát léteznek az $\alpha_j \in \mathbb{R}$ számok ($1 \leq j \leq k$) úgy, hogy $\alpha_{jn} \to \alpha_j$. Az 1.3 tétel (a) alpontja alapján (x_n) konvergens, és határértéke $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. $\square$

A következő tétel azt mutatja, hogy a teljes metrikus tereket a Cantor tételben megfogalmazott tulajdonság jellemzi is.

1.9. Tétel. (Cantor tétel, [27, 4.3.8. tétel]) *Az (X, ρ) metrikus tér pontosan akkor teljes, ha minden egymásbaágyazott, nemüres, zárt halmazokból álló (F_n) halmazsorozatra, ha $\lim \operatorname{diam} F_n = 0$, akkor $\cap F_n \neq \emptyset$.*

1.10. Tétel. *Egy teljes metrikus tér minden zárt részhalmaza szintén teljes metrikus tér.*

Bizonyítás. Ha (x_n) Cauchy sorozat az (X, d) teljes metrikus tér F zárt részhalmazában, akkor létezik $x \in X$ úgy, hogy $x_n \to x$ az X-ben. Mivel F zárt, következik, hogy $x \in F$, és így $x_n \to x$ az F-ben is. Ebből következik, hogy (F, d) is teljes metrikus tér. $\square$

1.11. Tétel. *Az (X, ρ) metrikus térben az $x \in X$ elem pontosan akkor tartozik az $A \subset X$ halmaz lezárásához, ha létezik olyan A-beli elemekből alkotott sorozat, amely tart x-hez.*

Bizonyítás. Az egyik irányú állítás az 1.1 tétel (e) alpontja.

Másrészt, ha (x_n) egy sorozat A-ban és $x_n \to x$, akkor vagy $x \in A$, vagy $x \notin A$. Az első esetben $x \in \operatorname{cl} A$. Ha $x \notin A$, akkor az x minden $V \in \mathcal{V}(x)$ környezete tartalmazza a sorozatnak legalább egy elemét ($x_n \in A \cap V$). Ez viszont azt jelentené, hogy $x \in A' \subset \operatorname{cl} A$. $\square$

1.12. Tétel. *Egy metrikus tér teljes részhalmaza egyben zárt is.*

Bizonyítás. Ha F az (X, ρ) metrikus tér egy teljes részhalmaza, akkor az F tetszőleges x torlódási pontjára ($x \in F'$) az 1.1 tétel (e) alpontja alapján létezik olyan (x_n) sorozat F-ben, amelyre $x_n \to x$. Az 1.7 tétel (a) alpontja alapján ez a sorozat Cauchy sorozat X-ben. Ez viszont azt jelenti, hogy a sorozat F-ben is Cauchy sorozat, tehát az F teljessége biztosítja, hogy létezik $x' \in F$, amelyre $(x_n) \to x'$. A határérték egyértelműsége alapján (1.1 tétel (b) alpontja) következik, hogy $x = x'$. Így $F' \subset F$, tehát a 2.8 tétel alapján (69. oldal) a bizonyítás teljes. □

Az (X, ρ) metrikus tér A részhalmazát *prekompaktnak* nevezzük, ha bármely $\varepsilon > 0$-ra létezik olyan $F \subset X$ véges halmaz, amelyre

$$A \subset \cup_{x \in F} \mathrm{B}(x, \varepsilon).$$

Világos, hogy egy metrikus tér minden kompakt részhalmaza prekompakt is.

A prekompakt halmazok jellemzési tétele a következő:

1.13. Tétel. *Az (X, ρ) metrikus tér A részhalmaza pontosan akkor prekompakt, ha minden sorozatából kiválasztható egy Cauchy-féle részsorozat.*

Az alábbi tétel a kompaktság és a teljesség kapcsolatát mutatja:

1.14. Tétel. *Egy metrikus tér pontosan akkor kompakt, ha tejes és prekompakt.*

1.15. Tétel. (Baire[51] tétel) *Teljes metrikus térben minden megszámlálható sűrű halmazokból álló halmazcsalád metszete is sűrű X-ben.*

3.1.4 Monoton sorozatok

Az (x_n) valós számsorozatot

(a) *növekvőnek* nevezzük, ha $x_n \le x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

(b) *csökkenőnek* nevezzük, ha $x_n \ge x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Egy sorozatot *monotonnak* nevezünk, ha növekvő vagy csökkenő.

1.16. Tétel. *Az (x_n) monoton sorozat pontosan akkor konvergens, ha korlátos.*

Bizonyítás. Feltételezhetjük, hogy $x_n \le x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Jelöljük E-vel a sorozat tagjaiból alkotott halmazt. Ha (x_n) korlátos és x a legkisebb felső korlátja E-nek, akkor

$$x_n \le x, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Másrészt minden $\varepsilon > 0$-ra létezik n_ε úgy, hogy

$$x - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \le x,$$

tehát a monotonitás alapján minden $n \ge n_\varepsilon$ esetén

$$x - \varepsilon < x_n \le x < x + \varepsilon \iff |x_n - x| < \varepsilon.$$

Tehát (x_n) konvergens és a határértéke x. □

[51] René-Louis Baire, 1874-1932

1.1. Gyakorlatok. (a) Az

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

összefüggéssel értelmezett sorozat nem korlátos és $a_n \to \infty$.
Megoldás. Elégséges kimutatni, hogy a sorozat nem Cauchy sorozat (a sorozat pozitív tagú és növekvő). Az (a_n) sorozat nem fundamentális, mert

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

(b) Ha az (a_n) sorozat teljesíti az $|a_n - a_m| > 1/n$ egyenlőtlenséget, minden $n < m$ esetén, akkor nem korlátos.
Megoldás. Ha (a_n) korlátos, akkor létezik olyan $M > 0$ szám, amelyre $|a_n| \leq M$, minden $n \in \mathbb{N}$-re. A feltételek alapján az $]a_n - 1/(2n), a_n + 1/(2n)[$ intervallumok diszjunktak, és az egyesítésükre teljesül az

$$\bigcup_n \left]a_n - \frac{1}{2n}, a_n + \frac{1}{2n}\right[\subset \left]-M - \frac{1}{2},\, M + \frac{1}{2}\right[$$

összefüggés. Mivel az $]-M-\frac{1}{2}, M+\frac{1}{2}[$ intervallum hossza $2M+1$, az $]a_n - 1/(2n), a_n + 1/(2n)[$ intervallumok hosszainak összege nem haladhatja meg a $2M+1$-et. Másrészt az $]a_n - 1/(2n), a_n + 1/(2n)[$ intervallum hossza $1/n$, és így az (a) alpont alapján a $\sum_{k=1}^{n} 1/k$ összeg nem lehet minden n-re kisebb, mint $2M+1$. Az ellentmondás alapján állíthatjuk, hogy a sorozat nem korlátos.

(c) Tanulmányozzuk az $(x_n)_n$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad n \in \mathbb{N},\ x_0 = 1,\ a > 0$$

sorozat konvergenciáját. A matematikai indukció módszerével igazolható, hogy $x_n > 0$, $x_n > \sqrt{a}$ és $x_{n+1} - x_n \leq 0$, minden $n \geq 1$-re. Ez alapján a sorozat konvergens. A rekurzióban határértékre térve, következik, hogy $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$. △

1.17. Tétel. *Ha az (x_n) konvergens sorozat tagjai egy tagtól kezdődően teljesítik az $x_n \geq b$ $(x_n \leq b)$ egyenlőtlenséget, akkor a sorozat x határértékére is teljesül az $x \geq b$ $(x \leq b)$ egyenlőtlenség.*

Bizonyítás. Indirekt bizonyítást használunk. Feltételezzük, hogy létezik $N \in \mathbb{N}^*$ úgy, hogy minden $n \geq N$-re $x_n \geq b$ és $a < b$.

A $c := b - a$ jelöléssel $\varepsilon := c/2$-re létezik olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ küszöbszám, amelyre $|x_n - a| < \varepsilon$, minden $n \geq n_\varepsilon$ esetén. Így $x_n < a + \varepsilon < b$, minden $n \geq n_\varepsilon$-ra, és ez ellentmond a feltevésnek, tehát $a \geq b$. □

1.2. Következmény. *Ha az (x_n) és (y_n) konvergens sorozatok tagjaira teljesül az $x_n \leq y_n$ egyenlőtlenség, minden $n \geq n_0$ esetén, akkor $\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$.*

Bizonyítás. Az $(y_n - x_n)_n$ sorozat konvergens és nemnegatív tagjai vannak. Az előbbi tétel alapján $\lim\limits_{n\to\infty} y_n - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} (y_n - x_n) \geq 0.$ □

1.18. Tétel. *Ha (x_n) és (y_n) két valós számsorozat és (x_n) konvergens, valamint*

$$y_n - x_n \to 0, \qquad \text{ha} \qquad n \to \infty,$$

akkor (y_n) is konvergens, és $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Bizonyítás. Ha $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, akkor az

$$|x - y_n| \leq |x - x_n| + |x_n - y_n|$$

összefüggésekből következik az állítás. □

1.3. Következmény. *Ha az (x_n), (a_n), és (y_n) sorozatok tagjaira teljesül az $x_n \leq a_n \leq y_n$ egyenlőtlenség, minden $n \geq n_0$ esetén, az (x_n) és (y_n) sorozatok konvergensek és határértékük egyenlő, akkor az (a_n) sorozat is konvergens és ugyanaz a határértéke, mint (x_n)-nek.*

Bizonyítás. Az $|a_n - x_n| \leq |y_n - x_n|$ egyenlőtlenségek alapján az állítás nyilvánvaló. □

1.10. Gyakorlat. ([63, 7. feladat, 9. oldal]) *Ha $a > 0$ és az (x_n) sorozatra*

$$x_1 = \sqrt{a},\ x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, \dots, x_{n+1} = \sqrt{a + x_n},\ \forall n \in \mathbb{N},$$

akkor az (x_n) sorozat konvergens.

Megoldás. A rekurzió alapján látható, hogy a sorozat pozitív tagú. Továbbá

$$x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}} > \sqrt{a} = x_1,$$
$$(x_{n+2} - x_{n+1})(x_{n+2} + x_{n+1}) = x_{n+1} - x_n, \quad \forall\, n \geq 1,$$

tehát a matematikai indukció elve alapján a sorozat növekvő. Mivel

$$x_1 < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2},$$
$$x_n < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2} \implies x_{n+1} < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}, \quad \forall\, n \geq 1,$$

szintén indukcióval igazolható, hogy a sorozat felülről korlátos. △

1.11. Gyakorlat. ([63, 7. feldat, 9. oldal]) *Bizonyítsd be, hogy az*

$$x_1 = \sqrt{a_1},\ x_2 = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2}}, \dots, x_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \dots + \sqrt{a_n}}}, \dots,\ a_i > 1,$$

sorozat konvergens, ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln(\ln a_n) < \ln 2.$$

Megoldás. Értelmezzük a következő két segédsorozatot:

$$b_n = \frac{a_n}{e^{2^n}}, \quad n \geq 1,$$

$$y_1 = \sqrt{b_1},\ y_2 = \sqrt{b_1 + \sqrt{b_2}}, \ldots, y_n = \sqrt{b_1 + \sqrt{b_2 + \cdots + \sqrt{b_n}}}, \ldots.$$

Számolással ellenőrizhető, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$-re $y_n = x_n/e$. Így az (x_n) sorozat pontosan akkor konvergál, ha az (y_n) konvergál. Az (y_n) sorozat növekvő. A feltétel lapján létezik $n_0 \in \mathbb{N}^*$ úgy, hogy minden $n \geq n_0$-ra $\frac{1}{n}\ln(\ln a_n) < \ln 2$. De

$$\frac{1}{n}\ln(\ln a_n) < \ln 2 \Longleftrightarrow a_n < e^{2^n} \Longleftrightarrow b_n < 1,$$

tehát az $a = \max\{b_1, b_2, \ldots, b_{n_0}, 1\}$ számra a

$$z_1 = \sqrt{a},\ z_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, \ldots, z_{n+1} = \sqrt{a + z_n}, \ldots$$

sorozat konvergens (az (a) alpont alapján). Mivel $y_n \leq z_n$, az (y_n) sorozat felülről korlátos, és így a monotonitása alapján (y_n) konvergens is. Tehát az (x_n) sorozat is konvergens. $\triangle$

1.2. Gyakorlatok. Számítsd ki a

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}\right)$;

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1 + 2^2 + \cdots + n^n}{n^n}$

határértékeket!

Az első határérték 0, mivel

$$\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+1}.$$

A második határérték kiszámításához a következő egyenlőtlenséget használjuk:

$$1 \leq \frac{1 + 2^2 + \cdots + n^n}{n^n} \leq \frac{1 + n + n^2 + \cdots + n^n}{n^n} = \frac{n^{n+1} - 1}{n-1} \cdot \frac{1}{n^n} \to 1.$$

Tehát a keresett határérték 1. $\triangle$

1.3. Gyakorlatok. Tanulmányozd a következő sorozatok konvergenciáját és számítsd ki a határértéküket.

(1) $x_{n+1} = \dfrac{x_n + 1}{x_n + 2}$, $x_1 = 0$, $n \in \mathbb{N}^*$;

(2) $x_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(2x_n + \dfrac{125}{x_n^2}\right), \;\; x_1 > 0, \;\; n \in \mathbb{N}^*;$

(3) $x_{n+1} = 1 - x_n^2, \;\; x_1 = a \in]0,1[\,, \;\; n \in \mathbb{N}^*;$

(4) $x_{n+1} = \dfrac{1}{1 + x_n}, \;\; x_1 = a \in]-1,1[\,, \;\; n \in \mathbb{N}^*;$

(5) Rögzített $x_1 = a \in]0,1[$ -ra határozd meg azokat a $p \in [0,1]$ értékeket, amelyekre az $x_{n+1} = 1 + px_n, \;\; n \in \mathbb{N}^*$ sorozat konvergens;

(6) Az (x_n) és (y_n) sorozatokat az

$$x_1 = a \geq 0, \;\; y_1 = b \geq 0, \;\; x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n), \;\; y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$$

összefüggésekkel értelmeztük. Bizonyítsd be, hogy (x_n) és (y_n) konvergensek és $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. A két sorozat közös határértékét az a és b számok *számtani-mértani közepének* nevezzük, és $M(a,b)$-vel jelöljük. Ha $a > b$, akkor az (x_n) sorozat csökkenő és az (y_n) sorozat növekvő.

(7) (Borchardt[52]-Pfaff[53] algoritmus) Az

$$a_0 = 2\sqrt{3}, \;\; b_0 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \;\; b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$$

összefüggésekkel értelmezett sorozatok konvergensek és a határértékük π.

(6) *megoldása.* Ha $a = b$, akkor $x_n = y_n = a$, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, tehát feltételezhetjük, hogy $a \neq b$. Indukcióval igazolható, hogy

$$\begin{aligned} &0 \leq b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n, \\ &a_{n+1} - b_{n+1} < \frac{1}{2}(a_n - b_n), \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

így a sorozatok konvergensek és közös a határértékük.
(7) *megoldása.* A sorozatok pozitív tagúak ezért a középarányosok közti egyenlőtlenségek alapján, ha $a_n > b_n$, akkor $b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n$. Mivel $a_0 > b_0$, a matematikai indukció elve alapján $b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n$, minden $n \geq 0$ esetén. Így a két sorozat konvergens ((a_n) csökkenő és (b_n) növekvő) és a határértékük egyenlő (határértékre térünk a rekurzióban). A határértéket a 329. oldalon számoljuk ki.

1.5. Alkalmazás. *A világűrből egy idegen vírus érkezik a sztratoszférába. A vírus $p \in (0,1)$ valószínűséggel osztódik egy perc alatt ketté (magával azonos vírust hoz létre). Mennyi a valószínűsége annak, hogy n perc után pontosan k vírus legyen? Bizonyítsd be, hogy 0 annak a valószínűsége, hogy a vírusok száma korlátos maradjon, ha $n \to \infty$.*

[52]Carl Wilhelm Borchardt, 1817-1880
[53]Johan Friedrich Pfaff, 1764-1825

Megoldás. Ha $f(n,k)$-val jelöljük annak a valószínűségét, hogy n perc után pontosan k vírus van, akkor

$$f(n,k) = (1-p)f(n-1,k) + pf(n-1,k-1),\ \forall n \geq 1 \text{ és } k \geq 1.$$

Ebből a matematikai indukció módszerével igazolhatjuk, hogy

$$f(n,k) = \binom{n}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}.$$

Annak valószínűsege, hogy a vírusok száma az n-edik perc után nem haladja meg az M-et, pontosan $\sum\limits_{k=1}^{M} f(n,k)$. Ha M rögzített, akkor ez egy véges összeg, ezért elégséges a tagjainak külön-külön kiszámolni a határértékét. Másrészt $\lim\limits_{n\to\infty} \binom{n}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k+1} = 0$, ha k rögzített és $p \in (0,1)$, tehát 0 annak a valószínűsége, hogy a vírusok száma korlátos marad $n \to \infty$ esetén. ♦

1.6. Alkalmazás. *Egy n sejtből álló szövettenyészetbe bekerül egy baktérium. A baktérium (és minden utóda) Δt idő alatt elpusztít egy sejtet és kettéosztódik. Mit állíthatunk a tenyészet életben maradásáról, ha a tenyészet minden sejtje Δt idő alatt kettéosztódik?*

Megoldás. Jelöljük b_n-nel és s_n-nel az $(n-1)\Delta t$ idő után létező baktériumok, illetve tenyészetbeli sejtek számát. A feltételek alapján a következő rekurziókat kapjuk:

$$b_{n+1} = 2b_n, \quad b_1 = 1;$$

$$s_{n+1} = 2(s_n - b_n), \quad s_1 = n.$$

Matematikai indukcióval igazolható, hogy

$$b_k = 2^{k-1},\ \forall k \geq 1 \qquad \text{és} \qquad s_k = 2^{k-1}(n-k),\ \forall k \geq 1.$$

Ez alapján $n\Delta t$ idő alatt a tenyészet elpusztul. ♦

3.1.5 Alsó és felső határértékek

Ha az (x_n) sorozat teljesíti a következő tulajdonságot: minden $m \in \mathbb{R}$-re létezik $n_m \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $n \geq n_m$ esetén $x_n \geq m$, akkor azt mondjuk, hogy az (x_n) sorozat határértéke $+\infty$. Ezt az

$$x_n \to \infty \text{ vagy a } \lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

szimbólumokkal jelöljük. Hasonlóan, ha minden $m \in \mathbb{R}$-re létezik olyan $n_m \in \mathbb{N}$, amelyre az $n \geq n_m$ egyenlőtlenségből következik az $x_n \leq m$ egyenlőtlenség, akkor azt mondjuk, hogy az (x_n) sorozat határértéke $-\infty$. Ezt az

$$x_n \to -\infty \text{ vagy a } \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

szimbólummal jelöljük.

Az (x_n) sorozatra jelöljük E-vel azoknak az $x \in \overline{\mathbb{R}}$ elemeknek a halmazát, amelyekre létezik az (x_n) sorozatnak olyan részsorozata, amelyre $x_{n_k} \to x$ (E a sorozat tagjaiból képezett halmaz torlódási pontjait tartalmazza, és nemkorlátos sorozatok esetén a $+\infty$ vagy $-\infty$ elemeket). Az

$$\begin{aligned} x^* &= \sup E, \\ x_* &= \inf E \end{aligned}$$

jelölésekkel a x^* és x_* elemeket az (x_n) sorozat *felső*, illetve *alsó határának* (vagy határértékének) nevezzük. Általában a

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = x^*, \quad \liminf_{n\to\infty} x_n = x_*$$

jelölést használjuk.

1.19. Tétel. *Ha* (x_n) *egy valós számsorozat, akkor az* x^* *felső határértékére teljesül a következő két állítás:*

(a) $x^* \in E$;

(b) *ha* $y > x^*$, *akkor létezik olyan* $m \in \mathbb{N}$, *amelyre* $n \geq m$ *esetén* $x_n < y$.

Sőt, x^* *az egyetlen szám, amelyre teljesül* (a) *és* (b).

Bizonyítás. Ha $x^* = +\infty$, akkor E felülről nem korlátos, tehát (x_n) sem korlátos felülről, és így létezik olyan (x_{n_k}) részsorozata, amelyre $x_{n_k} \to \infty$.

Ha $x^* \in \mathbb{R}$, akkor E felülről korlátos, és így (a) következik az 1.5 és 2.25 tételekből (lásd a 31.oldalt).

Ha $x^* = -\infty$, akkor E csak a $-\infty$-t tartalmazza, és így $x_n \to -\infty$.

Ezzel (a) bizonyítása teljes.

Ha az $y > x^*$ elemre az $x_n \geq y$ egyenlőtlenség végtelen sok n értékre teljesül, akkor létezik $z \in E$ úgy, hogy $z \geq y > x^*$. Ez ellentmond x^* értelmezésének, tehát (b) is igaz.

Az egyértelműséget is lehetetlenre való visszavezetéssel igazoljuk. Ha p és q teljesíti az (a) és (b) feltételeket, akkor feltételezhetjük, hogy $p < q$. Ha x tetszőleges elem p és q közt, akkor mivel p teljesíti (b)-t, az $x_n < x$ egyenlőtlenség minden $n > m$-re teljesül. De így q nem teljesítheti (a)-t. □

1.12. Gyakorlat. Ha az (a_n) és (b_n) sorozatokra $\limsup_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} b_n = +\infty$, akkor létezik m, n úgy, hogy $|a_m - a_n| > 1$ és $|b_m - b_n| > 1$.

Megoldás. A feltételek alapján mindkét sorozat korlátlan. Létezik $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, amelyre $|a_{n_1} - a_{n_2}| > 2$ (ellenkező esetben az (a_n) sorozat korlátos lenne). Hasonlóan létezik $n_3 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $|b_{n_1} - b_{n_3}| > 1$ és $|b_{n_2} - b_{n_3}| > 1$ (ellenkező esetben a (b_n) sorozat volna korlátos). Ha $|a_{n_1} - a_{n_3}| > 1$, akkor $n := n_1$ és $m := n_3$. Ha $|a_{n_1} - a_{n_3}| \leq 1$, akkor $|a_{n_2} - a_{n_3}| > |a_{n_1} - a_{n_2}| - |a_{n_1} - a_{n_3}| > 1$, és így $n := n_2$ és $m := n_3$. △

3.1.6 A Cesaro-Stolz tétel és néhány következménye

1.20. Tétel. (Cesaro-[54]Stolz[55] tétel) *Ha az* (a_n) *és* (b_n) *sorozatok szigorúan növekvők és divergensek, akkor a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \ (\in [-\infty, +\infty]) \tag{1.4}$$

egyenlőségből következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l. \tag{1.5}$$

Bizonyítás. Feltételezzük, hogy l véges és (b_n) szigorúan növekvő. Rögzített $\varepsilon > 0$-ra létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n \geq n_\varepsilon$ esetén

$$\left| \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} - l \right| < \varepsilon/3,$$

azaz

$$(b_{n+1}-b_n)(l-\varepsilon/3) < a_{n+1}-a_n < (b_{n+1}-b_n)(l+\varepsilon/3). \tag{1.6}$$

Ha az (1.6) egyenlőtlenséget felírjuk rendre az $n = n_\varepsilon$, $n = n_\varepsilon + 1, \ldots, n = n_\varepsilon + p - 1$ értékekre, és összeadjuk a megfelelő oldalakat, akkor a

$$(b_{n_\varepsilon+p}-b_{n_\varepsilon})(l-\varepsilon/3) < a_{n_\varepsilon+p}-a_{n_\varepsilon} < (b_{n_\varepsilon+p}-b_n)(l+\varepsilon/3)$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Ebből következik, hogy

$$l - \frac{\varepsilon}{3} - (l-\frac{\varepsilon}{3})\frac{b_{n_\varepsilon}}{b_{n_\varepsilon+p}} + \frac{a_{n_\varepsilon}}{b_{n_\varepsilon+p}} < \frac{a_{n_\varepsilon+p}}{b_{n_\varepsilon+p}} < l + \frac{\varepsilon}{3} - (l+\frac{\varepsilon}{3})\frac{b_{n_\varepsilon}}{b_{n_\varepsilon+p}} + \frac{a_{n_\varepsilon}}{b_{n_\varepsilon+p}}. \tag{1.7}$$

A $(b_{n_\varepsilon}/b_{n_\varepsilon+p})_p$ és $(a_{n_\varepsilon}/b_{n_\varepsilon+p})_p$ sorozatok tartanak 0-hoz, tehát létezik olyan p_ε küszöbszám, amelyre minden $p \geq p_\varepsilon$ esetén

$$\left| \frac{b_{n_\varepsilon}}{b_{n_\varepsilon+p}}(l \pm \frac{\varepsilon}{3}) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{és} \quad \left| \frac{a_{n_\varepsilon}}{b_{n_\varepsilon+p}} \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Az előbbiek alapján $n > n_\varepsilon + p_\varepsilon$-re

$$\left| l - \frac{a_n}{b_n} \right| < \varepsilon.$$

Ha $l = +\infty$, akkor feltételezhetjük, hogy (b_n) szigorúan pozitív tagokból áll. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik n_ε úgy, hogy minden $n \geq \varepsilon$-re

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} > \varepsilon.$$

[54]Ernesto Cesaro, 1856-1906
[55]Otto Stolz, 1842-1905

Ez írható

$$a_{n+1} - a_n > \varepsilon(b_{n+1} - b_n)$$

alakban is. Az első p egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeadva, az

$$\frac{a_{n+p}}{b_{n+p}} > \varepsilon + \frac{a_n - \varepsilon b_n}{b_{n+p}}$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Ha n-et rögzítjük, akkor a (b_n) tulajdonságai alapján létezik olyan $p_\varepsilon \in \mathbb{N}$ küszöbszám, amelyre $p > p_\varepsilon$ esetén

$$\left|\frac{a_n - \varepsilon b_n}{b_{n+p}}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Így $n > n_\varepsilon + p_\varepsilon$-ra

$$\frac{a_n}{b_n} > \varepsilon/2,$$

tehát $a_n/b_n \to \infty$.

A bizonyítás hasonló az $l = -\infty$ esetben is. $\square$

A tétel $\frac{0}{0}$ alakú határozatlan esetekre is kiterjeszthető és nagyon gyakran ez az alak alkamazható, ha egy sorozat konvergenciájának sebességét vizsgáljuk. Bizonyítása hasonló az előbbi tételéhez, vagy egyszerűen visszavezethető a $\frac{\infty}{\infty}$ esetre, azért ezt nem részletezzük.

1.21. Tétel. (Cesaro) *Ha* (a_n) *pozitív tagú sorozat, a* (b_n) *sorozat szigorúan csökkenő és mindkét sorozat határértéke* 0, *akkor a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l \ (\in [-\infty, +\infty]) \tag{1.8}$$

egyenlőségből következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l. \tag{1.9}$$

Megjegyzés. Általában a fordított állítás nem igaz, további feltételekre van szükség. A továbbiakban ismertetünk néhány ilyen feltételt és a tétel néhány következményét.

1.22. Tétel. *Ha* (a_n) *tetszőleges valós számsorozat,* (b_n) *szigorúan növekvő és divergens sorozat, valamint*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = b \in [0, \infty[\ \setminus \{1\},$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \implies \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l.$$

Bizonyítás. Írhatjuk, hogy

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}-\dfrac{a_n}{b_n}\dfrac{b_n}{b_{n+1}}}{1-\dfrac{b_n}{b_{n+1}}}\to\frac{l-lb}{1-b}=l.\quad\square$$

1.23. Tétel. *Ha az $(a_n),(b_n),(x_n)$ és (y_n) valós számsorozatok teljesítik a következő felételeket:*

1) $a_n,b_n,x_n,y_n\in\mathbb{R}^*,\ \ b_{n+1}\neq b_n,\ \forall n\geq 1;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\pm\infty,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\pm\infty,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=D\in\mathbb{R};$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=B\in\mathbb{R};$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{b_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=1;$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)=x\in\mathbb{R}$ *és* $\lim\limits_{n\to\infty}y_n\left(\frac{b_{n+1}}{b_n}-1\right)=y\in\mathbb{R}^*,$

akkor létezik a $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ *határérték és*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=BD\frac{x}{y}.$$

Bizonyítás. Az

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{a_n}{b_n}\frac{\frac{a_{n+1}}{a_n}-1}{\frac{b_{n+1}}{b_n}-1}=\frac{a_n}{b_n}\frac{x_n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)}{y_n\left(\frac{b_{n+1}}{b_n}-1\right)}\frac{y_n}{x_n}$$

egyenlőség és a feltételek alapján az állítás igaz. $\square$.

1.4. Következmény. *Ha* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x\ (\in[-\infty,\infty]),$ *akkor*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n}{n}=x.$$

Bizonyítás. Ha $b_n=n$-et és $a_n=x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n$-et választunk, akkor

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=x_{n+1}\to x.\quad\square$$

Megjegyzés. Általában ennek a fordítottja sem igaz, lásd például az $a_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$ sorozatot. $\triangle$

1.5. Következmény. *Pozitív tagú sorozatokra igaz az alábbi két állítás:*

(a) *Ha*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \ (a > 0),$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a.$$

(b) *Ha*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \ (a > 0),$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = a.$$

Bizonyítás. (a) Ha $x_n = \ln \sqrt[n]{a_n}$, akkor $x_n = \ln a_n/n$. A Cesaro-Stolz tétel és a feltétel alapján $\lim x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(a_{n+1}/a_n) = \ln \lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n) = \ln a$.

(b) Ha $x_n = \ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(a_1 a_2 \dots a_{n+1}) - \ln(a_1 a_2 \dots a_n)}{(n+1)-n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, tehát a Cesaro-Stolz tétel alapján $\lim\limits_{n\to\infty} = a$. □

Megjegyzés. Általában az (a) és (b) fordítottja nem igaz. Ez egy-egy ellenpélda segítségével látható be. A $p \neq q$ pozitív számokra az $a_{2k-1} = p^k q^{k-1}$ és $a_{2k} = p^k q^k$, $k \in \mathbb{N}^*$ összefüggésekkel értelmezett sorozatra $a_n \to \sqrt{pq}$ és (a_{n+1}/a_n) nem konvergens. Ugyanakkor az $a_{2k-1} = p$ és $a_{2k} = q$, $k \in \mathbb{N}^*$ összefüggésekkel értelmezett sorozatra $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \to \sqrt{pq}$ és (a_n) divergens. △

1.6. Következmény (a) *Ha* $p > 1$, *akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p^n}{n} = +\infty.$$

(b) *Ha* $p \in \mathbb{N}^*$, *akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

(c) *Ha* $k \in \mathbb{N}^*$, *akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^k} = 0.$$

(d)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2^2\sqrt{2} + 3^2\sqrt{3} + \dots + n^2\sqrt{n}}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{6}.$$

(e) *Ha* $k \in \mathbb{N}^*$, *akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 3^k + \dots + (2n-1)^k}{n^{k+1}} = \frac{2^k}{k+1}.$$

(f) *Ha* $p \in \mathbb{N}^*$, *akkor*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

(g) *Ha az* (a_n) *és* (b_n) *sorozatokra* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *és* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, *akkor a*

$$c_n=\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_2+a_nb_1}{n},\quad n\in\mathbb{N}^*,$$

sorozat konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = ab$.

Bizonyítás. (a) Alkalmazzuk a Cesaro-Stolz tételt az $a_n := p^n$ és $b_n := n$ sorozatokra. ((b_n) szigorúan növekvő és korlátlan).

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=p^{n+1}-p^n=p^n(p-1)\to\infty,$$

tehát $p^n/n\to\infty$.

(b)

$$\frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-(n)^{p+1}}=\frac{n^p+pn^{p-1}+\dots}{(p+1)n^p+\dots}\to\frac{1}{p+1},\quad \text{ha}\quad n\to\infty,$$

tehát a Ceasro-Stolz kritérium alapján az állítás igaz.

(g) Előbb igazoljuk, hogy ha $a=b=0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. Ha $M>0$ egy felső korlátja a $(|b_n|)_{n\geq 1}$ sorozatnak, akkor $|b_n|<M$, $\forall n\geq 1$. Ugyanakkor $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$, tehát az 1.4 következmény alapján

$$\lim_{n\to\infty}|c_n|\leq M\lim_{n\to\infty}\frac{|a_1|+\cdots+|a_n|}{n}=M\lim_{n\to\infty}|a_n|=0.$$

Ha $a=0$ és $b\neq 0$, akkor $b_n\to b$ alapján $|b_n|\to|b|$, és így az 1.4 következmény alapján

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|b_1|+|b_2|+\cdots+|b_n|}{n}=|b|.$$

Ha

$$\eta_n=\frac{|b_1|+|b_2|+\cdots+|b_n|}{n}-|b|$$

és $\varepsilon>0$ rögzített, akkor létezik olyan $N\in\mathbb{N}$, amelyre $n>N$ esetén $|a_n|<\varepsilon/(4b)$. Így $n>N$-re

$$|c_n|<\frac{|a_1b_n+\cdots+a_Nb_{n-N+1}|}{n}+\frac{\varepsilon(|b|+|\eta_n|)}{4b}.$$

Ha $M>0$ egy felső korlátja a $\{|b_n|\mid n\in\mathbb{N}^*\}$ halmaznak, akkor $\nu\in\mathbb{N}^*$-re

$$|\eta_n|<|b|,\quad \text{és}\quad M\cdot\frac{|a_1|+\cdots+|a_N|}{n}<\varepsilon/2,\ \forall\, n>\nu.$$

Ebből a két egyenlőtlenségből következik, hogy $|c_n| < \varepsilon$, és így az állítást ebben az esetben is igazoltuk.

Ha $ab \neq 0$, akkor tekintjük az $\alpha_n = a_n - a$ sorozatot. Így

$$c_n = \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} \cdot a + d_n, \tag{1.10}$$

ahol

$$d_n = \frac{\alpha_1 b_n + \alpha_2 b_{n-1} + \cdots + \alpha_n b_1}{n}.$$

Mivel $\alpha_n \to 0$, az előbbi esetek alapján $d_n \to 0$, és így az 1.4 következmény alapján $c_n \to ab$, ha $n \to \infty$. □

3.1.7 Néhány ismert sorozat

1.1. Tulajdonság (a) *Ha* $p > 0$, *akkor* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$;

(b) *ha* $p > 0$, *akkor* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

(d) *ha* $p > 0$ *és* $\alpha \in \mathbb{R}$, *akkor* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0$;

(e) *ha* $|x| < 1$, *akkor* $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$;

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

Bizonyítás. (a), (b), és (c) következik az 1.20-as tételből és az 1.5-ös következményből. □

1.2. Tulajdonság. *Az*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \ n \geq 1 \tag{1.11}$$

sorozat konvergens.

Bizonyítás. Newton[56] binomiális tétele alapján

$$\begin{aligned}
a_n &= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} = \\
&= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1}{n!}\frac{1}{n^n} = \\
&= 1 + 1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \cdots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!} < \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}. \qquad (1.12)
\end{aligned}$$

Mivel $n! \geq 2^{n-1}$, minden $n \geq 2$-re, az előbbi egyenlőtlenségből következik, hogy

$$2 < a_n < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 3.$$

Tehát az (a_n) sorozat korlátos.

Másrészt

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 1 + 1 + (1-\frac{1}{n+1})\frac{1}{2!} + \cdots + (1-\frac{1}{n+1})\ldots(1-\frac{n}{n+1})\frac{1}{(n+1)!} > \\
&> 1 + 1 + (1-\frac{1}{n+1})\frac{1}{2!} + \cdots + (1-\frac{1}{n+1})\ldots(1-\frac{n-1}{n+1})\frac{1}{n!} > \\
&> 1 + 1 + (1-\frac{1}{n})\frac{1}{2!} + \cdots + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{n-1}{n})\frac{1}{n!} = a_n,
\end{aligned}$$

tehát az (a_n) sorozat növekvő, és így az 1.16-os tétel alapján (a_n) konvergens.

Második bizonyítás. Az

$$x^{n+1} - y^{n+1} = (x-y)\sum_{i=0}^{n} x^{n-i}y^i, \ \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ és } n \in \mathbb{N}^*$$

azonosságot használjuk. Ebből $x > y > 0$-ra következik, hogy

$$(n+1)(x-y)y^n < x^{n+1} - y^{n+1} < (n+1)(x-y)x^n. \qquad (1.13)$$

Az $x = 1 + 1/n$ és $y = 1 + 1/(n+1)$ helyettesítésekkel

$$x - y = \frac{1}{n(n+1)}, \quad x^{n+1} = xa_n, \quad y^{n+1} = a_{n+1}.$$

$$\begin{aligned}
x = \frac{n+1}{n} = \frac{x-1}{y-1} > y \implies y^2 < x + y - 1 = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \implies \\
\implies y^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)y^n. \qquad (1.14)
\end{aligned}$$

[56] Sir Isaac Newton, 1643-1727

Az (1.13) egyenlőtlenség jobb oldala alapján

$$x \cdot a_n - a_{n+1} < \frac{1}{n} a_n \implies \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n - \frac{1}{n} a_n < a_{n+1} \implies a_n < a_{n+1},$$

tehát az (a_n) sorozat növekvő.

Az $u_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ jelöléssel $a_n < u_n$, minden $n \in \mathbb{N}^*$-re. Az (1.14) alapján

$$u_{n+1} = y^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) y^n = \left(\frac{1}{n} + y\right) y^n,$$

tehát az (1.13) egyenlőtlenség bal oldala alapján

$$\frac{1}{n} y^n < u_n - y^{n+1} \implies (\frac{1}{n} + y) y^n < u_n \implies u_{n+1} < (\frac{1}{n} + y) y^n < u_n. \tag{1.15}$$

Így az (u_n) sorozat csökkenő és

$$a_n < u_n < \cdots < u_5 = (1 + \frac{1}{5})^6 = 2,985984\ldots \implies$$
$$\implies a_n < 3, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Az előbbiek alapján az (a_n) sorozat növekvő és felülről korlátos, tehát konvergens. □

Az (a_n) sorozat határértékét e-vel jelöljük:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: e. \tag{1.16}$$

1.7. Következmény

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1.3. Tulajdonság. *Érvényesek a következő tulajdonságok:*

(i)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = e;$$

(ii)

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n \cdot n!}, \tag{1.17}$$

ahol $\theta_n \in]0, 1[$;

(iii) *az előbbi összeg első kilenc tagja már öt tizedesnyi pontossággal megközelíti* e*-t;*

(iv) *(Euler[57])* $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

(v) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{e}$;

(vi) *Ha* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, *akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e; \tag{1.18}$$

(vii) *Ha az* (a_n) *sorozatra* $\lim a_n = -\infty$, *akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e; \tag{1.19}$$

(viii) *Ha a* (b_n) *sorozatra* $b_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, *és* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, *akkor*

$$\lim_{n\to\infty} (1 + b_n)^{\frac{1}{b_n}} = e.$$

Bizonyítás. (i) Az (1.12) összefüggés és az utána következő becslés alapján

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

és a (c_n)

$$c_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

sorozat konvergens. Így igaz az

$$e = \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} c_n \tag{1.20}$$

egyenlőtlenség. Másrészt

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{1}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \geq$$

$$\geq 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}, \quad \forall k \leq n \implies$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} a_n = e \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}, \quad \forall k \geq 2$$

$$\implies e \geq c_k \implies e \geq \lim_{k\to\infty} c_k. \tag{1.21}$$

[57]Leonard Euler, 1707-1783

(1.20) és (1.21) alapján
$$\lim_{k\to\infty} c_k = e.$$

(ii)

$$c_{n+m} - c_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+m)!} <$$
$$< \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^k} = \frac{1}{(n+1)!}\cdot + \frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{n\cdot n!}.$$

Rögzített n és $m \to +\infty$ esetén
$$0 < e - c_n < \frac{1}{n\cdot n!}.$$

A
$$0 < \theta_n := \frac{e - c_n}{\frac{1}{n\cdot n!}} < 1$$
jelöléssel a kért összefüggést kapjuk.

(iii) A
$$0 < e - c_n < \frac{1}{n\cdot n!} < 10^{-6}$$
egyenlőtlenség teljesül, ha $n \geq 8$, tehát
$$e \cong 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{8!} \cong 2.71828.$$

(iv) Ha $e \in \mathbb{Q}$, akkor létezik $m, n \in \mathbb{N}^*$ úgy, hogy $(m, n) = 1$ és $e = m/n$.
$$e = \frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n\cdot n!}, \quad \theta_n \in]0, 1[\,,$$
$$\Longrightarrow\ (n)!\cdot m - n!\left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \frac{\theta_n}{n}.$$

Az utolsó egyenlőtlenség lehetetlen, mert $\theta_n \in]0, 1[\,$, tehát $e \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

(v) Írhatjuk, hogy
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}.$$
Az $a_n = n!/n^n$ sorozatra alkalmazzuk az 1.5 következmény (a) alpontját.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{e},$$

tehát a bizonyítás teljes. Más bizonyítást adhatunk az 1.5 tulajdonság alapján.

(vi) Előbb belátjuk, hogy egy szigorúan növekvő, természetes számokból álló (n_k) sorozatra teljesül a tulajdonság. Ez nyilvánvaló, mert az $\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k}$ sorozat részsorozata az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozatnak. Ha (a_n) egy szigorúan növekvő divergens sorozat, akkor az $n_k = [a_k]$ jelöléssel az (n_k) és (n_k+1) sorozatok szigorúan növekvő természetes számsorozatok. Másrészt az egész rész értelmezése alapján

$$1 + \frac{1}{n_k+1} < 1 + \frac{1}{x_k} \le 1 + \frac{1}{n_k},$$

tehát

$$\left(1 + \frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < \left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{x_k} \le \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}.$$

Mindkét szélső kifejezés e-hez tart, tehát a fogó tétel alapján a középső kifejezés határértéke is e. Így (1.18) bizonyítása teljes.

(vii) A $b_n = -a_n$ jelöléssel

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{b_n}\right)^{-b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{b_n-1}\right)^{b_n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{b_n-1}\right)^{b_n-1}\left(1+\frac{1}{b_n-1}\right).$$

A (vi) és (1.19) alapján a bizonyítás teljes.

(viii) következik a (vi) és (vii) alapján. □

1.4. Tulajdonság. *Az*

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n, \quad n \ge 1$$

sorozat csökkenő és korlátos.

Bizonyítás. Az 1.7-es következmény alapján

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > e > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \implies$$
$$\implies (n+1)[\ln(n+1) - \ln n] > 1 > n[\ln(n+1) - \ln n] \implies$$
$$\implies \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}. \tag{1.22}$$

Ezt az egyenlőtlenséget a Lagrange-féle középértéktétel (lásd a 2.3 tételt a 223. oldalon) segítségével is igazolhatjuk. Ha $n = 1, 2, \ldots, k$ esetén összeadjuk a megfelelő oldalakat, akkor a

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+1} < \ln(k+1) < \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \tag{1.23}$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Így

$$\ln k < \ln(k+1) < \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n},$$

tehát a sorozat alulról korlátos. Másrészt az (1.22) összefüggés alapján

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n < 0,$$

tehát (a_n) csökkenő, és így konvergens is.

A sorozat határértékét γ-val jelöljük. A $\gamma = 0.5772156649\ldots$ számot *Euler*[58]-*Mascheroni*[59] *állandónak* nevezzük, és nyitott kérdés, hogy ez a szám racionális vagy irracionális.

1.8. Következmény

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n} = 1.$$

Bizonyítás. Kiszámítjuk az

$$\frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n}{\ln n} + 1$$

kifejezés határértékét, vagy a Cesaro-Stolz kritériumot használjuk. □

1.9. Következmény

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{kn} \right) = \ln k, \quad \forall k \in \{2, 3, \ldots\}.$$

Bizonyítás. Határértékre térünk az

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{kn} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{kn} - \ln kn\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) + \ln k, \; n \geq 1$$

egyenlőtlenségben. □

1.13. Gyakorlat. *Határozd meg azokat az* $\alpha \in \mathbb{R}$ *értékeket, amelyekre a*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \alpha \ln n\right)$$

határérték létezik és véges.

Megoldás.

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n + (1-\alpha)\ln n \to \begin{cases} \gamma, & \alpha = 1 \\ +\infty, & \alpha < 1 \\ -\infty, & \alpha > 1 \end{cases},$$

tehát $M = \{1\}$. △

[58]Leonhard Euler, 1707-1783

[59]Lorenzo Mascheroni, 1750-1800

1.10. Következmény. *Az*

$$a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

sorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ln 2.$$

Bizonyítás. A Catalan azonosság alapján [60]

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n},$$

tehát

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n} - \ln 2n - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) + \ln 2 \to \\ &\to \ln 2. \quad \square \end{aligned}$$

1.1. Lemma. (Traian Lalescu,[61] Gazeta Matematică, 1901, 579-es feladat) *Az*

$$a_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}$$

sorozat konvergens és $\lim_{n\to\infty} a_n = e^{-1}$.

A konvergencia és a határérték a következő két tulajdonságból adódik:

1.5. Tulajdonság. *Az*

$$x_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, \quad n > 3,$$

sorozat tagjai teljesítik az

$$e^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} < x_n < e^{1-\frac{1}{n}} \tag{1.24}$$

egyenlőtlenséget.

Bizonyítás. A matematikai indukció módszerét használjuk. $n > 3$-ra igazoljuk, hogy

$$x_n > e^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}. \tag{1.25}$$

Mivel

$$e < \sqrt{\frac{32}{3}} \quad \text{és} \quad x_4 = \sqrt[4]{\frac{32}{3}},$$

[60] Eugéne Charles Catalan, 1814-1894
[61] Traian Lalescu, 1882-1929

az (1.25) egyenlőtlenség igaz $n = 4$ esetén.

Ha (1.25) igaz valamilyen $n \geq 4$-re, akkor

$$x_{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} \cdot e^{\frac{n\sqrt{n}}{n+1}},$$

és az 1.7-es következmény alapján

$$x_{n+1} > e^{1-f(n)}, \text{ ahol } f(n) = \frac{1 + (n+1)\sqrt{n}}{(n+1)^2}.$$

De

$$n \geq 4 \implies f(n) \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

tehát

$$x_{n+1} > e^{1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}},$$

és a matematikai indukció elve alapján (1.25) bizonyítása teljes.

Ha valamilyen $n \geq 4$ esetén $x_n < e^{1-1/n}$, akkor az 1.7 következmény alapján

$$x_{n+1}^{n+1} = x_n^n \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n} < \frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot e^{n-1} \implies x_{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n-1}{n+1}} < e^{1-\frac{1}{n+1}},$$

tehát a második egyenlőtlenség is igaz. □

1.6. Tulajdonság. *Ha* a_n *a Lalescu sorozat* n*-edik tagja, akkor minden* $\varepsilon > 0$ *esetén*

$$\left| a_n - \frac{1}{e} \right| < \varepsilon,$$

ha $n > n_\varepsilon$, *és*

$$n_\varepsilon = 1 + \left[8 + \frac{1}{2\varepsilon^2} + \left| 8 - \frac{1}{2\varepsilon^2} \right| \right].$$

Bizonyítás. (1.24) és az 1.7-es következmény alapján $n \geq 16$-ra

$$a_n = \frac{n(\sqrt[n]{x_{n+1}} - 1)}{x_n} < \frac{n(e^{\frac{1}{n+1}} - 1)}{e} \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} < \frac{1}{e} e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} <$$
$$< \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{[\sqrt{n}] - 1}\right) < \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n} - 2}\right) < \frac{1}{e} + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ugyanakkor

$$n(\sqrt[n]{x_n} - 1) > n \left[e^{\frac{1}{n+1+\sqrt{n+1}}} - 1 \right] > n \left(e^{\frac{1}{[n+1+\sqrt{n+1}]}} - 1 \right) >$$
$$> \frac{n}{[n + 2 + \sqrt{n+1}]} \geq \frac{n}{n + 2 + \sqrt{n+1}}.$$

Tehát
$$a_n > \frac{1}{e} \cdot \frac{ne^n}{n+2+\sqrt{n+1}} > \frac{1}{e} - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$
Ez alapján $n \geq 16$-ra
$$\left| a_n - \frac{1}{e} \right| < \frac{1}{\sqrt{n}},$$
és így az $n_\varepsilon := 1 + [\max\{16, 1/\varepsilon^2\}] > \max\{16, 1/\varepsilon^2\}$ választással $n \geq n_\varepsilon$-ra $1/\sqrt{n} < < \varepsilon$. Tehát
$$\left| a_n - \frac{1}{e} \right| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon. \quad \square$$

Megjegyzés. Más megközelítést találhatunk a [22, 140. oldal], illetve [11, 3.20-as feladat, 437. oldal] könyvekben.

1.7. Alkalmazás. *(Hardy[62]-Weinberg[63]) Pánmixia és autoszomás lokusz esetén az első generáció esetleges kivételével minden generáció egyensúlyi populáció.*

Előbb értelmeznünk kell néhány fogalmat, ezekhez annyit kell tudnunk, hogy egy élőlény teljes génkészletét kromoszómák alkotják (embernél 22 pár felel a testi, és egy pár a nemi jellegekért), és a gének az egyes kromoszómák részletei.

- A genomtípus az ivarsejt által szállított teljes (haploid) kromoszómakészlet (különböző hangzású betűsorozattal kódolják–Ab).
- A genotípus a szervezet génszerelvénye, ezt azonos hangzású betűket két helyen tartalmazó betűsorral kódolják–Aabb.
- A genomgyakoriság-vektor megmutatja, hogy a komponensek indexében feltüntetett genomtípusoknak mekkora a relatív gyakorisága az ivarsejtek körében.
- A genotípusgyakoriság-vektor megmutatja, hogy a komponensek indexében feltüntetett genotípúsoknak mekkora a relatív gyakorisága a populációban.
- A genotípus-, illetve genomtípus-polinomokat a gyakoriság-vektorokból kapjuk úgy, hogy minden geno-, illetve genomtípushoz hozzárendelünk egy monomot, és ennek az együtthatója a megfelelő gyakoriság. Így, ha az A genomtípusnak két allélja van (A és a), és ezek relatív gyakorisága p, illetve q, akkor a genomgyakoriság-vektor (p_A, q_a), és az ehhez tartozó genomtípus-polinom $pA + qa$ (általában a változóknak megőrizzük a kódbetűket, de ez nem kötelező, csak könnyen követhetővé teszi a jelölésrendszert). Ugyanebben az esetben a genotípusok AA, Aa és aa. Ha ezeknek a genotípusgyakoriság-vektora (r_{AA}, s_{Aa}, t_{aa}), akkor a genotípus-polinom az $rA^2 + sAa + ta^2$.

[62]Godfrey Harold Hardy, 1877-1947
[63]Wilhelm Weinberg, 1862-1937

- A lokusz: génhely, az adott fenotípusos tulajdonságért felelős gén helye valamelyik kromoszómán.
- Az öröklődés aszerint, hogy a szóban forgó gén a testi jellegekért felelős vagy a nemi jellegekért felelős kromoszómákon található, lehet autoszomás vagy gonoszomás.
- A gaméták a haploid ivarsejtek, vagyis azok a sejtek, amelyeknek csak egy kromoszómaszelvénye van.
- Ha minden egyed a genotípus által megszabott arányban termeli a különböző genomtípúsu gamétákat, és ezek a szülőktől függetlenül párosodnak, akkor *pánmixiáról* beszélünk.
- A $(P_{AA}, 2Q_{Aa}, R_{aa})$ populációt *egyensúlyi populációnak* nevezzük, ha az utódgeneráció genotípusgyakoriság-vektora szintén $(P_{AA}, 2Q_{Aa}, R_{aa})$.

Megoldás. Ha az első generációs genotípusgyakoriság-vektor $(P_{AA}, 2Q_{Aa}, R_{aa})$, akkor a genomtípusgyakoriság-vektor $((P+Q)_A, (Q+R)_a)$. Így a Mendel[64] szabályok értelmében a második generáció genotípus-vektora

$$((P+Q)^2_{AA}, 2(P+Q)(Q+R)_{Aa}, (Q+R)^2_{aa}),$$

és ez a további generációkban megmarad. A második generáció genomtípusgyakoriság-vektora

$$((P+Q)^2 + (P+Q)(Q+R), (Q+R)^2 + (P+Q)(Q+R)) = ((P+Q), (Q+R)),$$

mert $P+2Q+R = 1$. Ebből látszik, hogy a következő generáció genotípus-vektora szintén $((P+Q)^2_{AA}, 2(P+Q)(Q+R)_{Aa}, (Q+R)^2_{aa})$, és a továbbiakban ez mindig megmarad.

1.1. Megjegyzések *1. Ennél általánosabb tulajdonság is igaz, pánmixia és autoszómás lokuszok esetén egy populáció k-adik generációjának genotípusgyakoriság-polinomja az előző $(k-1)$-edik generációs genomgyakoriság-polinomjának a négyzete.*

2. Ha a vizsgált lokusz az X kromoszómában van amiatt, hogy a hím egyedek sejtjeiben 1 ilyen, és a nők sejtjeiben 2 ilyen kromoszóma van, más és más egyensúlyi gyakoriságvektorok alakulnak ki. Ha kezdetben $((r_0)_{AA}, (2s_0)_{Aa}, (t_0)_{aa})$ a női genotípusgyakoriság-vektor, és $((p_0)_A, (q_0)_a)$ a hím genomtípusgyakoriság-vektor és ugyanezekkel jelöljük a további generációk gyakoriságvektorait is (az index mutatja a generáció sorszámát), akkor felírhatjuk a következő rekurziókat:

$$r_{n+1} = (r_n + s_n)p_n, \quad 2s_{n+1} = (r_n + s_n)q_n + (s_n + t_n)p_n, \quad t_{n+1} = (t_n + s_n)q_n,$$

$$p_{n+1} = r_n + s_n, \qquad q_{n+1} = s_n + t_n$$

[64] Johann Gregor Mendel, 1822-1884, szerzetes

(az utóbbi összefüggések azért igazak, mert hím utód esetén, annak az Y kromoszómája csakis az apától származhat, és így az X kromoszómája az anyától kell származzon). Ezekből az összefüggésekből következik, hogy $p_{n+1} = \frac{p_n + p_{n-1}}{2}$*, és így igazolható*[65]*, hogy*

$$p_\infty := \lim_{n\to\infty} p_n = \frac{p_0 + 2p_1}{3}, \quad \lim_{n\to\infty} r_n = p_\infty^2,$$
$$\lim_{n\to\infty} t_n = (1-p_\infty)^2, \quad \lim_{n\to\infty} s_n = p_\infty(1-p_\infty).$$

Ez alapján a végső génállományban a gyakoriságvektorok

$$(p_\infty^2, 2p_\infty(1-p_\infty), (1-p_\infty)^2), \text{ illetve } (p_\infty, q_\infty).$$

Például a hemofíliáért, illetve a Daltonizmusért felelős gén az X kromoszómán van, és ezért a nőknél ezek a betegségek sokkal ritkábbak[66] *(*$p_\infty < 1$*, tehát* $p_\infty^2 < p_\infty$*).* ♦

3.1.8 Szubkonvex sorozatok

1.1. Értelmezés. *Az* $(a_n)_{n\geq 1}$ *valós számsorozatot* p*-ed rendű szubkonvex sorozatnak nevezzük (*$p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$*), ha léteznek olyan* $\alpha_i \in (0,1)$, $i = \overline{0, p-1}$ *valós számok, amelyekre*

$$\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i \leq 1 \text{ és } a_{n+p} \leq \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i a_{n+i}, \quad \forall n \geq 1.$$

1.2. Értelmezés. *Az* $(a_n)_{n\geq 1}$ *valós számsorozatot szubkonvexnek nevezzük, ha létezik* $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *úgy, hogy az* $(a_n)_{n\geq 1}$ *sorozat* p*-ed rendű szubkonvex sorozat legyen.*

1.24. Tétel. *(András Szilárd) Ha az* $(a_n)_{n\geq 1}$ *sorozatra teljesülnek az alábbi feltételek:*

a) $a_i \geq 0, \quad \forall i \geq 1;$

b) létezik $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *és* $(\alpha_j)_{j=\overline{0,p-1}}$ *úgy, hogy* $\alpha_j \in (0,1)$, $\sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j \leq 1$ *és*

$$a_{n+p} \leq \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j \cdot a_{n+j}, \quad \forall n \geq 1,$$

[65] A következő paragrafusban részletesebben is tárgyaljuk az ehhez hasonló rekurziókat, lásd az 1.2 megjegyzéseket.

[66] A Daltonizmus nőknél a populáció 0,2-0,6%-át, és a férfiaknál 5-8%-át érinti.

akkor a sorozat konvergens.

1.25. Tétel. *(András Szilárd) Ha a nemnegatív tagú* $(a_n)_{n\geq 1}$ *sorozatra*

a) $a_{n+p} \leq \sum\limits_{j=0}^{p-1} \alpha_j(n) a_{n+j}$, $\forall n \geq 1$, *ahol* $\alpha_j(n) \in (0,1]$, $\forall\, n \geq 1$, $j = \overline{0, p-1}$ *és* $\sum\limits_{j=0}^{p-1} \alpha_j(n) \leq 1$, $\forall\, n \geq 1$;

b) *a* $(\alpha_j(n))_{n\geq 1}$ *sorozatok konvergensek, minden* $j = \overline{0, p-1}$ *esetén;*

c) $\min\left\{ \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_j(n) \,\middle|\, 0 \leq j \leq p-1 \right\} > 0$,

akkor a sorozat konvergens.

A bizonyításban szükségünk van a következő segédtételekre:

1.2. Lemma. *Ha a* $\sum\limits_{j=0}^{p-1} \beta_j x^j = 0$ *karakterisztikus egyenlet gyökei az egység sugarú körlap belsejében vannak, akkor minden olyan* $(b_n)_{n\geq 1}$ *valós (vagy komplex) számsorozat, amely teljesíti a*

$$\sum_{j=0}^{p-1} \beta_j b_{n+j} = 0, \quad \forall n \geq 1$$

rekurziót, konvergens és határértéke 0. Sőt, a $c_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|$ *sorozat is konvergens.*

1.3. Lemma. *(Kakeya*[67] *tétele) Ha*

$$1 \geq \beta_{p-1} > \beta_{p-2} > \beta_{p-3} > ... > \beta_0 > 0, \tag{1.26}$$

akkor a $\sum\limits_{j=0}^{p-1} \beta_j x^j = 0$ *egyenlet minden gyökére teljesül a* $|x| < 1$ *egyenlőtlenség.*

1.4. Lemma. *(András Szilárd) Ha az* $(a_n)_{n\geq 1}$ *sorozat tagjai pozitívak, a* $c_n = \sum\limits_{j=0}^{p-1} \beta_j a_{n+j}$, $\forall n \geq 1$ *összefüggéssel értelmezett* $(c_n)_{n\geq 1}$ *sorozat konvergens és teljesül a (1.26) feltétel, akkor az* $(a_n)_{n\geq 1}$ *sorozat is konvergens.*

Az első lemma a lineáris rekurziót teljesítő sorozatok reprezentációs tételének (lásd [12], 139-147 oldal) azonnali következménye. Valóban, ha a $(b_n)_{n\geq 1}$ sorozat teljesíti a

$$\sum_{j=0}^{p-1} \beta_j b_{n+j} = 0, \quad \forall n \geq 1,$$

[67]Soichi Kakeya, 1886-1947

rekurziót, akkor az általános tagja előállítható

$$b_n = \sum_{j=1}^{p-1} p_j(n) x_j^n$$

alakban, ahol $p_j (j = 1, \ldots, p-1)$ polinomok és $x_j (j = 1, \ldots, p-1)$ a $\sum\limits_{j=0}^{p-1} \beta_j x^j = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei. Ebből következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \sum\limits_{j=1}^{p-1} \lim\limits_{n\to\infty} p_j(n) x_j^n = 0$, mivel $|x_j| < 1$.

A (c_n) sorozat konvergenciája következik a majorálási kritériumból.

Az 1.3. lemma bizonyítása

A $\sum\limits_{j=0}^{p-1} \beta_j x^j$ polinomot jelöljük f-el és elvégezzük a szorzást:

$(x-1)f(x) = \beta_{p-1}x^p - (\beta_{p-1} - \beta_{p-2})\, x^{p-1} - (\beta_{p-2} - \beta_{p-3})\, x^{p-2} - \ldots - \beta_0$, tehát
$|(x-1)f(x)| \geq \beta_{p-1}\, |x|^p - (\beta_{p-1} - \beta_{p-2})\, |x|^{p-1} - (\beta_{p-2} - \beta_{p-3})\, |x|^{p-2} - \ldots - \beta_0$.

Ebből következik, hogy $|x| > 1$ esetén

$$|(x-1)f(x)| \geq |x|^p \cdot \left[\beta_{p-1} - (\beta_{p-1} - \beta_{p-2})\, |x|^{-1} - \right.$$
$$\left. - (\beta_{p-2} - \beta_{p-3})\, |x|^{-2} - \ldots - \beta_0\, |x|^{-p}\right] > 0.$$

Ha $|x| = 1$, akkor

$$|x|^p \cdot \left[\beta_{p-1} - (\beta_{p-1} - \beta_{p-2})\, |x|^{-1} - (\beta_{p-2} - \beta_{p-3})\, |x|^{-2} - \ldots - \beta_0\, |x|^{-p}\right] = 0,$$

és egyenlőség pontosan akkor lehetséges, ha a $0, \beta_0, x, x^2, \ldots, x^p$ komplex számok geometriai képe egy egyenesre illeszkedik. Ez viszont csak $x \in \mathbb{R}$, vagyis $x \in \{-1, 1\}$ esetén teljesülhet. Másrészt -1 és 1 nem gyöke az f poliomnak, tehát a bizonyítás teljes.

Az 1.4. lemma bizonyítása

Ha $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$, akkor

$$c_n - l = \sum_{j=0}^{p-1} \beta_j \cdot \left(a_{n+j} - \frac{l}{\sum\limits_{k=0}^{p-1} \beta_k} \right),$$

tehát a tulajdonságot elégséges igazolni a $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ sajátos esetben. Ehhez megszerkesztjük a $(b_n)_{n\geq 1}$ segédsorozatot:

1. $b_0 = 1$ és $\sum\limits_{k=0}^{l} b_k \beta_{p-l-1+k} = 0$ ha $1 \leq l \leq p-1$;

2. $\sum\limits_{j=0}^{p-1} \beta_j b_{n+j} = 0, \qquad \text{ha } n \geq 1.$

Az 1.3 és 1.2 lemma alapján $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} |b_k| = \lambda \in \mathbb{R}$, tehát a feltételekből következik, hogy bármely $\varepsilon > 0$-ra létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy

$$-\tfrac{\varepsilon}{2\lambda} \cdot \beta_{p-1} < c_n < \tfrac{\varepsilon}{2\lambda} \cdot \beta_{p-1}, \quad \forall n \geq n_\varepsilon \text{ és } m_\varepsilon \in \mathbb{N}, \text{ ha}$$

$$|b_m \cdot \beta_k| < \tfrac{\beta_{p-1}\cdot\varepsilon}{p^2 \max\{a_n| \quad n_\varepsilon \leq n \leq n_\varepsilon + p\}}, \quad \forall m \geq m_\varepsilon \text{ és } 0 \leq k \leq p-1.$$

Ezekből az egyenlőtlenségekből a

$$-\frac{\varepsilon}{2} \cdot \beta_{p-1} < -\lambda \cdot \frac{\varepsilon}{2\lambda} \cdot \beta_{p-1} < -\varepsilon \cdot \beta_{p-1} \cdot \sum_{k=0}^{m+1} |b_k| < \sum_{k=0}^{m+1} b_k c_{n+m+1-k} <$$

$$< \varepsilon \cdot \beta_{p-1} \cdot \sum_{k=0}^{m+1} |b_k| < \lambda \cdot \frac{\varepsilon}{2\lambda} \cdot \beta_{p-1} < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \beta_{p-1}$$

becslésekhez jutunk.

Másrészt

$$\sum_{k=0}^{m+1} b_k c_{n+m+1-k} = \beta_{p-1} a_{m+n+p} + a_n b_{m+1} \beta_0 + a_{n+1} \left(b_{m+1}\beta_1 + b_m \beta_0\right) + \ldots$$

$$\ldots + a_{n+p-2} \left(b_{m+1}\beta_{p-1} + b_m \beta_{p-2} + \ldots + b_{m-p+2}\beta_0\right),$$

tehát

$$-\varepsilon < a_{m+n_\varepsilon+p} < \varepsilon, \quad \forall \ m \geq m_\varepsilon + p.$$

Ebből az egyenlőségből következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, tehát a lemma bizonyítása teljes.

Az 1.24. tétel bizonyítása

Ha $\beta_k = \sum\limits_{j=0}^{k} \alpha_j$, $0 \leq k \leq p-1$-re és $c_n = \sum\limits_{j=0}^{p-1} \beta_j \cdot a_{n+j}$, $\forall n \geq 1$, akkor a β_k számok teljesítik az előbbi lemmák feltételeit, tehát

$$c_{n+1} = \sum_{k=0}^{p-1} \beta_k a_{n+k+1} \leq a_{n+p} + \sum_{k=0}^{p-2} \beta_k a_{n+k+1} \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j a_{n+j} + \sum_{j=1}^{p-1} \beta_{j+1} a_{n+j} = \sum_{j=0}^{p-1} \beta_j a_{n+j} = c_n.$$

A $(c_n)_{n\geq 1}$ sorozat szerkesztéséből következik, hogy $c_n \geq 0$, ha $n \geq 1$, tehát a $(c_n)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens. Így az 1.4 lemma biztosítja az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat konvergenciáját.

1.2. Megjegyzések

1. *Az* $(a_n)_{n\geq 1}$ *sorozatot* konvex sorozatnak *nevezzük, ha létezik olyan* $p \geq 1$ *természetes szám és léteznek az* $\alpha_i \in (0,1)$, $i = 0, \ldots, p-1$ *számok, amelyekre* $\sum\limits_{i=0}^{p-1} \alpha_i = 1$ *és*
$$a_{n+p} = \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j a_{n+j}, \quad \forall n \geq 1.$$
Jan van de Lune tűzte ki a Nieuw Archief voor Wiskunde folyóiratban az ilyen típusú konvex sorozatok határértékének kiszámítását. Az előbbi gondolatmenet alapján a $(c_n)_{n\geq 1}$ *sorozat ebben az esetben állandó sorozat, és így*
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} c_n}{\sum\limits_{j=0}^{p-1} \beta_j} = \frac{\sum\limits_{j=0}^{p-1} \beta_j a_{j+1}}{\sum\limits_{j=0}^{p-1} \beta_j}.$$

2. *Ha az* $(a_n)_{n\geq 1}$ *sorozat szubkonvex, akkor a* $(c_n)_{n\geq 1}$ *sorozat csökkenő, tehát*
$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \frac{\sum\limits_{j=0}^{p-1} \beta_j a_{j+1}}{\sum\limits_{j=0}^{p-1} \beta_j}.$$

3. *Igaz a következő tulajdonság is:*

   Ha az $(a_n)_{n\geq 1}$ *nemnegatív számokból alkotott sorozatra léteznek az* $(\alpha_j)_{j=\overline{0,p-1}}$ *számok úgy, hogy*
$$a_{n+p} \leq \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j a_{n+j}, \quad \forall n \geq 1,$$
ahol $\alpha_j \in (0,1)$, *ha* $j = 0, \ldots, p-1$, *és* $\sum\limits_{j=0}^{p-1} \alpha_j < 1$, *akkor az* $(a_n)_{n\geq 1}$ *sorozat konvergens,* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *és a* $c_n = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j$ *sorozat is konvergens. Ebben az esetben az* $(a_n)_{n\geq 1}$ *sorozatot szigorúan szubkonvex sorozatnak nevezzük.* △

Az 1.25 tétel bizonyítása

Értelmezzük a $(d_n)_{n\geq 1}$ sorozatot a $d_n = \max\{a_k \,|\, n \leq k \leq n+p-1\}$, $\forall\, n \geq 1$ összefüggésekkel. A feltétel alapján:

$$a_{n+p} \leq \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j a_{n+j} \leq \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j d_n \leq d_n, \quad \forall n \geq 1,$$

tehát $a_k \leq y_n$, minden $n+1 \leq k \leq n+p$ esetén. Így

$$d_{n+1} = \max\{a_k \,|n+1 \leq k \leq n+p\} \leq d_n, \forall\, n \geq 1.$$

Másrészt $d_n \geq 0, \forall n \geq 1$, tehát létezik olyan $d \geq 0$, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = d$. A továbbiakban igazoljuk, hogy az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens és ugyanaz a határértéke, mint a $(d_n)_{n\geq 1}$ sorozatnak. A $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = d$ egyenlőségből és az utolsó feltételből következik, hogy bármely $\varepsilon > 0$-ra létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy

$$d - \varepsilon \cdot \alpha_j(n) < d_n < d + \varepsilon \cdot \alpha_j(n), \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon \text{ és } 0 \leq j \leq p-1.$$

Ebből az egyenlőtlenségből következik, hogy

$$a_n \leq d + \varepsilon \cdot \alpha_j(n), \quad \forall\, n \geq n_\epsilon \text{ és } 0 \leq j \leq p-1.$$

Feltételezzük, hogy létezik olyan $n \geq n_\epsilon + p$, amelyre $a_n \leq d - \varepsilon$. A matematikai indukció módszerével igazoljuk, hogy $a_{n+k} < d$, ha $0 \leq k \leq p-1$. $k = 0$-ra az egyenlőtlenség teljesül. Ha $a_{n+k} < d$ és $0 \leq k \leq v - 1 (\leq p-1)$, akkor a tétel első feltételéből következik, hogy

$$a_{n+v} \leq \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j \cdot a_{n+v-p+j} \leq \left(\sum_{j=0}^{v-1} \alpha_j \cdot d\right) + \alpha_v \cdot (d - \varepsilon) + \left(\sum_{j=v+1}^{p-1} \alpha_j \cdot (d + \varepsilon \cdot \alpha_v)\right) < d,$$

tehát $a_{n+k} < d$, ha $0 \leq k \leq p-1$. Az előbbi egyenlőtlenségek alapján $d_n < d$, és ez ellentmondás, mivel a $(d_n)_{n\geq 1}$ sorozat csökkenő. Így $a_n \geq d - \varepsilon, \forall n \geq n_\epsilon + p$. Másrészt

$$a_n \leq d + \varepsilon \cdot \alpha_j(n) < d + \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon,$$

tehát $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = d$.

3.2 Függvénysorozatok

Az előbbi fejezetben számsorozatok konvergenciájára vonatkozó tételeket vizsgáltunk. Nagyon gyakran van szükségünk függvénysorozatok vizsgálatára, ezért ebben a fejezetben ismertetünk néhány eredményt függvénysorozatok konvergenciájára.

Tekintsünk egy valós változójú és valós értékű függvényekből alkotott $(f_n)_n = = (f_1, f_2, \dots)$ sorozatot ($f_n : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall n \geq 1$, $A \neq \emptyset$).

Az (f_n) *sorozatot konvergensnek* nevezzük *a* $t \in A$ pontban, ha az $(f_n(t))_n$ számsorozat konvergens. Ez pontosan akkor teljesül, ha létezik olyan $p \in \mathbb{R}$, amelyre bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $n_\varepsilon > 0$, amelyre $n > n_\varepsilon$ esetén $|f_n(t) - p| < \varepsilon$.

Ha az $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ függvénysorozatra az $(f_n(t))_{n\geq 1}$ számsorozat konvergál, minden $t \in A$ esetén, akkor minden $t \in A$-hoz hozzárendelhetjük a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)$ valós számot. Így egy $f : A \to \mathbb{R}$ függvényt értelmezünk az

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$$

összefüggéssel. Mivel a számsorozatok határértéke egyértelmű, az f függvény jól értelmezett. Ezt az f függvényt nevezzük az $(f_n)_{n\geq 1}$ *függvénysorozat pontszerű (vagy pontonkénti) határfüggvényének.* A pontonkénti konvergencia jelölésére az $f_n \to f$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ szimbólumot használjuk. Ez általában nem vezet félreértéshez, mert az $(f_n)_{n\geq 1}$ sorozatról tudjuk, hogy függvényekből áll, vagy számokból. Eszerint $\varepsilon - \delta$-ás megfogalmazásban mondhatjuk, hogy az $(f_n)_{n\geq 1}$ függvénysorozat pontosan akkor pontszerűen konvergens, ha létezik olyan $f : A \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre igaz a következő állítás:

Bármely $\varepsilon > 0$ és $t \in A$ esetén létezik $n_{t,\varepsilon} > 0$ úgy, hogy $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$, ha $n > n_{t,\varepsilon}$.

Az előbbi értelmezésben $n_{t,\varepsilon}$ függhet a t-től is. Ha $n_{t,\varepsilon}$ független a t-től, akkor azt mondjuk, hogy az $(f_n)_{n\geq 1}$ függvénysorozat *egyenletesen konvergál* az f függvényhez. Az f függvényt az (f_n) sorozat határértékének vagy határfüggvényének nevezzük, és ezt az $f_n \xrightarrow{u} f$ szimbólummal jelöljük.

Megjegyzés. Az egyenletes konvergenciából következik a pontszerű konvergencia, de a fordított implikáció általában nem igaz. $\triangle$

2.4. Gyakorlatok

(a) *Tekintsük az $f_n : [0,1[\to \mathbb{R}$, $f_n(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ függvénysorozatot. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} t^n = 0$, $\forall t \in [0,1[$, az $(f_n)_{n\geq 1}$ függvénysorozat a $[0,1[$ intervallumon pontszerűen konvergál az identikusan 0 függényhez.*

(b) *Az $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ függvénysorozat pontszerűen konvergál az*

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t = 1 \end{cases}$$

függvényhez.

A konvergencia egyik függvénysorozat esetében sem egyenletes.

2.1. Tulajdonság. *Ha $f_n : A \to \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, és bármely $x \in A$-ra $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, valamint az $a_n = \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|$ sorozatra $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, akkor az $(f_n)_n$ függvénysorozat egyenletesen konvergál f-hez az A-n.*

Bizonyítás. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, bármely $\varepsilon > 0$-ra létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $|a_n| < \varepsilon$, ha $n > n_\varepsilon$. Így viszont $\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ minden $n > n_\varepsilon$-ra, és ez biztosítja az $(f_n)_n$ sorozat egyenletes konvergenciáját A-n. $\square$

Az 1.7 tételhez hasonlóan (90. oldal) érvényes a következő:

2.1. Tétel. (Cauchy-féle általános kritérium) *Az* $(f_n)_n$ $(f_n : A \to \mathbb{R},\ A \neq \emptyset)$ *függvénysorozat pontosan akkor konvergál egyenletesen az* A*-n, ha bármely* $\varepsilon > 0$ *esetén létezik* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *úgy, hogy* $|f_{n+p}(t) - f_n(t)| < \varepsilon$, *ha* $n \geq n_\varepsilon$, $p \in \mathbb{N}$ *és* $t \in A$.

Bizonyítás. Feltételezzük, hogy az $(f_n)_{n\geq 1}$ sorozat egyenletesen konvergál A-n egy f függvényhez, és rögzítjük az $\varepsilon > 0$ valós számot. Az egyenletes konvergencia értelmezése alapján létezik olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, amelyre $n \geq n_\varepsilon$, és $t \in A$ esetén teljesül az $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon/2$ egyenlőtlenség. Mivel $n+p \geq n_\varepsilon$, teljesül az $|f_{n+p}(t) - f(t)| < \varepsilon/2$ egyenlőtlenség is, minden $t \in A$-ra. Így

$$|f_{n+p}(t) - f_n(t)| \leq |f_{n+p}(t) - f(t)| + |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon.$$

Ha feltételezzük, hogy bármely $\varepsilon > 0$-ra létezik olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, amelyre $n \geq n_\varepsilon$, $p \in \mathbb{N}$, és $t \in A$ esetén $|f_{n+p}(t) - f_n(t)| < \varepsilon/2$, akkor minden rögzített $t \in A$-ra az $(f_n(t))_n$ sorozat Cauchy-féle sorozat. Így az $\mathbb{R}$ teljessége alapján minden $t \in A$-ra létezik olyan $f(t) \in \mathbb{R}$, amelyre $(f_n(t))_n \to f(t)$. Igazoljuk, hogy az $(f_n)_{n\geq 1}$ sorozat egyenletesen konvergál az f-hez. A feltétel alapján bármely $\varepsilon > 0$-ra létezik olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, amelyre

$$|f_{n+p}(t) - f_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

bármely $n \geq n_\varepsilon$, bármely $p \in \mathbb{N}$ és bármely $t \in A$ esetén. Ha ebben az egyenlőtlenségben határértékre térünk p-vel ($p \to \infty$), akkor azt kapjuk, hogy

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon,\ t \in A.$$

Ez éppen az egyenletes konvergencia értelmezése, tehát $f_n \xrightarrow{u} f$ az A-n. □

Az előbbi fogalmak általánosabb feltételek közt is értelmezhetők. Ha E egy (X, ρ) metrikus tér részhalmaza és $(f_n)_{n\geq 1}$ egy E-n értelmezett, valós értékű függvényekből álló sorozat, akkor azt mondjuk, hogy az $(f_n)_{n\geq 1}$ sorozat *egyenletesen tart* f*-hez az* E*-n,* ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall\, x \in E,$$

ha $n > n_\varepsilon$.

Gyakran hivatkozunk az alábbi tulajdonságra (a bizonyítás az értelmezések alapján azonnali):

2.2. Tétel. *Ha az* E *metrikus térben* $f_n \to f$ *egyenletesen és* x *az* E *egy torlódási pontja, akkor az*

$$a_n = \lim_{t\to x} f_n(t), \quad n \in \mathbb{N}$$

sorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{t\to x} f(t),$$

vagyis

$$\lim_{t\to x} \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} \lim_{t\to x} f_n(t).$$

3.3 Számsorok

Ebben a paragrafusban komplex számokból álló számsorokat tanulmányozunk.

Ha (x_n) egy sorozat, akkor a

$$\sum_{n=p}^{q} x_n \quad (p \leq q)$$

szimbólumot használjuk az $x_p+x_{p+1}+\cdots+x_q$ összeg jelölésére. Az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozathoz hozzárendeljük az (s_n), részletösszeg sorozatot, amelynek tagjait az

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

összefüggéssel értelmezünk. Azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ sor konvergens, ha az (s_n) részletösszegek sorozata konvergens. Ha $s_n \to s$, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ sor összege s. Ezt a

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s$$

összefüggéssel jelöljük.

Ha az (s_n) sorozat divergens, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ sor divergens.

Néha $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ alakú sorokat is használunk. Amikor nem vezet félreértéshez, használhatjuk a $\sum x_n$ jelölést is.

3.1. Tétel. (Cauchy általános kritériuma) *A* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *sorozat pontosan akkor konvergens, ha minden* $\varepsilon > 0$*-ra létezik* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *úgy, hogy*

$$\left| \sum_{k=n}^{m} x_k \right| < \varepsilon, \tag{3.1}$$

minden $m \geq n \geq n_\varepsilon$ *esetén.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk az 1.7-es tételt (lásd 90. oldalt) az (s_n) sorozatra. □

Ha $m = n$, akkor (3.1) alapján

$$|x_n| < \varepsilon, \quad n \geq n_\varepsilon,$$

tehát:

3.2. Tétel. (Szükséges feltétel) *Ha* $\sum x_n$ *konvergens, akkor* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Megjegyzés. Az $x_n \to 0$ feltétel nem elégséges a $\sum x_n$ konvergenciájához. A

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n}$$

sor divergens (lásd az 1.1 feladatot a 92. oldalon), és az általános tagja 0-hoz tart. $\triangle$

3.3. Tétel. (Műveletek konvergens sorokkal) *Ha a* $\sum a_n$ *és* $\sum b_n$ *sorok konvergensek és* $c \in \mathbb{R}$, *akkor*

(a) *tetszőleges* $p \in \mathbb{R}$ *(vagy* $p \in \mathbb{C}$*) esetén a* $\sum p \cdot a_n$ *és* $\sum (a_n \pm b_n)$ *sorok konvergensek és*

$$\sum p \cdot a_n = p \sum a_n, \tag{3.2}$$

illetve

$$\sum (a_n \pm b_n) = \sum a_n \pm \sum b_n. \tag{3.3}$$

(b) (Abel) *Ha a* $c_n = a_1 b_n + \cdots + a_n b_1$ *sorozatra a* $\sum c_n$ *sor konvergens és*

$$\sum a_n = A, \qquad \sum b_n = B, \qquad \sum c_n = C,$$

akkor $C = AB$.

(c) (Mertens[68]) *Ha a* $\sum |a_n|$ *sor konvergens,* $\sum a_n = A$, $\sum b_n = B$ *és* $c_n = \sum_{k=1}^n a_n b_{n+1-k}$, *akkor*

$$\sum c_n = AB.$$

(d) (Cauchy) *Ha* $\sum |a_n|$ *és* $\sum |b_n|$ *sorok konvergensek, akkor a* $\sum |c_n|$ *sor is konvergál, ahol* c_n *a (c) alpontbeli kifejezéssel van értelmezve.*

Bizonyítás. (a) Valóban

$$p \sum a_n = p \lim_{n\to\infty} \sum^n a_k = \lim_{n\to\infty} \sum^n p\, a_k = \sum p\, a_n$$

és

$$\sum a_n \pm \sum b_n = \lim_{n\to\infty} \sum^n a_k \pm \lim_{n\to\infty} \sum^n b_k = \lim_{n\to\infty} (\sum^n a_k \pm \sum^n b_k) = \sum (a_n \pm b_n).$$

[68]Franz Mertens, 1840 - 1927

(b) Az

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \text{ és } C_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$$

jelölésekkel írhatjuk, hogy

$$C_n = a_1 B_n + \cdots + a_n B_1,$$

tehát

$$C_1 + \cdots + C_n = A_1 B_n + \cdots + A_n B_1, \qquad \frac{C_1 + \cdots + C_n}{n} = \frac{A_1 B_n + \cdots + A_n B_1}{n}.$$

Az 1.6 következmény (g) alpontja és az 1.4 következmény alapján következik a bizonyítandó állítás.

(c) A 3.2 tétel alapján következik, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Az 1.6 következmény (g) alpontjából $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Ha az A_n, B_n, és C_n rendre a $\sum a_n$, $\sum b_n$, illetve $\sum c_n$ sorok n-edik részletösszege, akkor a $d_n = B_n - B$ sorozatra $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$. Ugyanakkor C_n felírható

$$C_n = A_n B + a_1 d_n + a_2 d_{n-1} + \cdots + a_{n-1} d_2 + a_n d_1$$

alakban, tehát $A_n B \to AB$ és $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} d_n = 0$ alapján

$$\lim_{n\to\infty} (a_1 d_n + a_2 d_{n-1} + \cdots + a_{n-1} d_2 + a_n d_1) = 0.$$

Mivel $C_n \to AB$, a (c) alpont bizonyítása teljes.

(d) A háromszög egyenlőtlenségből következik, hogy

$$|c_n| \leq |a_1|\,|b_n| + \cdots + |a_n|\,|b_1|,$$

tehát a $\sum |c_n|$ minden részletösszege majorálható a $\sum |a_n|$ és $\sum |b_n|$ sorok szorzatának részletösszegével. Ez viszont a (c) alpont alapján konvergens, tehát a bizonyítás teljes. $\square$

Megjegyzés. A sorok konvergenciájára vonatkozó feltétel szükséges, ellenkező esetben előfordulhat, hogy a (3.3) bal oldala létezik, és a jobb oldala nem. Például

$$0 = \sum (1-1) \neq \sum 1 - \sum 1. \quad \triangle$$

Akárcsak véges összegek esetében a tagok közé tetszőleges zárójeleket beiktathatunk (asszociativitás), de általában a tagok sorrendje nem cserélhető fel.

3.4. Tétel. *Ha $\sum a_n$ egy konvergens sor, akkor a tagjait (a sorrend módosítása nélkül) tetszőlegesen csoportosítva olyan sort kapunk, amelynek összege egyenlő az eredeti sor összegével.*

Bizonyítás. A transzformált sor részletösszegeinek sorozata az eredeti sor részletösszegei sorozatának részsorozata, tehát konvergens, és ugyanaz a határértéke. □

3.5. Tétel. *(Finta Béla[69]) Ha az* $(a_{n,k})_{\substack{n\geq 0\\ k\leq n}}$ *sorozat teljesíti a következő Toeplitz[70] feltételeket:*

a) minden rögzített $p \in \mathbb{N}$*-re létezik a* $\lim\limits_{n\to\infty} a_{np} \in \mathbb{R}$ *határérték;*

b) bármely $\varepsilon > 0$ *esetén létezik* $m_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ *úgy, hogy*

$$\sum_{k=m_\varepsilon+1}^{n} |a_{n,k}| < \varepsilon,$$

és az $(x_n)_{n\geq 1}$ *sorozat korlátos, akkor a*

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} x_k$$

összefüggéssel értelmezett $(b_n)_{n\geq 1}$ *sorozat konvergens.*

Bizonyítás. Igazoljuk, hogy a $(b_n)_{n\geq 1}$ sorozat Cauchy sorozat. Bármely $\varepsilon > 0$-ra létezik $m_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ úgy, hogy

$$\sum_{k=m_\varepsilon+1}^{n} |a_{n,k}| < \frac{\varepsilon}{4L}\ \forall n \geq m_\varepsilon,$$

ahol L a $(|x_n|)_{n\geq 1}$ sorozat egy felső korlátja. Így bármely $p \in \mathbb{N}$ esetén

$$|b_{n+p} - b_n| \leq \left(\sum_{k=1}^{m_\varepsilon} |a_{n+p,k} - a_{n,k}||x_k| + \sum_{k=m_\varepsilon+1}^{n} |a_{n+p,k} - a_{n,k}||x_k| + \sum_{k=1}^{p} |a_{n+p,n+k}||x_{n+k}| \right).$$

Mivel m_ε rögzített és az $(a_{n,k})_{\substack{n\geq 0\\ k\leq n}}$ sorozat konvergens az első index szerint, minden rögzített p-re létezik n_P úgy, hogy $|a_{n+p,i} - a_{n,i}| < \frac{\varepsilon}{2m_\varepsilon L}$, $\forall n \geq n_p$. Így $n \geq \max\{m_\varepsilon, n_1, n_2, \ldots, n_{m_\varepsilon}\}$ esetén

$$\sum_{k=1}^{m_\varepsilon} |a_{n+p,k} - a_{n,k}||x_k| \leq m_\varepsilon \cdot \frac{\varepsilon}{2m_\varepsilon L} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Másrészt

$$\sum_{k=m_\varepsilon+1}^{n} |a_{n+p,k} - a_{n,k}||x_k| + \sum_{k=1}^{p} |a_{n+p,n+k}||x_{n+k}| \leq L\left(\frac{\varepsilon}{4L} + \frac{\varepsilon}{4L}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

[69] fintab@uttgm.ro
[70] Otto Toeplitz, 1881-1940

Ezek alapján következik, hogy a $(b_n)_{n\geq 1}$ sorozat Cauchy sorozat, tehát konvergens is.

Megjegyzés. Az előbbi tétel nem egyenértékű a Toeplitz tétellel, mert ott az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozat konvergenciája is feltétel. Természetesen a Toeplitz tételben a $(b_n)_{n\geq 1}$ sorozat határértéke is meghatározható. $\triangle$

A határértékekkel végezhető műveletek általában véges sok sorozatra vonatkoznak. A következő tétel egy példa arra, hogy bizonyos feltételek segítségével végtelen sok sorozatra is kiterjeszthetjük.

3.3. Értelmezés. *Az* $(a_{i,j})_{i,j\geq 1}$ *sorozatot additívan egyenletesen konvergensnek nevezzük, ha bármely* $\varepsilon > 0$ *-ra létezik olyan* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, *amelyre*

$$|\sum_{k=0}^{p} a_{i,j+k}| < \varepsilon, \ \forall i \geq 1, j \geq N, p \geq 0.$$

3.6. Tétel.(*Abian*[71]*-Kemp*[72]) *Ha az* $(a_{i,j})_{i,j\geq 1}$ *sorozat additívan egyenletesen konvergens és* $\lim\limits_{i\to\infty} a_{ij} = a_j$, $\forall j \geq 1$, *akkor a* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{i,j}$ *sor konvergens, bármely* i *-re, a* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ *sor is konvergens, és*

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \lim_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}.$$

3.3.1 Nemnegatív tagú sorok

3.7. Tétel. *Egy nem negatív tagokból álló sor pontosan akkor konvergens, ha a részletösszegek sorozata korlátos.*

Bizonyítás. A részletösszegek sorozata növekvő, tehát az 1.16-es tétel alapján (lásd a 92. oldal) pontosan akkor konvergens, ha korlátos. $\square$

3.8. Tétel. *Ha* $\sum a_n$ *egy nemnegatív tagú konvergens sor, akkor a tagjai átrendezéséből kapott tetszőleges* $\sum b_n$ *sor is konvergens, és ugyanaz az összege, mint az eredeti sornak.*

Bizonyítás. Ha s az eredeti sor összege és (s_n) a részletösszegek sorozata, valamint p_n az átrendezett sor első n tagjának összege, akkor rögzített n-re

$$p_n = b_1 + \cdots + b_n = a_{k_1} + \cdots + a_{k_n}.$$

Ha $N = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$, akkor $p_n \leq s_N \leq s$, és így $\sum b_n$ konvergens, és ha b az összege, akkor $b \leq s$. Hasonló gondolatmenet alapján következik, hogy $s \leq b$, tehát $\sum a_n = \sum b_n$. $\square$

[71]Alexander Abian, math@iastate.edu
[72]Paula Kemp, pakl70f@vma.smsu.edu

3.9. Tétel. (Összehasonlítási kritérium) (a) *Ha* $|x_n| \leq c_n$, *minden* $n \geq n_0$*-ra, ahol* n_0 *rögzített egész szám, és* $\sum c_n$ *konvergens, akkor* $\sum x_n$ *is konvergens.*

(b) *Ha* $x_n \geq y_n \geq 0$, *minden* $n \geq n_0$*-ra, és* $\sum y_n$ *divergens, akkor* $\sum x_n$ *is divergens.*

Bizonyítás. (a) A Cauchy-féle általános kritérium alapján bármely $\varepsilon > 0$-ra létezik $n_\varepsilon \geq n_0$ úgy, hogy minden $m \geq n \geq n_\varepsilon$ esetén

$$\sum_{k=n}^{m} c_k \leq \varepsilon.$$

Így

$$\left| \sum_{k=n}^{m} x_k \right| \leq \sum_{k=n}^{m} |x_k| \leq \sum_{k=n}^{m} c_k \leq \varepsilon,$$

tehát (a) igaz.

(b) Ha $\sum x_n$ konvergens volna, akkor az (a) alapján $\sum y_n$ is konvergálna, tehát (b) is igaz. □

3.10. Tétel. *Ha* $0 \leq x < 1$, *akkor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

$x \geq 1$ *esetén az előbbi sor divergens.*

Bizonyítás. Ha $x \neq 1$, akkor

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

$n \to \infty$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$, tehát a kívánt összefüggéshez jutunk. $x = 1$ esetén $s_n = n+1$, és ez divergens, míg $x > 1$-re $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, tehát $x \geq 1$-re a sor divergens. □

3.8. Alkalmazás. *Bizonyítsuk be, hogy ha az* $(a_k^j)_{k\geq 1}^{j=\overline{1,m}}$ *diszjunkt számtani haladványokból alkotott halmazok egyesítése az* $\mathbb{N}$, *akkor a haladványok* $(r_j)_{j=\overline{1,m}}$ *állandó különbségeire teljesül a* $\sum\limits_{k=1}^{m} \frac{1}{r_k} = 1$ *összefüggés.*

Megoldás. Mindegyik $(a_k^j)_{k\geq 1}$ haladványhoz ($j = \overline{1,m}$) rendeljük hozzá az $S_j = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x^{a_k}$ sort. Mivel $a_k^j = a_1^j + (k-1)r_j$, az előbbi tétel alapján $|x| < 1$ esetén $S_j = \frac{x^{a_j}}{1-x^{r_j}}$, ha $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Másrészt, mivel a haladványok tagjaiból képezett halmazok az $\mathbb{N}$ egy osztályfelbontását képezik, írhatjuk, hogy $\sum\limits_{j=1}^{m} S_j = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, ha $|x| < 1$. Ebből következik, hogy

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{x^{a_j}}{1-x^{r_j}} = \frac{1}{1-x}, \text{ ha } |x| < 1.$$

Ha ezt az egyenlőséget $(1-x)$-szel beszorozzuk, és kiszámítjuk mindkét oldal határértékét $x \to 1$ esetén, akkor a $\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{1}{r_j} = 1$ egyenlőséghez jutunk. ♦

3.11. Tétel. (Cauchy-féle kondenzációs kritérium) $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \geq 0$ *esetén a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor pontosan akkor konvergens, ha a*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x_{2^k} = x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_8 + \dots \tag{3.4}$$

sor konvergens.

Bizonyítás. A 3.7 tétel alapján elégséges a részletösszegek sorozatának korlátosságát vizsgálni. Az

$$\begin{aligned} s_n &= x_1 + x_2 + \dots + x_n, \\ t_k &= x_1 + 2x_2 + \dots + 2^k x_{2^k} \end{aligned}$$

jelölésekkel $n < 2^k$-ra

$$\begin{aligned} s_n = x_1 + \dots + x_n \leq & \quad \text{(hozzádunk tagokat)} \\ \leq x_1 + (x_2 + x_3) + \dots + (x_{2^k} + \dots + x_{2^{k+1}-1}) \leq \\ \leq x_1 + 2x_2 + \dots + 2^k x_{2^k} = t_k, \end{aligned}$$

tehát

$$s_n \leq t_k. \tag{3.5}$$

Másrészt $n > 2^k$-ra

$$\begin{aligned} s_n = x_1 + \dots + x_n & \quad \text{(elhagyunk tagokat)} \\ \geq x_1 + x_2 + (x_3 + x_4) + \dots + (x_{2^{k-1}+1} + \dots + x_{2^k}) \geq \\ \geq \frac{1}{2}x_1 + x_2 + 2x_4 + \dots + 2^{k-1} x_{2^k} = \frac{1}{2} t_k, \end{aligned}$$

és így

$$2s_n \geq t_k. \tag{3.6}$$

A (3.5) és (3.6) egyenlőtlenségek alapján az (s_n) és (t_k) sorozatok egyszerre korlátosak vagy korlátlanok. □

3.12. Tétel

$$\sum \frac{1}{n^p} \text{ pontosan akkor konvergens, ha } p > 1.$$

Bizonyítás. Ha $p \leq 0$, a sor divergens a 3.2-es tétel alapján. Ha $p > 0$, akkor az előbbi tétel alapján a

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{kp}} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-p)k}$$

sor konvergenciáját kell vizsgálni. Ez pontosan akkor konvergens, ha $2^{1-p} < 1$, vagyis ha $1 - p < 0$. □

Megjegyzés. Az

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

sort *harmonikus* sornak nevezzük, és ez a sor divergens. Az 1.8-as következmény alapján látható, hogy a harmonikus sor divergenciájának sebessége ugyanaz, mint a $\log n$ függvénynek. △

3.13. Tétel. *(Róka Sándor*[73]*) Ha az* $(a_i)_{i \geq 1}$ *sorozat tagjai szigorúan pozitív valós számok, akkor a*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} \qquad \text{és} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{i^2}$$

sorok közül legalább az egyik divergens.

Bizonyítás. (B. Mond[74], J.E. Pečarić[75]) $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i^2} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \left(\frac{i}{a_i} + \frac{a_i}{i} \right) \geq 2 \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$, tehát mindkét sor nem lehet konvergens.

3.1. Megjegyzés. *Az előbbi bizonyítás kihasználja a harmonikus sor divergenciáját. A tulajdonságot igazolhatjuk más módszerrel is. Így az előbbi tulajdonság a harmonikus sor divergenciájának egy általánosításaként is felfogható (* $a_i = i$, $\forall i \geq 1$ *esetén következik belőle a harmonikus sor divergenciája).*

3.9. Alkalmazás. *A sivatag egyik széléről egy járművel át szeretnénk jutni a másik szélére. Rendelkezésünkre áll egy jármű, amely összesen egy egységnyi üzemanyagot tud szállítani (a tartályában és teherként összesen), és ezzel egy egységnyi utat tud megtenni. Bizonyítsuk be, hogy át tudunk jutni a sivatagon. Hogyan?*

Megoldás. Ha 1 egységnyi üzemanyagot használunk fel, akkor nyilvánvaló, hogy 1 egységnyire juthatunk a kiinduló ponttól. 2 egységnyi üzemanyaggal már $1 + \frac{1}{3}$ egységnyire juthatunk a kiinduló ponttól, ha az első út alkalmával $\frac{1}{3}$-nyi út után

[73] rokas@nyf.hu
[74] Bertram Mond, B.Mond@latrobe.edu.au
[75] Josip E. Pečarić, pecaric@mahazu.hazu.hr

$\frac{1}{3}$ egységnyi üzemanyagot otthagyunk a sivatagban és visszatérünk a kiinduló ponthoz. Így a második nap már $\frac{2}{3}$ egységnyi üzemanyaggal érkezünk ahhoz a ponthoz, ahol hagytuk az $\frac{1}{3}$ egységnyi üzemanyagot. Innen további 1 egységnyi utat tudunk megtenni, tehát összesen $1 + \frac{1}{3}$ egység távolságra juthatunk a kiindulási ponttól. Ha 4 egységnyi üzemanyagot használunk fel, akkor az első két út alkalmával csak $\frac{1}{5}$ távolságig megyünk és itt összesen $2 \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$ egységnyi üzemanyagot tárolunk. Így a harmadik út alkalmával már $\frac{6}{5} + \frac{4}{5} = 2$ egységnyi üzemanyagunk lesz ebben a pontban, tehát az előbbi algoritmus alapján már $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ egység távolságra juthatunk a kiindulási ponttól. A matematikai indukció módszerével igazoljuk, hogy k egységnyi üzemanyaggal meg lehet tenni $1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2k-1}$ egységnyi távolságot. Az eddigiekben láttuk, hogy $k \in \{1, 2, 3\}$ esetén az állítás igaz. Ha k egységnyi üzemanyagunk van, akkor az első $k-1$ út alkamával $\frac{1}{2k-1}$ egységnyire távolodunk el a kiindulási ponttól, és így ebben a pontban $(k-1)\times\frac{2k-3}{2k-1} = \frac{2k^2-5k+3}{2k-1}$ egységnyi lerakatot hozhatunk létre. A következő út alkalmával $\frac{2k-2}{2k-1}$ egységnyi üzemanyaggal érkezünk ehhez a ponthoz, tehát összesen $\frac{2k-2}{2k-1} + \frac{2k^2-5k+3}{2k-1} = k - 1$ egységnyi üzemanyaggal fogunk rendelkezni. Az indukciós feltevés alapján innen kiindulva meg tudunk tenni $\sum\limits_{j=1}^{k-1} \frac{1}{2k-1}$ egységnyi utat, tehát megtehetünk összesen $\sum\limits_{j=1}^{k} \frac{1}{2k-1}$ egységnyi utat. Mivel a harmonikus sor divergens, a $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$ sor is az (ellenkező esetben, ha s lenne az utóbbi sor összege, akkor a harmonikus sor összege $\frac{3}{2}s$ lenne). Így a kiindulási ponttól akármilyen távolságra eljuthatunk. ♦

3.14. Tétel. *Ha $p > 1$, akkor a*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \tag{3.7}$$

összeg konvergens, míg $p \leq 1$ esetén divergens.

Bizonyítás. A logaritmus függvény növekvő, tehát az $1/[n(\ln n)^p]$ sorozat csökkenő. A 3.11-es tételt alkalmazva a (3.7) sorra elégséges a

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k(\ln 2^k)^p} = \frac{1}{(\ln 2)^p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \tag{3.8}$$

sor konvergenciáját vizsgálni, és ezt az előbbi tételben már megtettük. □

3.1. Tulajdonság. (Carleman[76] egyenlőtlenség)

(a) *Ha* $(a_n)_{n\geq 1}$ *egy szigorúan pozitív tagú sorozat és* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, *akkor*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1a_2\ldots a_n)^{1/n} < e\sum_{n=1}^{\infty} a_n; \tag{3.9}$$

(b) *a* (3.9) *egyenlőtlenségben* e *a legjobb konstans.*

Bizonyítás. (a) Szerkesszük meg a

$$c_n = (n+1)^n/n^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{3.10}$$

sorozatot. A szerkesztés alapján $c_1c_2\ldots c_n = (n+1)^n$, tehát minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$(a_1a_2\ldots a_n)^{1/n} = (a_1c_1a_2c_2\ldots a_nc_n)^{1/n}/(n+1) \leq (a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n)/n(n+1).$$

Ez alapján

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1a_2\ldots a_n)^{1/n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_nc_n\left(\sum_{m=n}^{\infty}\frac{1}{m(m+1)}\right). \tag{3.11}$$

Mivel $\sum_{m=n}^{\infty} 1/m(m+1) = 1/n$, írhatjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_nc_n\left(\sum_{m=n}^{\infty}\frac{1}{m(m+1)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_nc_n/n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n[(n+1)/n]^n < e\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(3.11) alapján a bizonyítandó egyenlőtlenséghez jutunk.

(b) Ha e helyett egy kisebb számot helyettesítünk a (3.9) egyenlőtlenségbe, akkor találunk olyan (a_n) sorozatot, amelyre az egyenlőtlenség fordítva teljesül. Előre megválasztott $\varepsilon \in]0, e[$ számra legyen $a_n = n^{n-1}(n+1)^{-n}$, ha $n = 1, 2, \ldots, N$ és $a_n = 2^{-n}$, ha $n > N$, ahol N-et később rögzítjük.

$$(a_1a_2\ldots a_n)^{1/n} = \frac{1}{n+1}, \tag{3.12}$$

ha $n \leq N$. Rögzítsük k-t úgy, hogy

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n > e - \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{ha } n > k. \tag{3.13}$$

Az N-et úgy rögzítjük, hogy teljesüljön a

$$\sum_{n=1}^{k} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \leq \frac{\varepsilon}{(2e-\varepsilon)(e-\varepsilon)}\sum_{n=k+1}^{N}\frac{1}{n} \tag{3.14}$$

[76] Torsten Carleman, 1892-1949

egyenlőtlenség (ez mindig lehetséges a harmonikus sor divergenciája miatt). A (3.12), (3.13) és (3.14) összefüggések alapján

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k} a_n + \sum_{n=k+1}^{N} \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} <$$
$$< \frac{\varepsilon}{(2e-\varepsilon)(e-\varepsilon)} \sum_{n=k+1}^{N} \frac{1}{n} + \left(e - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-1} \sum_{n=k+1}^{N} \frac{1}{n} = \frac{1}{e-\varepsilon} \sum_{n=k+1}^{N} \frac{1}{n} \leq$$
$$\leq \frac{1}{e-\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} (a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n}. \quad \square$$

3.3.2 Konvergencia kritériumok pozitív tagú sorokra

3.15. Tétel. (Cauchy-féle gyök-kritérium) *Ha* $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|}$, *akkor igazak a következő állítások*

(a) *ha* $\alpha < 1$, *akkor* $\sum x_n$ *konvergens;*

(b) *ha* $\alpha > 1$, *akkor* $\sum x_n$ *divergens;*

(c) *ha* $\alpha = 1$, *akkor a sor lehet divergens is, és konvergens is.*

Bizonyítás. (a) Ha $\alpha < 1$, választhatjuk β-t és az $m \in \mathbb{N}$ számot úgy, hogy $\alpha < \beta < 1$ és

$$\sqrt[n]{|x_n|} < \beta,$$

minden $n \geq m$-re. Így $n \geq m$ esetén

$$|x_n| < \beta^n.$$

Mivel $0 < \beta < 1$, a $\sum \beta^n$ sor konvergens, tehát a 3.9-es tételből (összehasonlítási kritérium) következik a $\sum x_n$ sor konvergenciája.

(b) Ha $\alpha > 1$, akkor létezik olyan (n_k) sorozat, amelyre $\sqrt[n_k]{|x_{n_k}|} \to \alpha$. Tehát $|x_n| > 1$, végtelen sok n értékre. Így az $x_n \to 0$ szükséges feltétel sem teljesül, tehát $\sum x_n$ divergens.

(c) A

$$\sum \frac{1}{n} \quad \text{és} \quad \sum \frac{1}{n^2}$$

sorok mindegyikére $\alpha = 1$, és az első sor divergens, míg a második konvergens. $\square$

3.16. Tétel. (Hányadoskritérium vagy D'Alembert-féle kritérium[77]) *A* $\sum x_n$ *sor*

(a) *konvergens, ha* $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1$;

[77]Jean Baptiste Le Rond D'Alembert, 1717-1783

(b) *divergens, ha* $\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| > 1.$

Bizonyítás. (a) Létezik $\beta < 1$ és $m \in \mathbb{N}$ úgy, hogy

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < \beta,$$

ha $n \geq m$. Ez alapján

$$\begin{aligned}
&|x_{m+1}| < \beta|x_m|,\\
&|x_{m+2}| < \beta|x_{m+1}| < \beta^2|x_m|,\\
&\qquad \ldots\ldots\\
&|x_{m+p}| < \beta^p|x_m|,
\end{aligned}$$

tehát

$$|x_n| < \beta^{n-m}|x_m|,$$

ha $n \geq m$, és így (a) következik az összehasonlítási kritériumból (mert $\sum \beta^n$ konvergens).

(b) Ha az $|x_{n+1}| \geq |x_n|$ egyenlőtlenség minden $n \geq m$ esetén igaz, akkor az $x_n \to 0$ szükséges feltétel nem teljesülhet, tehát (b) igaz. □

Megjegyzés. A

$$\sum \frac{1}{n} \quad \text{és} \quad \sum \frac{1}{n^2}$$

sorokra

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1,$$

és az első sor divegens, míg a második konvergens. △

3.17. Tétel. *Ha* (x_n) *egy pozitív számokból álló sorozat, akkor*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Megjegyzés. A Raabe-Duhamel kritérium egy jól megválasztott általánosított harmonikus sorral való összehasonlításból következik. Láttuk, hogy a hányados- és a gyök-kritérium egy mértani sorral való összehasonlításból ered.

Sajnos nincs olyan „univerzális sorozat,” amellyel való összehasonlításból tetszőleges sorozat konvergenciája eldönthető. (lásd [38, 1. kötet, 442. oldal]). △

3.18. Tétel. (Raabe[78]-Duhamel[79] kritérium) *Ha* $a_n > 0$ *minden* $n \in \mathbb{N}^*$*-re, akkor igaz a következő két implikáció:*

[78]Josef Ludwig Raabe, 1801-1859
[79]Jean Marie Constant Duhamel, 1797-1872

(a) *ha* $\bar{l} = \liminf\limits_{n\to\infty} n(a_n/a_{n+1} - 1) > 1$, *akkor a* $\sum a_n$ *sor konvergens;*

(b) *ha* $\underline{l} = \limsup\limits_{n\to\infty} n(a_n/a_{n+1} - 1) < 1$, *akkor a* $\sum a_n$ *sor divergens.*

3.19. Tétel. *(András Szilárd, Róka Sándor) Tekintsük az* $(a_k)_{k\geq 1}$ *pozitív tagú sorozatot.*

a) Ha $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{n\cdot a_n}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i} > 2$, *akkor a* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ *sor konvergens;*

b) Ha $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{n\cdot a_n}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i} < 2$, *akkor a* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ *sor divergens.*

Bizonyítás. a) A feltétel alapján létezik olyan $\varepsilon > 0$ és $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > 2+\varepsilon$, amelyre

$$\frac{n\cdot a_n}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} > 2+\varepsilon,\ \forall n \geq n_0. \tag{3.15}$$

Így $n_0 a_{n_0} \geq (2+\varepsilon)(S_0 + a_0)$, ahol $S_0 = \sum\limits_{k=1}^{n_0-1} a_k$. Ebből következik, hogy

$$a_0 \geq \frac{(2+\varepsilon)S_0}{n_0 - 2 - \varepsilon}.$$

Ha a (3.15) összefüggést felírjuk $n = n_0 + 1$-re, akkor az $(n_0+1)a_{n_0+1} > (2+\varepsilon)(S + +a_{n_0} + a_{n_0+1})$ egyenlőséghez jutunk. Ebből az a_0-ra felírt becslés alapján következik, hogy

$$a_{n_0+1} > \frac{(2+\varepsilon)S_0 n_0}{(n_0 - 2 - \varepsilon)(n_0 - 1 - \varepsilon)}.$$

A matematikai indukció módszerével igazolhatjuk, hogy

$$a_{n_0+k} > \frac{(2+\varepsilon)S_0 n_0(n_0+1)\dots(n_0+k-1)}{(n_0-2-\varepsilon)(n_0-1-\varepsilon)\dots(n_0+k-2-\varepsilon)},\ \forall k \geq 0,$$

tehát

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{1}{a_k} + \sum_{k=n_0}^{n} \frac{1}{a_k} \leq M + \frac{n_0-2-\varepsilon}{(2+\varepsilon)S_0} \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

ahol

$$b_k = \frac{(n_0-1-\varepsilon)(n_0-\varepsilon)\dots(n_0+k-2-\varepsilon)}{n_0(n_0+1)\dots(n_0+k-1)},\ \forall k \geq 0.$$

Másrészt $\lim\limits_{k\to\infty} k\left(\frac{b_k}{b_k+1} - 1\right) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{(1+\varepsilon)k}{k+n_0} = 1+\varepsilon > 1$, tehát a Raabe-Duhamel kritérium alapján a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ sor konvergens. Az összehasonlítási kritérium alapján a vizsgált sor is konvergens.

A b) alpont bizonyításához igazoljuk, hogy

$$a_{n_0+k} < \frac{(2-\varepsilon)S_0 n_0(n_0+1)\dots(n_0+k-1)}{(n_0-2+\varepsilon)(n_0-1+\varepsilon)\dots(n_0+k-2+\varepsilon)}, \ \forall k \geq 0,$$

ahol $\varepsilon > 0$ és n_0 rögzített számok.

3.2. Megjegyzések. *Az* $a_n = \begin{cases} k^2, & \text{ha } n{=}2k \\ 2k^2, & \text{ha } n = 2k+1 \end{cases}$ *sorozatra nem létezik a* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n \cdot a_n}{n}}{\sum\limits_{i=1} a_i}$ *határérték, és az alsó, illetve felső határértékek közül az egyik sem teljesíti a kért feltételt, tehát a tétel nem alkalmazható a sorozat vizsgálatára.*

3.20. Tétel. (Kummer[80]) *Ha* $a_n > 0, \ \forall n \geq 1,$ *akkor igazak a következő állítások:*

(a) *ha* $\liminf\limits_{n\to\infty} \left(a_n \dfrac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \right) > 0,$ *akkor a* $\sum u_n$ *sor konvergens;*

(b) *ha* $\sum 1/a_n$ *divergens és* $\limsup\limits_{n\to\infty} \left(a_n \dfrac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \right) < 0,$ *akkor* $\sum u_n$ *divergens.*

A bizonyítás megtalálható [58, 251. oldal]-ban.
$a_n = n$ *esetén a 3.20 tételből visszakapjuk a Raabe-Duhamel kritériumot.*
Gyakran kényelmes a következő kritériumot alkalmazni:

3.21. Tétel. (Gauss[81]) *Ha az* a_n/a_{n+1} *törtet felírhatjuk*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta_n}{n^{1+\lambda}}$$

alakban, ahol $\lambda > 0$ *és* (β_n) *egy korlátos sorozat, akkor* $\alpha > 1$*-re a* $\sum a_n$ *sor konvergál, és* $\alpha \leq 1$*-re divergál.*

Bizonyítás. A feltételek alapján

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \alpha + \frac{\beta_n}{n^\lambda},$$

tehát

$$\lim n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \alpha.$$

A Raabe-Duhamel kritériumból következik a kért állítás. Az $\alpha = 1$ eset tárgyalása megtalálható [58, 256. oldal]-ban. □

[80] Ernest Eduard Kummer, 1810 - 1893
[81] Karl Friedrich Gauss, 1777 - 1855

3.1. Példa. Tekintsük a *hipergeometrikus* sort:

$$1+\frac{\alpha\beta}{1!\,\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\,\gamma(\gamma+1)}+\cdots+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}+\dots,$$

ahol az α,β és γ számok olyanok, hogy minden tört értelmezett legyen. Ha a_n-nel jelöljük az általános tagot, akkor

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}=1+\frac{(\gamma+1-\alpha-\beta)n+\gamma-\beta\alpha}{(\alpha+n)(\beta+n)}=1+\frac{\gamma+1-\alpha-\beta}{n}+\frac{\beta_n}{n^2},$$

ahol

$$\beta_n=\frac{(\gamma-\alpha\beta-\alpha-\beta)n^3-\alpha\beta n^2}{n(\alpha+n)(\beta+n)}.$$

Mivel a (β_n) sorozat tart $\gamma-\alpha\beta-\alpha-\beta$-hoz, a Gauss kritérium alapján $\gamma-\alpha-\beta>0$ esetén a hipergeometrikus sor konvergál, és $\gamma-\alpha-\beta\leq 0$ esetén divergál. $\triangle$

Ha egy sor természetét nem sikerül eldönteni az eddigi kritériumok alapján, akkor próbálkozhatunk újabb kritériumok gyártásával is.

3.3.3 Hatványsorok

Ha (c_n) egy komplex számsorozat, akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n \tag{3.16}$$

sort *hatványsornak* nevezzük. A c_n számokat a sor együtthatóinak nevezzük.

3.22. Tétel. (Cauchy-Hadamard[82]) *Ha* $\sum c_nz^n$ *egy hatványsor és*

$$\alpha=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|},\quad R=\frac{1}{\alpha},$$
$$(\alpha=0\Rightarrow R=+\infty \text{ és } \alpha=\infty\Rightarrow R=0)$$

akkor igaz a következő állítás: A $\sum c_nz^n$ *hatványsor konvergens, ha* $|z|<R$, *és divergens, ha* $|z|>R$.

Megjegyzés. Az R számot a $\sum c_nz^n$ hatványsor *konvergencia sugarának* nevezzük.
Bizonyítás. Az $x_n=c_nz^n$ általános tagú sorra alkalmazzuk a gyökkritériumot:

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|}=|z|\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\frac{|z|}{R}.\quad\square$$

Példák. (a) a $\sum n^nz^n$ sorra $R=0$;

[82]Jacques Solomon Hadamard, 1865-1963

(b) a $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ hatványsor konvergencia sugara $R=+\infty$;

(c) $\sum z^n$-re $R=1$. Ha $|z|=1$, a sor divergens, mivel z^n nem tart 0-hoz, amikor $n\to\infty$;

(d) $\sum \dfrac{z^n}{n}$-re $R=1$. A $|z|=1$ egyenletű kör $z=1$-től különböző pontjaira a sor konvergens és $z=1$ esetén divergens.

(e) $\sum \dfrac{z^n}{n^2}$-re $R=1$. A sor konvergens a $|z|=1$ egyenletű kör minden pontjában, mert összehasonlítható a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ sorral. $\triangle$

3.23. Tétel. *(M. Biernacki*[83] *és J. Krzyż*[84], *[13] vagy M. Vuorinen*[85] *és S. Ponnusamy*[86] *[72]) Az* $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_kx^k$ *és* $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_kx^k$ *hatványsorok konvergensek a* $(0,1)$ *intervallumon és* $a_k>0$, $b_k>0$, *ha* $k\geq 0$. *Ha az* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 1}$ *sorozat növekvő, akkor a* $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ *függvény is növekvő.*

Bizonyítás. Elégséges igazolni, hogy ha $0\leq x<y\leq 1$, akkor

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_kx^k}{\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_kx^k}<\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_ky^k}{\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_ky^k}.$$

Keresztbe szorzunk és csoportosítjuk az m-ed fokú (homogén) tagokat mindkét oldalon. Elégséges igazolni, hogy

$$\sum_{j=0}^{m}a_jb_{m-j}x^jy^{m-j}<\sum_{j=0}^{m}a_jb_{m-j}y^jx^{m-j}.$$

Mindkét összegben a szélektől egyenlő távolságra levő tagokat összeadjuk, és az így kapott kifejezésekről igazoljuk, hogy teljesítik a megfelelő egyenlőséget. Így elégséges igazolni, hogy

$$a_jb_{m-j}x^jy^{m-j}+a_{m-j}b_jx^{m-j}y^j<a_jb_{m-j}x^{m-j}y^j+a_{m-j}b_jx^jy^{m-j}.$$

Ez az egyenlőtlenség

$$0<\left(a_jb_{m-j}-a_{m-j}b_j\right)\left(x^jy^{m-j}-x^{m-j}y^j\right)$$

alakban írható, és a feltétel alapján igaz. $\square$

[83] Mieczysław Biernacki, 1891-1959
[84] Jan G. Krzyż, 1923-
[85] Matti Vuorinen, vuorinen@utu.fi
[86] Saminathan Ponnusamy, samy@iitm.ac.in

3.3.4 Abel-féle összegzés

3.1. Lemma. *Ha* (a_n), (b_n) *két sorozat és*

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k,\ n \neq 0,$$

valamint $A_{-1} = 0$, *akkor* $0 \leq p \leq q$ *esetén*

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{p-1} A_n(b_n - b_{n-1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p. \tag{3.17}$$

A (3.17)-as összefüggést Abel-féle összegzési képletnek (vagy átrendezési képletnek) nevezzük.

3.24. Tétel. (Abel tétele) *Ha az* $(a_n)_n$ *és* $(b_n)_n$ *sorozatok teljesítik a következő feltételeket:*

(i) *a* $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}|$ *sor konvergens;*

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$;

(iii) *létezik* α *úgy, hogy minden* $n \in \mathbb{N}^*$ *és* $m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq n$ *esetén*
$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m| < \alpha,$$

akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konvergens.*

Bizonyítás. Ha $n \in \mathbb{N}^*$ és $m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq n$, akkor az $\alpha_{n,m} = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m$ jelöléssel az Abel-féle átrendezéssel írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} a_n b_n + \cdots + a_m b_m &= \alpha_{n,n} b_n + (\alpha_{n,n+1} - \alpha_{n,n}) b_{n+1} + \cdots + (\alpha_{n,m} - \alpha_{n,m-1}) b_m = \\ &= \alpha_{n,n}(b_n - b_{n+1}) + \cdots + \alpha_{n,m-1}(b_{m-1} - b_m) + \alpha_{n,m} b_m. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Rögzített $\varepsilon > 0$-ra válasszunk olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ küszöbszámot, amely teljesíti a következő két feltételt:

- n_ε legalább akkora, mint a $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}|$ sorra alkalmazott általános Cauchy kritériumból származó $\varepsilon/(2\alpha)$-hoz tartozó küszöbszám;
- minden $n \geq n_\varepsilon$ esetén $|b_n| < \varepsilon/(2\alpha)$.

(Az n_ε megválasztása az első két feltétel alapján lehetséges.)

Így minden $m \geq n > n_\varepsilon$-re

- ha $m = n$, $|a_n b_n| \leq \alpha |b_n| < \alpha[\varepsilon/(2\alpha)] < \varepsilon$;
- ha $m > n$, akkor (3.18) alapján

$$|\sum_{k=n}^{m} a_k b_k| \le \alpha(|b_n - b_{n+1}| + \dots + |b_{m-1} - b_m|) + \alpha|b_m| < \alpha\frac{\varepsilon}{(2\alpha)} + \alpha\frac{\varepsilon}{(2\alpha)} = \varepsilon.$$

Ezekből az egyenlőtlenségekből és az általános Cauchy-féle kritériumból következik a sor konvergenciája. □

Megjegyzés. Ha $b_n \searrow 0$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}|$ sor konvergenciája fölösleges, mert ehhez a sorhoz rendelt n-edik részletösszeg $b_1 - b_{n+1}$, és ez tart b_1-hez. △

3.25. Tétel. (Dirichlet[87] tétele) *Ha*

(i) *a* $\sum a_n$ *sor* A_n *részletösszegeinek sorozata korlátos;*

(ii) $b_0 \ge b_1 \ge b_2 \ge \dots;$

(iii) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0,$

akkor $\sum a_n b_n$ *konvergens.*

Bizonyítás. A előbbi megjegyzés következménye. □

3.26. Tétel. (Leibniz[88]) *Ha*

(i) $|c_1| \ge |c_2| \ge \dots;$

(ii) $c_{2m-1} \ge 0,\ c_{2m} \le 0,\ m = 1, 2, \dots;$

(iii) $\lim_{n\to\infty} c_n = 0,$

akkor $\sum c_n$ *konvergens.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 3.25-ös tételt az $a_n = (-1)^{n+1}$ és $b_n = |c_n|$ sorozatokra. □

Megjegyzés. A Leibniz tételben a $(|c_n|)$ sorozat monotonitása lényeges feltétel. Az

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{3^n} + \dots.$$

sor nem konvergens. △

3.2. Példa. *Ha* $p > 0$, *az*

$$1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n^p} + \dots$$

sor konvergens. $p = 1$*-re az 1.10-es következmény alapján*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \dots = \ln 2. \quad \triangle \tag{3.19}$$

[87] Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805-1859

[88] Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716

3.27. Tétel. *Ha a* $\sum c_n z^n$ *hatványsor konvergencia sugara* 1 *és* $c_0 \geq c_1 \geq c_2 \dots,$ $\lim_{n\to\infty} c_n = 0,$ *akkor a* $\sum c_n z^n$ *sor konvergens, minden* $z \in \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\} \setminus \{1\}$ *-re.*

Bizonyítás. Az $a_n = z^n,$ $b_n = c_n$ sorozatokra alkalmazhatjuk a 3.25-ös tételt, mert

$$|A_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} z^k\right| = \left|\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\right| \leq \frac{2}{|1 - z|},$$

ha $|z| = 1$ és $z \neq 1.$ $\square$

3.3.5 Abszolút konvergens és feltételesen konvergens sorok

A

$$\sum a_n \tag{3.20}$$

komplex számokból alkotott sort *abszolút konvergensnek* nevezzük, ha a

$$\sum |a_n| \tag{3.21}$$

sor konvergens.

3.28. Tétel. *Ha a* (3.21) *sor konvergens, akkor a* (3.20) *sor is konvergens.*

Bizonyítás. Az általános Cauchy-féle kritériumot használjuk. Rögzített $\varepsilon > 0$-ra létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ küszöbszám úgy, hogy minden $n \geq n_\varepsilon$ és $n \geq m$ esetén

$$|\sum_{k=n}^{m} |a_k|\,| = \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon.$$

De

$$|\sum_{k=n}^{m} a_k| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon,$$

tehát a 3.1-es tétel alapján a (3.20) sor konvergens. $\square$

Megjegyzések. Látható, hogy minden pozitív tagú konvergens sor abszolút konvergens, de nem minden konvergens sor abszolút konvergens. Például a (3.19)-es sor konvergens, de nem abszolút konvergens. $\triangle$

A (3.20) sort *feltételesen konvergensnek* nevezzük, ha a a sor konvergens, de a tagok abszolútértékéből képezett (3.21) sor divergens.

A komplex számokból képezett véges összegek egyik fontos tulajdonsága a kommutativitás. A következő példa mutatja, hogy tetszőleges sorok esetén a tagok sorrendjének felcserélésével megváltozhat a határérték. Tekintsük a (3.19)-es konvergens sort:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} \dots.$$

Láttuk, hogy ennek a sornak az összege $\ln 2$.

Rendezzük át a sort úgy, hogy minden pozitív tag után két negatív tag következzen (és utána a következő pozitív tag). Így a

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)+\dots \tag{3.22}$$

sorhoz jutunk. Ha S_n a (3.22) sor n-edik részletösszege, akkor

$$\begin{aligned} S_{3n}=&\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\\ =&\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}s_{2n}, \end{aligned}$$

ahol (s_n) az eredeti sor részletösszegeinek sorozata. Az előbbiek alapján

$$S_{3n}=\frac{1}{2}s_{2n}, \tag{3.23}$$

tehát az

$$S_{3n-1}=\frac{1}{2}s_{2n}+\frac{1}{4n} \quad \text{és} \quad S_{3n-2}=\frac{1}{2}s_{2n}+\frac{1}{4n-2} \tag{3.24}$$

összefüggések alapján

$$\lim_{n\to\infty}S_{3n}=\lim_{n\to\infty}S_{3n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{3n-2}=\frac{1}{2}s_{2n}.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy az átrendezett (3.22)-es sor összege $\ln 2/2$.

A következő tételek arra vonatkoznak, hogy milyen feltétel biztosítja a tagok átrendezhetőségét a határérték megváltoztatása nélkül.

3.29. Tétel. (Cauchy tétele az abszolút konvergens sorok átrendezhetőségére) *Ha egy abszolút konvergens sor tagjait átrendezzük, egy abszolút konvergens sort kapunk, amelynek ugyanaz az összege, mint az eredeti sornak.*

Bizonyítás. Tekintsük a

$$\sum^{\infty} a_n \tag{3.25}$$

abszolút konvergens sort, és a tagjainak negatív, illetve pozitív részét:

$$a_n^+=\begin{cases} a_n, & a_n\geq 0\\ 0, & a_n<0\end{cases}, \qquad a_n^-=\begin{cases} -a_n, & a_n\leq 0\\ 0, & a_n>0.\end{cases} \tag{3.26}$$

Az előbbi felbontások alapján

$$a_n = a_n^+ - a_n^-. \tag{3.27}$$

Az $a_n^+ \le |a_n|$, illetve $a_n^- \le |a_n|$ egyenlőtlenségek biztosítják a

$$\sum a_n^+ \quad \text{és} \quad \sum a_n^-. \tag{3.28}$$

pozitív tagú sorok konvergenciáját.

Ha $\sum b_n$ a (3.25) átrendezéséből kapott sor, és $\sum b_n^+$, illetve $\sum b_n^-$ a tagok pozitív, illetve negatív részéből kapott sorok, akkor

$$\sum^{\infty} a_n = \sum^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = \sum^{\infty} a_n^+ - \sum^{\infty} a_n^- = \sum^{\infty} b_n^+ - \sum^{\infty} b_n^- = \sum^{\infty} (b_n^+ - b_n^-) = \sum^{\infty} b_n.$$

Az első és az utolsó egyenlőség a felbontások miatt nyilvánvaló, a második és negyedik következik a 3.3-as tételből, a harmadik pedig a 3.8-as tételből. □

3.1. Következmény. *Ha a* $\sum a_n$ *sor abszolút konvergens, akkor a* $\sum a_n^+$ *és* $\sum a_n^-$ *sorok is abszolút konvergensek.*

Ennek a tulajdonságnak a fordítottja is igaz, mert két abszolút konvergens pozitív tagú sor különbsége is abszolút konvergens (lásd a 3.3-as tételt).

3.2. Következmény. *Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a* $\sum a_n$ *sor abszolút konvergens legyen az, hogy a belőle származtatott* (3.28)*-as sorok abszolút konvergensek legyenek.*

3.2. Lemma. *Ha a* $\sum a_n$ *sor konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor a* (3.28)*-ban megjelenő sorok divergensek, és* $a_n^+ \to 0$, *illetve* $a_n^- \to 0$.

Bizonyítás. A 3.2-es következmény alapján a (3.28)-ban megjelenő sorok közül legalább az egyik divergens. Feltételezhetjük, hogy $\sum a_n^+$ divergens. Mivel $a_n^+ \ge$ ≥ 0, $\forall n \ge 0$, $\sum a_n^+ = \infty$. Az

$$\sum^{n} a_k^- = \sum^{n} a_k^+ - \sum^{n} a_k \tag{3.29}$$

egyenlőség jobb oldala végtelenhez tart, tehát a bal oldal sem konvergens. Így a (3.28)-ban megjelenő mindkét sor divergens. Másrészt az $(a_n^{\pm})$ sorozat tart 0-hoz, mert a $\sum a_n$ sor konvergens, tehát a lemma bizonyítása teljes. □

3.30. Tétel. (Konvergens, de nem abszolút konvergens sorok átrendezése, Riemann[89]) *Ha a* $\sum_0^\infty a_n$ *és* $\sum_0^\infty b_n$ *divergens sorok általános tagja pozitív és* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, *akkor minden* $s \in [-\infty, \infty]$*-re szerkeszthetünk olyan*

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1 + \dots + a_{m_1} - b_0 - b_1 - \dots - b_{n_1} + \\ &+ a_{m_1+1} + a_{m_1+2} + \dots + a_{m_2} - b_{n_1+1} - b_{n_1+2} - \dots - b_{n_2} + \dots \end{aligned} \tag{3.30}$$

[89]Georg Frederik Bernhard Riemann, 1826-1866

sort, amely a $\sum_0^\infty a_n$ *és* $\sum_0^\infty b_n$ *sorok minden tagját pontosan egyszer tartalmazza, és amelynek az összege* s*.*

Bizonyítás. Ha $s \in \mathbb{R}$, akkor az $n_1,\ n_2,\dots$ és $m_1,\ m_2,\dots$ indexeknek rendre azt a legkisebb természetes számot választjuk, amelyre

(i) $\alpha_1 = \sum_0^{n_1} a_k > s$,

(ii) $\alpha_2 = \alpha_1 - \sum_0^{m_1} b_k < s$,

(iii) $\alpha_3 = \alpha_2 + \sum_{n_1+1}^{n_2} b_k > s$,

(iv) $\alpha_4 = \alpha_3 - \sum_{m_1+1}^{m_2} b_k < s,\ \dots.$

A p-edik lépésben megválaszthatjuk az n_p és m_p indexeket úgy, hogy

($\mathrm{i_p}$) $\alpha_{2k-1} = \alpha_{2k-2} + \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} a_j > s$;

($\mathrm{ii_p}$) $\alpha_{2k} = \alpha_{2k-1} - \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} b_j < s$.

Így az (α_n) sorozat s-hez tart és teljesíti a kért feltételeket.

Ha $s = +\infty$, akkor a (i), (ii), (iii), $\dots$ egyenlőtlenségek jobb oldalán s-et kicseréljük tetszőleges divergens sorozat elemeire. □

3.3. Következmény. *Ha a* $\sum a_n$ *sor konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor tetszőleges* $s \in [-\infty, \infty]$ *esetén az eredeti sor újrarendezhető úgy, hogy az újrarendezett sor összege* s *legyen.*

Bizonyítás. A $\sum a_n$ sort (3.26)-nak megfelelően felbontjuk a $\sum a_n^+$ és $\sum a_n^-$ részekre, és alkalmazzuk a 3.2-es lemmát, valamint a 3.30-as tételt. □

3.3.6 A Riemann-féle $\zeta(s)$ függvény

A *zéta függvényt* Euler vezette be, valószínűleg számelméleti problémák tanulmányozása kapcsán. A

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{3.1}$$

sor konvergens, ha s egy komplex szám, amelyre $\mathrm{Re}(s) > 1$. Ez következik a valós számsorok tulajdonságaiból, mert a $\mathrm{Re}(s) > 1$ esetén a (3.1) jobb oldalán álló sor abszolút konvergens is. A $\zeta(s)$ értékeit páros s esetén ki lehet számolni. Például a $\zeta(2) = \pi^2/6$ és $\zeta(4) = \pi^4/90$ értékeket még Euler kiszámolta. Páratlan s-re megoldatlan probléma, hogy $\zeta(s)$ irracionális-e vagy sem. 1978-ban R. Apery[90] igazolta, hogy $\zeta(3)$ irracionális. 2001-ben W. Zubilin[91] igazolta, hogy a $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ és

[90]Roger Apery, 1916-1994

[91]Wadim Zubilin, http://wain.mi.ras.ru/

$\zeta(11)$ számok közül legalább az egyik irracionális. Érdekességként megemlítjük, hogy ehhez a függvényhez fűződik az egyik leghíresebb megoldatlan probléma is, a Riemann sejtés. A ζ függvényt a (3.1) összefüggéssel értelmezett függvény analitikus meghosszabbításaként értelmezzük tetszőleges s komplex számokra is. Az így kapott függvénynek triviális zérushelyei az $x_k = -2k+1$, $\forall k \geq 1$ számok. A Riemann sejtés azt állítja, hogy minden nem triviális zérushely valós része $\frac{1}{2}$.

3.10. Alkalmazás. *Számítsuk ki, hogy mennyi a valószínűsége annak, hogy két véletlenszerűen választott természetes szám relatív prím legyen?*

Megoldás. Válasszunk ki véletlenszerűen két számot (m-et és n-et) az $[1, N]$ intervallumból. Megvizsgáljuk, hogy mennyi a valószínűsége (P_N) annak, hogy $(m, n) = 1$, majd kiszámítjuk az így kapott P_N határértékét, ha $N \to \infty$. Ha az N-nél nem nagyobb prímszámok $p_1, p_2, \ldots, p_k$, akkor a vizsgált X esemény komplementer eseménye előállítható

$$\overline{X} = \cup_{j=1}^{k} (A_j \cap B_j)$$

alakban, ahol A_j azt jelenti, hogy az m osztható p_j-vel, és B_j azt, hogy az n osztható p_j-vel. A két szám kiválasztására pontosan N^2 lehetőség van, és tetszőleges $j_1, j_2, \ldots j_l$ esetén az $\cap_{r=1}^{l} (A_{j_r} \cap B_{j_r})$ esemény valószínűsége $\frac{1}{N^2}\left[\frac{N}{p_{j_1} p_{j_2} \ldots p_{j_r}}\right]^2$. A szitaformula alapján írhatjuk, hogy

$$P(\overline{X}) = \sum_{r=1}^{k} (-1)^{r-1} \sum_{p_{j_1} < p_{j_2} < \ldots < p_{j_l}} \frac{1}{N^2} \left[\frac{N}{p_{j_1} p_{j_2} \ldots p_{j_r}}\right]^2,$$

tehát a vizsgált esemény valószínűsége:

$$P_N = 1 + \sum_{r=1}^{k} (-1)^{r} \sum_{p_{j_1} < p_{j_2} < \ldots < p_{j_l}} \frac{1}{N^2} \left[\frac{N}{p_{j_1} p_{j_2} \ldots p_{j_r}}\right]^2.$$

Ez alapján $\lim\limits_{N\to\infty} P_N = 1 + \sum\limits_{r=1}^{\infty} (-1)^r \sum\limits_{p_{j_1} < p_{j_2} < \ldots < p_{j_l}} \left(\frac{1}{p_{j_1} p_{j_2} \ldots p_{j_r}}\right)^2 = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^2}\right)$. Az

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2k} + \ldots$$

egyenlőség ($|x| < 1$) alapján következik, hogy

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p_k^2}\right)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},$$

tehát a keresett valószínűség $\dfrac{6}{\pi^2}$. ♦

3.3.7 Gyakorlatok

3.5. Gyakorlatok. *Tanulmányozd a következő sorok konvergenciáját és számítsd ki a konvergens sorok összegét!*

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n}$; (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)2^n}$;

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$; (iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n}$;

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2 3^n}$; (vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{5^n}$;

(vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$; (viii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)-\cos(n+1)x}{n}$;

(ix) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$; (x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\left(2+\frac{1}{n}\right)$;

(xi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}$; (xii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[3]{n+2}-2\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n})$;

(xiii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+5n+6}{n^2+5n+4}$; (xiv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{\sqrt{(n+1)^2-1}-\sqrt{n^2-1}}{n(n+1)}$;

(xv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\sin\frac{\pi}{n},\ p\in\mathbb{R}$; (xvi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}3^n}$;

(xvii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n(\ln^4 n+1)}$; (xviii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

3.6. Gyakorlatok. Határozd meg a következő hatványsorok konvergencia sugarát:

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$; (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n}}$;

(iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{5^n}$; (iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$;

(v) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n3}}{3^{n^3}}$; (vi) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n x^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}$;

(vii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}$; (viii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}5^n(n^2+1)(x+2)^{2n}$;

(ix) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}\left(\frac{x-2}{3}\right)^n$; (x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n},\quad a>0,\ b>0$;

3.4 Függvénysorok

Egy tetszőleges $(f_n)_{n\geq 1}$ függvénysorozat esetén ($f_n : A \to \mathbb{R}$) értelmezzük az

$$s_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x)$$

sorozatot. Az $(f_n)_{n\geq 1}$ függvénysorozathoz rendelt *függvénysor* alatt az $((f_n)_n, (s_n)_n)$ sorzatpárt értjük. Gyakran láthatjuk az

$$f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) + \ldots,$$

vagy

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \text{vagy} \quad \sum f_n(x) \quad \text{vagy} \quad \sum f_n \tag{4.1}$$

jelölést. Azt mondjuk, hogy az $((f_n)_n, (s_n)_n)$ *sor konvergens* az $x \in A$ pontban, ha az $(s_n(x))$ sorozat konvergens. Ha $s(x)$ az előbbi sorozat határértéke, akkor az

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = s(x)$$

jelölést használjuk, és azt mondjuk, hogy $s(x)$ a *sor összege az x pontban.*

Ugyanezeket a megnevezéseket használjuk akkor is, ha a sorozat indexelése nem 0-tól kezdődik. Az egyszerűség kedvéért általában csak a $\sum f_n$ szimbólummal hivatkozunk a sorra. Ez általában a sor összegét jelöli, de a szövegből mindig egyértelműen kiderül, hogy a sorról vagy a sor összegéről van szó.

A $\sum f_n$ sort *abszolút konvergensnek* nevezzük az $x \in A$ pontban, ha a $\sum f_n(x)$ számsor abszolút konvergens ($\sum |f_n(x)|$ konvergens).

A $\sum f_n$ sort *egyenletesen konvergensnek* nevezzük az A halmazon, ha az (s_n) függvénysorozat egyenletesen konvergens az A halmazon.

A 3.1 tételhez hasonlóan igaz a következő tétel:

4.1. Tétel. (Cauchy) *A $\sum f_n$ függvénysor pontosan akkor egyenletesen konvergens az A halmazon, ha bármely $\varepsilon > 0$-ra létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy*

$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon, \tag{4.2}$$

ha $n > n_\varepsilon$, $p \in \mathbb{N}$ és $x \in A$.

Bizonyítás. Következik a 2.1 tételből. □

Az egyik leggyakrabban használt konvergencia kritérium a következő:

4.2. Tétel. (Weierstrass) *Ha a $\sum f_n$, $f_n : A \to \mathbb{R}$ függvénysorra létezik egy olyan $\sum a_n$ konvergens számsor, amelyre $a_n \geq 0$, $\forall n \geq 1$, és bármely $x \in B \subset A$-ra teljesül az $|f_n(x)| \leq a_n$ egyenlőtlenség, akkor $\sum f_n$ abszolút és egyenletesen konvergens a B halmazon.*

Bizonyítás. Ha $\varepsilon > 0$ rögzített, akkor a $\sum a_n$ konvergenciája alapján létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy bármely $n > n_\varepsilon$ és $p \in \mathbb{N}$-re

$$a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon.$$

Így, ha $n > n_\varepsilon$, $p \in \mathbb{N}$ és $x \in B$, akkor

$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)| \leq a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon.$$

A 4.1 tétel biztosítja a $\sum f_n$ sor abszolút és egyenletes konvergenciáját B-n. $\square$

A 3.25 tétel megfelelője az alábbi tulajdonság.

4.3. Tétel. *Ha az $a_n : A \to [0, \infty[$ és $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ függvényekre teljesülnek az alábbi tulajdonságok:*

(a) $a_n(x) \geq a_{n+1}(x)$, *bármely* $n \in \mathbb{N}$, *és* (a_n) *egyenletesen tart* 0*-hoz* $B \subset A$*-n;*

(b) *létezik* $c > 0$ *úgy, hogy bármely* $n \in \mathbb{N}$ *és* $x \in B$ *esetén* $|f_0(x) + \cdots + f_n(x)| \leq c$,

akkor a $\sum a_n f_n$ *sor egyenletesen konvergens* B*-n.*

Bizonyítás. A 4.1 tételben megfogalmazott Cauchy-féle általános kritériumot használjuk. Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ küszöbszámot.

$$\begin{aligned}
&a_{n+1}(x)f_{n+1}(x) + \cdots + a_{n+p}(x)f_{n+p}(x) = \\
&= a_{n+1}(x)[s_{n+1}(x) - s_n(x)] + \cdots + a_{n+p}(x)[s_{n+p}(x) - s_{n+p-1}(x)] = \\
&= -a_{n+1}(x)s_n(x) + [a_{n+1}(x) - a_{n+2}(x)]s_{n+1}(x) + \ldots \\
&\qquad + [a_{n+p-1}(x) - a_{n+p}(x)]s_{n+p-1}(x) + a_{n+p}(x)s_{n+p}(x).
\end{aligned}$$

A feltételekből következik, hogy tetszőleges $i \in \mathbb{N}$ és $x \in B$ esetén $|s_i(x)| \leq c$ és $a_i(x) \geq a_{i+1}(x) \geq 0$. Így az előbbi átalakításokból következik, hogy

$$\begin{aligned}
&|a_{n+1}(x)f_{n+1}(x) + \cdots + a_{n+p}(x)f_{n+p}(x)| \leq \\
&\leq c\,a_{n+1}(x) + c[a_{n+1}(x) - a_{n+2}(x)] + \cdots + c[a_{n+p-1}(x) - a_{n+p}(x)] + c\,a_{n+p}(x) \leq \\
&\leq 2c\,a_{n+1}(x).
\end{aligned}$$

Másrészt az (a_n) sorozat egyenletesen tart 0-hoz B-n, tehát létezik olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, amelyre $a_n(x) < \varepsilon/(2c)$, ha $n \geq n_\varepsilon$ és $x \in B$. Így bármely $n \geq n_\varepsilon$ és bármely $x \in B$-re

$$|a_{n+1}(x)f_{n+1}(x) + \cdots + a_{n+p}(x)f_{n+p}(x)| < \varepsilon. \quad \square$$

3.5 Kitűzött feladatok

1. Bizonyítsd be, hogy ha az $(a_n)_{n\geq 1}$ és $(b_n)_{n\geq 1}$ sorozatokra $\lim\limits_{n\to\infty} = a$, $b_n \geq 0$, $\forall n \geq 1$, és $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_{n+k} = b$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{n+k} b_{n+k} = ab$.

   Alkalmazás. Bizonyítsd be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin \frac{\pi}{n+k} = \pi \ln 2$.

2. Bizonyítsd be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ és számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right)$ határértéket.

3. Az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozatot az
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(x_n + n) = \gamma$$
egyenlőséggel értelmezzük.
   a) Bizonyítsd be, hogy $\frac{1}{2} + \frac{1}{24(n+1)} < x_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{24n}$;
   b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(x_n - \frac{1}{2}\right)$ határértéket!

4. Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n \sqrt[n]{n!} - (n+1) \sqrt[n+1]{(n+1)!} \right)$ határértéket!

5. (Tiberiu Popoviciu[92]) Tekintsük a $P = a_0 X^m + a_1 X^{m-1} + \ldots + a_{m-1} X + a_m$, $P \in \mathbb{R}[X]$ m-ed fokú polinomot, amelyre $P(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ és $a_0 > 0$. Bármely $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ esetén értelmezzük az
$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P(n) \text{ és } G_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} P(k)}$$
sorozatokat. Bizonyítsd be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_n}{G_n} = \frac{e^m}{m+1}$.

6. (Tóth László[93]) Bizonyítsd be, hogy
$$\frac{1}{2n + \frac{2}{5}} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n - \gamma < \frac{1}{2n + \frac{1}{3}}, \ \forall n \geq 1.$$

7. Határozd meg annak az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozatnak az általános tagját, amelyre $x_0 = 1$, $x_1 = 3$ és
$$x_{n+1} = \frac{2n+3}{n+2} \left(x_n + 2\frac{2n+1}{n+1} x_{n-1} \right), \ \forall n \geq 1.$$

[92] 1906-1975
[93] ltoth@ttk.pte.hu

8. (András Szilárd) Az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat teljesíti az $x_{n+2} = 2x_{n+1} + n(n+1)x_n$ rekurziót és a $0 < 3x_1 \leq 2x_2 \leq 4x_1$ kezdeti feltételeket. Bizonyítsd be, hogy

   a) a $z_n = \frac{x_{n+1}}{n\cdot x_n}$, $\forall n \geq 1$ sorozatra teljesülnek a $\frac{2k+1}{2k} \leq z_{2k}$ és $z_{2k-1} \leq \frac{2k}{2k-1}$ egyenlőtlenségek;

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{x_n}}{n} = \frac{1}{e}$.

9. Bizonyítsd be, hogy $p < \frac{1}{2} \leq q$ esetén
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+q}.$$

10. Tekintsük az $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot n \cdot \frac{2n+2}{2n+1}$ és $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot n\cdot \frac{2n+1}{2n}$ sorozatokat $(\,n \geq 1\,)$.

    a) Bizonyítsd be, hogy
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left[1-\frac{1}{(n+2)^2}\right]^n \cdot \frac{(2n+1)(n+2)^2}{(2n+3)(n+1)^2} \text{ és}$$
$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right]^n \cdot \frac{(2n+1)(n+1)^2}{(2n+3)(n^2+2n)^2};$$

    b) Newton binomiális kifejtésének segítségével (az első négy tag felhasználásával az u_n sorozatra, és az első három tag felhasználásával a v_n sorzatra) igazold, hogy az $(u_n)_{n\geq 1}$ sorozat szigorúan növekvő és a $(v_n)_{n\geq 1}$ sorozat szigorúan csökkenő.

    c) Az előbbi sorozatok segítségével igazold, hogy
$$\frac{e}{2n+2} < e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{e}{2n+1} \qquad \text{és}$$
$$\frac{e}{2n+1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - e < \frac{e}{2n}.$$

11. Bizonyítsd be, hogy
$$\frac{2}{2n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{2n+1}{2n(n+1)},\ \forall n \geq 2.$$

12. Bizonyítsd be, hogy a $\{\sin n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ halmaz torlódási pontjainak halmaza a $[-1, 1]$ intervallum.

13. Az $(a_n)_{\geq 1}$ sorozatra $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a + 3 = 24$ és
$$a_n = \frac{6a_{n-1}^2 a_{n-3} - 8a_{n-1}a_{n-2}^2}{a_{n-2}a_{n-3}}.$$

    Bizonyítsd be, hogy $a_n \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq 1$ és $a_n \vdots n$, $\forall n \geq 1$.

14. (Sándor József[94]) Bizonyítsd be, hogy ha

    (a) $x_n \in \mathbb{N},\ \forall n \geq 1$;

    (b) létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $x_n \leq n,\ \forall n \geq n_0$;

    (c) $x_n < n-1$ végtelen sok n-re;

    (d) $x_n > 0$ végtelen sok n-re,

    akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n!}$ sor összege irracionális.

15. (Sándor József) Bizonyítsd be, hogy ha az $(a_n)_{n\geq 1}$ és $(b_n)_{n\geq 1}$ sorozatok tagjai természetes számok és

    (a) $a_n > 0$ végtelen sok n-re;

    (b) $b_n \geq 2,\ \ 0 \leq a_n \leq b_n - 1,\ \forall n \geq 1$;

    (c) létezik szigorúan növekvő $(i_n)_{n\geq 1}$ sorozat, amelyre

    $$\lim_{n\to\infty} b_{i_n} = \infty \text{ és } \lim_{n\to\infty} \frac{a_{i_n}}{b_{i_n}} = 0,$$

    akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_1 b_2 \ldots b_n}$ sor összege irracionális.

16. Bizonyítsd be, hogy ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens és az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat csökkenő, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0$.

17. (András Szilárd) Adott az $N = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$ természetes szám. Bizonyítsd be, hogy végtelen sok olyan p prímszám van, amelyből „kivágható” az N (vagyis amely tartalmazza az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számjegyeket ebben a sorrendben).

18. Bizonyítsd be, hogy ha az $(a_n)_{n\geq 1}$ és $(b_n)_{n\geq 1}$ pozitív tagú sorokra $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} = 0$, akkor a $c_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}$ sorozat is nullához tart.

19. A $(B_n)_{n\geq 0}$ Bernoulli számokat az

    $$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k x^k}{k!}$$

    egyenlőséggel értelmezzük.

[94] jsandor@math.ubbcluj.ro

(a) Bizonyítsd be, hogy az $S_p(n) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} k^p$ összeg felírható

$$S_p(n) = \sum_{k=0}^{p} \frac{B_k}{k!} \frac{p!}{(p+1-k)!} n^{p+1-k}$$

alakban.

(b) Bizonyítsd be, hogy

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}(-1)^{n+1}B_{2n}}{2(2n)!}.$$

20. Bizonyítsd be, hogy az $1 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ és $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ sorok divergensek, és a szorzatuk konvergens.

4. Fejezet

Határértékek és folytonosság

A káosz akkor keletkezik,
amikor a világ az embereknél
gyorsabban változik.

Ebben a fejezetben a folytonos függvények néhány alaptulajdonságát ismertetjük, és megvizsgálunk néhány szűkebb (Lipschitz tulajdonságú függvények), illetve tágabb (Darboux tulajdonságú függvények) függvényosztályt is.

4.1 Határértékek

4.1.1 Függvényhatárértékek

Ebben a fejezetben általában X és Y metrikus teret jelöl, $\emptyset \neq E \subset X$ tetszőleges halmazt, $f : E \to Y$ egy leképezést és p az E halmaz egy torlódási pontját. Azt mondjuk, hogy az *f határértéke a p pontban q* (vagy *$f(x)$ tart q-hoz, ha x tart p-hez*), ha minden $\varepsilon > 0$-ra létezik $\delta(= \delta(\varepsilon, p)) > 0$ úgy, hogy

$$\rho(f(x), q) < \varepsilon, \tag{1.1}$$

ha $x \in E$ és

$$0 < \rho(x, p) < \delta. \tag{1.2}$$

Általában az

$$f(x) \to q, \quad \text{ha} \quad x \to p$$

vagy

$$\lim_{x \to p} f(x) = q \tag{1.3}$$

jelölést használjuk.

Megjegyzés. Látható, hogy $p \in X$ és $q \in Y$, de nem szükséges, hogy $p \in E$ is teljesüljön. Sőt, $p \in E$ esetén is előfordulhat, hogy $f(p) \neq \lim_{x \to p} f(x)$. $\triangle$

Az előbbi értelmezést sorozatok vagy környezetek segítségével is megfogalmazhatjuk.

1.1. Tétel. (Heine) *A*

$$\lim_{x\to p} f(x) = q \tag{1.4}$$

egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha

$$\lim_{n\to\infty} f(p_n) = q, \tag{1.5}$$

minden olyan $(p_n)_n$ *sorozatra, amelynek tagjai* E*-ben vannak és*

$$p_n \neq p, \quad \lim_{n\to\infty} p_n = p. \tag{1.6}$$

Bizonyítás. Feltételezzük, hogy (1.4) teljesül, (p_n) egy tetszőleges sorozat E-ben, amelyre teljesül (1.6) és $\varepsilon > 0$ rögzített. Az $(f(p_n))$ sorozat konvergenciája alapján létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $\rho(f(x), q) < \varepsilon$, ha $x \in E$ és $0 < \rho(x, p) < \delta$. De a (p_n) sorozat konvergenciája alapján létezik n_ε úgy, hogy $n \geq n_\varepsilon$ esetén $0 < \rho(p_n, p) < \delta$. Így, $n \geq n_\varepsilon$-re $\rho(f(p_n), q) < \varepsilon$, tehát (1.5) teljesül.

A fordított implikációt a lehetetlenre való visszavezetés módszerével igazoljuk. Feltételezzük, hogy (1.4) nem igaz. Így létezik olyan $\varepsilon > 0$, amelyre minden $\delta > 0$ esetén létezik $x \in E$ (ez függhet δ-tól) úgy, hogy $\rho(f(x), q) > \varepsilon$ és $0 < \rho(x, p) < \delta$. Minden $n \in \mathbb{N}^*$-ra a $\delta_n = 1/n$-hez tartozó pontot jelöljük p_n-nel. Az így szerkesztett sorozat teljesíti (1.6)-ot, és nem teljesíti (1.5)-öt, tehát ellentmondáshoz jutunk. Ez alapján a fordított implikáció is igaz. □

1.1. Következmény. *Ha* f*-nek van határértéke* p*-ben, akkor a határérték egyértelmű.*

Bizonyítás. Az 1.1-es tétel (b) alpontjából (lásd a 85. oldalt) és az előbbi 1.1-es tételből következik. □

1.2. Tétel. (Cauchy) *Ha* (X, d), (Y, ρ) *metrikus terek,* $\emptyset \neq E \subset X$, $f : E \to Y$, p *az* E *halmaz egy torlódási pontja és* (Y, ρ) *teljes metrikus tér, akkor az (1.4) egyenlőség teljesülésének szükséges és elégséges feltétele az, hogy bármely* $\varepsilon > 0$*-ra létezzen a* p*-nek olyan* V *környezete, amelyre tetszőleges* $u, v \in V \cap E \setminus \{p\}$ *esetén*

$$\rho_Y(f(u), f(v)) < \varepsilon. \tag{1.7}$$

Bizonyítás. Ha (1.4) teljesül, akkor bármely $\varepsilon > 0$-ra létezik olyan V környezete a p-nek, amelyre $t \in V \cap E \setminus \{p\}$ esetén $\rho(f(t), q) < \varepsilon/2$. Így $u, v \in V \cap E \setminus \{p\}$ esetén

$$\rho(f(u), f(v)) \leq \rho(f(u), q) + \rho(f(v), q) \leq \varepsilon,$$

tehát (1.7) teljesül.

A fordított irányú bizonyításhoz tekintsük az $\varepsilon > 0$ tetszőleges számot. A tulajdonság alapján létezik a p-nek olyan V környezete, amelyre $u, v \in V \cap E \setminus \{p\}$ esetén teljesül az (1.7) egyenlőtlenség. Ha (x_n) egy p-hez tartó sorozat E-ben, amelyre $x_n \neq p$, $\forall n \geq 1$, akkor létezik olyan n_ε küszöbszám, amelyre $x_n \in V \cap E \setminus \{p\}$, ha $n \geq n_\varepsilon$. Az (1.7) egyenlőtlenség alapján $\rho(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$, ha $n, m \geq n_\varepsilon$. Eszerint az $(f(x_n))$ sorozat egy Cauchy-féle sorozat az (Y, ρ) teljes metrikus térben, tehát konvergens. Jelöljük a határértékét q-val. Így a Heine tétel (1.1 tétel) alapján következik, hogy $\lim_{x\to p} f(x) = q$ (határértékre térünk az egyenlőtlenségben). □

Ha $Y = \mathbb{R}^k$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g : E \to \mathbb{R}^k$, akkor értelmezhetjük az $f + g$, $\lambda \cdot f$ és $\langle f, g\rangle$ függvényeket az

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x), \quad \langle f, g\rangle(x) = \langle f(x), g(x)\rangle, \quad x \in E$$

összefüggésekkel. A következő tétel azt mutatja, hogy ezek a műveletek felcserélhetők a határértékkel, ha nem vezetnek határozatlan esethez.

1.3. Tétel. *Ha X egy metrikus tér, $E \subset X$, $p \in E'$, $f, g : E \to \mathbb{R}^k$ és*

$$\lim_{x\to p} f(x) = A, \qquad \lim_{x\to p} g(x) = B,$$

akkor

(a) $\lim\limits_{x\to p}(f+g)(x) = A + B$;

(b) $\lim\limits_{x\to p}\langle f, g\rangle(x) = \langle A, B\rangle$;

(c) $Y = \mathbb{R}$ *és* $B \neq 0$ *esetén* $\lim\limits_{x\to p}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{A}{B}$.

Bizonyítás. Az 1.1-es és 1.3-as (lásd 87. oldalt) tételből következik. □

Példák. (1)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{1.8}$$

(2)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{1.9}$$

(3)

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e. \tag{1.10}$$

(4) Ha $a > 0$, akkor

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a. \tag{1.11}$$

(5) Ha a, b, c, és d pozitív számok, akkor

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{c^x-d^x}=\frac{\ln\frac{a}{b}}{\ln\frac{c}{d}}. \tag{1.12}$$

Megoldás. (1) Ha (n_k) egy növekvő és divergens sorozat, amelynek tagjai természetes számok, akkor mivel

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,$$

minden $\varepsilon>0$-ra létezik $n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$ úgy, hogy $n_k>n_\varepsilon$ esetén

$$\left|e-\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\right|<\varepsilon.$$

Ebben az esetben (1.8) teljesül.

Ha (x_n) egy növekvő és divergens valós számsorozat és $n_k=[x_k]$ (az x_k egész része), akkor (n_k) és (n_k+1) szintén növekvő és divergens sorozatok. Az

$$1+\frac{1}{n_k+1}<1+\frac{1}{x_k}\le 1+\frac{1}{n_k}$$

egyenlőtlenségek alapján

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}<\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}\le\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}.$$

Az előbbi egyenlőtlenségben a két szélső sorozat e-hez tart, tehát a középső sorozatnak is van határértéke, és ez szintén e. Ha a (p_n) sorozat nem növekvő, akkor a $p_n\to\infty$ egyenlőség alapján létezik szigorúan növekvő divergens (p_{n_k}) részsorozata, és bármely k-ra a $\{p_n|p_n\le p_{n_k}\}$ halmaz véges. Ebből következik, hogy ha a (p_{n_k}) sorozatra adódó küszöbszámot növeljük egy véges értékkel (az előbbi halmaz számosságával), akkor a (p_n) sorozatra kapunk egy küszöbszámot. Így az (1.8) egyenlőség teljesül (az 1.1 tétel alapján).

(2) A $z=-1-x$ változócserével $x\to-\infty$ alapján $z\to\infty$, tehát

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z+1}=e.$$

(3) A $z=1/x$ változócserével (1.8) és (1.9) alapján következik a kívánt egyenlőség.

(4) Az $a^x-1=y$ jelöléssel, ha $x\to 0$, akkor $y\to 0$. Így

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln\dfrac{y+1}{\ln a}}=\ln a\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(y+1)}$$
$$=\ln a\cdot\lim_{y\to 0}\frac{1}{\ln(1+y)^{1/y}}=\ln a.$$

(5) A határértékekkel végezhető műveletek alapján

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{c^x-d^x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{a^x-1}{x}-\dfrac{b^x-1}{x}}{\dfrac{c^x-1}{x}-\dfrac{d^x-1}{x}}=\frac{\ln a-\ln b}{\ln c-\ln d}.\quad\triangle$$

4.1.2 Jobboldali és baloldali határértékek

Ha $f:]a,b[\to Y$, ahol $]a,b[\subset\mathbb{R}$ és $a\le x<b$, akkor azt mondjuk, hogy f *-nek jobboldali határértéke* x-ben a $q\in Y$, ha $f(t_n)\to q$, amikor $n\to\infty$ minden (t_n) sorozatra, amely teljesíti a $t_n\in]x,b[$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ és $t_n\to x$ feltételeket. Ennek jelölésére az

$$f(x+)=q$$

egyenlőséget használjuk. Gyakran találkozhatunk az alábbi jelölésekkel is:

$$\lim_{t\to x,\,t>x}f(x)=\lim_{\substack{t\to x\\ t>x}}f(x)=\lim_{t\downarrow x}f(x)=f(x+).$$

$a<x\le b$ esetén azt mondjuk, hogy q az f-nek a *baloldali határértéke* p-ben, ha $f(t_n)\to q$, amikor $n\to\infty$ minden (t_n) sorozatra, amely teljesíti a $t_n\in]a,x[$, $\forall n\in$ $\in\mathbb{N}^*$ és $t_n\to x$ feltételeket. Ennek jelölésére az

$$f(x-)=q$$

egyenlőséget, vagy a következő szimbólumok valamelyikét használjuk:

$$\lim_{t\to x,\,t<x}f(x)=\lim_{\substack{t\to x\\ t<x}}f(x)=\lim_{t\uparrow x}f(x)=f(x-).$$

1.4. Tétel. *Ha* $I=]a,b[$ *egy nemüres intervallum,* $f:I\to\mathbb{R}$ *és* $p\in I$, *akkor igaz az alábbi ekvivalencia:*

$$\lim_{x\to p}f(x)=q\iff f(p-)=f(p+)=q.$$

Bizonyítás. A szükségesség az értelmezések alapján nyilvánvaló.

Ha $f(x-)=f(x+)=q$, akkor az 1.1-es tétel alapján elégséges tetszőleges I-beli (x_n) sorozatra igazolni, hogy ha $x_n\to p$, akkor $f(x_n)\to q$. Ha az x_n sorozatnak véges sok p-nél kisebb, vagy véges sok p-nél nagyobb tagja van, akkor az $f(x-)=f(x+)=q$ egyenlőtlenség alapján világos, hogy $f(x_n)\to q$. Ha p mindkét oldalán végtelen sok tagja van az (x_n) sorozatnak, akkor ez a sorozat két diszjunkt részsorozatra, (y_n)-re és (z_n)-re bontható úgy, hogy $y_n<p\le z_n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. A feltételek alapján $f(y_n)\to q$ és $f(z_n)\to q$, tehát $f(x_n)\to q$. $\square$

4.2 Folytonosság

Ebben a paragrafusban X, Y metrikus terek, $E \subset X$, $p \in E$, és $f : E \to Y$. Az f függvényt *folytonosnak* nevezzük a p pontban, ha minden $\varepsilon > 0$-ra létezik $\delta > 0$ úgy, hogy

$$\rho(f(x), f(p)) < \varepsilon,$$

ha $x \in E$ és $\rho(x, p) < \delta$.

Ha f folytonos az E halmaz minden pontjában, akkor f-et *folytonosnak* nevezzük E-n.

Megjegyzés. Látható, hogy f értelmezett kell legyen a p pontban. Ha p az értelmezési tartomány izolált pontja, akkor f folytonos p-ben. $\triangle$

2.1. Tétel. *Ha p torlódási pontja is E-nek, akkor érvényes a következő ekvivalencia:*

f pontosan akkor folytonos p-ben, ha $\lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$.

Bizonyítás. Ha $\lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$, akkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta(= \delta(\varepsilon, p)) > 0$ úgy, hogy $\rho(f(x), f(p)) < \varepsilon$, ha $0 < \rho(x, p) < \delta$. De $x = p$ esetén a $\rho(f(x), f(p)) < \varepsilon$ egyenlőtlenség teljesül, tehát f folytonos a p-ben. Hasonlóan látható be a másik irányú implikáció is. $\square$

A következő tétel alapján látható, hogy a folytonos függvények halmaza zárt az összetevésre nézve.

2.2. Tétel. *Ha X, Y és Z metrikus terek, $E \subset X$, $f : E \to Y$, $g : f(E) \to Z$, és a $h : E \to Z$ függvény az előbbi két függvény összetettje:*

$$h(x) = g(f(x)), \quad x \in E,$$

akkor igaz a következő állítás:

Ha f folytonos $p \in E$-ben és g folytonos az $f(p) \in Y$-ban, akkor h is folytonos p-ben.

Bizonyítás. Ha $\varepsilon > 0$ rögzített, a g-nek $f(p)$-beli folytonossága alapján létezik $\eta > 0$, amelyre $\rho(y, f(p)) < \eta$ és $y \in f(E)$ esetén

$$\rho(g(y), g(f(p))) < \varepsilon \ .$$

Mivel f folytonos p-ben, létezik olyan $\delta > 0$, amelyre

$$\rho(f(x), f(p)) < \eta,$$

ha $\rho(x, p) < \delta$ és $x \in E$. Így

$$\rho(h(x), h(p)) = \rho(g(f(x)), g(f(p))) < \varepsilon,$$

ha $\rho(x, p) < \delta$ és $x \in E$, tehát h is folytonos p-ben. $\square$

2.1. Példa. Az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

függvény folytonos $\mathbb{R}^2$-en. Ha $(x_0,y_0)\neq(0,0)$, akkor a folytonos függvényekkel végezhető műveletek tulajdonságai alapján f folytonos (x_0,y_0)-ban. Az origó körül érdemes átírni poláris koordinátákra. Az $x=\rho\cos\theta$ és $y=\rho\sin\theta$ összefüggések alapján

$$f(x,y)=\begin{cases}\rho(\cos^3\theta+\sin^3\theta), & \rho\neq 0\\ 0, & \rho=0.\end{cases}$$

Mivel $|\rho(\cos^3\theta+\sin^3\theta)|\le 2\rho$, a függvény folytonos az origóban is, tehát folytonos $\mathbb{R}^2$-n. $\triangle$

2.3. Tétel. (A folytonosság jellemzése) *Az X metrikus teret az Y metrikus térbe képező $f:X\to Y$ függvény pontosan akkor folytonos X-en, ha $f^{-1}(V)$ nyílt halmaz X-ben, az Y minden nyílt V részhalmazára.*

Bizonyítás. Feltételezzük, hogy f folytonos X-en és V egy nyílt részhalmaza Y-nak. Ha $p\in X$, és $f(p)\in V$, akkor létezik $\varepsilon>0$ úgy, hogy $y\in V$, ha $\rho(f(p),y)<\varepsilon$. Mivel f folytonos p-ben létezik $\delta>0$ úgy, hogy $\rho(f(x),f(p))<\varepsilon$, ha $\rho(x,p)<\delta$. Így $x\in f^{-1}(V)$, ha $\rho(x,p)<\delta$, tehát az $f^{-1}(V)$ halmaz nyílt.

A fordított implikáció igazolásához tetszőleges $p\in X$-re és $\varepsilon>0$-ra tekintsük a

$$V=\{y\in Y \mid \rho(y,f(p))<\varepsilon\}$$

nyílt halmazt. A feltétel alapján $f^{-1}(V)$ is nyílt, tehát létezik olyan $\delta>0$, amelyre $x\in f^{-1}(V)$, ha $\rho(p,x)<\delta$. Így $\rho(p,x)<\delta$ esetén $\rho(f(x),f(p))<\varepsilon$, tehát f folytonos p-ben. $\square$

2.1. Következmény. *Az X metrikus teret egy Y metrikus térbe képező függvény pontosan akkor folytonos, ha az Y minden C zárt részhalmaza esetén $f^{-1}(C)$ is zárt.*

Bizonyítás. Az 1.5-ös tétel (lásd a 10. oldalt) (e) alpontjából következik. $\square$

2.4. Tétel. *Ha az f és g komplex értékű folytonos függvények értelmezési tartománya ugyanaz az X metrikus tér, akkor az $f+g$, fg, és f/g ($(g(x)\neq 0$, ha $x\in X)$) függvények is folytonosak X-en.*

Bizonyítás. Az X izolált pontjaiban a tulajdonság teljesül a folytonosság értelmezése alapján. Torlódási pontokban a tulajdonság az 1.3 és 2.1 tételekből következik.

2.5. Tétel. (a) *Tekintsük az* $f_1, \ldots, f_k$ *valós értékű* X*-en értelmezett függvényeket és az* $f : X \to \mathbb{R}^k$

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x)), \quad x \in X$$

összefüggéssel értelmezett függvényt. Az f *pontosan akkor folytonos, ha az* $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ *függvények mindegyike folytonos.*

(b) *Ha* $f : X \to \mathbb{R}^k$ *és* $g : X \to \mathbb{R}^k$ *folytonosak, akkor* $f+g$ *és* $\langle f, g\rangle$ *is folytonos* X*-en.*

Az $f_1, \ldots, f_k$ függvényeket az f *komponenseinek* nevezzük.

Bizonyítás. Az (a) alpont az

$$|f_j(x) - f_j(y)| \le \|f(x) - f(y)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{k} |f_i(x) - f_i(y)|^2\right)^{1/2},$$

$j = 1, \ldots, k$ egyenlőtlenségből következik. A (b) alpont az (a) alpont és az 1.3-as tétel következménye. □

2.6. Tétel. (Weierstrass) *Ha* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *egy folytonos függvény, akkor létezik olyan* (P_n) *polinomsorozat, amely egyenletesen tart* f*-hez. Vagyis bármely* $\varepsilon > 0$*-ra létezik olyan* $P \in \mathbb{R}[X]$ *polinom, amelyre*

$$\|P - f\|_\infty < \varepsilon. \tag{2.1}$$

A tétel gyakorlatilag azt állítja, hogy a polinomok halmaza sűrű a $(\mathrm{C}[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ metrikus térben. Ez a tétel teszi lehetővé azt, hogy speciális polinomosztályok segítségével (differenciál-, integrál-) egyenletek megoldását megközelítsük. Fontossága miatt a tétel mai napig általánosítások és kutatások témája. Az általunk bemutatott bizonyítás S. N. Bernsteintól[95] származik, és az egyenletes folytonosság fogalmát használja. Ezt a 167. oldalon tárgyaljuk.

Az előbbi tételnél egy pontosabb tulajdonság is igaz, ezt tartalmazza a következő tétel:

2.7. Tétel. *Ha* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *páronként különböző pontok az* $[a, b]$ *intervallumban és* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *egy folytonos függvény, akkor létezik olyan* P *polinom, amelynek grafikus képe áthalad az* $(x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ *pontokon és teljesíti a* (2.1) *egyenlőtlenséget.*

Bizonyítás. A 2.6 tétel alapján létezik olyan Q polinom, amelyre $\|Q - f\|_\infty < \varepsilon_1$. A $\lambda_k = f(x_k) - Q(x_k)$, $1 \le k \le n$, jelölésekkel szerkesszük meg az

$$R(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \prod_{i=1,\, i\ne k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \quad \text{és} \quad P(x) = Q(x) + R(x)$$

[95]Sergey Natanovich Bernstein, 1880 - 1968

polinomokat. Így

$$|R(x)| \leq \varepsilon \sup_{a\leq x\leq b} \sum_{k=1}^{n} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \left| \frac{x-x_i}{x_k-x_i} \right| = A\varepsilon,$$

$$|P(x)-f(x)| = |Q(x)+R(x)-f(x)| \leq |Q(x)-f(x)| + |R(x)| \leq (1+A)\varepsilon,$$

tehát $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{1+A}$ választással a (2.1) egyenlőtlenség teljesül. Másrészt $P(x_k) = Q(x_k)+$ $+R(x_k) = Q(x_k) + \lambda_k = f(x_k)$, $\forall 1 \leq k \leq n$. □

2.1. Gyakorlat. (Cauchy-féle függvényegyenlet) Ha a $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény teljesíti a

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \tag{2.2}$$

egyenletet, bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén, akkor f lineáris (létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, amelyre $f(x) = cx$, $\forall x \in \mathbb{R}$).

Megoldás. Az $x = y = 0$ helyettesítés után a $\varphi(0) = 2\varphi(0)$, vagyis $\varphi(0) = 0$ összefüggéshez jutunk. Így az adott egyenletből $y = -x$-re az $f(-x) = -f(x)$ összefüggést kapjuk. Mivel x tetszőleges lehet, az f függvény páratlan. A matematikai indukció módszerével igazolható, hogy

$$\varphi\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k), \ \forall x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}.$$

Így $\varphi(n) = n\varphi(1)$, ha $n \in \mathbb{N}^*$, és a

$$\varphi(1) = \varphi\left(\frac{m}{m}\right) = m\varphi\left(\frac{1}{m}\right)$$

összefüggés alapján

$$\varphi\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m}\varphi(1), \quad m \in \mathbb{N}^*.$$

Ugyanakkor $\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = p\varphi\left(\frac{1}{q}\right)$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, tehát $f(r) = rf(1)$, $\forall r \in \mathbb{Q}$.

Ha $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ egy tetszőleges elem, akkor létezik olyan (q_n) sorozat, amelynek minden tagja racionális szám, és amelyre $q_n \to x$. A φ folytonossága alapján

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(q_n) = \lim_{n\to\infty} q_n\varphi(1) = [\lim_{n\to\infty} q_n]\varphi(1) = x\varphi(1),$$

tehát a $\varphi(1) =: c$ jelöléssel $\varphi(x) = cx$, $\forall x \in \mathbb{R}$. △

2.2. Gyakorlat. Határozzuk meg az összes olyan $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt, amelyre

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) + a, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

ahol a egy rögzített valós szám.

Megoldás. Az $f(t) = \varphi(t) + a$ függvény teljesíti a Cauchy-féle függvényegyenletet, ezért létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, amelyre $f(t) = ct$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Ez alapján $\varphi(x) = cx - a$, $x \in \mathbb{R}$. $\triangle$

2.3. Gyakorlat. Határozzuk meg az összes olyan $\varphi :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ folytonos függvényt, amelyre

$$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad \forall x, y \in]0, \infty[\,. \tag{2.4}$$

Megoldás. Az $u = e^x$, $v = e^y$ és $f(t) = \varphi(e^t)$ helyettesítések segítségével visszavezethetjük a Cauchy függvényegyenletre, mert f is folytonos és teljesíti az $f(u+v) = f(u) + f(v)$ egyenlőséget, minden $u, v \in \mathbb{R}$-re. Így a 2.1-es gyakorlat alapján létezik olyan $a \in \mathbb{R}$, amelyre $f(u) = au$, $\forall u \in \mathbb{R}$. Tehát $\varphi(x) = \log_a x$, $\forall x > 0$. $\triangle$

2.4. Gyakorlat. Határozzuk meg a $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nem identikusan nulla folytonos függvényeket, amelyekre

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Megoldás. $y = x$-re (2.5)-ből következik, hogy $\varphi(2x) = \varphi^2(x) \geq 0$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, tehát φ nem vehet fel negatív értékeket. Ha létezne $x_0 \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\varphi(x_0) = 0$, akkor a

$$\varphi(x) = \varphi(x - x_0 + x_0) = \varphi(x - x_0)\varphi(x_0) = 0$$

egyenlőség alapján φ identikusan nulla volna, tehát φ csak szigorúan pozitív értékeket vehet fel. Így viszont az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\varphi(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$ függvény is folytonos és teljesíti a Cauchy-féle függvényegyenletet. Tehát létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, amelyre $f(x) = cx$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ebből következik, hogy $\varphi(x) = a^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ahol $a = e^c$. $\triangle$

Megjegyzés. Az előbbi függvényegyenletet használhatjuk az exponenciális függvény értelmezésére is, mert a Cauchy függvényegyenlet megoldásához hasonlóan

$$\begin{gathered}
\varphi(n) = \varphi(1 + 1 + \cdots + 1) = \varphi^n(1), \quad n \in \mathbb{N}^*; \\
1 = \varphi(0) = \varphi(1)\varphi(-1); \\
\varphi(-n) = \varphi^n(-1), \quad n \in \mathbb{N}^*; \\
\varphi(1) = \varphi\left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \implies \varphi\left(\frac{1}{n}\right) = [\varphi(1)]^{1/n}, \quad n \in \mathbb{N}^*; \\
\varphi\left(\pm\frac{m}{n}\right) = [\varphi(1)]^{\pm m/n}, \quad m, n \in \mathbb{N}^*; \\
\varphi(r) = [\varphi(1)]^r, \quad r \in \mathbb{Q}.
\end{gathered}$$

Tehát a $\varphi(x) = [\varphi(1)]^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ alakú függvények az egyedüli folytonos függvények, amelyek teljesítik az adott függvényegyenletet. Ez a megközelítés alkalmazható az összes elemi függvény értelmezésére is, sőt a folytonosságot helyettesíthetjük egyéb feltétellel is (pl. monotonitással). $\triangle$

2.5. Gyakorlat. Határozd meg azokat a $\varphi : [0,\infty] \to \mathbb{R}$ nem identikusan nulla folytonos függvényeket, amelyekre

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y), \quad \forall x, y \in]0,\infty[\,. \tag{2.6}$$

Megoldás. Az $x = e^u$, $y = e^v$ és $f(t) = \varphi(e^t)$, $t \in \mathbb{R}$ helyettesítésekkel az $f(u+v) = f(u)f(v)$, $u, v \in \mathbb{R}$ függvényegyenletet kapjuk, tehát a 2.4-es gyakorlat alapján létezik $a \in \mathbb{R}_+$ úgy, hogy $f(t) = a^t$, minden $t \in \mathbb{R}$ esetén. Ebből következik, hogy $\varphi(x) = f(\ln x) = a^{\ln x}$. Az $a = e^\alpha$ jelöléssel a $\varphi(x) = x^\alpha$, bármely $x > 0$ esetén függvényt kapjuk. $\triangle$

2.6. Gyakorlat. Határozzuk meg a $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, amelyekre

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}, 1 + xy \neq 0. \tag{2.7}$$

Megoldás. Tekintsük az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}, \quad f(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$$

segédfüggvényt. Ellenőrizhető, hogy f folytonos és bijektív, tehát minden $x, y \in \mathbb{R} \setminus$ $\setminus \{-1,1\}$-re léteznek és egyértelműen meghatározottak az $u, v \in \mathbb{R}$ számok, amelyekre $x = f(u)$ és $y = f(v)$. Ugyanakkor $1 + xy = 1 + f(u)f(v)$, ahol $1 + xy \neq 0$.

A $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g = \varphi \circ f$ függvény folytonos és $(\varphi \circ f)(u) + (\varphi \circ f)(v) = (\varphi \circ f)(u+v)$, tehát a Cauchy-féle függvényegyenlet megoldása alapján létezik $c \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $(\varphi \circ f)(t) = ct$, minden $t \in \mathbb{R}$-re. Ez alapján

$$\varphi(x) = cf^{-1}(x) = \frac{c}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}. \quad \triangle$$

2.7. Gyakorlat. *Bizonyítsd be, hogy minden $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos és korlátos függvénynek van legalább egy fixpontja ($x \in \mathbb{R}$ fixpont, ha $f(x) = x$).*

Megoldás. A korlátosság alapján létezik $m > 0$ úgy, hogy $|f(x)| \leq m$, minden $x \in \mathbb{R}$-re. A $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - m$, $x \in \mathbb{R}$ segédfüggvény folytonos és $g(m) = f(m) - m \leq 0$, $g(-m) = f(-m) + m \geq 0$, tehát létezik olyan $\xi \in [-m, m]$, amelyre $0 = g(\xi) = f(\xi) - \xi$. $\triangle$

4.2.1 Folytonosság és kompaktitás

Az $f : E \to \mathbb{R}^k$ függvényt *korlátosnak* nevezzük, ha létezik $M > 0$ úgy, hogy $|f(x)| < M$, bármely $x \in E$-re. Látható, hogy ez tulajdonképpen az f képtartományának a korlátosságát jelenti, tehát ha E egy tetszőleges halmaz és (Y, ρ) egy metrikus tér, akkor az $f : E \to Y$ függvény korlátosságán azt értjük, hogy létezik $y \in Y$ és $M > 0$ úgy, hogy $\rho(y, f(x)) < M$, bármely $x \in E$-re. Ha Y normált tér, akkor általában 0-hoz szokás viszonyítani, tehát $y = 0$-t választunk.

2.8. Tétel. *Ha $f : X \to Y$ folytonos függvény, ahol X egy kompakt metrikus tér és Y metrikus tér, akkor $f(X)$ kompakt Y-ban.*

Bizonyítás. Legyen $\{V_\alpha\}$ egy nyílt lefödése az $f(X)$ halmaznak. Mivel f folytonos, az $f^{-1}(V_\alpha)$ halmazok nyíltak (lásd a 2.3-as tételt), tehát az X egy nyílt lefödését alkotják. Mivel X kompakt, kiválasztható egy $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ véges lefödés. De az

$$X \subset f^{-1}(V_{\alpha_1}) \cup f^{-1}(V_{\alpha_2}) \cup \dots \cup f^{-1}(V_{\alpha_n}) \tag{2.8}$$

bennfoglalás és az $f(f^{-1}(E)) = E$, $\forall E \subset Y$ összefüggés alapján

$$f(X) \subset V_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_2} \cup \dots \cup V_{\alpha_n}.$$

Így $f(X)$ tetszőleges nyílt lefödéséből is kiválasztható véges lefödés, tehát $f(X)$ kompakt. □

2.9. Tétel. *Ha f egy X kompakt metrikus teret $\mathbb{R}^k$-ba képez, akkor $f(X)$ zárt és korlátos, tehát f korlátos.*

Bizonyítás. A 2.8-as tétel alapján $f(X)$ kompakt. A 3.13-as tétel (78. oldal) alapján $f(X)$ zárt és korlátos, tehát a korlátos függvények értelmezése alapján f korlátos. □

2.10. Tétel. *Ha f egy X kompakt metrikus téren értelmezett valós értékű függvény és*

$$M = \sup_{p \in X} f(p), \quad m = \inf_{p \in X} f(p),$$

akkor léteznek olyan $p, q \in X$, amelyekre $f(p) = M$ és $f(q) = m$.

Bizonyítás. A 2.9-es tétel alapján $f(X)$ zárt és korlátos, tehát a 2.25-ös tétel (31. oldal) alapján $f(X)$ tartalmazza a szuprémumát és az infimumát.

2.11. Tétel. *Ha az f folytonos és bijektív függvény egy X kompakt metrikus teret egy Y metrikus térbe képez, akkor az $f^{-1} : Y \to X$ inverz függvény is folytonos.*

Bizonyítás. A 2.3-as tételt alkalmazzuk az f^{-1} függvényre. Elégséges igazolni, hogy $f(V)$ nyílt halmaz Y-ban, ha V nyílt X-ben. Ha $V \subset X$ egy rögzített nyílt halmaz, akkor $X \setminus V$ zárt, tehát X kompaktsága alapján kompakt is (lásd a 3.6-os tételt a 76. oldalon). Így az $f(X \setminus V)$ halmaz is kompakt Y-ban, tehát zárt is Y-ban. De f bijektivitásából $f(X \setminus V) = Y \setminus f(V)$, tehát $f(V)$ nyílt. □

2.8. Gyakorlat. *$f : [0,1] \to [0,1]$ folytonos függvényre az $x_{n+1} = f(x_n)$ összefüggéssel értelmezett szukcesszív approximációs sorozat pontosan akkor konvergens, ha*

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0. \tag{2.9}$$

Megoldás. Ha az (x_n) sorozat konvergál x^*-hoz, akkor $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = x^* - x^* = 0$. A fordított implikáció igazolásához feltételezzük, hogy (2.9) teljesül. Mivel az (x_n) sorozat tagjai egy kompakt intervallum elemei, a sorozatnak van legalább egy konvergens részsorozata.

Ha az (x_n) sorozat nem volna konvergens, akkor a sorozat tagjaiból alkotott halmaznak legalább két torlódási pontja kellene legyen. Jelöljük p-vel és q-val ezeket a torlódási pontokat ($p < q$). A feltétel alapján a $]p, q[$ intervallum a sorozatnak végtelen sok elemét tartalmazza (ellenkező esetben a p és q közül valamelyik nem lehetne torlódási pont). Másrészt létezik $x \in]p, q[$ úgy, hogy $f(x) \neq x$, tehát az $\varepsilon = |f(x) - x|/2$ számhoz az f folytonossága alapján létezik olyan $\delta > 0$, amelyre $|f(y)-y| > \varepsilon$, ha $y \in]x-\delta, x+\delta[$. Ugyanakkor ha n elég nagy, akkor $|x_{n+1}-x_n| < 2\delta$ és $|f(x_n) - x_n| = |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$. Így a sorozatnak nem lehet tagja az $]x - \delta, x + \delta[$ intervallumban, és az intervallum hosszának megválasztása alapján az sem lehetséges, hogy $x_n < x-\delta < x+\delta < x_n+1$. Tehát a sorozatnak csak az $]x-\delta, x+\delta[$ intervallum egyik oldalán lehet torlódási pontja. Ez ismét ellentmondás, tehát a sorozat tagjaiból alkotott halmaznak csak egy torlódási pontja van, és ez egyben a sorozat határértéke is. $\triangle$

A matematika több területén (például differenciálegyenletek) fontos, hogy a felhasznált függvényterekben kompaktsági kritériummal rendelkezzünk. $\mathbb{R}^n$-ben láttuk, hogy egy halmaz pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt. A következő tétel hasonló kompaktsági kritérium a folytonos függvények terében.

2.12. Tétel. *(Ascoli[96]-Arzela[97]) A $K \subset C[a,b]$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha korlátos (a $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ metrikus térben) és egyenlően folytonos függvényeket tartalmaz, vagyis bármely $\varepsilon > 0$-ra létezik olyan $\delta > 0$, amelyre $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ ha $x, x' \in [a,b]$, $|x - x'| < \delta$ és $f \in K$.*

Bizonyítás. A következő két állítást igazoljuk:

1. Ha $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ egy sűrű sorozat az $[a,b]$ intervallumban és az $(f_n)_{n\geq 1}$ függvénysorozatra létezik olyan M, amelyre $|f_n(x)| < M$, bármely $n \geq 1$ és bármely $x \in [a,b]$ esetén, akkor a függvénysorozatból kiválasztható egy olyan részsorozat, amely konvergál az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat minden pontján.

2. Ha a $(g_n)_{n\geq 1}$ függvénysorozat egyenlően folytonos függvényekből áll és egy $[a,b]$-ben sűrű H részhalmazon pontszerűen konvergens, akkor egyenletesen konvergens az egész intervallumon.

[96] Guido Ascoli, 1887-1957
[97] Cesare Arzela, 1847-1912

Az első tulajdonságot a Cantor féle diagonális eljárás segítségével igazoljuk. Az $(f_n(x_1))_{n\geq 1}$ sorozat korlátos, tehát létezik egy konvergens részsorozata. Jelöljük ezt a sorozatot $(f_{n_1k})_{k\geq 1}$-val. Az $(f_{n_1k}(x_2))_{k\geq 1}$ sorozat szintén korlátos, tehát ennek is van egy konvergens részsorozata. Ezt jelöljük $(f_{n_2k})_{k\geq 2}$-val. Általában, ha már megszerkesztettük az $(f_{n_jk})_{k\geq j}$ sorozatot, amely konvergál az $x_1, x_2, \dots, x_j$ pontokon, akkor az $(f_{n_jk}(x_{j+1}))_{k\geq j}$ korlátos sorozatból kiválaszthatunk egy konvergens részsorozatot, és így az $(f_{n_{j+1}k})_{k\geq j+1}$ függvénysorozat konvergál az $x_1, x_2, \dots, x_{j+1}$ pontokon. Az így szerkesztett függvénysorozatokból megszerkeszthető az $(f_{n_k}k)_{k\geq 1}$ diagonális sorozat, amely konvergál az összes x_j, $j \geq 1$ ponton.

Ha a $(g_n)_{n\geq 1}$ függvénysorozat egyenlően folytonos, akkor bármely $\varepsilon > 0$-ra létezik olyan δ, amelyre $|g_n(x) - g_n(x')| < \frac{\varepsilon}{3}$, bármely $n \geq 1$ esetén, ha $|x - x'| < \delta$. Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot véges számú δ hosszúságú intervallumra. Jelöljük az intervallumok számát p-vel, és minden intervallumban jelöljük meg a H egy elemét. Így p darab pontot kapunk, amelyeken a függvénysorozat konvergál. Jelöljük ezeket a pontokat $x_1, x_2, \dots, x_p$-vel. Mivel véges sok ilyen pont van, létezik olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, amelyre $|f_n(x_j) - f_m(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3}$, minden $1 \leq j \leq p$-re, ha $m, n \geq n_\varepsilon$. Ezek alapján írhatjuk, hogy

$$|f_n(x) - f_m(x)| < |f_n(x) - f_n(x_j)| + |f_n(x_j) - f_m(x_j)| + |f_n(x_j) - f_m(x)|,$$

ahol x_j a kijelölt pontok közül az, amelyik ugyanabban a kis intervallumban van, mint az x. A feltételek alapján az előbbi egyenlőtlenség bal oldalán levő kifejezések mindegyike majorálható $\frac{\varepsilon}{3}$-mal, tehát $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, bármely $x \in [a, b]$ esetén, ha $n, m \geq n_\varepsilon$. Eszerint a 122. oldal 2.1 tétele biztosítja a sorozat egyenletes konvergenciáját az egész intervallumon.

A bizonyított két tulajdonság alapján a tétel bizonyítása nyilvánvaló. □

4.2.2 Egyenletes folytonosság

Az $f : X \to Y$ (X és Y metrikus terek) függvényt *egyenletesen folytonosnak* nevezzük X-en, ha bármely $\varepsilon > 0$-ra létezik $\delta > 0$ úgy, hogy

$$\rho(f(p), f(q)) < \varepsilon,$$

ha $p, q \in X$ és $\rho(p, q) < \delta$.

Megjegyzés. Az egyenletes folytonosság a függvénynek az egész halmazon való viselkedését jellemzi, és nem értelmezhető egy pont körül, mint a folytonosság. Ha f folytonos X-en, akkor minden $\varepsilon > 0$ és $p \in X$ esetén a folytonosság értelmezéséből adódó $\delta > 0$ függhet a ponttól is, tehát $\delta = \delta(\varepsilon, p)$.

Az egyenletes folytonosság esetében az $\varepsilon > 0$-hoz tartozó $\delta > 0$ pontfüggetlen, tehát azt is mondhatjuk, hogy az f folytonos függvény akkor egyenletesen folytonos X-en, ha az értelmezésben szereplő $\delta(\varepsilon)$ az X minden pontjában ugyanaz. Innen ered az elnevezés is.

Az értelmezésből azonnal következik, hogy ha f egyenletesen folytonos X-en, akkor folytonos is. A fordított állítás általában nem igaz.

2.13. Tétel. (Cantor) *Ha az $f : X \to Y$ függvény folytonos és X egy kompakt metrikus tér, akkor f egyenletesen folytonos X-en.*

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ valós számot. Mivel f folytonos, minden $p \in X$ ponthoz hozzárendelhetünk egy $\phi(p)$ valós számot úgy, hogy

$$x \in X,\ \rho(p,x) < \phi(p) \implies \rho(f(p), f(x)) < \varepsilon/2. \tag{2.10}$$

Minden $p \in X$ esetén tekintsük az

$$I(p) = \mathrm{B}(p, \frac{1}{2}\phi(p)) \tag{2.11}$$

nyílt gömböket. Mivel $p \in I(p)$, az $(I(p))_{p \in X}$ halmazcsalád egy nyílt lefödése X-nek, az X kompaktsága alapján ebből kiválasztható egy véges lefödés. Tehát léteznek olyan $p_1, \ldots, p_n$ pontok X-ben, amelyekre

$$X = I(p_1) \cup \cdots \cup I(p_n). \tag{2.12}$$

Igazoljuk, hogy az egyenletes folytonosság értelmezésében szereplő δ-nak válszthatjuk a

$$\delta = \frac{1}{2} \min\{\phi(p_1), \ldots, \phi(p_n)\} (> 0) \tag{2.13}$$

értéket. Ha x és p tetszőleges pontok X-ben úgy, hogy $\rho(x,p) < \delta$, akkor (2.12) alapján létezik $1 \le m \le n$ úgy, hogy $p \in I(p_m)$. Tehát

$$\rho(p, p_m) < \frac{1}{2}\phi(p_m) \tag{2.14}$$

és

$$\rho(x, p_m) \le \rho(x,p) + \rho(p, p_m) < \delta + \frac{1}{2}\phi(p_m) \le \phi(p_m).$$

Az előbbi két egyenlőtlenség és (2.10) alapján

$$\rho(f(p), f(x)) \le \rho(f(p), f(p_m)) + \rho(f(p_m), f(x)) < \varepsilon. \quad \square$$

A 2.6 tétel bizonyítása. Mivel az $[a,b]$ intervallumot egy elsőfokú függvény segítségével kölcsönösen egyértelmű módon a $[0,1]$ intervallumba transzformálhatjuk, elégséges a bizonyítást elvégezni erre az intervallumra.

Megszerkesztünk egy polinom-sorozatot, amely egyenletesen tart f-hez. Tekintjük a

$$\mathrm{B}_m(f)(x) = \sum_{k=0}^{m} p_{m,k}(x) f\left(\frac{k}{m}\right) \tag{2.15}$$

alakú polinomokat, ahol

$$p_{m,k}(x) = \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k}, \quad x \in [0,1]. \tag{2.16}$$

Ha $x \in [0,1]$, akkor

$$p_{m,k}(x) \geq 0, \quad \sum_{k=0}^{m} p_{m,k}(x) = 1. \tag{2.17}$$

Igazoljuk, hogy

$$\lim_{m\to\infty} \mathrm{B}_m(f) = f, \ C[0,1]\text{-ben a Csebisev norma szerint} \tag{2.18}$$

(vagyis egyenletesen a $[0,1]$ intervallumon). Mivel f folytonos a $[0,1]$ kompakt intervallumon, a Cantor tétel alapján egyenletesen folytonos a $[0,1]$-en. Így minden $\varepsilon > 0$-ra létezik $\delta = \delta(\varepsilon)$ úgy, hogy ha $x, x_0 \in [0,1]$ és $|x - x_0| < \delta$, akkor

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2. \tag{2.19}$$

A (2.17) második összefüggése alapján

$$f(x) - \mathrm{B}_m(f)(x) = \sum_{k=0}^{m} p_{m,k}(x) \left[f(x) - f\left(\frac{k}{m}\right)\right],$$

tehát a (2.17) első fele biztosítja, hogy

$$\begin{aligned}|f(x) - \mathrm{B}_m(f)(x)| &\leq \sum_{k=0}^{m} p_{m,k}(x) \left|f(x) - f\left(\frac{k}{m}\right)\right| \leq \\ &\leq \sum_{k\in I_m} p_{m,k}(x) \left|f(x) - f\left(\frac{k}{m}\right)\right| + \sum_{k\in J_m} p_{m,k}(x) \left|f(x) - f\left(\frac{k}{m}\right)\right|,\end{aligned}$$

ahol

$$I_m = \left\{k \,\middle|\, \left|\frac{k}{m} - x\right| < \delta\right\}, \quad J_m = \left\{k \,\middle|\, \left|\frac{k}{m} - x\right| \geq \delta\right\}.$$

A (2.19) egyenlőtlenségből következik, hogy

$$|f(x) - \mathrm{B}_m(f)(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k\in I_m} p_{m,k}(x) + 2M \sum_{k\in J_m} p_{m,k}(x). \tag{2.20}$$

Az első összeg majorálható 1-gyel Newton binomiális tétele alapján. A $|k/m - x| \geq \delta$ egyenlőtlenség alapján $1 \leq \delta^{-2}(k/m - x)^2$, tehát a második összegre a következő becslést írhatjuk fel:

$$\sum_{k\in J_m} p_{m,k}(x) \leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{k\in J_m} \left(\frac{k}{m} - x\right)^2 p_{m,k}(x) \leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{k}{m} - x\right)^2 p_{m,k}(x), \tag{2.21}$$

és így

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m} \left(\frac{k}{m} - x\right)^2 p_{m,k}(x) &= \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{k}{m}\right)^2 p_{m,k}(x) - 2x \sum_{k=0}^{m} \frac{k}{m} p_{m,k}(x) + x^2 \sum_{k=0}^{m} p_{m,k}(x) = \\ &= \mathrm{B}_m(e_2)(x) - 2x\mathrm{B}_m(e_1)(x) + x^2,\end{aligned} \tag{2.22}$$

ahol

$$e_1(x) = x, \quad e_2(x) = x^2, \quad x \in [0,1].$$

Másrészt

$$\mathrm{B}_m(e_1)(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{m}\binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} = \sum_{k=1}^{m} \binom{m-1}{k-1} x^k (1-x)^{m-k},$$

tehát ha az összegzési változót 1-gyel csökkentjük ($k-1=j$), akkor írhatjuk, hogy:

$$\mathrm{B}_m(e_1)(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} x^{j+1}(1-x)^{m-j-1} = x(x+1-x)^{m-1} = x. \tag{2.23}$$

A $k^2 = k(k-1)+k$ azonosság alapján

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_m(e_2)(x) &= \sum_{k=1}^{m} \frac{k(k-1)}{m^2}\binom{m}{k} x^k(1-x)^{m-k} + \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{k}{m}p_{m,k}(x) = \\ &= \frac{m-1}{m}\sum_{k=2}^{m}\frac{(m-2)!}{(k-2)!(m-k)!}x^k(1-x)^{m-k} + \frac{x}{m}.\end{aligned}$$

Az utolsó összegben a $j = k-2$ változócserével a

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_m(e_2)(x) &= \frac{m-1}{m}\sum_{j=0}^{m-2}\frac{(m-2)!}{(j)!(m-j-2)!}x^{j+2}(1-x)^{m-2-j} + \frac{x}{m} = \\ &= \frac{m-1}{m}x^2(x+1-x)^{m-2} + \frac{x}{m} = \frac{m-1}{m}x^2 + \frac{x}{m} = x^2 + \frac{x(x-1)}{m}\end{aligned} \tag{2.24}$$

egyenlőséghez jutunk. A $B_m(e_1)$-re és $B_m(e_2)$-re kapott egyenlőségek, valamint a (2.22) összefüggés alapján

$$\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{k}{m}-x\right)^2 p_{m,k}(x) = \frac{x(x-1)}{m}.$$

Ha ezt visszahelyettesítjük a (2.21) egyenlőtlenségbe és használjuk az $x(1-x) \le 1/4$ egyenlőtlenséget, akkor a

$$\sum_{k=0}^{m} p_{m,k}(x) \le \frac{1}{\delta^2}\frac{x(1-x)}{m} \le \frac{1}{4m\delta^2} \tag{2.25}$$

becslést kapjuk. Így a (2.20) egyenlőtlenségből következik, hogy

$$|f(x) - \mathrm{B}_m(f)(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2m\delta^2},$$

ahol $M = \|f\|_\infty$. Ha $m > M/(\varepsilon\delta^2)$, akkor

$$|f(x) - \mathrm{B}_m(f)(x)| < \varepsilon, \quad \forall\, x \in [0,1],$$

tehát a bizonyítás teljes. □

4.2.3 Folytonosság és összefüggőség

Az X metrikus tér E részhalmazát *összefüggőnek* nevezzük, ha nem írható fel két valódi és nyílt részhalmaza egyesítéseként (nem létezik A és B nyílt halmaz úgy, hogy $A \cap E \neq \emptyset$, $B \cap E \neq \emptyset$ és $E \subset A \cup B$).

2.14. Tétel. *A valós számhalmaznak minden összefüggő részhalmaza intervallum.*

Bizonyítás. Ha $A \subset \mathbb{R}$ egy összefüggő halmaz és nem intervallum, akkor létezik olyan $a, c \in A$, $b \notin A$, amelyekre $a < b < c$. Így viszont az $I_1 = (-\infty, b)$ és $I_2 = (b, \infty)$ nyílt halmazok. Ebből következik, hogy az $A \cap I_1 \neq \emptyset \neq I_2 \cap A$ halmazok is nyíltak és $A = (A \cap I_1) \cup (A \cap I_2)$. Ez ellentmondás, tehát az $\mathbb{R}$ minden összefüggő részhalmaza intervallum. □

A 2.8-as tételhez hasonlóan

2.15. Tétel. *Ha $f : X \to Y$ folytonos és X összefüggő, akkor $f(X)$ is összefüggő.*

Bizonyítás. Ha $f(X)$ nem lenne összefüggő, akkor létezne olyan V és W Y-ban nyílt halmaz, amelyre $V \cap W = \emptyset$, $V \cap f(X) \neq \emptyset$, $W \cap f(X) \neq \emptyset$ és $f(X) \subset V \cup W$. Mivel f folytonos, az $f^{-1}(V)$ és $f^{-1}(W)$ halmazok nyíltak X-ben, nem üresek, diszjunktak és az egyesítésük X. Ez ellentmondana annak, hogy X összefüggő, tehát a tétel állítása igaz. □

Tekintsük az $I \subset \mathbb{R}$ nemüres intervallumot és az $f : I \to \mathbb{R}$ függvényt. Azt mondjuk, hogy f *Darboux*[98] *tulajdonságú*, ha minden $a, b \in I$, $a < b$ és λ-ra, amely $f(a)$ és $f(b)$ közt van, létezik $c \in]a, b[$ úgy, hogy $f(c) = \lambda$. Az I intervallumon Darboux tulajdonságú függvények halmazát $\mathcal{D}_I$-vel jelöljük.

2.16. Tétel. (Folytonos függvények Darboux tulajdonsága) *Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, $f(a) < f(b)$ és $f(a) < \lambda < f(b)$, akkor létezik $c \in]a, b[$ úgy, hogy $f(c) = \lambda$.*

Hasonló állítás igaz akkor is, ha $f(a) > f(b)$ (vagyis minden valós változójú és valós értékű folytonos függvény Darboux tulajdonságú).

Bizonyítás. A 2.14-es tétel alapján $[a, b]$ összefüggő, és így a 2.15-ös tételből következik, hogy $f([a, b])$ is összefüggő, tehát a 2.14-es tétel alapján intervallum. Ebből következik a kívánt tulajdonság. □

2.9. Gyakorlat. *Bizonyítsd be, hogy minden $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korlátos függvénynek van legalább egy fixpontja ($x \in \mathbb{R}$ fixpontja f-nek, ha $f(x) = x$).*

Megoldás. A feltételek alapján létezik olyan $m > 0$, amelyre $|f(x)| \leq m$, $\forall x \in \mathbb{R}$. A $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$ segédfüggvény folytonos. Ugyanakkor $g(m) = f(m) - m \leq 0$ és $g(-m) = f(-m) + m \geq 0$, tehát a g folytonossága alapján létezik $\xi \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $0 = g(\xi) = f(\xi) - \xi$. △

[98] Gaston Darboux, 1842-1917

4.2.4 Szakadási pontok

Ha x az $f : X \to Y$ függvény értelmezési tartományának olyan pontja, amelyben f nem folytonos, akkor az x pontot az f *szakadási pontjának* nevezzük.

Ha $f :]a,b[\to Y$ és az $x \in]a,b[$ szakadási pontban léteznek az $f(x+)$, illetve $f(x-)$ szélső határértékek, akkor azt mondjuk, hogy x az f-nek *elsőfajú szakadási pontja.* Minden más szakadási pontot *másodfajúnak* nevezünk. Az értelmezés alapján az x pont kétféleképpen lehet elsőfajú szakadási pont: vagy $f(x+) \neq f(x-)$, vagy $f(x+) = f(x-) \neq f(x)$.

Megjegyzés. Ha $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, akkor az elsőfajú szakadási pont fogalma ugyanaz, mint amit középiskolában tárgyalnak, mert az $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ metrikus térben a határérték létezése azt jelenti, hogy a határérték $\mathbb{R}$-ben van. A középiskolában a határérték létezése nem jelenti azt, hogy az véges is.

Példák. (a) Az

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

függvénynek minden $x \in \mathbb{R}$ pont másodfajú szakadási pontja, mert sem $f(x+)$, sem $f(x-)$ nem létezik.

(b) Az

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

függvény folytonos $x = 0$-ban és másodfajú szakadási pontja van minden más pontban.

(c) Az

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

függvénynek a 0 másodfajú szakadási pontja, mert nem létezik sem $f(0+)$, sem $f(0-)$. Ugyanakkor f minden más pontban folytonos. $\triangle$

4.2.5 Monoton függvények

Az $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ függvényt ($a < b$) *növekvőnek* nevezzük $]a,b[$-n, ha az $a < x < y < b$ egyenlőtlenségekből következik, hogy $f(x) \leq f(y)$. Ha minden $a < x < y < b$ esetén az utolsó egyenlőtlenség fordítottja teljesül, akkor azt mondjuk, hogy f *csökkenő.* Egy függvényt *monotonnak* nevezünk, ha növekvő vagy csökkenő.

Monoton függvényekkel végezhető műveletek néhány tulajdonságára világít rá az alábbi tétel:

2.17. Tétel. *Tekintsük az $f, g : I \to \mathbb{R}$ függvényeket.*

(a) *Ha f és g növekvő (csökkenő), akkor $f + g$ is növekvő (csökkenő);*

(b) *Ha* $\alpha > 0$, *és* f *növekvő (csökkenő), akkor* αf *is növekvő (csökkenő);*

(c) *Ha* $\alpha < 0$, *és* f *növekvő (csökkenő), akkor* αf *is csökkenő (növekvő);*

(d) *Ha az* f *és* g *(szigorúan) monoton és azonos előjelű függvények, akkor* fg *is (szigorúan) monoton;*

(e) *Ha* f *szigorúan növekvő (csökkenő), akkor* $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ *is szigorúan növekvő (csökkenő).*

Bizonyítás. Az (a) - (d) állítások az egyenlőtlenségekkel végzett műveletek tulajdonságai alapján nyilvánvalóak.

(e) Ha f szigorúan növekvő, akkor f injektív, és így az $f : I \to f(I)$ függvény bijektív, tehát létezik az $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ függvény. Ha $u, v \in f(I)$ és $u < v$, akkor létezik $x, y \in I$ úgy, hogy $u = f(x)$ és $v = f(y)$. Ha teljesülne az $x \geq y$ egyenlőség, akkor teljesülne az $f(x) \geq f(y)$ egyenlőtlenség is (a feltétel alapján). Mivel ez ellentmond az $u < v$ egyenlőtlenségnek, következik, hogy $x < y$, tehát f^{-1} szigorúan növekvő. A bizonyítás hasonló abban az esetben is, amikor f szigorúan csökkenő. $\square$

Megjegyzések. (a) Egy növekvő és egy csökkenő függvény összegének monotonitásáról általában nem állíthatunk semmit. Például az $f(x) = x$, $g(x) = -x^2$, $x \geq 0$ függvények összege se nem növekvő, se nem csökkenő $[0, \infty[$ -en.

(b) Általában két monoton függvény szorzatának a monotonitásáról sem állíthatunk semmit. Például az $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = t$, $g(t) = \operatorname{sgn} t$ függvényekre $(fg)(t) = |t|$, és ez nem monoton $\mathbb{R}$-en. $\triangle$

2.18. Tétel. *Tekintsük az* I, J *és* K *nemüres intervallumokat, az* $f : I \to J$, $g : f(I) \to K$ *és* $h : I \to K$,

$$h(x) = g(f(x)), \quad x \in I$$

függvényeket. Ha f *és* g *azonos monotonitásúak, akkor* h *növekvő, míg ha* f *és* g *ellentétes monotonitásúak, akkor* h *csökkenő.*

2.19. Tétel. *Ha* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *növekvő, akkor* $f(x+)$ *és* $f(x-)$ *létezik minden* $x \in]a, b[$ *pontban és*

$$\sup_{a<t<x} f(t) = f(x-) \leq f(x) \leq f(x+) = \inf_{x<t<b} f(t). \tag{2.26}$$

Sőt, ha $a < x < y < b$, *akkor*

$$f(x+) \leq f(y-). \tag{2.27}$$

Bizonyítás. A $H(x) = \{f(t) | a < t < x\}$ halmaz minden $x \in]a, b[$ esetén felülről korlátos, és $f(x)$ egy felső korlátja. Ez alapján létezik $H(x)$-nek a $h(x)$-szel jelölt szuprémuma. Világos, hogy $h(x) \leq f(x)$, $\forall x \in]a, b[$. Igazoljuk, hogy $h(x) = f(x-)$.

Ha $\varepsilon > 0$, akkor a $h(x)$ értelmezése alapján létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $a < x-\delta < x$ és

$$h(x) - \varepsilon < f(x - \delta) \leq h(x). \tag{2.28}$$

Mivel f növekvő,

$$f(x - \delta) \leq f(t) \leq h(x), \quad x - \delta < t < x. \tag{2.29}$$

A (2.28) és (2.29) összefüggések alapján

$$|f(t) - h(x)| < \varepsilon, \quad x - \delta < t < x,$$

tehát $f(x-) = h(x)$.

A második egyenlőtlenséget hasonló módon igazolhatjuk. Ha $a < x < y < b$, akkor (2.26) alapján

$$f(x+) = \inf_{x<t<b} f(t) \leq \inf_{x<t<y} f(t). \tag{2.30}$$

Hasonlóan

$$f(y-) = \sup_{a<t<y} f(t) \geq \sup_{x<t<y} f(t). \tag{2.31}$$

Az (2.30) és (2.31) alapján következik (2.27) (mert egy halmaz infimuma nem lehet nagyobb a szuprémumánál). $\square$

2.2. Következmény. *Valós változójú és valós értékű monoton függvénynek nem lehet másodfajú szakadási pontja.*

2.20. Tétel. *Ha* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *monoton, akkor a szakadási pontjainak a halmaza legfeljebb megszámlálható.*

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy f növekvő, és a szakadási pontjainak halmaza E.

Minden $x \in E$-hez hozzárendelhetünk egy $r(x)$ racionális számot úgy, hogy

$$f(x-) < r(x) < f(x+).$$

A 2.19 tétel alapján $x_1 < x_2$-re $f(x_1+) \leq f(x_2-)$, és így $r(x_1) \neq r(x_2)$, ha $x_1 \neq x_2$. Az r megfeleltetés injektív és képtartománya megszámlálható, tehát az értelmezési tartománya sem lehet megszámlálhatatlan. $\square$

2.10. Gyakorlat. ([63, 11. feladat, 9. oldal]) *Az* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonos és növekvő függvényre* $f(a) \geq a$ *és* $f(b) \leq b$. *Bizonyítsd be, hogy tetszőleges* $x_1 \in [a, b]$ *esetén az* $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 1$ *rekurzív sorozat konvergens, és a* $\lim_{n\to\infty} x_n =: x^*$ *határértékre* $f(x^*) = x^*$.

Megoldás. Mivel f folytonos, $f([a,b])$ kompakt. Így az (x_n) sorozat korlátos. Mivel f növekvő, az (x_n) sorozat monoton, tehát konvergens is. Ha $x^* \in [a,b]$ a határértéke, akkor az f folytonossága alapján határértékre térhetünk a rekurzióban, és így az $f(x^*) = x^*$ egyenlőséghez jutunk. $\triangle$

2.11. Gyakorlat. ([40, VII. Nemzetközi Matematika Verseny, 2000, Első nap, 1. feladat]) *Igaz-e, hogy ha* $f : [0,1] \to [0,1]$

(a) *növekvő,*

(b) *csökkenő,*

akkor létezik $x \in [0,1]$ *úgy, hogy* $f(x) = x$*?*

Megoldás. (a) Igen. Az $A = \{x \in [0,1] \mid f(x) > x\}$ halmaz $f(0) \neq 0$ esetén nem üreshalmaz (ellenkező esetben a 0 megfelel) és korlátos, tehát létezik szuprémuma. Ha $a = \sup A$ és $b = f(a)$, akkor két esetet vizsgálunk meg:

I. eset: $a < b$. Mivel f növekvő és a az A szuprémuma,

$$b = f(a) \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{a+b}{2},$$

ami ellentmond $a < b$-nek.

II. eset: $b < a$. Ebben az esetben

$$b = f(a) \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{a+b}{2},$$

ami szintén ellentmondás, tehát $a = b$, és így $f(a) = a$.

(b) Nem. A következő függvény csökkenő, és nincs egyetlen fixpontja sem.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2}, & x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} - \frac{x}{2}, & x > \frac{1}{2}. \end{cases} \qquad \triangle$$

Az f függvényről azt mondjuk, hogy *sehol sem monoton*, ha nem létezik olyan intervallum, amelyen az f leszűkítése monoton.

2.12. Gyakorlat. ([40, VII. Nemzetközi Matematika Verseny, 2000, Második nap, 2. feladat]) *Bizonyítsd be, hogy ha az* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *függvény folytonos és sehol sem monoton, akkor a lokális minimumpontjainak halmaza sűrű* $[0,1]$*-ben.*

Megoldás. Ha $]x-\alpha, x+\alpha[\, \subset [0,1]$ egy tetszőleges nyílt intervallum, akkor a feltételek alapján f nem monoton az $[x-\alpha, x]$ és $[x, x+\alpha]$ intervallumokon, tehát léteznek olyan $x-\alpha \leq p < q \leq x$ és $x \leq r < s \leq x+\alpha$ valós számok, amelyekre $f(p) > f(q)$ és $f(r) < f(s)$.

A 2.10-es tétel alapján f-nek van egy globális minimuma a $[p,s]$ intervallumban. $f(p)$ és $f(q)$ nem globális minimumok, mert az intervallumon f felvesz ezeknél kisebb értéket is ($f(q)$ -t és $f(s)$ -et). Így a minimumpont az $]x-\alpha, x+\alpha[\subset[0,1]$ belsejében van, és így lokális minimumpontja az f -nek. Mivel x és α tetszőlegesek voltak, a lokális minimumpontok halmaza sűrű $[0,1]$ -ben. $\triangle$

2.13. Gyakorlat. *Határozd meg az összes olyan* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *folytonos függvényt, amelyre*

$$f(f(x))+x=0,\quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2.32}$$

Megoldás. Ha létezik ilyen függvény, akkor az injektív, mert

$$f(x)=f(y)\implies f(f(x))=f(f(y))\implies -x=-y\implies x=y.$$

Ha f injektív és folytonos, akkor szigorúan monoton, és így az $f\circ f$ szigorúan növekvő. Ez ellentmond az egyenletnek, mert $(f\circ f)(x)=-x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ és a $g(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ függvény nem növekvő. Tehát egyetlen folytonos függvény sem teljesítheti a (2.32) összefüggést. $\triangle$

2.14. Gyakorlat. *Ha az* $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *függvényekre* $f(x)=g(x)$, *minden* $x\in\mathbb{Q}$ *esetén,* f *folytonos és* g *monoton, akkor* $f(x)=g(x)$, *minden* $x\in\mathbb{R}$ *-re.*

Megoldás. Az általánosság csorbítása nélkül feltételezhetjük, hogy f növekvő. Ha $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ egy rögzített szám és az (u_n), illetve (v_n) sorozatokra $u_n\to x,\ v_n\to x$ úgy, hogy $u_n<x<v_n$, minden $n\in\mathbb{N}^*$ esetén, akkor

$$g(u_n)\le g(x)\le g(v_n),$$
$$f(u_n)=g(u_n)\ \text{ és }\ f(v_n)=g(v_n).$$

Tehát $f(u_n)\le g(x)\le f(v_n)$, ahonnan határértékre téréssel következik, hogy $f(x)=$ $=g(x)$. $\triangle$

4.2.6 Sharkovski tétele

Rögzítsünk egy tetszőleges I intervallumot. Ha $f:I\to I$ egy függvény, akkor a következő jelöléseket, illetve megnevezéseket használjuk:

- $F(f)=\{x\in I|\ f(x)=x\}$ – az f fixpontjainak halmaza;
- $F_n(f)=\{x\in I|\ f^n(x)=x\}$ – az f n-edik iteráltjának a fixpontjaiból alkotott halmaz;
- $P_n(f)=\left\{x\in I|\ f^n(x)=n;\ f^j(x)\neq x,\ j=\overline{1,n-1}\right\}$ – az f n periódusú pontjainak halmaza;
- $P(f)=\{n\in\mathbb{N}|\ \exists\ x\in I: x\in P_n(f)\}$ – az f periódusainak halmaza;
- $O_n(f)$ – az n periodusú pályák száma;

- $F_n^*(f)$ – az n hosszúságú periodikus pályák száma.

Intervallumot önmagába képező folytonos függvények periodikus pontjainak létezését vizsgálva, 1964-ben A.N. Sharkovski a következő rendezést vezette be:

$$3 \succ 5 \succ 7 \cdots \succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \cdots \succ 2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 7 \succ \cdots$$

$$\cdots \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1,$$

tehát az $x = 2^{k_1}(2l_1 + 1)$ és $y = 2^{k_2}(2l_2 + 1)$ számokról ($k_1, k_2, l_1, l_2 \in \mathbb{N}$) azt mondjuk, hogy $x \succ y$, ha $l_2 = 0$ és $l_1 \neq 0$, vagy $l_1 = l_2 = 0$ és $k_1 > k_2$, vagy $k_1 < k_2$ és $l_1, l_2 \geq 1$, vagy $k_1 = k_2$ és $1 \leq l_1 < l_2$.

2.21. Tétel. *(Sharkovski[99], [65]) Ha $f : I \to I$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) egy folytonos függvény, és f-nek van m főperiódusú pontja, akkor bármely $n \in \mathbb{N}^*$, $m \succ n$ esetén van n főperiódusú pontja is.*

Tőle függetlenül Li és Yorke 1975-ben igazolta, hogy:

2.22. Tétel. *(Li[100] és Yorke[101], [45]) Ha az $f : I \to I$ folytonos függvénynek van 3 főperiódusú pontja, akkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}^*$-ra van n főperiódusú pontja is.*

2.1. Megjegyzés. *A 2.21 tétel első teljes bizonyítását angol nyelven P. Štefan közölte ([68]) majd 1978-ban P.D. Straffin[102] adott rá egy elegáns bizonyítást ([69]), amit tovább egyszerüsítettek a ([17]), ([37]) és ([35])-ös dolgozatokban. A továbbiakban ezt a bizonyítást ismertetjük.*

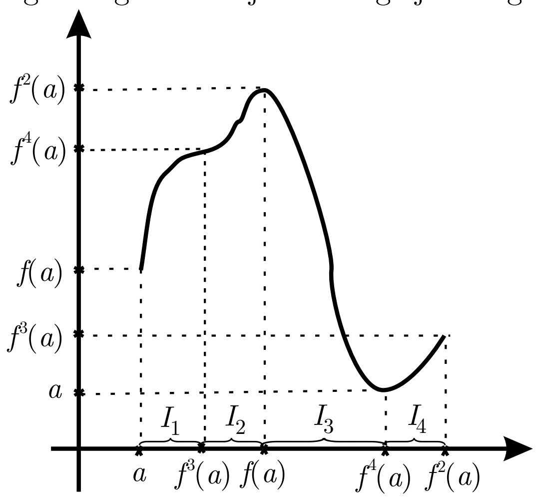
A bizonyításban gyakorlatilag a folytonos függvények elemi tulajdonságain kívül nincs szükség egyébre, de a bizonyítás menete mégis elég bonyolult. A követhetőség kedvéért szükségünk lesz az f és x_0 I gráfjára. Ezt a következő módon szerkesztjük meg:

Ha $f : I \to I$ egy folytonos függvény és $x_0 \in I$ egy k periódusú pontja, akkor az $a = \min\left\{f^l(x_0) | l = \overline{0, k-1}\right\}$ jelöléssel az $a, f(a), \ldots, f^{k-1}(a)$ pontok egy k hosszúságú periodikus pályát alkotnak, és meghatároznak $(k-1)$ darab zárt (közös belső pont nélküli) intervallumot, amelyeket $I_1, I_2, \ldots, I_{k-1}$-gyel jelölünk (a számozást balról jobbra végezzük). f-hez és x_0-hoz rendeljünk hozzá egy irányított gráfot, melynek csúcsai az $I_1, I_2, \ldots, I_{k-1}$, és az I_i-től I_j felé pontosan akkor van irányított ív, ha $f(I_i) \supseteq I_j$.

2.2. Megjegyzés. *Bármely $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ esetén I_i-ből legalább egy ív indul, mert $f(I_i)$ legalább egy I_j intervallumot tartalmaz.*

[99] Aleksandr Nikolaevich Sharkovski
[100] Li Tien Yien, http://www.mth.msu.edu/ li/
[101] James A. Yorke, http://www.chaos.umd.edu/ yorke/
[102] Philip D. Straffin, straffin@beloit.edu

Az eddigiek rögzítése céljából vizsgáljuk meg a mellékelt ábrán látható konkrét esetet.

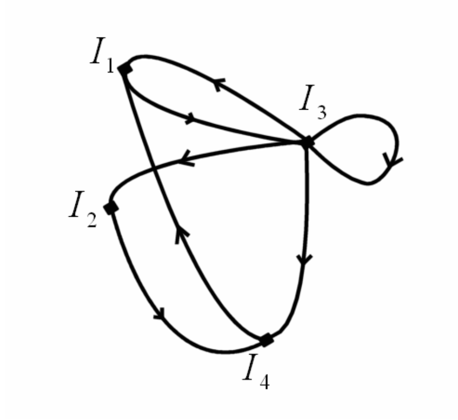


4.1. Ábra

Az ábra alapján

$$\begin{aligned} f(I_1) &\supseteq I_3 \\ f(I_2) &\supseteq I_4 \\ f(I_3) &\supseteq I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 \\ f(I_4) &\supseteq I_1 \end{aligned}$$

A megfelelő irányított gráf a következő:



4.2. Ábra

A megszerkesztett gráf hasznosságát a következő tétel mutatja:

2.23. Tétel. *(Straffin tétele, [69]) Ha $f : I \to I$ egy folytonos függvény és x egy k periódusú pontja, valamint az f és x-hez rendelt I gráf tartalmaz m hosszúságú egyszerű ciklust ($m \in \mathbb{N}^*$), akkor f-nek van m periódusú pontja.*

A tétel bizonyításához a következő két állításra lesz szükségünk, melyeket az analízisből jól ismerünk:

2.1. Lemma. *Ha I, J zárt intervallumok, valamint $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos és $J \subset \subset f(I)$, akkor létezik $Q \subset I$ úgy, hogy $f(Q) = J$.*

Bizonyítás. Feltételezhetjük, hogy a J intervallum egynél több pontot tartalmaz. Ha $J = [c, d]$, akkor a Darboux tulajdonság alapján a

$$H_1 = \{x \in I | f(x) = c\} \quad \text{és} \quad H_2 = \{x \in I | f(x) = d\}$$

halmazok nem üresek. Világos, hogy ezek zárt halmazok is, tehát létezik a két halmaz d távolsága. Másrészt $d \neq 0$ (mert $c \neq d$), és így létezik olyan $x_1 \in H_1$ és $x_2 \in H_2$, amelyekre $|x_1 - x_2| = \inf\{d(x,y) \,|\, x \in H_1, y \in H_2\}$. Az így szerkesztett $[x_1, x_2]$ intervallum belsejében az f függvény nem vehet fel sem c-nél kisebb, sem d-nél nagyobb értéket. Tehát $f([x_1, x_2]) = J$.

2.2. Lemma. *Ha I zárt intervallum, f folytonos és $I \subseteq f(I)$, akkor f-nek van fixpontja I-n.*

Bizonyítás. Ha $I = [a, b]$, akkor az $I \subseteq f(I)$ bennfoglalás alapján létezik $c, d \in I$ úgy, hogy $f(c) = a$ és $f(d) = b$. Az így kapott c-re és d-re

$$\begin{aligned} f(c) - c &= a - c < 0 \\ f(d) - d &= b - d > 0 \end{aligned}$$

Tehát $g(x) = f(x) - x$ folytonos függvénynek van zérushelye $[a, b]$-n, és így f-nek van fixpontja I-n.

A 2.23 tétel bizonyítása. Legyen

$$J^0 \to J^1 \to \cdots \to J^{k-1} \to J^k$$

egy k hosszúságú egyszerű ciklus az f valamely I gráfjában.

$$J^0 \to J^1 \;\Rightarrow\; J^1 \subseteq f(J^0).$$

Így a 2.1 lemma alapján létezik olyan $Q_0 \subseteq J^0$, hogy $J^1 = f(Q_0)$.

$$J^1 \to J^2 \;\Rightarrow\; J^2 \subseteq f(J^1) = f^2(Q_0).$$

Mivel f^2 folytonos, létezik $Q_1 \subseteq Q_0$ úgy, hogy $f^2(Q_1) = J^2$.
Az eljárást alkalmazva megszerkesztjük a

$$Q_{k-1} \subseteq Q_{k-2} \subseteq \cdots \subseteq Q_2 \subseteq Q_1 \subseteq Q_0 \subseteq J^0 \tag{2.33}$$

intervallumokat úgy, hogy $f^{j+1}(Q_j) = J^j$, ha $0 \leq j \leq k-1$. A (2.33) összefüggés alapján $Q_{k-1} \subseteq J_0 = f^k(Q_{k-1})$. Így az f^k folytonos függvényre alkalmazható a 2.2 lemma, vagyis létezik $x_0 \in Q_{k-1}$ úgy, hogy $f^k(x_0) = x_0$. A továbbiakban kimutatjuk, hogy x_0 periódusa valóban k. Ezt a lehetetlenre való visszavezetés módszerével végezzük. Tételezzük fel, hogy periódusa l, és ez kisebb, mint k. Az l szükségszerűen osztója k-nak, és vizsgáljuk az alábbi diagramot:

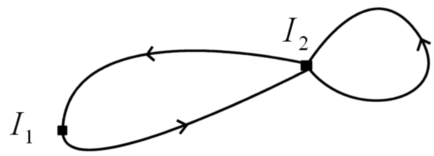
$$\begin{array}{ccccccccccccccc} x_0 & \to & f(x_0) & \to & f^2(x_0) & \to & \cdots & \to & f^{l-1}(x_0) & \to & x_0 & \to & f(x_0) & \to & \cdots \\ J^0 & \to & J^1 & \to & J^2 & \to & \cdots & \to & J^{l-1} & \to & J^l & \to & J^{l+1} & \to & \cdots \end{array}$$

Mivel $f^m(x_0) \in J^m$, $\forall\ m = 1, \ldots, k$ és $f^m(x_0)$ nem végpontja J^m-nek (ehhez az szükséges, hogy a vizsgált I gráf ne x_0-hoz tartozzon, és ez feltételezhető, hiszen az I gráfot eleve egy periodikus ponthoz rendeljük hozzá, és így tőle különböző periodikus pontokat keresünk), az $f^m(x_0)$ egyértelműen meghatározza az alatta álló intervallumot. Ez alapján

$$x_0 \in J^0, x_0 \in J^l \Rightarrow J^0 = J^l$$

Hasonlóan $J^1 = J^{l+1}, \ldots, J^{l-1} = J^{2l-1}$. Ebből az következik, hogy a vizsgált ciklus nem egyszerű. Ez viszont ellentmondás, tehát a 2.23 tétel érvényes. □

Az eddigiek alapján a 2.22 tételre máris adhatunk egy nagyon egyszerű bizonyítást.
A 2.22 tétel bizonyítása. Ha x_0 periódusa 3, akkor az f és x_0-hoz rendelt I gráf a következőképpen néz ki:



4.3. Ábra

Ennek viszont tetszőleges $n \geq 1$-re van n hosszúságú egyszerű ciklusa. ($n = 1$ vagy $n = 2$-re nyilvánvaló, míg $n \geq 3$-ra a hurkot $(n-2)$-szer bejárva és az $I_2 I_1 I_2$ ciklust pontosan egyszer, egy n hosszúságú egyszerű ciklust kapunk.) Tehát a 2.23 tétel alapján a 2.22 tétel igaz. □

A 2.21 tétel bizonyítása már nem ennyire egyszerű. A következő egyszerű állításokat fogjuk igazolni, melyekkel tulajdonképpen igazoljuk a tétel állítását.

Ha $f : I \to I$ egy folytonos függvény és x_0 egy k periódusú pont, akkor igazak a következő állítások:

1. Ha $k \geq 2$ és k páros, akkor az f és x_0 I gráfjának van legalább egy m hosszúságú egyszerű köre, ahol $\dfrac{k}{2} \leq m < k$.
2. Ha $k > 1$ nem kettő hatvány, akkor létezik olyan I gráf, amelynek minden $2^m > k$-ra van 2^m hosszúságú egyszerű ciklusa.
3. Ha $k \geq 2$, akkor létezik olyan I gráf, amelynek minden $2^m < k$ esetén van 2^m hosszúságú egyszerű ciklusa.
4. Ha $k \geq 3$ páratlan, akkor létezik olyan I gráf, amelynek tetszőleges páros m-re van m hosszúságú egyszerű ciklusa.
5. Ha $k \geq 3$ páratlan, akkor bármely $m \geq k-1$-re létezik olyan I gráf, amelynek van m hosszúságú egyszerű ciklusa.
6. Ha f^{2^i}-nek van k periódusú pontja (k páratlan), akkor f-nek létezik olyan I gráfja, amely tartalmaz $2^i k$ hosszúságú egyszerű ciklust.

7. Ha $k = 2^i m$, $m \geq 3$ páratlan, akkor bármely $n = 2^i j$ $(j > m)$ j páratlan, vagy $n = 2^r v$ ($v \geq 3$ páratlan, $r > i$) alakú szám esetén létezik olyan I gráf, amely tartalmaz n hosszúságú egyszerű ciklust.

A 2. és 3. állítás alapján a kettő hatványok a „sor" végére kerülnek. A 4. tulajdonság biztosítja, hogy a páratlan számok elől legyenek. Az 5. tulajdonság a páratlan számok sorrendjét, míg a 7. tulajdonság a páros számok sorrendjét adja meg.

1. Kimutatjuk, hogy f és x_0 I gráfjában van k hosszúságú ciklus. Legyen $I^0 = I_1$ és $1 \leq n \leq k$ esetén I^n-nek az $I_1, I_2, \ldots, I_{k-1}$ közül válasszuk azt, amelynek egyik végpontja $f^n(a)$ és benne van $f(I^{n-1})$-ben (I^{n-1}-től és f-től függően ezt kétféleképpen is megtehetjük – mindegy, hogy melyiket választjuk a két lehetőség közül). Nyilvánvaló, hogy $I^k = I^0$, tehát

$$I^0 \to I^1 \to I^2 \to \cdots \to I^{k-1} \to I^0$$

egy k hosszúságú ciklus. De az f és x_0 I gráfjának mindössze $(k-1)$ csúcsa van, és így az előbbi ciklusban legalább egy I_{k_0} csúcs ismétlődik. Tehát I_{k_0}-nál két kisebb ciklusra bontható az $\left(I^l\right)_{l=\overline{0,k-1}}$ ciklus. Másrészt az I^k-ok szerkesztése alapján kimondható, hogy egyetlen I_j sem szerpelhet kettőnél többször a szerkesztett körben (mert I_j-nek két végpontja van). Így mindkét kisebb ciklus egyszerű (van bennük olyan pont, amely csak egyszer szerepel, például az I_{k_0}). Ezek közül az egyik hossza a $\left[\frac{k}{2}, k\right]$ intervallumban van. Tehát az 1. állítás igaz.

2. Az állítást indukcióval bizonyítjuk. $k = 3$-ra már láttuk, hogy az állítás igaz. Tételezzük fel, hogy a tulajdonság igaz minden k-nál kisebb számra (amely nem kettő hatvány). Az előbbi tulajdonság szerint az $\left(I^l\right)_{l=\overline{0,k-1}}$ részgráf felbontható kisebb egyszerű ciklusokra. Ha ezek közt van olyan, amelynek a hossza nem kettő hatvány, akkor az indukciós feltevés alapján kész vagyunk. Így elégséges a tulajdonságot abban az esetben igazolni, amikor a kisebb ciklusok hosszai mind kettő hatványok. Legyen 2^{m_1} és 2^{m_2} ($m_1 > m_2$) két ilyen ciklushossz. A 2^{m_2} hosszúságú ciklust $2^{m_1-m_2}(2^{m-m_1}-1)$-szer és 2^{m_1}-en hosszúságút egyszer bejárva pontosan egy 2^m hosszúságú egyszerű ciklust kapunk ($m \geq m_1$). Tehát minden $2^m \geq 2^{m_1}$-re van 2^m hosszúságú egyszerű ciklus, és így a bizonyítás teljes.

3. Az állítást szintén indukcióval bizonyítjuk. $k = 2$ és $k = 3$-ra már láttuk, hogy igaz az állítás. Tegyük fel, hogy minden k-nál kisebb számra a tulajdonság igaz.

I eset: k páratlan és $k \geq 3$. Igazoljuk, hogy bármely $m \geq k-1$ természetes számra van m hosszúságú egyszerű ciklus.

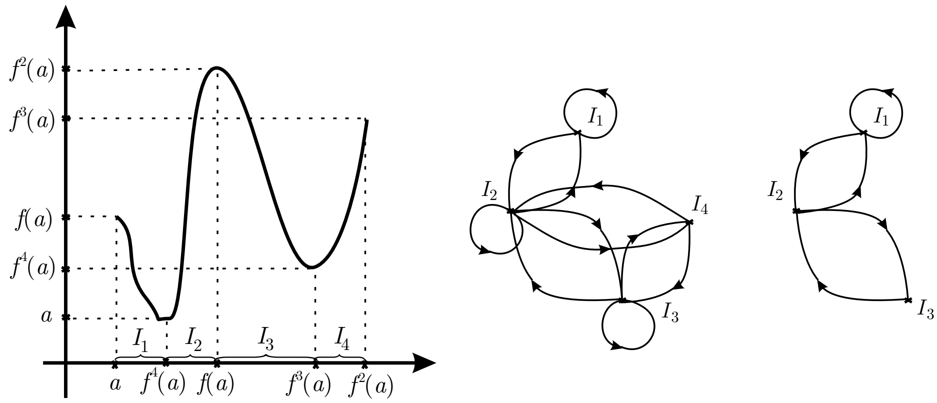
Ha $k > 3$, az 1. tulajdonság bizonyításánál megszerkesztett részgráf felbontásából származó valamelyik egyszerű ciklus hossza páratlan. Ha ennek a ciklusnak a hossza 1-nél nagyobb, akkor az indukciós feltevés alapján következik a kért állítás. Ellenkező esetben az egyik egyszerű ciklus hossza 1, és a másiknak a hossza $(k-1)$. Így a

$k = 3$-nál használt gondolatmenetet megismételve (a hurkot $m - k + 1$-szer járjuk be és a $k - 1$ hosszúságú ciklust egyszer) a tulajdonság igaz.

Megjegyzés. Ezzel tulajdonképpen az 5. állítást is igazoltuk.

II eset: k páros. Az 1. tulajdonság szerint létezik $m \in \left[\frac{k}{2}, k\right)$ úgy, hogy f és x_0 I gráfja tartalmazzon m hosszúságú egyszerű kört. Ha m nem kettő hatvány, akkor az indukciós feltevés és a 2. állítás alapján a bizonyítást befejeztük, míg ha m kettő hatvány, akkor csak az indukciós feltevést használjuk.

4. Ezt az állítást is indukcióval bizonyítjuk. $k = 3$-ra a tulajdonság igaz. Ha az 1. állítás bizonyításánál használt ciklus felbontható úgy, hogy a páratlan hosszúságú egyszerű ciklus hossza ne legyen kisebb, mint három, akkor az indukciós feltevés alapján a bizonyítás véget ér. Tehát elégséges azzal az esettel foglalkozni, amikor az $\left(I^l\right)_{l=\overline{0,k-1}}$ ciklus csak egy hurokra és egy $(k-1)$ hosszúságú ciklusra bontható fel. Ez azt jelenti, hogy a $(k-1)$ hosszúságú ciklusban az $I_1, I_2, \ldots, I_{k-1}$ intervallumok mindegyike előfordul. A 4.4. ábrán látható egy olyan 5 periódusú ponthoz tartozó I gráf, amely felbontható egy 3 és egy 2 hosszúságú ciklusra, és a 4.5. ábrán egy olyan, amely csak egy hurokra és egy 4 hosszúságú ciklusra bontható fel (az ábrákon látható az I gráf is, illetve az ebből kivágott k hosszúságú ciklus is).



4.4. Ábra

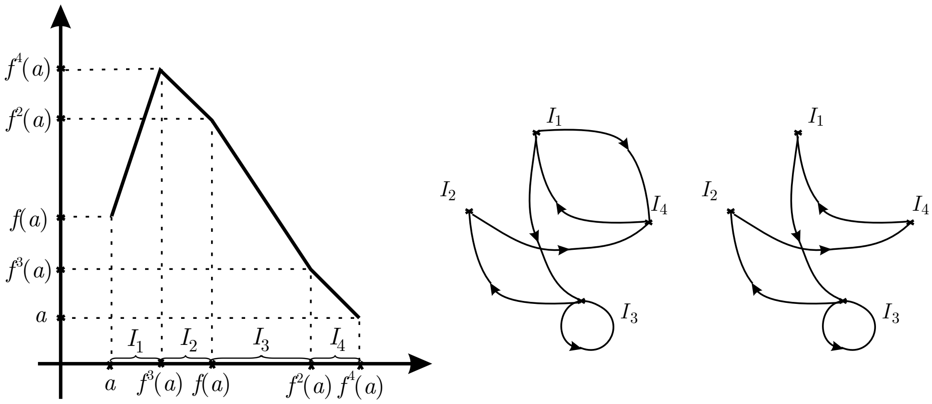
A huroknál lévő intervallumot jelöljük I_0-val, majd a $(k-1)$ ciklusban szereplő sorrend szerint számozzuk újra az intervallumokat I_0-tól kezdve.

$$I_j \to I_{j+1} \;\; j = 0, \ldots, k-2 \text{ és } I_{k-2} \to I_0 \text{ az új számozás szerint}$$

A 4.5. ábrán látható I gráfra az I_3-ból lett I_0, az I_2-ből I_1, az I_4-ből I_2 és az I_1-ből I_3. Azt mondjuk, hogy: I_j-nél előremutatás van, ha létezik olyan m, amelyre

$$I_j \to I_m, \;\; 0 \leq j < k-2 \text{ és } j+2 \leq m \leq k-2,$$

illetve hátramutatás van, ha létezik olyan $1 \leq m \leq j$ szám, amelyre $1 \leq j \leq k-2$ és $I_j \to I_m$ (a 4.5. ábrán hátramutatás van I_3-nál, mert van irányított él I_2-re).



4.5. Ábra

A bizonyítás további része a következő tulajdonságokon alapul:

2.1. Tulajdonság. *Ha valahol előremutatás van, akkor szerkeszthető* $(k-1)$ *-nél rövidebb páratlan hosszúságú egyszerű kör.*

Ebben az esetben az indukciós feltevés szerint a bizonyítás befejeződik. Tehát a továbbiakban feltételezhetjük, hogy nincs egyetlen előremutatás sem.

2.2. Tulajdonság. I_0 *-tól indulva minden újabb intervallumnak kell legyen közös pontja valamelyik előbbivel. (Ez indukcióval látható be.)*

2.3. Tulajdonság. I_0 *-tól indulva minden lépésben az* x_0 *egy új iteráltját kell elérni.*

Legyen

$$a = \min\left\{ f^l(x_0) \,\middle|\, l = \overline{1,k} \right\};$$

$$b = \max\left\{ f^l(x_0) \,\middle|\, l = \overline{1,k} \right\}.$$

Megvizsgáljuk, hogy I_0 az $[a,b]$ -ben hogyan helyezkedik el.

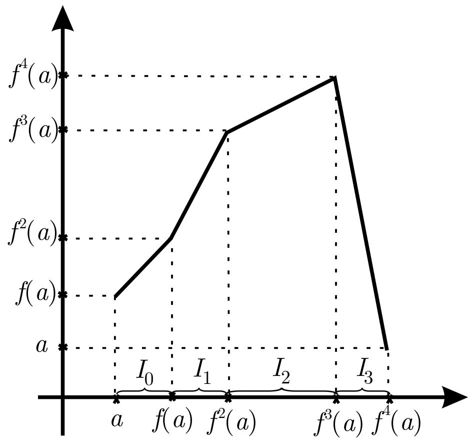
I. eset: $a \in I_0$ vagy $b \in I_0$. A 2. tulajdonság szerint az

$$I^0 \to I^1 \to I^2 \to \cdots \to I^{k-2}$$

intervallumok ebben a sorrendben következnek egymás után. Ahhoz, hogy az

$$I^0 \to I^1 \to I^2 \to \cdots \to I^{k-2} \to I^0$$

relációk érvényesek legyenek, és $(k-1)$ -ig ne legyen visszamutatás (mert akkor ismét van $(k-1)$ -nél rövidebb páratlan hosszúságú egyszerű ciklus), a grafikonnak emelkednie kell (lásd a 4.6. ábrát).



4.6. Ábra

Így az $I^{k-2} \to I^0$ miatt I^{k-2}-nél visszamutatás lesz minden I_j-re, ha $1 \le j < k-2$. Azaz biztosan lesz egy $(k-1)$-nél rövidebb páratlan hosszúságú egyszerű ciklus.

II. eset: I_0 az $[a, b]$ intervallum belsejében van. Ha I_2-nek I_1-gyel van közös pontja, akkor I_3-nak I_2-vel kell közös pontja legyen, stb. (ellenkező esetben visz szamutatás volna I_2- ről I_0-ra és így volna k-nál rövidebb hosszúságú egyszerű ciklus). Így kapunk egy $I_0, I_1, \ldots, I_l$ egymásutáni intervallumsorozatot, ahol I_1 eléri b-t. Tehát I_{l+1}-nek I_0-val kellene közös végpontja legyen, ami szerint I_l-től visszamutatás volna $I_0, I_l, \ldots, I_l$-re. Következésképpen ismét volna $(k-1)$-nél rövidebb páratlan hosszúságú egyszerű ciklus. Az előbbiek alapján a páros indexű intervallumok I_0 egyik oldalán, míg a páratlan indexűek a másik oldalán helyezkednek el. Ebben az esetben I_m-mel érjük el valamelyik végpontot ($m \le k-4$). Ha $m < k-4$, akkor I_m-nél előremutatás van, és így kész is vagyunk. Ha $m = k-4$, akkor I_{k-2}-nél van visszamutatás $I_{k-3}, I_{k-5}, \ldots$-re, és van egy kettő és egy négy hosszúságú ciklusunk. E két ciklusból előállíthatunk tetszőleges $2n$ hosszúságú egyszerű ciklust ($n \ge 1$). Vagyis a 4. állítás helyes.

2.3. Megjegyzés. *Az előbbiekből kitűnik az is, hogy hogyan kell olyan f függvényt szerkeszteni, amelyiknek van $2k+1$ periódusú pontja, de nincs egyetlen $2k_1+1$ periódusú pontja sem, ha $k_1 < k$.*

6. Ha f^{2^i}-nek van k periódusú pontja (k páratlan), akkor f-nek van $2^m k$ periódusú x_0 pontja, valamely $0 < m \le i$-re. Az f és x_0-hoz rendelt I gráf az 1. tulajdonság szerint tartalamaz n hosszúságú egyszerű ciklust, ahol $\dfrac{2^m k}{2} \le n \le 2^m k.$

I. eset. Ha $n > 2^{m-1}k$, akkor a $2^m k$ hosszúságú ciklus egyszerű és felbontható két rövidebb C_1 és C_2 egyszerű ciklusra. Ha ezeket $C_1 - C_1 - C_2 - C_2$ sorrendben járjuk végig, akkor $2^{m+1}k$ hosszúságú egyszerű ciklust kapunk, és általában 2^s-szer a C_1-et, majd 2^s-szer a C_2-t bejárva, $2^{m+s}k$ hosszúságú egyszerű ciklust kapunk, tehát $2^i k$ hosszúságút is szerkeszthetünk.

II. eset. Ha $n = 2^{m-1}k$, akkor az f-nek van $2^{m-1}k$ periódusú x_i pontja, és így áttérhetünk f és x_i I gráfjára. Erre az I gráfra megismételve az előbbi gondolatmenetet vagy az I. eset áll fenn, vagy mégegyszer kicseréljük az I gráfot. A gráfot legtöbb m-szer kicserélve mindenképpen az I. eset áll elő, vagy pedig végül kapunk egy páratlan hosszúságú ciklust, és így a 4. állítás alapján fejezhetjük be a bizonyítást.

7. Ha x az f egy $2^i m$ periódusú pontja, akkor x az f^{2^i}-nek m periódusú pontja, és így az 5. állítás alapján f^{2^i}-nek van n periódusú pontja, ha $n > m$ és n páratlan. Alkalmazva ezután a 6. állítást, következik, hogy f-nek van olyan I gráfja, amely tartalmaz $2n$ hosszúságú egyszerű ciklust, tehát az állítás első fele be van bizonyítva. Másrészt, mivel f^{2^i}-nek a 4. állítás alapján van tetszőleges $2n$ periódusú pontja, így a $f^{2^{i+1}}$-nek van n periódusú pontja minden páratlan n-re. Tehát a 6. alapján a 7. állítás második része is érvényes. Ezzel a 2.21 tételt igazoltuk. □

A továbbiakban kimutatjuk, hogy a Sharkovski rendezés erős a következő értelemben:

2.24. Tétel. *Bármely $m \in \mathbb{N}^*$ esetén létezik olyan $f : I \to I$, melynek van m periódusú pontja, de nincs egyetlen n periódusú pontja sem, ha $n \succ m$.*

Ennek a tételnek is több lépésben végezzük el a bizonyítását.

1. lépés. Ha $m = 2k-1$, akkor értelmezzük az $f_k : [1, 2k-1] \to [1, 2k-1]$ függvényt, amelyre

$$f_k(m) = \begin{cases} k, & \text{ha} \quad m = 1; \\ 2k+1-m, & \text{ha} \quad m = \overline{2,k}; \\ 2k-m, & \text{ha} \quad m = \overline{k+1, 2k-1}, \end{cases}$$

és amely lineáris minden $[l, l+1]$ alakú intervallumon, ahol $l \in \{1, 2, 3, \ldots, 2k-2\}$. Erre a függvényre érvényesek a következő tulajdonságok:

1. Az $\{1, 2, \ldots 2k-1\}$ számok egy n hosszúságú periodikus pályát alkotnak.

2. Ha $l < k$, akkor az előbbi függvénynek nincs $2l-1$ periodusú pontja.

Bizonyítás. A függvény értelmezése alapján

$$\begin{array}{rcl} f_k(1) & = & k \\ f_k^2(1) & = & k+1 \\ f_k^3(1) & = & k-1 \\ f_k^4(1) & = & k+2 \\ f_k^5(1) & = & k-2 \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ f_k^{2l+1}(1) & = & k-l \\ f_k^{2l}(1) & = & k+l \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ f_k^{2k-2}(1) & = & 2k-1 \\ f_k^{2k-1}(1) & = & 1. \end{array}$$

Tehát az $\{1, 2, \ldots, 2k-1\}$ számok valóban egy $m = 2k-1$ hosszúságú pályát alkotnak. Hasonlóan kimutatható, hogy ha $l < k$ és $p \neq k$, akkor az $f_k^{2l-1}([p, p+ +1]) \cap [p, p+1]$ metszet csak $\emptyset$, $\{p\}$ vagy $\{p+1\}$ lehet. Így f_k^{2l-1}-nek csakis k és $k+1$ között lehet fixpontja. Másrészt ebben az intervallumban pontosan egy fixpontja van, mely f_k-nak is fixpontja. Ez abból következik, hogy

$$f_k \text{ csökkenő a } (2, 2k-1) \text{ intervallumon.} \tag{2.34}$$

$$f_k([k, k+1]) = [k-1, k+1] \supset [k, k+1]$$

Tehát f_k-nak van fixpontja k és $k+1$ között. (2.34) alapján f_k-nak egynél több fixpontja nem lehet ebben az intervallumban, tehát pontosan egy fixpontja van k és $k+1$ között.

$$f_k^3([k, k+1]) = [k-2, k+2] \supset [k, k+1]$$

Az előző érvelés fennáll f_k^3-ra is, így f_k-nak nincs három periodusú pontja. Általában felírhatjuk, hogy:

- $f_k^{2l-1}([k, k+1]) = [k-l, k+l] \supset [k, k+1]$;
- f_k^{2l-1} csökkenő a $[k, k+1]$ intervallumon.

Tehát f_k^{2l-1}-nek egyetlen fixpontja van, ami már az f_k-nak is fixpontja. Az előbbiek alapján f_k-nak nincs $(2l-1)$ periódusú pontja, ha $2l-1 < 2k-1$. $\square$

2. lépés. Ha m kettő hatvány, akkor megszerkesztjük a $(g_n)_{n \geq 1}$ függvénysorozatot, ahol $g_0(x) = x$, $\forall x \in [0, 1]$ és

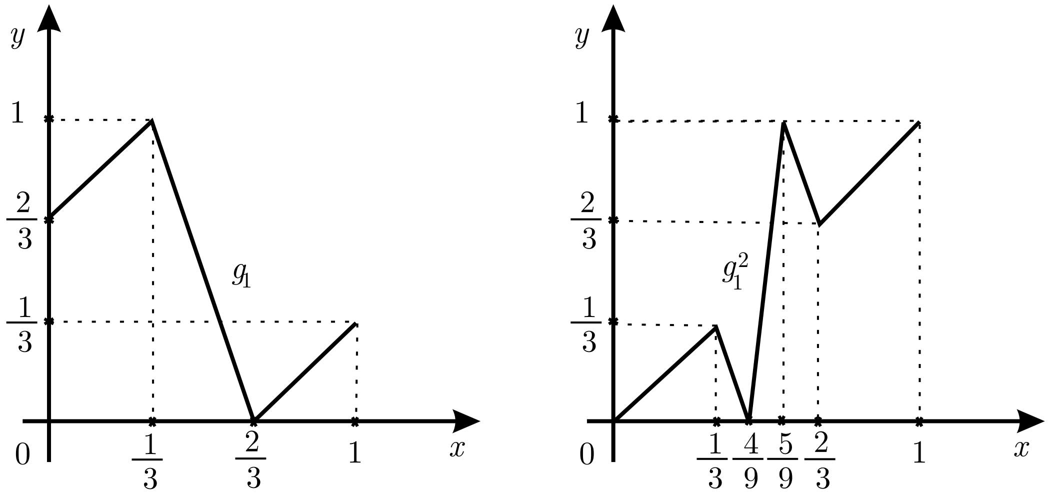
$$g_{n+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3} + \dfrac{g_n(3 \cdot x)}{3}, & \text{ha } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{3}; \\ (2 + g_n(1)) \cdot \left(\dfrac{2}{3} - x\right), & \text{ha } \dfrac{1}{3} \leq x \leq \dfrac{2}{3}; \\ x - \dfrac{2}{3}, & \text{ha } \dfrac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Kimutatjuk, hogy g_n-nek van 2^n periódusú pontja a [0,1] intervallumban, és minden pontja végül periodikus (valamely 2^i periódussal, ahol $0 \leq i \leq n$).

Bizonyítás. $n = 0 \Rightarrow g_0(x) = x$, $\forall x \in [0, 1]$, tehát mindkét tulajdonság teljesül. $n = 1$ esetén

$$g_1(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3} + x, & \text{ha } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{3}; \\ 2 - 3 \cdot x, & \text{ha } \dfrac{1}{3} \leq x \leq \dfrac{2}{3}; \\ x - \dfrac{2}{3}, & \text{ha } \dfrac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Tehát bármely $x \neq \frac{1}{2}$, $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ pont iteráltjai átkerülnek a $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ vagy a $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ intervallumba, és így minden ilyen x pont végül periodikus pont lesz (de nem periodikus, mert az eredeti pontot nem kaphatjuk vissza). A $\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ halmaz minden pontja 2 periódusú.



4.7. Ábra

Általában $g_{n+1} : [0,1] \to [0,1]$ folytonos és egyetlen fixpontja van az $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ intervallumon, melyet jelöljünk x_0-val. Mivel ezen az intervallumon g_{n+1} grafikonja egy szakasz, melynek meredeksége nem nagyobb, mint -2, az x_0-tól különböző pontok iteráltjai előbb vagy utóbb a $\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ halmazba kerülnek. Így elégséges kimutatni, hogy e halmaz minden pontja periodikus, és periódusa $(n+1)$-nél kisebb hatványa kettőnek. Mivel

$$g_{n+1}\left(\left[0, \frac{1}{3}\right]\right) \subseteq \left[\frac{2}{3}, 1\right] \quad \text{és} \quad g_{n+1}\left(\left[\frac{2}{3}, 1\right]\right) \subseteq \left[0, \frac{1}{3}\right],$$

g_{n+1}-nek páratlan periódusú pontja nincs. Másrészt a

$$g_{n+1}^2(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot g_n(3x), & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}; \\ \frac{2}{3} + \frac{g_n(3x-2)}{3}, & \text{ha } \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

azonosságból következik, hogy az x pontosan akkor $2p$ periódusú pontja g_{n+1}-nek, ha p periódusú pontja g_n-nek. Tehát az állításunk igaz.

3. lépés. Ha $m = 2^i(2k-1)$, ahol $i \geq 1$ és $k \geq 3$ páratlan, akkor a következő eljárással szerkeszthetünk példát (a „gyökvonás egy eléggé szokatlan módszere” [35]): Legyen $f_k : [a,b] \to [a,b]$ az első esetben vizsgált függvény és $[c,d]$ egy olyan intervallum, amelyre $a < b < c < d$. Mivel $[a,b]$ és $[c,d]$ homeomorfak, létezik olyan

$g:[a,b]\to[c,d]$ folytonos függvény, amelynek van inverze, és az inverze is folytonos. Értemezzük az $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ folytonos függvényt a következőképpen:

$$r(x)=\begin{cases} g\left(f(x)\right), & \text{ha } x\in[a,b];\\ g^{-1}(x), & \text{ha } x\in[c,d];\\ \text{lineáris}, & \text{ha } x\in[b,c];\\ \text{konstans}, & \text{egyébként.}\end{cases}$$

Erre a függvényre

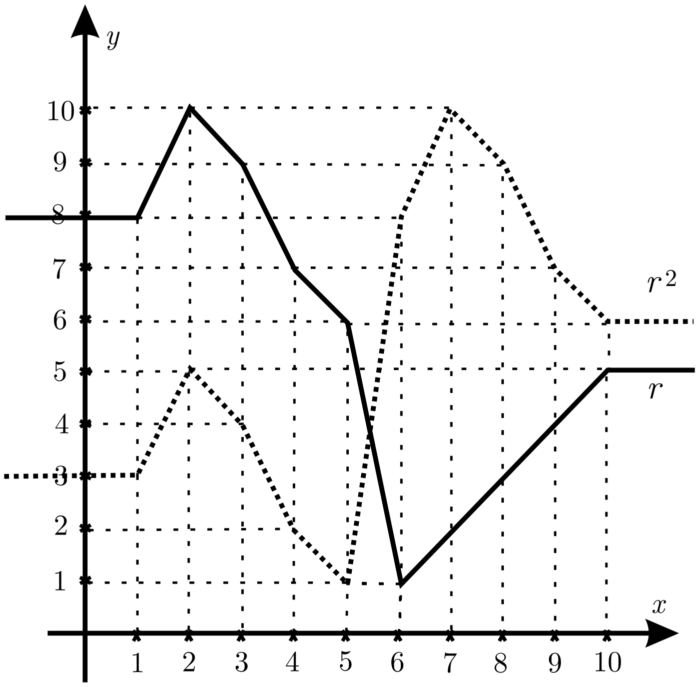
$$r^2(x)=\begin{cases} f(x), & \text{ha } x\in[a,b];\\ \left(g\circ f\circ g^{-1}\right)(x), & \text{ha } x\in[c,d];\\ h(x), & \text{ha } x\in[b,c];\\ \text{konstans}, & \text{egyébként.}\end{cases}$$

Belátható, hogy r^2-nek egyetlen fixpontja van $[b,c]$-n. Ugyanakkor, ha x r-nek periodikus pontja, akkor x periódusa $2l$, és f-nek van l periódusú pontja. Tehát az f_k tulajdonságai alapján r-nek van $2(2k-1)$ periódusú pontja, de nincs $2(2m-1)$ vagy páratlan periódusú pontja, ha $m<k$. Ezt az eljárást többször megismételve eljutahatunk tetszőleges $2^j(2k-1)$-ig, ami azt igazolja, hogy a Sharkovski tétel a már megjegyzett értelemben véve erős. $\square$

A szerkesztés alaposabb megértésének kedvéért vizsgáljunk meg egy konkrét esetet. Legyen $k=3$, $f:[1,5]\to[1,5]$ és f lineáris az $[n,n+1]$ intervallumokon ($n\in$ $\in\{1,2,3,4\}$). $f(1)=3$, $f(2)=5$, $f(3)=4$, $f(4)=2$, $f(5)=1$ (az f grafikus képe a 4.5. ábrához hasonlít). Ha $[c,d]=[6,10]$ és $g(x)=x+5$, akkor

$$r(x)=\begin{cases} 8, & \text{ha } x<1;\\ f(x)+5, & \text{ha } x\in[1,5];\\ -5x+31, & \text{ha } x\in[5,6];\\ x-5, & \text{ha } x\in[6,10];\\ 5, & \text{ha } x>10.\end{cases}$$

Mivel az $[5,6]$ intervallumon r elég meredek, az r fixpontján kívül az $[5,6]$ intervallum minden pontjának iteráltjai előbb-utóbb az $[5,6]$ intervallumon kívül kerülnek, és így r-nek nem lesz periodikus pontja az $[5,6]$ intervallumban (az x fixpontján kívül). Tehát r-nek valójában csak 10 és 10-nél kisebb (a Sharkovski rendezés szerint) periódussal rendelkező periodikus pontjai vannak.



4.8. Ábra

2.4. Megjegyzés. *T. Y. Li és J.A. Yorke ([45])-ben valamivel gyengébb feltétel mellett kapták meg a 2.22 tételt, sőt még részletesebb eredményt is kaptak.*

2.25. Tétel. *(Li és Yorke, [45]) Ha $f : I \to I$ $(I \subseteq \mathbb{R}$ egy intervallum) egy folytonos függvény és $a \in I$ egy olyan pont, amelyre teljesül*

$$f^3(a) \le a < f(a) < f^2(a) \tag{2.35}$$

vagy

$$f^3(a) \ge a > f(a) > f^2(a),$$

akkor bármely $k \in \mathbb{N}^*$-ra van k periódusú pont az I intervallumban, és létezik olyan $S \subset [a, b]$, amelyre

1. *ha $p, q \in S$, $p \ne q$, akkor*

$$\limsup_{n\to\infty} |f^n(p) - f^n(q)| > 0$$

és

$$\liminf_{n\to\infty} |f^n(p) - f^n(q)| = 0,$$

2. *ha $p \in S$ és $q \in I$ egy periodikus pont, akkor*

$$\limsup_{n\to\infty} |f^n(p) - f^n(q)| > 0.$$

2.5. Megjegyzés. *A második tulajdonságból következik, hogy S-ben nincs még asszimptotikusan periodikus pont sem.*

2.4. Értelmezés. *A kaotikus függvényeknek több értelmezése lehetséges, egyelőre a $T : I \to I$ függvényt nevezzük kaotikusnak, ha van legalább egy 3 periódusú pontja.*

Kaotikus függvények tulajdonságait vizsgálva P. E. Kloeden ([42]) arra a következtetésre jutott, hogy ezek a függvények $C(I)$-ben sűrűek, ha a Csebisev normát tekintjük. Vagyis minden I-t I-re képező folytonos függvény közelében van kaotikus függvény, ha I kompakt intervallum.

Ezt pontosítva kijelenthetjük a következő tételt:

2.26. Tétel. *(Kloeden[103] tétele, [43]) Ha $f \in C(I)$ (I kompakt intervallum) és $\varepsilon > 0$ egy tetszőleges szám, akkor létezik egy olyan $g \in C(I)$ kaotikus függvény, amelyre*

$$\|f - g\| < \varepsilon,$$

ahol

$$\|f - g\| = \max_{x \in I} |f(x) - g(x)|.$$

A bizonyítás egyszerűbb, mint azt előre gondolnánk, és az alapötlete mindössze annyi, hogy a kaotikussághoz elégséges, ha a függvény egy nagyon kis intervallumon kaotikus. Így f-et csak egy kis intervallumon fogjuk módosítani.

Bizonyítás. Mivel I kompakt és $f : I \to I$, f-nek kötelező módon van fixpontja I-n. Jelöljük ezt x^*-gal. Aszerint, hogy ez a fixpont az intervallum felső végpontja vagy nem, két esetet különböztetünk meg.

I. eset. $x^* \neq b$. A folytonosság alapján bármely $\varepsilon > 0$-ra létezik olyan $\delta = \delta(x^*, \varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$, hogy ha $x \in [x^*, x^* + \delta]$, akkor $|f(x) - x^*| < \frac{\varepsilon}{2}$. Legyen

$$\Lambda^* : \left[x^*, x^* + \frac{\delta}{2}\right] \to \left[x^*, x^* + \frac{\delta}{2}\right]$$

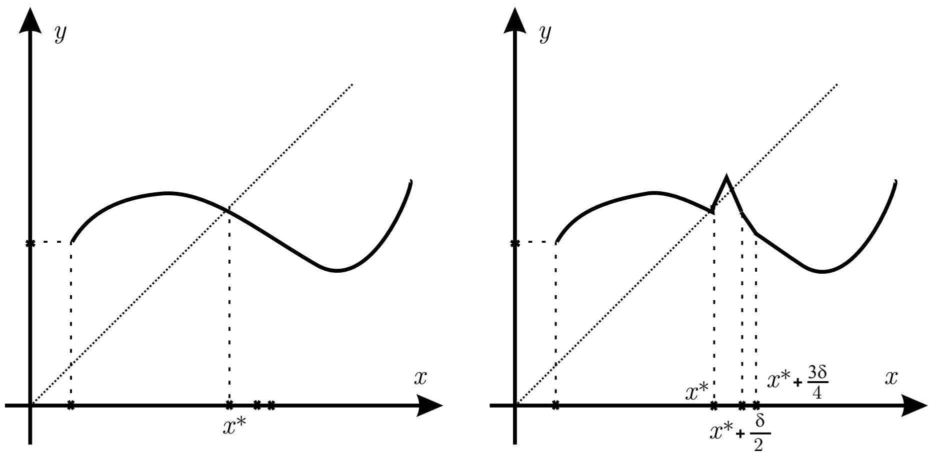
$$\Pi : \left[x^* + \frac{\delta}{2}, x^* + \frac{3\delta}{4}\right] \to I$$

$$\Lambda^*(x) = \begin{cases} 2x - x^*, & \text{ha } x^* \le x \le x^* + \dfrac{\delta}{4} \\ -2x + 3x^* + \delta, & \text{ha } x^* + \dfrac{\delta}{4} \le x \le x^* + \dfrac{\delta}{2} \end{cases}$$

$$\Pi(x) = x^* + 2(2x - 2x^* - \delta) \cdot \frac{f\left(x^* + \frac{3\delta}{4}\right) - x^*}{\delta}.$$

[103] Peter E. Kloeden, kloeden@math.uni-frankfurt.de

A Π grafikus képe az $\left(x^* + \dfrac{\delta}{2}\right)$ és $\left(x^* + \dfrac{3\delta}{4}, f\left(x^*\right) + \dfrac{3\delta}{4}\right)$ pontokat összekötő szakasz, tehát ez folytonosan illeszti össze a Λ^* és f grafikonját.



4.9. Ábra

Valamint

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in I - \left[x^*, x^* + \dfrac{3\delta}{4}\right]; \\ \Lambda^*(x), & \text{ha } x \in \left[x^*, x^* + \dfrac{\delta}{2}\right]; \\ \Pi(x), & \text{ha } x \in \left[x^* + \dfrac{\delta}{2}, x^* + \dfrac{3\delta}{2}\right]. \end{cases}$$

A Λ^* kaotikus, mert van három főperiódusú pontja (például az $x^* + \dfrac{\delta}{7}$), tehát a g is kaotikus.
Másrészt a $g \in C\left(I\right)$ és

$$|f - g| = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in I - \left[x^*, x^* + \dfrac{3\delta}{4}\right]; \\ \left|f(x) - \Lambda^*(x)\right|, & \text{ha } x \in \left[x^*, x^* + \dfrac{\delta}{2}\right] = I_1; \\ \left|f(x) - \Pi(x)\right|, & \text{ha } x \in \left[x^* + \dfrac{\delta}{2}, x^* + \dfrac{3\delta}{2}\right] = I_2. \end{cases}$$

Innen következik, hogy

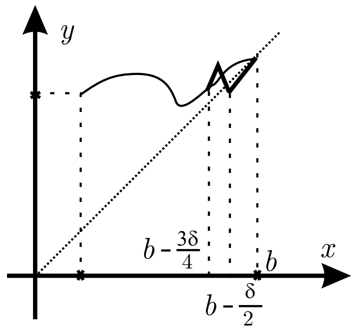
$$\|f(x) - g(x)\| = \left\{\max\left|f(x) - \Lambda^*(x)\right|, \max\left|f(x) - \Pi(x)\right|\right\}$$

$$A = \max_{x \in I_1} |f(x) - x^*| + \max_{x \in I_1} |x^* - \Lambda^*(x)|$$

$$B = \max_{x \in I_2} |f(x) - x^*| + \max_{x \in I_2} |x^* - \Pi(x)|$$

$$\begin{aligned}\|f(x)-g(x)\| &= \{\max|f(x)-\Lambda^*(x)|\,,\max|f(x)-\Pi(x)|\} \leq \\ &\leq \max\{A,B\} \leq \\ &\leq \max\left\{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4},\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right\}=\varepsilon.\end{aligned}$$

II. eset. $x^*=b$
A 4.10. ábrának megfelelő szerkesztést végezzük.



4.10. Ábra

Hasonló becslések alapján belátható, hogy a szerkesztett függvény megfelel. □

Az előbbiek alapján látható, hogy a nem kaotikus függvények strukturális instabilitást mutatnak a kaotikus viselkedésre nézve. Feltevődik az a kérdés is, hogy mi történik a kaotikus függvények perturbálása során? Erre vonatkoznak P. J. Butler és G. Pianigiani következő eredményei ([18]).

2.27. Tétel. *(P. G. Butler*[104] *és G. Pianigiani*[105] *tétele, [18])*

1. *A három periódusú pontok létezése néha kis perturbációkkal megszüntethető.*
2. *Ha $f\in C(I)$ és f-nek van három periódusú pontja, akkor létezik olyan $\varepsilon>0$, amelyre bárhogyan is vennénk a*

$$\|F-f\|<\varepsilon$$

egyenlőtlenséget teljesítő $F\in C(I)$ függvényt, az F-nek lesz 5 periódusú pontja.

Bizonyítás. Az első állítást beláthatjuk a következő függvény segítségével:

$$f_\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\varepsilon, & \text{ha } x\in[0,\varepsilon]\,;\\ x+\dfrac{1}{2}, & \text{ha } x\in\left[\varepsilon,\dfrac{1}{2}\right];\\ 2-2x, & \text{ha } x>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

[104]Geoffrey J. Butler, -1986
[105]Giulio Pianigiani, giulio@ds.unifi.it

Ellenőrizhető, hogy f_ε-nak nincs három periódusú pontja, ha $\varepsilon > 0$.

A második állítás igazolásához jelöljük $x_1 < x_2 < x_3$-mal az $f : I \to I$ folytonos függvény három hosszúságú periodikus pályáját. Feltételezhetjük, hogy $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ és $x_1 = f(x_3)$. Létezik olyan $y_1 \in [x_1, x_2]$, amelyre $f(y_1) = x_2$, és az $[y_1, x_2]$ intervallumban f-nek nincs fixpontja. Így

$$f^2([y_1, x_2]) \supset f([x_2, x_3]) \supset [x_1, x_3],$$

tehát létezik $y_2 \in [x_1, x_2]$ úgy, hogy

$$f^2(y_2) = x_2 \text{ és } y_2 \neq y_1,\ y_2 \neq x_2.$$

Továbbá

$$\begin{aligned} f^2(y_1) &= x_3 \\ f^2(x_2) &= x_1 \end{aligned}$$

$$f^3([y_2, x_2]) \supset f([x_1, x_2]) \supset [x_2, x_3].$$

Ebből következik, hogy

$$f^4([y_2, x_2]) \supset f([x_2, x_3]) \supset [x_1, x_3]$$

(2.36)
$$f^5([y_2, x_2]) \supset f([x_1, x_3]) \supset [x_2, x_3].$$

Az előbbi tulajdonság alapján megállapítható olyan ε_1 küszöbszám, amelyre ha $\|F - f\| \leq \varepsilon_1$, akkor F^5 a f^5-höz hasonlóan az $[y_2, x_2]$ intervallumot egy nála hosszabb, őt tartalmazó $[u, v]$ intervallumra képezi. Így F^5-nek $[y_2, x_2]$-ben van fixpontja. Másrészt mivel f-nek $[y_2, x_2]$-ben nincs fixpontja, választható olyan $\varepsilon \leq \varepsilon_1$, hogy F-nek se legyen $[y_2, x_2]$-ben fixpontja ([37]). Ez az ε már megfelel az előbbi két tulajdonság szerint. □

4.3 Periodikus függvények

Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt *periodikusnak* nevezzük, ha létezik olyan nullától különböző szám, amelyre $f(x) = f(x + a)$, bármely $x \in \mathbb{R}$-re.

3.1. Gyakorlat. *(Hermite[106]-féle azonosság) Bizonyítsuk be, hogy ha $n \in \mathbb{N}^*$, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén*

(3.1)
$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx],$$

ahol $[t]$ a t szám egész része.

[106] Charles Hermite, 1822-1901

Megoldás. Az

$$f(y) := [y] + \left[y + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[y + \frac{n-1}{n}\right] - [ny]$$

összefüggéssel értelmezett függvény jól értelmezett az $\mathbb{R}$-en és periodikus, mert

$$f(y) = f\left(y + \frac{1}{n}\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Másrészt, ha $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right)$, akkor $f(x) = 0$, tehát a periodicitás alapján $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. $\triangle$

3.2. Gyakorlat. *Bizonyítsd be, hogy ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény periodikus, akkor van legalább egy fixpontja.*

Megoldás. Ha p egy periódusa f-nek, akkor $f(x+p) = f(x)$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Az f leszűkítése a $[0, p]$ intervallumra korlátos, tehát az f is korlátos (ugyanazokat az értékeket veszi fel, mint a $[0, p]$-n). Így a 2.9-es gyakorlat alapján f-nek van legalább egy fixpontja. $\triangle$

3.3. Gyakorlat. *Bizonyítsd be, hogy ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényre $f(x) = f(x + 1/n)$, minden $x \in \mathbb{Q}$ és $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, akkor f állandó.*

Megoldás. A matematikai indukció módszerével igazolható, hogy $f(x) = f(x+m/n)$, minden $x \in \mathbb{Q}$ és $m, n \in \mathbb{N}^*$ esetén. $x = 0$-ra az $f(\pm m/n) = f(0)$, bármely $m, n \in \mathbb{N}^*$ összefüggéshez jutunk. Tehát $f(x) = f(0)$, minden $x \in \mathbb{Q}$-ra. Ha $x_0 \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor létezik olyan (x_n) racionális számsorozat, amelynek határértéke x_0, és így $f(0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, tehát f állandó. $\triangle$

4.4 Darboux tulajdonságú függvények

A 170. oldalon értelmeztük a Darboux tulajdonságú függvényeket.

Ha minden $a, b \in I$, $a < b$ és minden λ-ra az $f(a)$ és $f(b)$ közt létezik $c \in]a, b[$ úgy, hogy $f(c) = \lambda$, akkor f-et Darboux tulajdonságúnak nevezzük. Ebben a paragrafusban néhány ekvivalens tulajdonságot ismertetünk és a Darboux tulajdonságú függvények tulajdonságait vizsgáljuk.

Megjegyzés. Geometriailag ez azt jelenti, hogy minden $a, b \in I$, $a < b$ és minden λ-ra az $f(a)$ és $f(b)$ közt az $y = \lambda$ egyenletű egyenes legalább egy pontban metszi az f $]a, b[$-re való leszűkítésének grafikus képét. $\triangle$

4.1. Tulajdonság. *Ha $f : I \to \mathbb{R}$ egy függvény, akkor az alábbi állítások egyenértékűek:*

(a) *f Darboux tulajdonságú;*

(b) *ha* $J \subset I$ *intervallum, akkor* $f(J)$ *is intervallum;*

(c) *ha* $a, b \in I$, $a < b$, *akkor* $f([a,b])$ *egy intervallum.*

Bizonyítás. (a) $\Longrightarrow$ (b). Minden $y_1 = f(t_1)$, $y_2 = f(t_2) \in f(J)$ és $\lambda \in]y_1, y_2[$ esetén (feltételezhetjük, hogy $y_1 < y_2$) az (a) alapján létezik $c \in]t_1, t_2[$ úgy, hogy $\lambda = f(c)$. Mivel J intervallum és $t_1, t_2 \in J$, következik, hogy $c \in J$, tehát $\lambda = f(c) \in f(J)$. Így $f(J)$ is intervallum.

(b) $\Longrightarrow$ (c) nyilvánvaló.

(c) $\Longrightarrow$ (a). Ha $J = [a,b]$, ahol $a, b \in I$, $a < b$ és λ az $f(a)$ és $f(b)$ közt van, akkor a feltétel alapján $\lambda \in f([a,b])$. Eszerint létezik $c \in [a,b]$ úgy, hogy $\lambda = f(c)$. Látható, hogy $c \notin \{a, b\}$ és $\lambda = f(c)$, tehát f Darboux tulajdonságú I-n. □

4.1. Következmény. *Ha* $f : I \to \mathbb{R}$ *és* $g : f(I) \to \mathbb{R}$ *Darboux tulajdonságú függvények, akkor a* $g \circ f$ *is Darboux tulajdonságú.*

Bizonyítás. Ha f, g Darboux tulajdonságú és J egy részintervalluma I-nek, akkor a $(g \circ f)(J) = g(f(J))$ halmaz is intervallum, tehát a 4.1-es tulajdonság alapján $g \circ f$ is Darboux tulajdonságú. □

4.2. Következmény. *Ha az* $f : I \to \mathbb{R}$ *Darboux tulajdonságú függvény értékkészlete legfeljebb megszámlálható, akkor* f *állandó függvény.*

Bizonyítás. $f(I)$ intervallum és a feltétel alapján legfeljebb megszámlálható. Ha $|f(I)| \neq 1$, akkor $f(I)$ megszámlálhatatlan lenne, ezért csak az lehetséges, hogy $|f(I)| = 1$. Ebben az esetben f állandó. □

4.3. Következmény. *Ha az* $f : I \to \mathbb{Q}$ *függvény folytonos, akkor állandó.*

Bizonyítás. Ha f folytonos, akor Darboux tulajdonságú, és így az előbbi következmény alapján f állandó. □

4.4. Következmény. *Az* $f : I \to \mathbb{R}$ *Darboux tulajdonságú függvény pontosan akkor injektív, ha szigorúan monoton.*

Bizonyítás. Elégségesség. Ha f szigorúan monoton, akkor injektív.

Szükségesség. Ha $f : I \to \mathbb{R}$ Darboux tulajdonságú és injektív, akkor a lehetetlenre való visszavezetést használjuk. Ha f nem szigorúan monoton, akkor létezik $t_1 < t_2 < t_3$ úgy, hogy $f(t_1) < f(t_2) > f(t_3)$ vagy $f(t_1) > f(t_2) < f(t_3)$. Mindkét esetben hasonló gondolatmenetet alkalmazhatunk, ezért csak az első esetet tárgyaljuk. Két alesetet különböztetünk meg:

• $f(t_1) < f(t_3) < f(t_2)$. A Darboux tulajdonság alapján létezik $c \in]t_1, t_2[$ úgy, hogy $f(c) = f(t_3)$. Ez ellentmond az injektivitásnak.

•• $f(t_3) < f(t_1) < f(t_2)$. A Darboux tulajdonság alapján létezik $c \in]t_2, t_3[$ úgy, hogy $f(c) = f(t_1)$. Ez is ellentmond az injektivitásnak.

Az előbbi ellentmondások alapján a tulajdonság bizonyítása teljes. □

4.5. Következmény. *Ha $f : I \to \mathbb{R}$ Darboux tulajdonságú, akkor tetszőleges $J \subset I$ esetén az f-nek J-re való leszűkítése is Darboux tulajdonságú.*

Bizonyítás. A 4.1 tulajdonság (ii) alpontjából következik. □

4.2. Tulajdonság. *Ha $f : I \to \mathbb{R}$ Darboux tulajdonságú, akkor*

(a) $|f|$, f^2 *és* $\sqrt{|f|}$ *is Darboux tulajdonságú;*

(b) *ha $f(t) \neq 0$, minden $t \in I$-re, akkor $1/f$ is Darboux tulajdonságú.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 4.1-es következményt az f-re, és rendre a $g_1(t) = |t|$, $g_2(t) = t^2$, $g_3(t) = \sqrt{|t|}$, illetve $g(t) = 1/t$ függvényekre. □

Megjegyzés. Az

$$f(t) = \begin{cases} \sin \frac{1}{t}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} -\sin \frac{1}{t}, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

függvények Darboux tulajdonságúak, de az

$$(f+g)(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

összegük nem az. Belátható, hogy a szorzatuk sem Darboux tulajdonságú. △

4.6. Következmény. *Ha $f : I \to \mathbb{R}$ Darboux tulajdonságú, akkor f-nek nincs elsőfajú szakadási pontja.*

Bizonyítás. A lehetetlenre való visszavezetés módszerét használjuk. Ha x_0 elsőfajú szakadási pontja az f-nek, akkor feltételezhetjük, hogy $f(x_0-) = l_1 < l_2 = f(x_0+)$. A határérték értelmezése alapján az $\varepsilon = \frac{l_2 - l_1}{3} > 0$ valós számra létezik olyan $\delta > 0$, amelyre teljesülnek a következő implikációk:

$$x_0 - \delta < x < x_0 \Longrightarrow f(x) \in [l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon]\,,$$

$$x_0 < x < x_0 + \delta \Longrightarrow f(x) \in [l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon]\,.$$

Ez alapján az $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ intervallum képe nem intervallum, tehát f nem Darboux tulajdonságú. □

4.1. Tétel. (Sierpinski[107]) *Minden $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény előállítható két Darboux tulajdonságú függvény összegeként.*

[107]Wacław Sierpinski, 1882-1969

Bizonyítás. Előbb megszerkesztünk egy olyan $h : (0,1) \to (0,1)$ függvényt, amelyet ha leszűkítünk egy tetszőleges $[u,v] \subset (0,1)$ intervallumra, akkor a leszűkítés képtartománya a $(0,1)$ intervallum marad. Ha az $x = 0,x_1x_2\dots x_n\dots$ tört esetén létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{2j}$ határérték, akkor $h(x)$ legyen ez a határérték, ellenkező esetben $h(x)$ legyen $\frac{1}{2}$. Ha $0 \le u < v \le 1$, akkor létezik olyan véges tizedes tört, amelyre

$$u < 0,t_1t_2\dots t_m < 0,t_1t_2\dots t_m + \frac{1}{10^m} < v.$$

Tetszőleges $y \in (0,1)$ esetén tekintjük az $\overline{x} = 0,t_1t_2\dots t_m + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{[jy]-[(j-1)y]}{10^{2[\frac{m}{2}]+2j}}$ valós számot (a szögletes zárójel egészrészt jelöl). A szerkesztés alapján $u < \overline{x} < v$. Másrészt $[jy]-[(j-1)y] \in \{0,1\}$, és így ezek a különbségek az $\overline{x}$ páros indexű számjegyei, tehát írhatjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{x}_{2j} = \lim_{n\to\infty} \frac{[(n-v)y]}{n} = y$$

(v egy rögzített természetes szám, pontosabban az $m/2$ egész része). Így $h(\overline{x}) = y$ és $\overline{x} \in [u,v]$.

A $\varphi : (0,1) \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{2x-1}{1-|2x-1|}$ függvény egy homeomorfizmus (bijektív, folytonos és az inverze is folytonos) a $(0,1)$ intervallum és az $\mathbb{R}$ közt. Az f_1, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \varphi(h(\varphi^{-1}(x)))$ és $f_2(x) = f(x) - f_1(x)$ függvények közül az első Darboux tulajdonságú (mert minden valódi intervallum képtartománya az $\mathbb{R}$). Sajnos a második tetszőleges lehet, ezért a szerkesztés módosításával azt szeretnénk elérni, hogy f_2 is hasonlóan viselkedjen, mint f_1. Ehhez észrevesszük, hogy az $\overline{x}$-ban a páratlan helyeken álló számjegyek mindegyike 0, tehát az f_1-et elégséges csak az ilyen alakú számok segítségével értelmezni. Ezt úgy érhetjük el, hogy bevezetjük a

$$H_1 = \{x \in (0,1) \mid \text{egy idő után } x \text{ minden páratlan indexű számjegye } 0\} \text{ és}$$

$$H_2 = \{x \in (0,1) \mid \text{egy idő után } x \text{ minden páratlan indexű számjegye } 1\}$$

halmazokat, és minden $y \in (0,1)$-re megszerkesztjük az

$$\overline{\overline{x}} = 0,t_1t_2\dots t_m + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{10^{2[\frac{m+1}{2}]+2j+1}} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[jy]-[(j-1)y]}{10^{2[\frac{m}{2}]+2j}}$$

valós számot. Ez szintén az $[u,v]$ intervallumban van, $\overline{\overline{x}} \in H_2$ és $h(\overline{\overline{x}}) = y$. Ezek alapján értelmezhetjük az f_1 és f_2 függvényeket az

$$f_1(x) = \begin{cases} \varphi(h(\varphi^{-1}(x))), & x \in \varphi(H_1) \\ f(x) - f_2(x), & x \in \mathbb{R} \setminus \varphi(H_1) \end{cases} \quad \text{és}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) - f_1(x), & x \in \varphi(H_1) \\ \varphi(h(\varphi^{-1}(x))), & x \in \mathbb{R} \setminus \varphi(H_1) \end{cases}$$

összefüggésekkel. Látható, hogy mindkét függvény értelmezése helyes, és a $H_2 \subset \subset \mathbb{R} \setminus H_1$ bennfoglalás alapján mindkét függvény tetszőleges intervallumra való leszűkítésének a képe az $\mathbb{R}$ ($\overline{\overline{x}} \in H_2$). Így mindkét függvény Darboux tulajdonságú. Másrészt az összegük f, tehát a bizonyítás teljes. □

4.1. Gyakorlat. *Ha az $f : I \to J$ függvény bijektív és Darboux tulajdonságú, akkor $f^{-1} : J \to I$ szintén Darboux tulajdonságú.*

Megoldás. A $J = f(I)$ halmaz egy intervallum és f szigorúan monoton a 4.4-es következmény alapján. Feltételezhetjük, hogy f szigorúan növekvő. Ha $u, v \in J$ és $u < v$, akkor legyen $x = f^{-1}(u)$, $y = f^{-1}(v)$ az ősképük, és λ tetszőleges az x és y közt. f^{-1} is szigorúan monoton, tehát $x < \lambda < y$. Így viszont $z = f(\lambda) \in]u, v[$ és $f^{-1}(z) = \lambda$ alapján f^{-1} Darboux tulajdonságú. △

4.2. Gyakorlat. *Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, akkor létezik olyan $c \in]a, b]$, amelyre*

$$f(c) = \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c}. \tag{4.1}$$

Megoldás. Értelmezzük a

$$g :]a, b[\to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x} - f(x)$$

segédfüggvényt. Ez a függvény Darboux tulajdonságú, és

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty,$$

tehát $g(]a, b[) = \mathbb{R}$. Így létezik olyan $c \in]a, b[$, amelyre $g(c) = 0$. △

4.5 Lipschitz tulajdonságú függvények

Az $f : I \to \mathbb{R}$ függvényt *Lipschitz*[108] tulajdonságúnak nevezzük az I-n, ha létezik nemnegatív L úgy, hogy

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall\, x, y \in I. \tag{5.1}$$

Általában az (X, d) és (Y, ρ) metrikus terek közti $f : X \to Y$ leképezésről azt mondjuk, hogy Lipschitz tulajdonságú, ha létezik olyan $L \in \mathbb{R}$ szám, amelyre $\rho(f(x_1), f(x_2)) \leq L \cdot d(x_1, x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in X$.

[108] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz, 1832-1903

Megjegyzés. Minden Lipschitz tulajdonságú függvény egyenletesen folytonos. $\triangle$

Ha A egy nemüres halmaz és $f : A \to A$ egy tetszőleges függvény, akkor az $x \in A$ pontot az f *fixpontjának* nevezzük, ha $f(x) = x$.

Az (X, ρ) metrikus téren értelmezett $f : X \to X$ függvényt *kontrakciónak* nevezzük, ha létezik $\alpha \in]0, 1[$ úgy, hogy

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \alpha\rho(x, y), \quad \text{bármely } x, y \in X \text{ esetén.}$$

Megjegyzés. Minden kontrakció Lipschitz tulajdonságú, és a kontrakciós állandó kisebb, mint 1. $\triangle$

5.1. Tétel. (Banach[109] fixpont-tétel) *Ha (X, ρ) egy teljes metrikus tér és $f : X \to X$ egy kontrakció, akkor*

1. *az f-nek pontosan egy fixpontja van X-ben (jelöljük x^*-gal);*
2. *bármely $x_0 \in X$ esetén az $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$ rekurzióval értelmezett sorozat konvergens és határértéke x^*;*
3. *ha $n \geq 1$, akkor $\rho(x_n, x^*) \leq \dfrac{L^n}{1-L} \cdot \rho(x_0, x_1)$, ahol L az f Lipschitz állandója.*

Bizonyítás. Ha $x_0 \in X$ tetszőleges elem, akkor az $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots$ rekurzióval értelmezett sorozatra

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq L\rho(x_n, x_{n-1}) \leq \cdots \leq L^n\rho(x_1, x_0),$$

és így a háromszög egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned} \rho(x_{n+p}, x_n) &\leq \rho(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \cdots + \rho(x_{n+1}, x_n) \leq \\ &\leq (L^{n+p-1} + L^{n+p-2} + \cdots + L^n)\rho(x_1, x_0) = \\ &= L^n(\alpha^{p-1} + L^{p-2} + \cdots + 1)\rho(x_1, x_0) \leq \\ &\leq L^n \frac{1}{1-L}\rho(x_1, x_0), \end{aligned}$$

ahol $n \in \mathbb{N}^*$ és $p \in \mathbb{N}^*$. Ez alapján az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozat Cauchy sorozat. A tér teljessége biztosítja a sorozat konvergenciáját, tehát létezik olyan $x^* \in X$, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$. Igazoljuk, hogy x^* fixpontja f-nek. Minden kontrakció folytonos, ezért határértékre térhetünk a rekurzióban, és így az $x^* = f(x^*)$ egyenlőséghez jutunk, tehát x^* valóban fixpont. Ha az előbbi egyenlőtlenségben p-vel tartunk ∞-hez, akkor a

$$\rho(x^*, x_n) \leq L^n \frac{1}{1-L}\rho(x_1, x_0) \tag{5.2}$$

egyenlőtlenséghez jutunk, tehát a bizonyítás teljességéhez csak a fixpont egyértelműségét kell igazolnunk.

[109] Stefan Banach, 1892-1945

Ha x_1^* és x_2^* fixpontok, akkor az $x_1^* = f(x_1^*)$ és $x_2^* = f(x_2^*)$ egyenlőségek alapján

$$\rho(x_1^*, x_2^*) = \rho(f(x_1^*), f(x_2^*)) \leq L \cdot \rho(x_1^*, x_2^*).$$

Ha $\rho(x_1^*, x_2^*) \neq 0$, akkor ez ellentmondás, mert $L < 1$, tehát $\rho(x_1^*, x_2^*) = 0$, és így $x_1^* = x_2^*$. $\square$

Megjegyzés. Látható, hogy minden lehetséges x_0 kezdőpontra ugyanazt az x^* határértéket kapjuk, tehát az előbbi tétel segítségével megközelíthetjük a kontrakciók fixpontjait. $\triangle$

5.1. Következmény. *Ha A nemüres és zárt része az (X, ρ) teljes metrikus térnek, és $f : A \to A$ kontrakció, akkor f-nek pontosan egy fixpontja van A-ban.*

Az előbbi tételben szereplő (x_n) sorozatot *szukcesszív approximációs sorozatnak* nevezzük. A tétel harmadik pontja a konvergencia sebességéről szolgáltat információt (általában az ilyen típusú konvergencia túl lassú).

Példa. Számítsuk ki az

$$x^3 + 2x - 1 = 0 \tag{5.3}$$

egyenlet valós gyökét négy tizedesnyi pontossággal.

Ha az (5.3) bal oldalát $g(x)$-szel jelöljük, akkor ez egy szigorúan növekvő polinomiális függvény, tehát pontosan egy valós gyöke van, mivel

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty.$$

A gyök megközelítésének érdekében előbb fixpont feladattá kell alakítanunk az adott egyenletet:

$$x = \frac{1}{x^2 + 2}. \tag{5.4}$$

Ha ennek az egyenletnek a jobb oldalát $f(x)$-szel jelöljük, akkor látható, hogy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ellenőrizzük az 5.1-es tétel feltételeit. Ha $x, y \in \mathbb{R}$, akkor

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|x + y|}{(2 + x^2)(2 + y^2)} |x - y|.$$

Mivel

$$|t| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2t^2} \leq \frac{2 + t^2}{2\sqrt{2}},$$

írhatjuk, hogy

$$|x + y| \leq |x| + |y| \leq \frac{2 + x^2 + 2 + y^2}{2\sqrt{2}} \leq \frac{(2 + x^2)(2 + y^2)}{2\sqrt{2}}.$$

Így f kontrakció. f csökkenő a $[0,\infty)$ intervallumon, tehát $f([0,1]) = [1/3, 1/2] \subset \subset [0,1]$. Az előbbiek alapján alkalmazható a Banach-féle fixponttétel az $f : [0,1] \to \to [0,1]$ kontrakcióra. Az $x_0 = 0$ választással

$$\begin{aligned} x_1 =& 0,5, \quad x_2 = 0,444444\ldots, \quad x_3 = 0,455056\ldots, \quad x_4 = 0,453088\ldots, \\ x_5 =& 0,453455\ldots, \quad x_6 = 0,453386\ldots, \quad x_7 = 0,453399\ldots, \end{aligned}$$

és így négy számjegynyi pontossággal a gyök $0,4533$. $\triangle$

4.6 Konvex függvények

4.6.1 Konvex függvények

Legyen I egy intervallum. Az $f : I \to \mathbb{R}$ függvényt *konvexnek* nevezzük I-n, ha

(6.1) $$x, y \in I,\ \alpha \in [0,1] \implies f((1-\alpha)x + \alpha y) \le (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y).$$

f-et *szigorúan konvexnek* nevezzük, ha

(6.2) $$x, y \in I,\ \alpha \in [0,1] \implies f((1-\alpha)x + \alpha y) < (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y).$$

Azokat a függvényeket, amelyek konkávak is és konvexek is, *affin* függvényeknek nevezzük.

Megjegyzések. (a) A 4.11. ábrán egy (szigorúan) konvex függvényt láthatunk. Az előbbi értelmezés geometriailag azt jelenti, hogy a grafikus kép minden íve az ívhez tartozó húr alatt helyezkedik el. Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény esetén az AB egyenes egyenlete

$$y(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Ha $\alpha \in [0,1]$ és $\lambda = (1-\alpha)a + \alpha b$, akkor

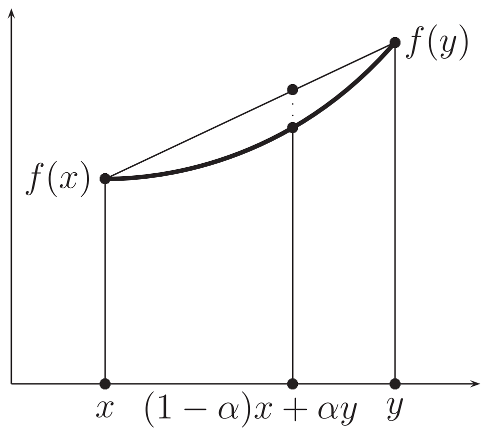
$$f(\lambda) - y(\lambda) = f((1-\alpha)a + \alpha b) - [(1-\alpha)f(a) + \alpha f(b)],$$

tehát a bal oldal pontosan akkor nem negatív, amikor a jobb oldal nem negatív.

(b) Ha értelmezzük az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény *epigráfját* az

$$\operatorname{epi} f = \{(x,\alpha) \mid \alpha \ge f(x),\ x \in I\}$$

egyenlőséggel, akkor az f konvexitásának szükséges és elégséges feltétele az $\operatorname{epi} f$ halmaz konvexitása. $\triangle$



4.11. Ábra: Konvex függvény

6.1. Lemma. (Jensen[110] egyenlőtlenség) *Ha* $f : I \to \mathbb{R}$ *egy konvex függvény, akkor*

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n), \tag{6.3}$$

ha $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n \in I$, *és az* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ *számokra* $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$.

Bizonyítás. $n = 2$ esetén az egyenlőtlenség az értelmezés alapján igaz. Ha $n \geq 3$ és az egyenlőtlenség teljesül $n-1$-re, akkor tetszőleges $x_1, \ldots, x_n \in I$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ esetén a $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$ egyenlőségből következik, hogy $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i/(1-\alpha_n) = 1$. Így

$$f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_n} x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_n} f(x_i),$$

tehát

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) &= f\left((1-\alpha_n)\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_n} x_i + \alpha_n x_n\right) \leq \\ &\leq (1-\alpha_n) f(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_n} x_i) + \alpha_n f(x_n) \leq \\ &\leq (1-\alpha_n)\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_n} f(x_i) + \alpha_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i). \quad \square \end{aligned}$$

6.1. Következmény. *Ha* $f : I \to \mathbb{R}$ *konvex függvény, akkor*

$$f\left(\frac{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}\right) \leq \frac{\alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n)}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}, \tag{6.4}$$

ahol $x_1, \ldots, x_n \in I$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ *és* $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n > 0$.

[110] Johan Ludwig William Valdemar Jensen, 1859-1925

Ha $f : I \to \mathbb{R}$ egy függvény, akkor az

$$s_{f,x_0}(x) = s_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \in I \setminus \{x_0\}$$

függvényt az f *elsőrendű növekményének* nevezzük.

6.1. Tétel. *Ha $f : I \to \mathbb{R}$ konvex függvény, akkor*

(a) *s_{f,x_0} növekvő az $I \setminus \{x_0\}$ halmazon;*

(b) *szigorúan konvex f-re s_{f,x_0} szigorúan növekvő $I \setminus \{x_0\}$-án;*

(c) *$x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ és $\lambda_0 \in]0,1[$ esetén az*

$$f((1-\lambda_0)x_1 + \lambda_0 x_2) = (1-\lambda_0)f(x_1) + \lambda_0 f(x_2)$$

egyenlőtlenségből következik, hogy

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) = (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2), \quad \forall\, \lambda \in [0,1] \text{ és} \tag{6.5}$$

$$f(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2), \quad \forall\, x \in [x_1, x_2]; \tag{6.6}$$

(d) *f Lipschitz tulajdonságú az $\operatorname{int}(I)$ minden kompakt részintervallumán, és f folytonos az $\operatorname{int}(I)$ minden pontjában;*

(e) *az f vagy monoton az $\operatorname{int}(I)$-n vagy létezik olyan $x_0 \in \operatorname{int}(I)$, amelyre az f csökkenő az $]-\infty, x_0[\,\cap I$-n, és növekvő az $]x_0, +\infty\,] \cap I$-n.*

Bizonyítás. (a) Ha $x_1, x_2, x_3 \in I$ és $x_1 < x_2 < x_3$, akkor létezik a $\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \in]0,1[$, amelyre $x_2 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_3$. Az f konvexitása alapján

$$f(x_2) \le \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3). \tag{6.7}$$

Ha ennek az egyenlőtlenségnek mindkét oldalából kivonunk rendre $f(x_1)$-et, $f(x_2)$-t és $f(x_3)$-at, majd beszorozzuk a kapott egyenlőtlenségeket $1/(x_2 - x_1)$-gyel, $(x_3 - x_1)/[(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)]$-vel, illetve $1/(x_3 - x_1)$-gyel, akkor az

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}, \tag{6.8}$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}, \tag{6.9}$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3} \le \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3} \tag{6.10}$$

egyenlőtlenségeket kapjuk. Ha a (6.8)–(6.10) egyenlőtlenségeket a növekmények formájában írjuk fel, akkor a

$$s_{x_1}(x_2) \le s_{x_1}(x_3), \quad s_{x_2}(x_1) \le s_{x_2}(x_3), \quad s_{x_3}(x_1) \le s_{x_3}(x_2) \tag{6.11}$$

egyenlőtlenségekhez jutunk, tehát a növekményfüggvény növekvő.

(b) Ha (6.7)-ben szigorú az egyenlőtlenség, akkor a többi egyenlőtlenség is szigorú, tehát a növekményfüggvény szigorúan növekvő.

(c) Ha létezik olyan $\lambda \in [0,1]$, amelyre

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) < (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2),$$

akkor feltételezhetjük, hogy $\lambda < \lambda_0$ (a másik eset bizonyítása hasonlóan történik). A $\mu = (1-\lambda_0)/(1-\lambda) \in]0,1[$ jelöléssel $\lambda_0 = \mu\lambda + (1-\lambda)\cdot 1$ és $(1-\lambda_0)x_1 + \lambda_0 x_2 = \mu[(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2] + (1-\mu)x_2$, tehát

$$\begin{aligned} f((1-\lambda_0)x_1 + \lambda_0 x_2) &\le \mu f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) + (1-\mu)f(x_2) < \\ &< \mu[(1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) + (1-\mu)f(x_2) = (1-\lambda_0)f(x_1) + \lambda_0 f(x_2). \end{aligned}$$

Ez ellentmond a feltevésnek, tehát (6.5) teljesül.

Ha tetszőleges $x \in [x_1, x_2]$-re $\lambda = (x - x_1)/(x_2 - x_1)$-et helyettesítünk (6.5)-be, akkor következik a (6.6).

(d) Ha $u, x, y, v \in J$ és $u < x < y < v$, akkor a 2.19-es tétel és az (a) alpont alapján

$$\begin{aligned} -\infty < s_u(u+) \le s_u(x) = \frac{f(x) - f(u)}{x - u} &\le \\ \le \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \le \frac{f(y) - f(v)}{y - v} &\le s_v(v+) < +\infty. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Eszerint $|f(y) - f(x)| \le M|x - y|$, ahol $M = \max\{|s_u(u+)|, |s_v(v+)|\}$, tehát f Lipschitz tulajdonságú J-n.

Ha $x_0 \in \operatorname{int}(I)$, akkor létezik olyan kompakt J intervallum, amelyre $x_0 \in \operatorname{int}(J) \subset I$. Így f Lipschitz tulajdonságú J-n. Ebből következik, hogy f folytonos x_0-ban.

(e) Ha $s_x(x+) \ge 0$, valamilyen $x \in \operatorname{int}(I)$-re, akkor (6.12)-ből következik, hogy f növekvő $[x_0, \infty[\, \cap I$-n. Hasonlóan, ha $s_x(x-) \le 0$, valamilyen $x \in \operatorname{int}(I)$-re, akkor f csökkenő $]-\infty, x_0] \cap I$-n. Ha viszont $s_x(x-) \ge 0$, minden $x \in \operatorname{int}(I)$ esetén, akkor f növekvő $\operatorname{int}(I)$-n, és ha $s_x(x+) \le 0$, minden $x \in \operatorname{int}(I)$-re, akkor $s_x(x-) \le 0$, minden $x \in \operatorname{int}(I)$-re, és így f ebben az esetben csökkenő $\operatorname{int}(I)$-n.

Ha létezik $u, v \in \operatorname{int}(I)$ úgy, hogy $u < v$ és $s_u(u+) < 0 < s_v(v+)$, akkor a $z = \inf\{x \in I \mid s_x(x+) \ge 0\}$ szám az $[u, v]$ intervallumban van. Sőt, $s_x(x+) < 0$, minden $x \in I$, $x < z$-re. Így f csökkenő $]-\infty, z] \cap I$-n és növekvő $I \cap [z, \infty[$-n.
□

Ha $f : I \to \mathbb{R}$ egy konvex és nem monoton függvény, akkor a 6.1-es tétel (e) alpontjában megjelenő x_0 pont az f globális minimumpontja I-n. Általában, ha

M egy nemüres halmaz és $f : M \to \mathbb{R}$ egy függvény, akkor a $p \in M$ elemet *globális minimumpontnak* nevezzük, ha $f(p) \leq f(x)$, bármely $x \in M$ esetén.

6.2. Következmény. *Ha $f : I \to \mathbb{R}$ konvex és nem monoton, akkor f-nek létezik I-ben legalább egy lokális minimumpontja.*

Megjegyzés. Láttuk, hogy a konvex függvények az értelmezési tartomány belső pontjaiban folytonosak. Az alábbi példa mutatja, hogy az intervallum végpontjaiban nem biztos, hogy folytonosak.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{0,1\} \\ 0, & x \in]0,1[\,. \end{cases} \qquad \triangle$$

6.2. Tétel. *Egy növekvő konvex függvény és egy konvex függvény összetétele is konvex.*

Bizonyítás. Ha $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ konvex függvény, $g : J \to \mathbb{R}$ növekvő konvex függvény és $f(I) \subset J$, valamint $h = g \circ f$, akkor minden $\lambda \in [0,1]$ és $x, y \in I$ esetén

$$\begin{aligned} h((1-\lambda)x + \lambda y) = g(f((1-\lambda)x + \lambda y)) \leq g((1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)) \leq \\ \leq (1-\lambda)g(f(x)) + \lambda g(f(y)) = (1-\lambda)h(x) + \lambda h(y). \quad \square \end{aligned}$$

6.1. Gyakorlat. Bizonyítsd be, hogy ha f konvex függvény $[a,b]$-n és

$$a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n \leq b,$$

akkor

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1)[f(x_1) + f(x_2)] + (x_3 - x_2)[f(x_2) + f(x_3)] + \ldots \\ + (x_n - x_{n-1})[f(x_{n-1}) + f(x_n)] \leq \\ \leq (x_n - x_1)[f(x_1) + f(x_n)]. \end{aligned} \tag{6.13}$$

4.6.2 Jensen-konvex függvény

Tekintsük az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumot és az $f : I \to \mathbb{R}$ függvényt. f-et *Jensen-konvexnek* vagy *J-konvexnek* nevezzük, ha

$$x, y \in I \implies f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}. \tag{6.14}$$

6.1. Tulajdonság. *Minden $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos J-konvex függvény konvex is.*

Bizonyítás. A (6.14)-ból indukcióval igazolható, hogy

$$f\left(\frac{1}{2^k}(x_1 + \cdots + x_{2^k})\right) \leq \frac{1}{2^k}[f(x_1) + \cdots + f(x_{2^k})], \tag{6.15}$$

minden $k \in \mathbb{N}^*$ és $x_1, \ldots, x_{2^k} \in I$ -re.

Ha $x, y \in I$ és $\alpha \in]0,1[$ rögzítettek, akkor igazoljuk, hogy (6.1) is teljesül.

Előállítjuk α -t diadikus törtként

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \cdots + \frac{\alpha_k}{2^k} + \ldots,$$

ahol $\alpha_i \in \{0,1\}$, minden $i \in \mathbb{N}^*$ -ra. Az

$$\alpha^{(k)} = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \cdots + \frac{\alpha_k}{2^k} = \frac{\alpha_1 2^{k-1} + \cdots + \alpha_k}{2^k} = \frac{\beta_k}{2^k}$$

jelöléssel

$$\lim_{k\to\infty} \alpha^{(k)} = \alpha, \quad 1 - \alpha^{(k)} = \frac{2^k - \beta_k}{2^k}.$$

Ha a (6.15) egyenlőtlenségben

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{\beta_k} = x \quad \text{és} \quad x_{\beta_k+1} = x_{\beta_k+2} = \cdots = x_{2^k} = y,$$

akkor

$$\begin{aligned} f(\alpha^{(k)}x + (1-\alpha^{(k)})y) &= f\Big(\frac{\beta_k x + (2^k - \beta_k)y}{2^k}\Big) \le \\ &\le \frac{\beta_k f(x) + (2^k - \beta_k) f(y)}{2^k} = \alpha^{(k)} f(x) + (1-\alpha^{(k)}) f(y). \end{aligned}$$

Határértékre térve ($k \to \infty$), az f folytonossága alapján következik a kívánt egyenlőtlenség. □

6.3. Következmény. *Az $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény pontosan akkor konvex, ha J-konvex.*

4.7 Korlátos változású függvények

Az $I = [a,b]$ intervallum egy P *felosztása* egy véges $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ponthalmaz, amelyre

$$a = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_n = b.$$

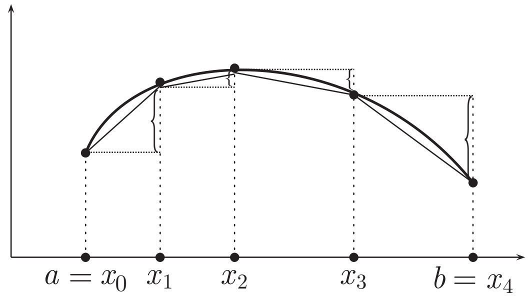
A P felosztás *normája* a

$$\|P\| = \max\{x_{i+1} - x_i \mid i = 0, 1, \ldots, n-1\}$$

szám.

Az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény *varációja* vagy *változása* a P felosztáson a

$$V(f; P) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$



4.12. Ábra: Egy függvény változása

valós szám.

A 4.12. ábrán látható egy függvény változásának mértani jelentése. Intuitíven a P felosztáshoz rendelt változás a felosztáshoz tartozó $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, 2, \ldots, n$ poligonális vonalnak az Oy tengelyre eső vetületének mértéke (a szakaszokat külön-külön vetítjük, és a vetületeket összeadjuk).

7.1. Tulajdonság. *Ha P_1 és P_2 az $[a, b]$ intervallum két felbontása és $P_1 \subset P_2$, akkor $V(f; P_1) \leq V(f; P_2)$.*

Bizonyítás. Elégséges igazolni, hogy $P_2 \setminus P_1 = \{x\}$ esetén teljesül az egyenlőtlenség. Ha $x_i < x < x_{i+1}$, akkor

$$V(f; P_2) - V(f; P_1) = |f(x_{i+1}) - f(x)| + |f(x) - f(x_i)| - |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \geq 0. \quad \square$$

Az előbbi tulajdonság alapján a különböző felosztásokhoz tartozó változásokból alkotott halmaz alulról korlátos. Az f függvény *korlátos változású*, ha a különböző felosztásokhoz tartozó változásokból alkotott halmaz felülről is korlátos. A változások halmazának legkisebb felső korlátját (szuprémumát) nevezzük a függvény *teljes variációjának.* Ezt nemcsak korlátos változású függvényre lehet értelmezni. Tehát

$$\bigvee_a^b f = \sup\{V(f; P) \mid P \text{ az } [a, b] \text{ felosztása}\}.$$

Megjegyzés. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton, akkor az $[a, b]$ tetszőleges P felosztására $V(f; P) = |f(b) - f(a)|$, tehát ebben az esetben $\bigvee_a^b f = |f(b) - f(a)|$. $\triangle$

7.2. Tulajdonság. *Az $\bigvee_a^b f = 0$ egyenlőség csak állandó függvényekre teljesül.*

Bizonyítás. Világos, hogy ha f állandó $[a, b]$-n, akkor tetszőleges P felosztásra $V(f; P) = 0$. Így ebben az esetben $\bigvee_a^b f = 0$.

Ha $\bigvee_a^b f = 0$, akkor tetszőleges $a < x \leq b$ és $P = \{a, x, b\}$ felosztás esetén

$$|f(x) - f(a)| \leq V(f; P) \leq \bigvee_a^b f = 0,$$

tehát f állandó. $\square$

7.1. Tétel. *Ha* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *és* $\alpha \in \mathbb{R}$, *akkor*

(a) $\bigvee_a^b (f + g) \leq \bigvee_a^b f + \bigvee_a^b g$;

(b) $\bigvee_a^b (\alpha f) = |\alpha| \bigvee_a^b f$;

(c) $\bigvee_a^b |f| \leq \bigvee_a^b f$;

(d) $\bigvee_a^b f = \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f$, *bármely* $c \in [a, b]$ *esetén;*

(e) $\bigvee_u^v f \leq \bigvee_a^b f$, *bármely* $[u, v] \subset [a, b]$*-re.*

Bizonyítás. (a) Ha $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ az $[a, b]$ egy felosztása, akkor

$$\begin{aligned} V(f + g, P) &= \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) + g(x_{i+1}) - f(x_i) - g(x_i)| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + \sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \leq \bigvee_a^b f + \bigvee_a^b g. \end{aligned}$$

(b) Az $[a, b]$ tetszőleges $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ felosztására

$$V(\alpha f, P) = |\alpha| V(f, P) \leq |\alpha| \bigvee_a^b f.$$

(c) Ha $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ egy tetszőleges felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, akkor

$$V(|f|, P) = \sum_{i=0}^{n-1} \big| |f(x_{i+1})| - |f(x_i)| \big| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq \bigvee_a^b f.$$

(d) Ha $c \in \{a, b\}$, akkor nincs mit bizonyítani, tehát feltételezhetjük, hogy $a < c < b$. Ha P_1 az $[a, c]$ és P_2 a $[c, b]$ egy felosztása, akkor a $P = P_1 \cup P_2$ halmaz egy felosztása $[a, b]$-nek, tehát

$$V(f, P_1) + V(f, P_2) = V(f, P) \leq \bigvee_a^b f.$$

Ha a bal oldalnak a szuprémumát vesszük, akkor a $\bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f \leq \bigvee_a^b f$ egyenlőséghez jutunk.

Másrészt, ha $c \in (a,b)$ és P egy felosztása az $[a,b]$ intervallumnak, akkor $P_1 = (P \cup \{c\}) \cap [a,c]$ és $P_2 = (P \cup \{c\}) \cap [c,b]$ az $[a,c]$, illetve $[c,b]$ intervallum egy felosztása. Így

$$V(f,P) \leq V(f, P \cup \{c\}) = V(f,P_1) + V(f,P_2) \leq \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f.$$

Ha ebben az egyenlőségben vesszük mindkét oldal szuprémumát, akkor a $\bigvee_a^b f \leq \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f$ egyenlőséget kapjuk, tehát a bizonyítás teljes.

(e) Ha $[u,v] \subset [a,b]$, akkor

$$\bigvee_u^v f \leq \bigvee_a^u f + \bigvee_u^v f + \bigvee_v^b f = \bigvee_a^b f. \quad \square$$

Megjegyzések. (a) Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton, akkor korlátos változású.

(b) Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz tulajdonságú és L a Lipschitz állandója, akkor az $[a,b]$ tetszőleges P felosztására

$$V(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq L \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = L(b-a).$$

Ez alapján $\bigvee_a^b f \leq L(b-a)$, tehát f korlátos változású $[a,b]$-n.

(c) Minden korlátos változású függvény korlátos. Valóban, ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos változású, akkor tetszőleges $x \in [a,b]$-re

$$|f(x)| \leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| \leq |f(a)| + \bigvee_a^b f,$$

tehát f korlátos $[a,b]$-n. $\triangle$

Láttuk, hogy monoton és nem folytonos függvények korlátos változásúak. Az alábbi példa mutatja, hogy léteznek olyan folytonos függvények, amelyek nem korlátos változásúak.

7.1. Példa. *Tekintsük az* $f : [0,2] \to [0,2]$,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{\pi}{x}, & 0 < x \leq 2 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

függvényt és a $[0,2]$ *intervallum* $P = \{0, 2/(2n-1), 2/(2n-3), \ldots, 2/5, 2/3, 2\}$ *felosztását.*

$$V(f,P) = \frac{2}{2n-1} + \left(\frac{2}{2n-3} + \frac{2}{2n-1}\right) + \cdots + \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right) + \left(2 + \frac{2}{3}\right) >$$

$$> \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \tag{7.1}$$

tehát a 92. oldal 1.1 gyakorlata alapján a (7.1) *egyenlőtlenség bal oldala is tart* ∞*-hez, amikor* $n \to \infty$*. Így* f *nem korlátos változású függvény.* $\triangle$

Megjegyzés. Az eddigi tulajdonságok alapján látható, hogy ha f és g korlátos változásúak $[a,b]$-n, akkor $f+g$ is az. Ugyanakkor tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén αf is korlátos változású, tehát az $[a,b]$-n korlátos változású függvények halmaza egy vektorteret alkot. Ebben a vektortérben az

$$\|f\|_v = |f(a)| + \bigvee_a^b f \tag{7.2}$$

egyenlőséggel egy normát is értelmezhetünk. $\triangle$

7.3. Tulajdonság. *Ha* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *egy korlátos vátozású függvény az* $[a,b]$ *intervallumon, akkor létezik olyan* (P_n) *felosztás sorozat, amelyre* $\|P_n\| \to 0$ *és* $V(f,P_n) \to \bigvee_a^b f$.

Bizonyítás. A 20. oldalon igazolt 2.6 tétel alapján minden $\varepsilon = 1/n > 0$ esetén létezik olyan P_n felosztása az $[a,b]$-nek, amelyre

$$\bigvee_a^b f - 1/n < V(f,P_n).$$

Ha Q_n az $[a,b]$ egy olyan felosztása, amelyre $P_n \subset Q_n$ és $\|Q_n\| < 1/n$, akkor

$$\bigvee_a^b f - 1/n < V(f,P_n) \leq V(f,Q_n) \leq \bigvee_a^b f < \bigvee_a^b f + 1/n.$$

Ez alapján $V(f,P_n) \to \bigvee_a^b f$, amikor $n \to \infty$. $\square$

7.2. Tétel. *Ha* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *folytonos és korlátos változású az* $[a,b]$*-n, akkor az* $[a,b]$ *intervallum minden olyan* (P_n) *felosztás sorozatára, amelyre* $\|P_n\| \to 0$*, igaz a*

$$\lim_{n\to\infty} V(f,P_n) = \bigvee_a^b f$$

egyenlőség.

7.3. Tétel. (Jordan[111]) *Az* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *függvény pontosan akkor korlátos változású az* $[a,b]$ *intervallumon, ha felírható két növekvő függvény különbségeként.*

Bizonyítás. Értelmezzük a $V : [a,b] \to \mathbb{R}$, $V(x) = \bigvee_a^x f$ függvényt. Az $f_1(x) = \frac{1}{2}(V(x) + f(x))$ és $f_2(x) = \frac{1}{2}(V(x) - f(x))$ függvények növekvőek, és $f = f_1 - f_2$. $\square$

Az előbi tulajdonságok többsége kiterjeszthető vektor értékű függvényekre is.

[111] Camille Jordan, 1838 - 1922

Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ egy függvény és P az I intervallum egy felosztása, akkor az f-nek a P-re vonatkozó változása (vagy az f változása P-n) a

$$V(f;P) = \sum_{i=0}^{n-1} \|f(x_{i+1}) - f(x_i)\|$$

szám.

7.4. Tulajdonság. *Ha* P_1 *és* P_2 *két felosztása* $I = [a,b]$*-nek és* $P_1 \subset P_2$*, akkor* $V(f;P_1) \le V(f;P_2)$.

Az

$$\bigvee_a^b f = \sup\{V(f;P) \mid P \text{ az } [a,b] \text{ felosztása}\}$$

szimbólumot (ez lehet valós szám vagy ∞) az f *teljes változásának* nevezzük $[a,b]$-n.

7.5. Tulajdonság. *Az* $f : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ *függvényre pontosan akkor teljesül az* $\bigvee_a^b f = 0$ *egyenlőség, ha* f *állandó függvény* $[a,b]$*-n.*

7.4. Tétel. *Ha* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ *és* $\alpha \in \mathbb{R}$*, akkor*

(a) $\bigvee_a^b (f+g) \le \bigvee_a^b f + \bigvee_a^b g$;

(b) $\bigvee_a^b (\alpha f) = |\alpha| \bigvee_a^b f$;

(c) $\bigvee_a^b \|f\| \le \bigvee_a^b f$;

(d) $\bigvee_a^b f = \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f$, *bármely* $c \in [a,b]$ *esetén;*

(e) $\bigvee_u^v f \le \bigvee_a^b f$, *bármely* $[u,v] \subset [a,b]$*-re.*

Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ függvényt pontosan akkor nevezzük *korlátos változásúnak* az $[a,b]$ intervallumon, ha $\bigvee_a^b f < \infty$.

Az alábbi tulajdonság mutatja, hogy a vektorértékű korlátos változású függvények nagyon sok tulajdonsága visszavezetődik a valós értékű korlátos változású függvények tulajdonságaira.

7.5. Tétel. *Az* $f : [a,b] \to \mathbb{R}^k$*,* $f = (f_1, \ldots, f_k)$ *függvény pontosan akkor korlátos változású az* $[a,b]$ *intervallumon, ha az* f_i*,* $i \in \{1, 2, \ldots k\}$ *függvények korlátos változásúak* $[a,b]$*-n. Sőt, igazak a*

$$V(f_i, P) \le V(f, P) \le \sum_{i=1}^{k} V(f_i, P), \quad i \in \{1, \ldots, n\}$$

egyenlőtlenségek.

4.8 Függvénysorozatok határértékének folytonossága

A 121. oldalon a 2.4 példa (b) pontjában láttuk, hogy egy pontonként konvergáló függvénysorozat határfüggvénye nem biztos, hogy folytonos, ha a sorozat tagjai folytonosak egy kompakt intervallumon. A következő tétel egy elégséges feltételt ad a határfüggvény foytonosságára.

8.1. Tétel. *Ha az $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényekből alkotott sorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez az $[a,b]$-n, akkor f is folytonos $[a,b]$-n.*

Bizonyítás. Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ valós számot. Mivel az $(f_n)_n$ sorozat egyenletesen konvergens az $[a,b]$-n, és a határfüggvény f, létezik olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ küszöbszám, amelyre $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon/3$, ha $n \geq n_\varepsilon$ és $t \in [a,b]$. Az f_{n_ε} függvény folytonos, tehát létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, amelyre $|f_{n_\varepsilon}(t) - f_{n_\varepsilon}(t_0)| < \varepsilon/3$, ha $|t - t_0| < \delta$ és $t \in [a,b]$. Így $|t - t_0| < \delta$ és $t \in [a,b]$-re

$$|f(t) - f(t_0)| \leq |f(t) - f_{n_\varepsilon}(t)| + |f_{n_\varepsilon}(t) - f_{n_\varepsilon}(t_0)| + |f_{n_\varepsilon}(t_0) - f(t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

tehát f folytonos, minden $t_0 \in [a,b]$ pontban. □

Megjegyzés. Látható, hogy az előbbi bizonyításban nem használtuk ki, hogy az $[a,b]$ intervallum kompakt. A 8.3 tételben látható, hogy az itt használtnál gyengébb feltételek is elégségesek. △

Ha $I \subset \mathbb{R}$, akkor az $f_n : I \to \mathbb{R}$ függvénysorozatot *Cauchy sorozatnak nevezzük,* ha tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra létezik olyan n_ε, amelyre $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, ha $m, n \geq n_\varepsilon$ és $x \in I$.

8.2. Tétel. *Tekintsük az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumot és az $f_n : I \to \mathbb{R}$ függvénysorozatot. A (f_n) sorozat pontosan akkor konvergál egyenletesen, ha Cauchy sorozat.*

Bizonyítás. Ez tulajdonképpen a 122. oldalon található 2.1 tétel. □

8.3. Tétel. *Az $f : X \to Y$ függvény ((X,d) és (Y,ρ) metrikus terek) pontosan akkor folytonos, ha létezik olyan (f_n) sorozat, amelynek minden tagja folytonos és amely egyenletesen tart f-hez.*

A következő tétel azt mutatja meg, hogy az egyenletes konvergencia és a határfüggvény folytonossága az előbbinél szorosabban is összefügg.

8.4. Tétel. (Dini[112]) *Ha az $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, $f_0(t) \leq f_1(t) \leq f_2(t) \leq \ldots$, minden $t \in [a,b]$-re, és az (f_n) függvénysorozat f pontszerű határfüggvénye folytonos $[a,b]$-n, akkor $(f_n)_n$ egyenletesen tart f-hez az $[a,b]$-n.*

Bizonyítás. Feltételezzük, hogy az $(f_n)_n$ sorozat nem tart egyenletesen az f határfüggvényhez az $[a,b]$-n. Így létezik olyan $\varepsilon > 0$, amelyre minden n^ε természetes

[112] Ulisse Dini, 1845 - 1918

számra találunk $n \geq n^{\varepsilon}$ és $x \in [a,b]$ számot úgy, hogy $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$. Mivel az így választott x érték függ n^{ε}-tól, jelöljük $x_{n^{\varepsilon}} \in [a,b]$-val. Mivel az $(x_{n_k^{\varepsilon}})_k$ sorozat minden tagja az $[a,b]$ intervallumban van és ez az intervallum korlátos, létezik egy konvergens részsorozata. Esetleg újraindexelve a sorozatot megtarthatjuk a jelölést. A feltételek alapján $f(x) \geq f_n(x)$, bármely $x \in [a,b]$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén, tehát

$$f(x_{n_k^{\varepsilon}}) - f_{n_k^{\varepsilon}}(x_{n_k^{\varepsilon}}) \geq \varepsilon. \tag{8.1}$$

Ha az $(x_{n_k^{\varepsilon}})_k$ sorozat határértéke $x_0 \in [a,b]$ ($\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k^{\varepsilon}} = x_0$), akkor tetszőleges $i \in \mathbb{N}$-re az f és f_i folytonossága alapján elég nagy k-ra írhatjuk, hogy

$$|[f(x_{n_k^{\varepsilon}}) - f(x_0)] - [f_i(x_{n_k^{\varepsilon}}) - f_i(x_0)]| = |[f(x_{n_k^{\varepsilon}}) - f_i(x_{n_k^{\varepsilon}})] - [f(x_0) - f_i(x_0)]| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ez alapján

$$f(x_{n_k^{\varepsilon}}) - f_i(x_{n_k^{\varepsilon}}) - [f(x_0) - f_i(x_0)] < \frac{\varepsilon}{2},$$

tehát a (8.1) egyenlőtlenség alapján

$$f(x_0) - f_i(x_0) > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ez viszont ellentmond az $(f_n)_n$ sorozat pontszerű konvergenciájának, tehát a függvénysorozat egyenletesen tart f-hez az $[a,b]$-n. □

Az alkalmazásokban gyakran van szükség a következő tételre:

8.5. Tétel. *Ha $I = [a,b]$ egy zárt intervallum, akkor a $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$ normált tér egy Banach tér.*

Megjegyzés. A $\|\cdot\|_\infty : C(I) \to \mathbb{R}$, $\|f\|_\infty = \max\limits_{x\in I} |f(x)|$ összefüggéssel értelmezett Csebisev norma ekvivalens a $\|\cdot\|_\tau : C(I) \to \mathbb{R}$, $\|f\|_\tau = \max\limits_{x\in I} e^{-\tau(x-a)}|f(x)|$ Bielecki[113] normával, tehát $(C(I), \|\cdot\|_\tau)$ is Banach tér. A differenciál és integrálegyenletek klasszikus elméletében ezeket a tereket nagyon gyakran használjuk.

Bizonyítás. Ha $(f_n)_{n\geq 1}$ egy Cauchy sorozat a $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$ metrikus térben, akkor bármely $\varepsilon > 0$-ra létezik olyan n_ε küszöbszám, amelyre $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$, ha $m, n \geq n_\varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \text{ bármely } x \in [a,b]\text{-re, ha } m,n \geq n_\varepsilon. \tag{8.2}$$

Így az $(f_n(x))_{n\geq 1}$ valós számsorozat minden $x \in [a,b]$ esetén Cauchy sorozat. Ebből következik, hogy minden $x \in [a,b]$-re létezik $f(x) \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Igazolnunk kell, hogy az így értelmezett f függvény is folytonos és az $(f_n)_{n\geq 1}$ sorozat egyenletesen tart f-hez. Ha a (8.2) egyenlőtlenséget ε helyett $\frac{\varepsilon}{3}$-ra írjuk fel,

[113] Adam Bielecki, 1910-2003

és határértékre térünk $m \to \infty$ esetén, azt kapjuk, hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $n_1(\varepsilon)$, amelyre

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ bármely } x \in [a, b]\text{-re, ha } n \geq n_1(\varepsilon). \tag{8.3}$$

Másrészt rögzített $n > n_1(\varepsilon)$ esetén az f_n folytonossága alapján bármely $\varepsilon > 0$-ra létezik olyan $\delta > 0$, amelyre $|f_n(x_0) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$, ha $|x - x_0| < \delta$. Így $|x - x_0| < \delta$ esetén

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Látható, hogy az előbbi szerkesztésben δ gyakorlatilag csak ε-tól függ, tehát f folytonos függvény. A (8.3) összefüggés biztosítja a konvergencia egyenletességét, tehát $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$ egy Banach tér.

4.9 Függvénysorok folytonossága

9.1. Tétel. *Ha az $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ folytonos és nem negatív függvényekre az $s : [a, b] \to \mathbb{R}$, $s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ függvény folytonos, ahol $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$, akkor a $\sum f_n$ sor egyenletesen konvergál $[a, b]$-n.*

Bizonyítás. A részletösszegek (s_n) sorozata folytonos és növekvő $[a, b]$-n, tehát a 8.4 tétel alapján (s_n) egyenletesen tart s-hez. Így a $\sum f_n$ sor egyenletesen konvergál $[a, b]$-n. □

9.2. Tétel. *Ha a $\sum f_n$ sor egyenletesen konvergál az $A \subset \mathbb{R}$ halmazon és az f_n függvények folytonosak $x_0 \in A$-ban, akkor a $\sum f_n$ összeg is folytonos x_0-ban.*

Bizonyítás. A 8.1 tétel azonnali következménye. □

4.10 Kitűzött feladatok

1. Bizonyítsd be, hogy ha az $(x_{nk})_{\substack{n\geq 1\\ k\leq n}}$ pozitív tagú sorozatra bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ küszöbszám, amelyre $|x_{nk}| < \varepsilon$, ha $n \geq n_\varepsilon$ és $1 \leq k \leq n$, és az $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvényre $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_{nk}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_{nk},$$

amennyiben létezik az utóbbi határérték.

Alkalmazások. a) Számítsd ki a következő határértékeket:

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin \frac{k^p}{n^{p+1}}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \cos \frac{k^p a}{n^p \sqrt{n}}$.

b) Bizonyítsd be, hogy ha az $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ függvényre $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\frac{p}{n+k}\right) = p \ln 3$.

2. Bizonyítsd be, hogy ha az $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ függvényre $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, akkor az $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{k}\right) - \ln n$ sorozat konvergens.

3. (András Szilárd) Határozd meg azokat az $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre
$$f(3x) + f(3y) + f(3z) = f(x+y+z) + f(2x+y) + f(2z+y),\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}_+.$$

4. Bizonyítsd be, hogy ha az $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ csökkenő függvényre a $g : (0,\infty) \to \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ függvény növekvő, akkor f folytonos.

5. (R. Gologan[114]) Bizonyítsd be, hogy ha $f : [0,1] \to [0,1]$ folytonos és nem állandó függvény, akkor létezik olyan $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in [0,1]$, amelyre
$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2|^2.$$

6. (E. Moldoveanu[115]) Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre teljesül a következő tulajdonság: bármely $(x_n)_{n\geq 1}$ divergens sorozatra az $(f(x_n))_{n\geq 1}$ sorozat is divergens. Bizonyítsd be, hogy f folytonos.

7. (Riemann) Bizonyítsd be, hogy az $F : [0,1] \to \mathbb{R}$,
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ vagy } x = 0 \\ \frac{1}{q}, & \text{ha } x = \frac{p}{q} \text{ és } (p,q) = 1 \end{cases}$$
függvény minden irracionális pontban folytonos, és az $x \neq 0$ racionális pontokban nem.

8. Létezik-e olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amely a racionális pontokban folytonos, és az irracionális pontokban nem?

9. (Darboux) Tekintsük az $x \in (0,1)$ szám $x = 0, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots$ tizedes reprezentációját, és értelmezzük az $f : (0,1) \to [0,1]$ függvényt a következő módon:
   - ha az $(x_{2k-1})_{k\geq 1}$ sorozat az x_{2n-1} tagtól kezdve periodikus, akkor $f(x) = 0, x_{2n} x_{2n+2} \ldots$;
   - ha az $(x_{2k-1})_{k\geq n}$ sorozat egyetlen n-re sem periodikus, akkor $f(x) = 0$.

[114] Radu Gologan, Radu.Gologan@imar.ro
[115] Emil Moldoveanu, mmoldoveanu@b.astral.ro

Bizonyítsd be, hogy f Darboux tulajdonságú, és a $(0,1)$ intervallum egyetlen pontjában sem folytonos.

10. Rögzítjük a $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ számot és tekintjük azoknak az $x \in [0,1]$ valós számoknak az S halmazát, amelyeknek a k alapú számrendszerbeli végtelen reprezentációjában a páros indexű számjegyek kisebbek, mint $k-1$.

    a) Bizonyítsd be, hogy S zárt része a $[0,1]$ intervallumnak.

    b) Bizonyítsd be, hogy az

    $$x = 0, x_1x_2x_3\dots x_{2n-1}x_{2n}x_{2n+1}\dots \longmapsto f(x) = 0, x_1x_3\dots x_{2n-1}x_{2n+1}\dots$$

    összefüggéssel értelmezett függvény (a páros indexű számjegyeket elhagytuk az x-ből) folytonos, és minden $y \in [0,1]$ értéket megszámlálhatatlan sokszor vesz fel.

11. (Peano görbe[116]) Rögzítjük a $k \geq 3$ természetes számot és tekintjük azoknak az $x \in [0,1]$ valós számoknak az S halmazát, amelyeknek a k alapú számrendszerbeli végtelen reprezentációjában minden számjegy kisebb, mint $k-1$.

    a) Bizonyítsd be, hogy S zárt része a $[0,1]$ intervallumnak.

    b) Bizonyítsd be, hogy az

    $$x = 0, x_1x_2x_3\dots x_{2n-1}x_{2n}x_{2n+1}\dots \longmapsto f_1(x) = 0, x_1x_3\dots x_{2n-1}x_{2n+1}\dots$$

    $$x = 0, x_1x_2x_3\dots x_{2n-1}x_{2n}x_{2n+1}\dots \longmapsto f_2(x) = 0, x_2x_4\dots x_{2n-2}x_{2n+2}\dots$$

    összefüggésekkel értelmezett függvények (a jobb oldalon az $f_1(x)$ és $f_2(x)$ $(k-1)$ alapú reprezentációja látható) folytonosak, és az $F : S \to [0,1] \times \times [0,1]$, $F(x) = (f_1(x), f_2(x))$ függvény folytonos és szürjektív.

Megjegyzés. Az előbbi két feladatban S zártsága lehetővé teszi, hogy meghosszabbítsuk az f, f_1, f_2 függvényeket a $[0,1]$ intervallumra.

12. (Montel[117]) Bizonyítsd be, hogy az $f : I \to \mathbb{R}_+$ függvény pontosan akkor logaritmikusan konvex, ha bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén a $g_\alpha(x) = e^{\alpha x} f(x)$ függvény konvex (egy h függvény pontosan akkor logaritmikusan konvex, ha a $\ln(h)$ függvény konvex).

13. Tekintsük a $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = \begin{cases} 3x, & \text{ha } x \leq \frac{1}{2} \\ 3 - 3x, & \text{ha } x > \frac{1}{2} \end{cases}$ függvényt. Bizonyítsd be, hogy ha $H \subset \mathbb{R}$ a bennfoglalásra nézve a legnagyobb olyan halmaz, amelyre $T^n(x) \in H$, bármely $x \in H$ esetén, akkor H a Cantor-féle triadikus halmaz.

[116] Giuseppe Peano, 1858-1932
[117] Paul Antoine Aristide Montel, 1876-1975

14. (András Szilárd) Rögzítsünk egy $S \subseteq \mathbb{N}^*$ tetszőleges halmazt. Bizonyítsd be, hogy létezik olyan $f : D_r \to D_r$ folytonos leképezés, amelyre $P(f) = S \cup \{1\}$, ahol D_r az r sugarú, origó középponttú körlap.

15. Bizonyítsd be, hogy ha az $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodikus és folytonos függvények főperiódusainak aránya irracionális, akkor az összegük nem periodikus.

16. Bizonyítsd be, hogy ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény egyenletesen közelíthető polinomokkal az egész $\mathbb{R}$-en, akkor f is polinomiális függvény.

17. Bizonyítsd be, hogy ha az $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ függvénysorozat minden tagja konvex és a sorozat pontonként konvergál az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényhez, akkor f is konvex. Bizonyítsd be, hogy ha f folytonos $[a,b]$-n, akkor az $(f_n)_{n\geq 1}$ sorozat egyenletesen tart f-hez az $[a,b]$ intervallumon.

18. Bizonyítsd be, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right]$ sor pontszerűen konvergál az identikusan 0 függvényhez, de a konvergencia nem egyenletes.

19. Bizonyítsd be, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ akkor az $f(x) - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f(x)}{n(n+1)}$ sor egyenletesen tart az identikusan nulla függvényhez.

20. (Edelstein[118]) Bizonyítsd be, hogy ha (X,d) egy kompakt metrikus tér, és az $f : X \to X$ függvényre $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$, bármely $x \neq y$, $x, y \in X$ esetén, akkor az f-nek pontosan egy fixpontja van X-ben.

[118] Leah Keshet Michael Edelstein, 1917-2003

5. Fejezet

Differenciálszámítás $\mathbb{R}$-en

When the student is ready,
the master appears.
Buddhista mondás

Ebben a fejezetben a valós változójú és valós értékű függvények deriválhatóságát és a deriváltak alkalmazásait tanulmányozzuk.

5.1 Valós függvény deriváltja

Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényre minden $x \in [a,b]$ esetén értelmezhetjük a

$$\phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \quad (a < t < b,\ t \neq x) \tag{1.1}$$

növekményt és az

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \phi(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h + x) - f(x)}{h} \tag{1.2}$$

határértéket.

Azt mondjuk, hogy $f'(x)$ az f *deriváltja* x-ben, ha az (1.2) határérték létezik (lehet végtelen is). Ha ez a határérték véges, akkor azt mondjuk, hogy f *deriválható* x-ben. Ha f az $[a,b]$ intervallum minden pontjában deriválható, akkor azt mondjuk, hogy f deriválható $[a,b]$-n. Ebben az esetben értelmezhetjük az $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt az (1.2) összefüggés segítségével. Az f' függvényt az f *elsőrendű deriváltjának* nevezzük.

1.1. Tétel. *Ha az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény deriválható az $x \in [a,b]$ pontban, akkor f folytonos x-ben.*

Bizonyítás.

$$f(t) - f(x) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}(t - x) \to f'(x) \cdot 0 = 0, \quad \text{amikor } t \to x. \quad \square$$

Megjegyzés. A fordított állítás nem igaz. Az $f(t) = |t|$, $t \in \mathbb{R}$ függvény $t = 0$-ban folytonos, de nem deriválható. $\triangle$

Az előbbi ellenpéldánál sokkal többetmondó példa is szerkeszthető. Erre vonatkozik a következő tétel.

1.2. Tétel. (Weierstrass, [62]) *Létezik olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amely sehol sem deriválható.*

Bizonyítás. Tekintsük a $h(t) = |t|$, $t \in [-1,1]$ függvényt és hosszabbítsuk meg $\mathbb{R}$-en értelmezett periodikus függvényre az alábbi összefüggések segítségével:

$$g(t) = \begin{cases} h(t), & t \in [-1,1], \\ g(t-2), & t > 1, \\ g(t+2), & t < -1. \end{cases}$$

Látható, hogy minden $s, t \in \mathbb{R}$-re

$$|g(t) - g(s)| \le |t - s|, \tag{1.3}$$

tehát g Lipschitz tulajdonságú $\mathbb{R}$-en, és így folytonos is.

Tekintsük az

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n g(4^n t)$$

függvényt. Mivel $0 \le g \le 1$, a sor egyenletesen konvergál, ezért a határértékfüggvény (f) folytonos $\mathbb{R}$-en.

Kimutatjuk, hogy f sehol sem deriválható. Legyen $x \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges valós szám és $\delta_m = \pm\frac{1}{2}4^{-m}$, ahol az előjelt úgy választjuk meg, hogy $4^m x$ és $4^m(x + \delta_m)$ közt ne legyen egész szám.

A

$$\gamma_n = \frac{g(4^n(x+\delta_m)) - g(4^n x)}{\delta_m}$$

jelöléssel $n > m$-re $\gamma_n = 0$ (mert $4^n \delta_m$ páros szám). Ha $0 \le n \le m$, akkor (1.3)-ból következik, hogy $|\gamma_n| \le 4^n$ (itt m-re pontosan egyenlőség áll). Az előbbiek alalpján

$$\left|\frac{f(x+\delta_m) - f(x)}{\delta_m}\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_n\right| \ge 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n = \frac{1}{2}(3^m + 1),$$

tehát $m \to \infty$, $\delta_m \to 0$ esetén az $\left|\frac{f(x+\delta_m)-f(x)}{\delta_m}\right|$ kifejezés is végtelenhez tart. Ez azt jelenti, hogy f nem deriválható x-ben. Mivel x tetszőleges volt, f sehol sem deriválható. □

Vizsgáljuk a deriválható függvények algebrai tulajdonságait.

1.3. Tétel. *Ha az $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvények deriválhatók az $x \in [a,b]$ pontban, akkor $f+g$, $f \cdot g$ és $g(x) \ne 0$ esetén f/g is deriválható x-ben, és*

(a) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;

(b) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

(c) $\displaystyle\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Bizonyítás. (a) Határértékre térünk ($t \to x$) az

$$\frac{(f+g)(t)-(f+g)(x)}{t-x} = \frac{f(t)-f(x)}{t-x} + \frac{g(t)-g(x)}{t-x}$$

azonosságban. A jobb oldalnak a feltételek alapján létezik határértéke, tehát a bal oldalnak is létezik a határértéke, és a két határérték egyenlő.

(b) A $h = f \cdot g$ jelöléssel

$$\begin{aligned}\frac{h(t)-h(x)}{t-x} =& \frac{f(t)g(t)-f(x)g(x)}{t-x} = \frac{f(t)g(t)-f(x)g(t)+f(x)g(t)-f(x)g(x)}{t-x} = \\ =& g(t)\frac{f(t)-f(x)}{t-x} + f(x)\frac{g(t)-g(x)}{t-x}\end{aligned}$$

tehát amikor $t \to x$, a kívánt egyenlőséget kapjuk.

(c)

$$\begin{aligned}\frac{\left(\dfrac{f}{g}\right)(t)-\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)}{t-x} =& \frac{f(t)g(x)-g(t)f(x)}{(t-x)g(x)g(t)} = \\ =& \frac{1}{g(t)g(x)}\left[\frac{f(t)-f(x)}{t-x}g(x) - f(x)\frac{g(t)-g(x)}{t-x}\right].\end{aligned}$$

Ha $t \to x$, a tételben szereplő egyenlőséghez jutunk. □

1.4. Tétel. (Láncszabály) *Ha* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *folytonos* $[a,b]$ *-n és deriválható valamilyen* $x \in [a,b]$ *pontban, a* $g : I \to \mathbb{R}$ *függvény deriválható az* $f(x) \in I$ *pontban, akkor a*

$$h(t) = g(f(t)), \quad a \le t \le b$$

függvény deriválható x *-ben és*

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x). \tag{1.4}$$

Bizonyítás. Az $y = f(x)$ jelöléssel a derivált értelmezése alapján

$$f(t)-f(x) = (t-x)[f'(x)+u(t)], \tag{1.5}$$

$$g(s)-g(y) = (s-y)[g'(y)+v(s)], \tag{1.6}$$

ahol $t \in [a,b]$, $s \in I$, $u(t) \to 0$, ha $t \to x$ és $v(s) \to 0$, ha $s \to y$. Az (1.6) és (1.5) alapján

$$\begin{aligned}h(t)-h(x) =& g(f(t))-g(f(x)) = [f(t)-f(x)][g'(y)+v(s)] = \\ =& (t-x)[f'(x)+u(t)][g'(y)+v(s)],\end{aligned}$$

tehát $t \ne x$ esetén

$$\frac{h(t)-h(x)}{t-x} = [g'(y)+v(s)][f'(x)+u(t)]. \tag{1.7}$$

Ha $t \to x$, akkor $s \to y$, és így (1.7) jobb oldala $g'(y)f'(x)$-hez tart, tehát h deriválható x -ben, és (1.4) igaz. □

1.1. Példák. (a) Az

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

függvényre $f'(x)=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$, $x\neq 0$ és $f'(0)$ nem létezik.

(b) Ha

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

akkor $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$, $x\neq 0$. Az értelmezés alapján $f'(0)=0$ és $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ nem létezik, tehát f' nem folytonos 0-ban.

(c) Általánosabban, ha $a\geq 0$, $c>0$ valós állandók és az $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ függvényt az

$$f(x)=\begin{cases} |x|^a\sin(|x|^{-c}), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

egyenlőségekkel értelmeztük, akkor igazak az alábbi ekvivalenciák:

(c_1) f folytonos $\iff$ $a>0$;

(c_2) $\exists\ f'(0)$ $\iff$ $a>1$;

(c_3) f' korlátos $\iff$ $a\geq 1+c$;

(c_4) f' folytonos $\iff$ $a>1+c$;

(c_5) $\exists\ f''(0)$ $\iff$ $a>2+c$;

(c_6) f'' korlátos $\iff$ $a\geq 2+2c$;

(c_7) f'' folytonos $\iff$ $a>2+2c$. $\triangle$

Tanulmányozzuk az (1.1)-ben megjelenő hányadost.

1.1. Tulajdonság. *Az $f:]-1,1[\to\mathbb{R}$ függvényre létezik $f'(0)$, és az $(\alpha_n)_n$, $(\beta_n)_n$ sorozatokra $-1<\alpha_n<\beta_n<1$ úgy, hogy $\alpha_n\to 0$ és $\beta_n\to 0$, amikor $n\to\infty$. A*

$$d_n:=\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}$$

sorozat teljesíti a következő tulajdonságokat:

(a) *ha $\alpha_n<0<\beta_n$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}d_n=f'(0)$;*

(b) *ha $0<\alpha_n$ és a $\left(\frac{\beta_n}{\beta_n-\alpha_n}\right)_n$ sorozat korlátos, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}d_n=f'(0)$;*

(c) *ha f' folytonos 0-ban, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}d_n=f'(0)$;*

(d) *létezik* $]-1,1[$*-en deriválható* f *függvény, amelyre* $\alpha_n \to 0$, $\beta_n \to 0$, *és létezik* $\lim\limits_{n\to\infty} d_n$, *de* $\lim\limits_{n\to\infty} d_n \neq f'(0)$.

Bizonyítás. (a) d_n-et a következő alakban írjuk fel:

$$\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n} = \frac{f(\beta_n)-f(0)}{\beta_n}\cdot\frac{\beta_n}{\beta_n-\alpha_n} + \frac{f(0)-f(\alpha_n)}{-\alpha_n}\cdot\frac{-\alpha_n}{\beta_n-\alpha_n},$$

$$\lambda_1 = \frac{\beta_n}{\beta_n-\alpha_n},\ \lambda_2 = \frac{-\alpha_n}{\beta_n-\alpha_n}, \quad \lambda_1,\lambda_2>0,\ \lambda_1+\lambda_2=1.$$

Így

$$\min\left\{\frac{f(\beta_n)-f(0)}{\beta_n}, \frac{f(0)-f(\alpha_n)}{-\alpha_n}\right\} \le \frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n} \le$$
$$\le \max\left\{\frac{f(\beta_n)-f(0)}{\beta_n}, \frac{f(0)-f(\alpha_n)}{-\alpha_n}\right\},$$

tehát a feltételek alapján

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(0)}{\beta_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{f(0)-f(\alpha_n)}{-\alpha_n} = f'(0).$$

Az 1.18-as tételből (94. oldal) következik a bizonyítandó egyenlőség.

(b) Az

$$\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n} - \frac{f(0)-f(\alpha_n)}{-\alpha_n} = \frac{\beta_n}{\beta_n-\alpha_n}\left(\frac{f(\beta_n)-f(0)}{\beta_n} - \frac{f(0)-f(\alpha_n)}{-\alpha_n}\right)$$

azonosság és a feltételek alapján következik a kívánt egyenlőség, mert a jobb oldalon a zárójelben levő különbség 0-hoz tart, és így a $\left(\frac{\beta_n}{\beta_n-\alpha_n}\right)_n$ sorozat korlátossága miatt a jobb oldal határértéke 0.

(c) A 2.3-as középértéktétel alapján

$$d_n = \frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n} = f'(\gamma_n),$$

ahol a (γ_n) sorozatra $\alpha_n<\gamma_n<\beta_n$. Így $\gamma_n\to 0$ és az f' folytonossága alapján következik a bizonyítandó egyenlőség.

(d) Az 1.1-es példa (b) alpontjában vizsgált függvény és az

$$\alpha_n = \frac{1}{2n\pi}, \qquad \beta_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$$

sorozatok teljesítik a kért feltételeket. □

1.5. Tétel. *Ha $I, J \subset \mathbb{R}$ kompakt intervallumok és $f : I \to J$ egy bijektív és folytonos függvény, amelynek létezik deriváltja az $x_0 \in I$ pontban, és $f'(x_0) \neq 0$, akkor az $f^{-1} : J \to I$ inverz függvény deriválható az $y_0 = f(x_0)$ pontban, és*

$$[f^{-1}(y_0)]' = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Bizonyítás. Mivel I kompakt, az f folytonos és bijektív, az f^{-1} függvény folytonos (2.11-es tétel, 164. oldal). Így

$$x_n \in I \setminus \{x_0\},\ x_n \to x_0 \iff y_n = f(x_n) \in J \setminus \{y_0\},\ y_n \to y_0. \tag{1.8}$$

Az $y = f(x)$ jelöléssel

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}, \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}.$$

Másrészt (1.8) alapján $y \to y_0 \iff x \to x_0$, tehát

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad \square$$

5.2 Középértéktételek

Ha X egy metrikus tér és $f : X \to \mathbb{R}$ egy függvény, akkor a $p \in X$ pontot az f *lokális maximumpontjának* nevezzük, ha létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $f(q) \leq f(p)$, bármely $q \in \mathrm{B}(p, \delta)$-re. A $p \in X$ pontot az f *szigorú lokális maximumpontjának* nevezzük, ha létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $f(q) < f(p)$, bármely $q \in \mathrm{B}(p, \delta) \setminus \{p\}$-re. Az előbbihez hasonlóan a $p \in X$ pontot *lokális minimumpontnak* nevezzük, ha létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $f(q) \geq f(p)$, bármely $q \in \mathrm{B}(p, \delta)$-re, és *szigorú lokális minimumpontnak,* ha létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $f(q) > f(p)$, bármely $q \in \mathrm{B}(p, \delta) \setminus \{p\}$ esetén.

2.1. Tétel. (Fermat[119]) *Ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in]a, b[$ lokális maximumpontja vagy lokális minimumpontja, és létezik $f'(x_0)$, akkor $f'(x_0) = 0$.*

Bizonyítás. A bizonyítás ötlete az 5.1.-es ábrán látható (a szélsőértékpontban az érintő vízszintes). Válasszuk meg a $\delta > 0$ értéket az éretelmezésnek megfelelően úgy, hogy $a < x - \delta < x < x + \delta < b$. Ha $x - \delta < t < x$, akkor

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geq 0,$$

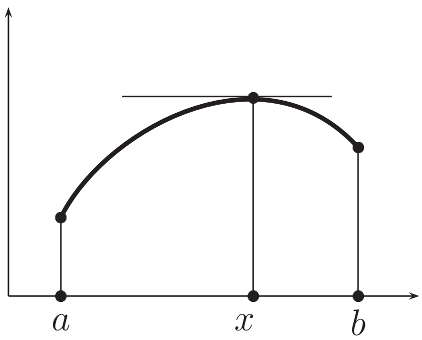
[119] Pierre de Fermat, 1601-1665

tehát $t \to x$ esetén az $f'(x) \geq 0$ egyenlőtlenséghez jutunk.

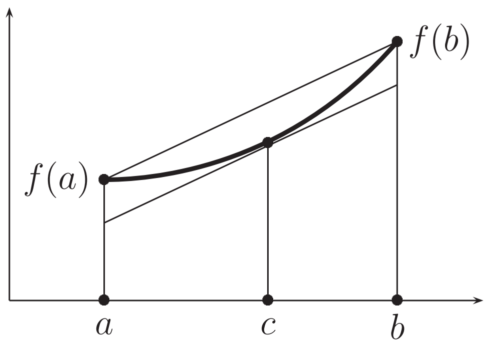
Ha $x < t < x + \delta$, akkor viszont

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq 0,$$

tehát amikor $t \to x$, az $f'(x) \leq 0$ egyenlőtlenséget kapjuk. A két egyenlőtlenség alapján $f'(x) = 0$. $\square$



5.1. Ábra



5.2. Ábra

2.2. Tétel. (Cauchy) *Ha az* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *és* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *függvények folytonosak* $[a, b]$*-n és deriválhatók* $]a, b[$ *-n, akkor létezik olyan* $x \in]a, b[$, *amelyre*

$$[f(b) - f(a)]g'(x) = [g(b) - g(a)]f'(x).$$

Bizonyítás. A

$$h(t) := [f(b) - f(a)]g(t) - [g(b) - g(a)]f(t), \quad a \leq t \leq b$$

segédfüggvény folytonos $[a, b]$-n, deriválható $]a, b[$ -n és

$$h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b). \tag{2.1}$$

Igazoljuk, hogy létezik olyan $x \in]a, b[$, amelyre $h'(x) = 0$.

Ha h állandó függvény, akkor $h'(x) = 0$, bármely $x \in]a, b[$ -re.

Ha $h(t) > h(a)$, valamilyen $t \in]a, b[$ esetén, akkor x-nek választjuk a h maximumpontját (ilyen létezik a 164. oldalon igazolt 2.8-as tétel alapján). (2.1)-ből következik, hogy $x \in]a, b[$, és a 2.1-es tételből következik, hogy $h'(x) = 0$.

Ha $h(t) < h(a)$, valamilyen $t \in]a, b[$ esetén, akkor hasonló gondolatmenet alapján a h minimumpontja teljesíti a $h'(x) = 0$ egyenlőséget. $\square$

2.3. Tétel. (Lagrange) *Ha az* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *függvény folytonos* $[a, b]$*-n és deriválható* $]a, b[$ *-n, akkor létezik olyan* $x \in]a, b[$, *amelyre*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(x).$$

Bizonyítás. A 2.2 tételben a $g(t) = t,\ t \in [a, b]$ függvényt választjuk. A tétel geometriai jelentése az 5.2.-es ábráról olvasható le (létezik a húrral párhuzamos érintő). □

2.1. Következmény. (Napier[120] egyenlőtlenség) *Ha* $0 < a < b$, *akkor*

$$\frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a}.$$

2.4. Tétel. *Ha az* $f\ :]a, b[\to \mathbb{R}$ *függvény deriválható* $]a, b[$ *-n, akkor igazak a következő állítások:*

(a) *ha* $f'(t) \geq 0$, *bármely* $t \in]a, b[$ *-re, akkor* f *növekvő* $]a, b[$ *-n;*

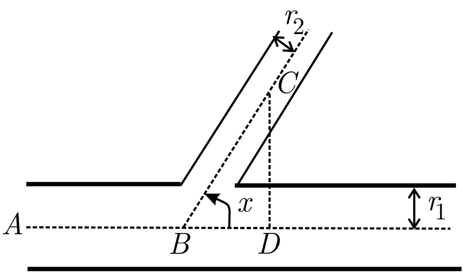
(b) *ha* $f'(t) = 0$, *bármely* $t \in]a, b[$ *-re, akkor* f *állandó* $]a, b[$ *-n;*

(c) *ha* $f'(t) \leq 0$, *bármely* $t \in]a, b[$ *-re, akkor* f *csökkenő* $]a, b[$ *-n.*

Bizonyítás. Mindhárom állítás a Lagrange tétel következménye. □

2.5. Tétel. (Rolle[121]) *Ha teljesülnek a 2.3-as tétel feltételei és* $f(a) = f(b)$, *akkor létezik* $x \in]a, b[$ *úgy, hogy* $f'(x) = 0$.

2.11. Alkalmazás. *Vizsgáljuk meg, hogyan kellene függjön a vérereknek az egymással bezárt szöge az érvastagságtól ahhoz, hogy a szív által végzett munka minimális legyen!*



5.3. Ábra

Tekintsük a vérkeringést összenyomhatatlan, súrlódásos folyadék réteges áramlásának. Poiseuille[118] törvénye szerint az l hosszúságú, r sugarú csőben az áramlási ellenállás $R = k\frac{l}{r^4}$. A szív munkája szempontjából az elágazás akkor optimális, ha az ABC szakaszon az ellenállás minimális.

A $CD = h$ és $AD = d$ jelölésekkel $AB = d - h\mathrm{ctg}x$ és $BC = \frac{h}{\sin x}$, tehát az ellenállás

$$f(x) = k\left(\frac{d - h\mathrm{ctg}x}{r_1^4} + \frac{h}{r_2^4 \sin x}\right).$$

Mivel $f'(x) = \frac{kh}{\sin^2 x}\left(\frac{1}{r_1^4} - \frac{\cos x}{r_2^4}\right)$, az optimális elágazási szög $x_o = \arccos\frac{r_1^4}{r_2^4}$. ♦

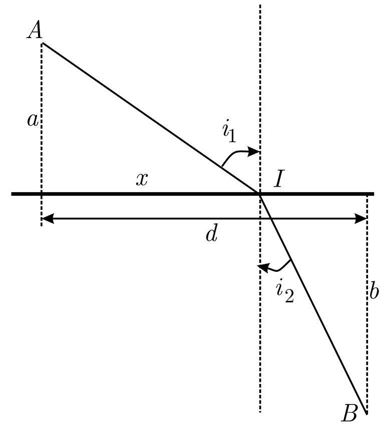
Megjegyzés. Az emberi érrendszer elágazásaira ez az egyenlőség érvényes.

[120] John Napier, 1550-1617
[121] Michel Rolle, 1652-1719
[118] Jean Poiseuille, 1797-1869

2.12. Alkalmazás. *Vezessük le a fénytörés törvényét!*

A Fermat elv alapján az AIB útvonal megtételéhez szükséges idő minimális kell legyen (lásd az 5.3. ábrát). Ha v_1 és v_2 a fény terjedése a két közegben, akkor az ábra jelöléseivel a szükséges idő

$$t = \frac{AI}{v_1} + \frac{IB}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{v_2}.$$



5.4. Ábra

Az $f(x) = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{v_2}$ függvény deriváltja $f'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{v_2\sqrt{b^2+(d-h)^2}}$, tehát a minimumpontban teljesül az

$$\frac{x}{v_1\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{d-x}{v_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$$

egyenlőség. Másrészt $\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sin i_1$ és $\frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}} = \sin i_2$, tehát $\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{v_1}{v_2}$. ♦

Gyakorlat. Bizonyítsuk be, hogy pontosan egy olyan $a > 0$ szám létezik, amelyre $a^x \geq x^a$, minden $x > 0$ esetén, és határozzuk meg ezt a számot.

Megoldás. Az adott egyenlőtlenség ekvivalens a

$$\frac{\ln a}{a} \geq \frac{\ln x}{x}$$

egyenlőtlenséggel. Az $f(x) = \ln x/x$, $x > 0$ függvénynek pontosan egy maximumpontja van, és ez az $x = e$, tehát $a = e$ az egyetlen szám, amelyre az eredeti egyenlőtlenség igaz, minden $x > 0$-ra. △

A következő néhány tulajdonságban az előző fejezetekben látható néhány egyenlőtlenség finomítását, illetve általánosítását ismertetjük.

2.1. Tulajdonság. (Bernoulli-egyenlőtlenség)

(2.2) $$(1+x)^\alpha < 1 + \alpha x, \quad \textit{ha} \quad \alpha \in]0,1[, \quad x \in]-1,0[,$$

(2.3) $$(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x, \quad \textit{ha} \quad \alpha \notin]0,1[, \quad x \in]-1,0[.$$

Bizonyítás. Az $f :]-1,\infty[\to \mathbb{R}$,

$$f(x) = (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x$$

függvényt ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$) tanulmányozzuk. f deriválható és

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha, \quad \forall\, x \in I,$$

tehát

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

A következő két esetet vizsgáljuk:

1. Ha $0 < \alpha < 1$, akkor $f'(x) < 0$, minden $x > 0$-ra, és $f'(x) > 0$, minden $x \in]-1, 0[$ esetén, tehát 0 az f globális maximumpontja. Eszerint $f(x) < f(0)$, ha $x \in I \setminus \{0\}$, ami éppen (2.2).

2. Ha $\alpha \notin]0, 1]$, akkor $f'(x) > 0$, bármely $x > 0$ és $f'(x) < 0$, bármely $x \in$ $\in]-1, 0[$ esetén, tehát 0 globális minimumpontja f-nek. Így $f(x) > f(0)$, bármely $x \in I \setminus \{0\}$-re, ami éppen (2.3). □

2.2. Tulajdonság. ([75, 2.1-es lemma]) *Ha* $m = 1, 2, \dots,$ *akkor*

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \leq e\left(1 - \frac{1 - 2/e}{m}\right), \tag{2.4}$$

ahol az $1 - 2/e$ *állandó a lehető legjobb, vagyis ez a* β *legnagyobb értéke, amelyre az*

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \leq e\left(1 - \frac{\beta}{m}\right) \tag{2.5}$$

egyenlőtlenség teljesül, minden $m \geq 1$*-re.*

Bizonyítás. A (2.5) egyenlőtlenség ekvivalens a $\beta \leq m - \frac{m}{e}(1 + 1/m)^m$ egyenlőtlenséggel.

Vizsgáljuk az

$$f(x) := \frac{1}{x} - \frac{1}{ex}(1 + x)^{\frac{1}{x}}, \quad x \in]0, 1]$$

segédfüggvényt. f csökkenő a $]0, 1]$ intervallumon, tehát a $\beta = f(1) = 1 - 2/e$ érték a legjobb konstans (2.5)-ben, és így (2.4) igaz. □

2.3. Tulajdonság. ([75, 2.2-es lemma]) *Ha* $m = 1, 2, \dots,$ *akkor*

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \leq \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\ln 2} - 1}} \tag{2.6}$$

és az $1/\ln 2 - 1$ *állandó a legjobb (ennél nagyobb értékre már nem teljesül az egyenlőtlenség).*

Bizonyítás. Az

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \leq \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\alpha}} \tag{2.7}$$

egyenlőtlenség ekvivalens az

$$\alpha \le \frac{1}{\ln\left(1+\dfrac{1}{m}\right)} - m$$

egyenlőtlenséggel. Tekintsük az

$$f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}, \quad x \in]0,1]$$

segédfüggvényt. f csökkenő a $]0,1]$ intervallumon, tehát az $\alpha = f(1) = 1/\ln 2 - 1$ érték a legjobb konstans (2.7)-ben. Ebből következik, hogy (2.6) teljesül. □

Az előbbi két tulajdonság alapján következik az alábbi segédtétel.

2.1. Lemma. ([75, 3.1-es lemma]) *Ha* $m = 1, 2, \ldots,$ *akkor*

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \le \frac{e\left(1-\dfrac{\beta}{m}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^{\alpha}}, \tag{2.8}$$

ahol $0 \le \alpha \le 1/\ln 2 - 1,\ 0 \le \beta \le 1 - \dfrac{2}{e}$ *és* $e\beta + 2^{1+\alpha} = e.$

Bizonyítás. A (2.8) egyenlőtlenség ekvivalens a

$$\beta \le m - \frac{m}{e}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+\alpha} \tag{2.9}$$

egyenlőtlenséggel. Az

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{ex}(1+x)^{1/x+\alpha}, \quad x \in]0,1], \quad 0 \le \alpha \le \frac{1}{\ln 2} - 1,$$

függvény csökkenő $]0,1]$-en, és így a $\beta = f(1) = 1 - (1/e)2^{1+\alpha}$ érték a legjobb konstans (2.9)-ben. Sőt, $0 \le \beta \le 1 - (1/e)$ és $e\beta + 2^{1+\alpha} = e,$ tehát (2.8) teljesül. □

Megjegyzés. Ha $\alpha = 0,$ akkor $\beta = 1 - (2/e),$ és a 2.2-es tulajdonságot kapjuk. Ha $\beta = 0,$ akkor $\alpha = (1/\ln 2) - 1,$ és az 2.3-es tulajdonságot kapjuk. △

Megjegyzés. Az előbbi egyenlőtlenségek alapján a 132. oldalon található 3.1 tulajdonság (Carleman egyenlőtlenség) élesíthető. △

2.6. Tétel. *Ha az* $(a_n)_{n\ge 1}$ *sorozat tagjai nemnegatív valós számok és* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty,$ *akkor*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n} \le e \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1-2/e}{n}\right)a_n \tag{2.10}$$

és

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1a_2\dots a_n)^{1/n} \le e\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(1+1/m)^{1/\ln 2-1}}. \tag{2.11}$$

2.7. Tétel. *Ha az* $(a_n)_{n\ge 1}$ *sorozat tagjai nemnegatív valós számok és* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, *akkor*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1a_2\dots a_n)^{1/n} \le e\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-\dfrac{\beta}{n}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha}}\cdot a_n, \tag{2.12}$$

ahol $0 \le \alpha \le 1/\ln 2 - 1$, $0 \le \beta \le 1 - \dfrac{2}{e}$ *és* $e\beta + 2^{1+\alpha} = e$.

5.2.1 A középértéktételek következményei

2.2. Lemma. *Ha* $I = [a,b[$, $a < b \le +\infty$ *és az* $f,g : I \to \mathbb{R}$ *folytonos függvények teljesítik az alábbi feltételeket:*

(i) f *és* g *deriválhatók* $]a,b[$*-n és* $f'(t) \le g'(t)$, *bármely* $t \in]a,b[$ *esetén;*

(ii) $f(a) \le g(a)$,

akkor $f(t) \le g(t)$, *bármely* $t \in I$ *-re.*

Bizonyítás. A $h = g-f$ függvény deriválható $]a,b[$-n és $h'(t) \ge 0$, bármely $t \in]a,b[$ -re, tehát a 2.4-es tétel alapján h növekvő, és így

$$h(t) \ge h(a) \ge 0, \quad \text{bármely } t \in [a,b[\text{ esetén.} \quad \square$$

2.3. Lemma. *Ha* $I = [a,b]$, $a < b$ *és az* $f,g : I \to \mathbb{R}$ *folytonos függvények teljesítik a következő feltételeket:*

(i) f *és* g *deriválható* $]a,b[$ *-n;*

(ii) $|f'(t)| \le g'(t)$, *bármely* $t \in]a,b[$ *-re,*

akkor

$$|f(b) - f(a)| \le g(b) - g(a).$$

Bizonyítás. A következmény ekvivalens a

$$g(a) - g(b) \le f(b) - f(a) \le g(b) - g(a) \tag{2.13}$$

egyenlőtlenségekkel, tehát elégséges igazolni, hogy

$$g(b) - f(b) - (g(a) - f(a)) \ge 0 \quad \text{és} \quad f(b) + g(b) - (f(a) + g(a)) \ge 0.$$

Tekintjük a következő segédfüggvényeket:

$$h_1, h_2 : I \to \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} h_1(t) = g(t) - f(t) - (g(a) - f(a)), \\ h_2(t) = f(t) + g(t) - (f(a) + g(a)). \end{cases}$$

Ezek deriválható függvények $]a, b[$-n, $h_1(a) = h_2(a) = 0$ és

$$\begin{cases} h_1'(t) = g'(t) - f'(t) \geq 0, \\ h_2'(t) = f'(t) + g'(t) \geq 0, \end{cases}$$

tehát $h_1(t) \geq h_1(a)$ és $h_2(t) \geq h_2(a)$, ha $t \in [a, b]$. Ezekből következik a (2.13)-as egyenlőtlenség. $\square$

2.4. Lemma. *$I \subset \mathbb{R}$ egy nemüres intervallum, $t_0 \in I$, és az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény folytonos I-n és deriválható $I \setminus \{t_0\}$-n.*

(a) *Ha f'-nak létezik t_0-ban a baloldali határértéke, akkor az (1.1) egyenlőséggel értelmezett ϕ függvénynek is van t_0-ban baloldali határértéke és*

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} f'(t) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} \phi(t).$$

(b) *Ha f'-nak létezik t_0-ban a jobboldali határértéke, akkor az (1.1) egyenlőséggel értelmezett ϕ függvénynek is van t_0-ban jobboldali határértéke és*

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} f'(t) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} \phi(t).$$

(c) *Ha f'-nak létezik véges határértéke t_0-ban, akkor f deriválható t_0-ban és f' folytonos t_0-ban.*

Bizonyítás. (a)-(b) Ha $t < t_0$ és $t \in I$, akkor a 2.3-as tétel alapján létezik $c_t \in]t, t_0[$ úgy, hogy

$$\phi(t) = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(c_t).$$

Amikor $t \to t_0$-hoz balról (jobbról), a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.

(c) (a)-ból és (b)-ből következik. $\square$

Megjegyzés. A 2.4-es lemmában az f folytonossága szükséges. Az

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1-x}{1+x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}; \\ 0, & x = -1 \end{cases}$$

függvény nem folytonos -1-ben, és így nem is deriválható. Ugyanakkor a lemma (c) alpontjának többi feltétele teljesül. $\triangle$

2.5. Lemma. *Ha $I \subset \mathbb{R}$ egy nemüres intervallum és az $f : I \to \mathbb{R}$ deriválható függvény deriváltja korlátos I-n, akkor f Lipschitz tulajdonságú I-n.*

Bizonyítás. Mivel f' korlátos I-n, létezik olyan $L > 0$, amelyre $|f'(t)| \leq L$, bármely $t \in I$-re. Így bármely $t_1, t_2 \in I$, $t_1 < t_2$ esetén létezik $c \in]t_1, t_2[$ úgy, hogy

$$|f(t_2) - f(t_1)| = |f'(c)(t_2 - t_1)| \leq L(t_2 - t_1).$$

Az előbbi egyenlőtlenségből következik, hogy az f függvény Lipschitz tulajdonságú I-n. □

2.8. Tétel. (Denjoy[119]-Bourbaki[120] tétel, [49, 2. kötet, 77. oldal]) *Ha $I \subset \mathbb{R}$ nemüres intervallum, $a, b \in I$, $a < b$, és az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti a következő tulajdonságokat:*

(i) *f folytonos $[a, b]$-n;*

(ii) *létezik egy legfeljebb megszámlálható $A \subset]a, b[$ halmaz úgy, hogy f-nek létezzen a jobboldali deriváltja az $]a, b[\setminus A$ halmazon,*

akkor

$$\inf_{t \in]a,b[\setminus A} \phi(t+) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \sup_{t \in]a,b[\setminus A} \phi(t+).$$

Bizonyítás. Igazoljuk, hogy

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \sup_{t \in]a,b[\setminus A} \phi(t+) =: M.$$

A másik egyenlőtlenség bizonyítása hasonló módon történik. Ha $M = +\infty$, akkor az egyenlőtlenség teljesül, tehát feltételezhetjük, hogy $M < \infty$. A

$$g : I \to \mathbb{R}, \quad g(t) := Mt - f(t)$$

segédfüggvény teljesíti a 2.7-es lemma feltételeit, tehát g növekvő I-n. Így $g(b) \geq$ $\geq g(a)$, vagyis $M(b - a) \geq f(b) - f(a)$. □

2.2. Következmény. *Ha $f, g : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények az I nemüres intervallumon, akkor igazak a következő állítások:*

(a) *f pontosan akkor állandó I-n, ha létezik egy legfeljebb megszámlálható $A \subset I$ halmaz úgy, hogy f jobbról deriválható legyen az $I \setminus A$ halmazon, és*

$$\phi(t+) = 0, \qquad \text{bármely } t \in I \setminus A \text{ esetén;}$$

[119] Arnaud Denjoy, 1884-1974

[120] Nikolas Bourbaki, francia matematikuscsoport neve, 1939 –

(b) *$f-g$ pontosan akkor állandó I-n, ha létezik egy legfeljebb megszámlálható $A\subset I$ halmaz úgy, hogy f és g jobbról deriválhatók az $I\setminus A$ halmazon és*

$$\phi_f(t+)=\phi_g(t+)=0, \qquad \textit{bármely } t\in I\setminus A,$$

ahol a ϕ_f és ϕ_g függvények az f és g-hez tartozó ϕ függvények.

Megjegyzés. A Denjoy-Bourbaki tétel és következménye jobboldali deriváltak helyett baloldali deriváltakra is igaz. $\triangle$

2.6. Lemma. *Ha $I\subset\mathbb{R}$ nem üres intervallum és az $f:I\to\mathbb{R}$ függvény*

(i) *folytonos I-n;*

(ii) *egy legfeljebb megszámlálható $A\subset I$ halmaz kivételével minden $s\in I$-re és $\delta>0$-ra létezik $t\in]s,s+\delta[$ úgy, hogy $f(t)\geq f(s)$,*

akkor f növekvő I-n.

Bizonyítás. Ha $a,b\in I$, $a<b$ rögzített elemek, akkor elégséges igazolni, hogy $f(a)\leq f(b)$.

Ha $\lambda\notin f(A)$, $\lambda<f(a)$, akkor az

$$S_\lambda:=\{s\in[a,b]\mid \lambda\leq f(s)\}$$

halmaz

- nem üreshalmaz, mert $a\in S_\lambda$;

•• felülről korlátos, mert $S_\lambda\subset[a,b]$.

Így

$$\exists\ M:=\sup S_\lambda\ (\in[a,b]).$$

Mivel M torlódási pontja az S_λ-nak, létezik $s_n\in S_\lambda$ úgy, hogy $s_n\to M$. De

$$\left.\begin{array}{l} s_n\in S_\lambda\\ f \text{ folytonos } M-\text{ben}\end{array}\right\}\implies[\lambda\leq f(s_n)\implies\lambda\leq f(M)]. \tag{2.14}$$

Ez alapján $M\in S_\lambda$.

Igazoljuk, hogy $M=b$. Ha $M<b$ teljesülne, akkor M torlódási pontja volna az S_λ komplementerének is, tehát létezne $t_n\notin S_\lambda$, $t_n\to M$. Ebből következik, hogy $f(t_n)<\lambda$, és az f folytonossága alapján

$$f(M)\leq\lambda. \tag{2.15}$$

A (2.14) és (2.15) összefüggések alapján $f(M)=\lambda$, és így $M\notin A$.

Másrészt az $M<b$ egyenlőtlenségből és a (ii) feltételből következik, hogy van olyan $t\in]M,b[$, amelyre $\lambda=f(M)\leq f(t)$. Ez viszont azt jelenti, hogy $t\in S_\lambda$ és $t>M$, ami ellentmond M megválasztásának, tehát $M=b$.

Az előbbiek alapján bármely $\lambda\notin f(A)$ esetén, ha $\lambda<f(a)$, akkor $\lambda\leq f(b)$. Ez csak akkor lehetséges, ha $f(a)\leq f(b)$, és így f növekvő. $\square$

2.7. Lemma. *Ha $I \subset \mathbb{R}$ nemüres intervallum és az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti a következő feltételeket:*

(i) *folytonos I-n;*

(ii) *létezik egy legfeljebb megszámlálható $A \subset I$ halmaz úgy, hogy létezzen $\phi(t+)$, bármely $t \in I \setminus A$-ra (ϕ-t az (1.1) egyenlőségben értelmeztük);*

(iii) $\phi(t+) \geq 0$, *ha* $t \in I \setminus A$,

akkor f növekvő I-n.

Bizonyítás. A (iii) feltételből következik, hogy minden $\varepsilon > 0$ és $t \in I \setminus A$ esetén létezik $\delta = \delta(\varepsilon, t)$ úgy, hogy $h \in]0, \delta[$ esetén teljesüljön a

$$\left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} - \phi(t+) \right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség. Így

$$-\varepsilon < \phi(t+) - \varepsilon < \frac{f(t+h) - f(t)}{h} < \phi(t+) + \varepsilon,$$

tehát

$$f(t+h) - f(t) + h\varepsilon > 0, \quad \forall h \in]0, \delta[\,,\ t \in I \setminus A,$$

ahonnan

$$f(t+h) + (t+h)\varepsilon - [f(t) + t\varepsilon] > 0, \quad \forall h \in]0, \delta[\,,\ t \in I \setminus A.$$

Ha átírjuk a

$$g_\varepsilon(t) := f(t) + t\varepsilon$$

függvényre az előbbi egyenlőtlenséget, a

$$g_\varepsilon(t+h) - g_\varepsilon(t) > 0, \quad \forall h \in]0, \delta[\,,\ t \in I \setminus A$$

egyenlőtlenséghez jutunk. A 2.6-os lemma alapján g_ε növekvő I-n, tehát bármely $t_1, t_2 \in I$, $t_1 < t_2$ esetén

$$g_\varepsilon(t_1) \leq g_\varepsilon(t_2) \Longleftrightarrow f(t_1) \leq f(t_2) + \varepsilon(t_2 - t_1).$$

Ha $\varepsilon \to 0$, az $f(t_1) \leq f(t_2)$ egyenlőtlenséghez jutunk, tehát f növekvő I-n. $\square$

5.3 Darboux tétele

Az 1.1(b) példában láttuk, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

függvény deriválható, de a deriváltja nem folytonos. A következő tétel azt mutatja, hogy a derivált függvénynek nem lehet akármilyen szakadási pontja.

3.1. Tétel. (Darboux tétele) *Ha az* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *függvény deriválható* $[a,b]$*-n, akkor az* $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ *függvény Darboux tulajdonságú.*

Bizonyítás. Feltételezhetjük, hogy $f'(a) < \lambda < f'(b)$. Ha $c = (a+b)/2$, akkor $a \leq \leq t \leq c$ esetén $\alpha(t) = a$, $\beta(t) = 2t - a$, ellenkező esetben ($c \leq t \leq b$) $\alpha(t) = 2t - b$ és $\beta(t) = b$. Mindkét esetben $a \leq \alpha(t) < \beta(t) \leq b$, ha $t \in]a,b[$. A

$$g(t) := \frac{f(\beta(t)) - f(\alpha(t))}{\beta(t) - \alpha(t)}, \quad a < t < b$$

függvény folytonos $]a,b[$ -n, $g(t) \to f'(a)$, amikor $t \to a$, és $g(t) \to f'(b)$, amikor $t \to b$, tehát a 2.15-ös tétel (170. oldal) alapján $g(t_0) = \lambda$, valamilyen $t_0 \in]a,b[$ -re. Ha t_0-t rögzítjük, a 2.3-as tétel (223. oldal) alapján létezik x úgy, hogy $\alpha(t_0) < x < < \beta(t_0)$ és $f'(x) = g(t_0)$. Tehát létezik olyan $x \in]a,b[$, amelyre $f'(x) = \lambda$. □

3.1. Következmény. *Ha az* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *függvény deriválható, akkor* f'*-nak nem lehet elsőfajú szakadási pontja* $[a,b]$*-ben.*

5.4 L'Hospital tétele

4.1. Tétel. (L'Hospital[121]) *Az* f *és* g *függvények deriválhatók* $]a,b[-$ *n,* $g'(x) \neq 0$*, bármely* $x \in]a,b[$*, ahol* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$*. Ha*

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to A \ (\in [-\infty, \infty]), \quad \text{amikor } x \to a, \tag{4.1}$$

és

$$f(x) \to 0, \quad \text{valamint } g(x) \to 0, \quad \text{amikor } x \to a, \tag{4.2}$$

vagy

$$g(x) \to +\infty, \quad \text{amikor } x \to a, \tag{4.3}$$

akkor

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to A, \quad \text{amikor } x \to a. \tag{4.4}$$

[121] Guillaume François Antoine de L'Hospital, marquis de Sainte-Mesme, 1661-1704

Bizonyítás. Vizsgáljuk a $-\infty \leq A < +\infty$ esetet. Válasszunk egy q valós számot úgy, hogy $A < q$, és egy $r-$ et úgy, hogy $A < r < q$. A (4.1)-es feltétel alapján létezik $c \in]a, b[$ úgy, hogy

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < r, \text{ ha } a < x < c. \tag{4.5}$$

$a < x < y < c$ esetén a 2.2-es Cauchy tételből következik, hogy létezik $t \in]x, y[$ úgy, hogy

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} < r. \tag{4.6}$$

Ha (4.2) teljesül, akkor $x \to a$ esetén az

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leq r < q, \qquad (a < y < c) \tag{4.7}$$

egyenlőtlenséghez jutunk.

Ha (4.3) teljesül, akkor $y-$ t rögzítve (4.6)-ban választhatunk olyan $c_1 \in]a, y[$ pontot, amelyre $g(x) > g(y)$ és $g(x) > 0$, ha $a < x < c_1$. Ha beszorozzuk a (4.6) egyenlőtlenség mindkét oldalát $[g(x) - g(y)]/g(x)-$ szel, az

$$\frac{f(x)}{g(x)} < r - r\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)}, \qquad (a < x < c_1) \tag{4.8}$$

egyenlőtlenséget kapjuk, tehát $x \to a$ esetén (4.3)-ból következik, hogy van olyan $c_2 \in]a, c_1[$ pont, amelyre

$$\frac{f(x)}{g(x)} < q, \qquad (a < x < c_2). \tag{4.9}$$

A (4.7) és (4.9) összefüggések alapján látható, hogy minden $A < q-$ ra létezik c_2 úgy, hogy $\frac{f(x)}{g(x)} < r$, ha $a < x < c_2$.

$-\infty < A \leq +\infty$ esetén hasonló gondolatmenettel igazolható, hogy bármely $p < A-$ ra létezik c_3 úgy, hogy

$$p < \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad a < x < c_2.$$

Ebből a két tulajdonságból következik a (4.4). □

A L'Hospital szabály sorozatok határértékének kiszámítása során is alkalmazható. A következő példa ennek az eszköznek a hatékonyságát hivatott ábrázolni.

Példa. Az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozatra $x_0 \in [0, \pi]$ és $x_{n+1} = \sin x_n$, $\forall n \geq 1$. Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}x_n$ határértéket.

Bizonyítás. A sorozat csökkenő és alulról korlátos, tehát konvergens. Ha a rekurzióban határértékre térünk, az $l = \sin l$ egyenlethez jutunk, ahol l az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat határértéke. Mivel ennek az egyenletnek csak az $l = 0$ megoldása, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. A vizsgált határérték helyett előbb annak a négyzetét számítjuk ki.

$$\lim_{n\to\infty} nx_n^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}},$$

ha az utóbbi határérték létezik. Másrészt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 \cdot x_{n+1}^2}{x_n^2 - x_{n+1}^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 \cdot \sin^2 x_n}{x_n^2 - \sin^2 x_n} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot \sin^2 x}{x^2 - \sin^2 x}$$

és

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot \sin^2 x}{x^2 - \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2 - \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x - \sin x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{x + \sin x} \overset{\text{L'H}}{=} 3,$$

tehát $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}x_n = \sqrt{3}$. $\triangle$

A L'Hospital szabály csak olyankor alkalmazható, amikor a függvények a vizsgált pont környezetében deriválhatók. Ezzel szemben a következő tétel olyan esetekre vonatkozik, amikor a függvények nem deriválhatók a vizsgált pont környezetében.

4.2. Tétel. *(Cauchy) Ha $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum, $x_0 \in I$, és az $f, g : I \to \mathbb{R}$ függvényekre*

1. $f(x_0) = g(x_0) = 0$;

2. *f és g deriválható x_0-ban és $g'(x_0) \neq 0$,*

akkor létezik olyan V környezete az x_0-nak, amelyben $g(x) \neq 0$ és

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Bizonyítás. A feltételek alapján

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}},$$

és ebben az egyenlőségben határértékre térhetünk. $\square$

5.5 Magasabb rendű deriváltak

Ha az $f : A \to \mathbb{R}$ függvény deriválható egy $I \subset A$ intervallumon és az elsőrendű deriváltjának létezik deriváltja az $x \in I$ pontban, akkor azt mondjuk f-nek létezik *másodrendű deriváltja* x-ben. Az f függvény x-beli másodrendű deriváltját $f''(x)$-szel vagy $f^{(2)}(x)$-szel jelöljük. Ha f-nek az A intervallum minden pontjában van másodrendű deriváltja, és ez minden pontban véges, akkor azt mondjuk, hogy f

kétszer deriválható. Hasonlóan értelmezzük az $f'''(x)$ vagy $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$, $\dots$, $f^{(n)}(x)$ deriváltakat is. Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $f^{(k+1)}$ az $f^{(k)}$ deriváltja. Az $f^{(k)}$ függvényt az f *k-adrendű deriváltjának* nevezzük. Az egységes jelölésért használjuk az $f^{(0)} = f$ jelölést is.

Ha $k \in \mathbb{N}$ és I egy intervallum, akkor $C^k(I)$-vel jelöljük az I-n k-szor folytonosan deriválható függvények halmazát.

5.1. Tétel. (*Leibniz képlet*) *Ha $u, v \in C^n(I)$, akkor $u \cdot v \in C^n(I)$ és*

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + \cdots + \binom{n}{n-1}u'v^{(n-1)} + uv^{(n)}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Bizonyítás. A matematikai indukció módszerével. $\square$

5.1. Tulajdonság.

$$(e^x)^{(n)} = e^x, \quad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

5.1. Gyakorlat. ([40, I. Nemzetközi Matematika Verseny, 1994, Második nap, 3. feladat]) *Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény $n+1$-szer deriválható, és az $a < b$ valós számokra*

$$\ln\left(\frac{f(b) + f'(b) + \cdots + f^{(n)}(b)}{f(a) + f'(a) + \cdots + f^{(n)}(a)}\right) = b - a,$$

akkor létezik olyan $c \in]a, b[$, amelyre

$$f^{(n+1)}(c) = f(c).$$

Megoldás. A $g(x) = (f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(n)}(x))e^{-x}$ segédfüggvény deriválható és $g(a) = g(b)$. A Rolle tétel alapján létezik $c \in]a, b[$ úgy, hogy $g'(c) = 0$. De $g'(x) = (f^{(n+1)}(x) - f(x))e^{-x}$, tehát a bizonyítás teljes. $\triangle$

Ha $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n-1)}$ folytonos I-n és létezik $f^{(n)}$ az a-ban, akkor minden $x \in I$ pontban értelmezhetjük az f n-ed fokú *Taylor*[122] *polinomját* a

$$T_n(x) := f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) \tag{5.1}$$

egyenlőséggel. Az

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x),$$

kifejezést *n-edrendű maradéknak* nevezzük, és az

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n(x),\ x \in I \tag{5.2}$$

azonosságot *Taylor képletnek.*

[122]Brook Taylor, 1685-1731

5.2. Tulajdonság. *Az előbb felsorolt feltételek mellett*

$$T_n(a) = f(a),\ T_n'(a) = f'(a), \dots, T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a),\ T_n^{(n+1)}(a) = 0,$$
$$R_n(a) = 0,\ R_n'(a) = 0, \dots, R_n^{(n)}(a) = 0.$$

5.1. Lemma. *Az előbbi feltételek mellett*

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Bizonyítás. A 4.1-es tételből

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{R_n'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \dots = \lim_{x \to a} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n!} = 0. \quad \square$$

Megjegyzés. Ha (5.2)-ben $a = 0$, akkor az

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n(x), \quad x \in I, \tag{5.3}$$

Maclaurin[123] *képletnek* nevezett azonossághoz jutunk. $\triangle$

Felírjuk néhány elemi függvényre a Maclaurin képletet:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{5.4}$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n-1}(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{5.5}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{5.6}$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + R_n(x),\ x > -1, \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha = {} & 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \\ & + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x),\ \alpha \in \mathbb{R},\ x > -1.\end{aligned} \tag{5.8}$$

Megjegyzés. Az 5.1-es lemmából következik, hogy adott x és a esetén létezik $p \in \mathbb{N}^*$ és $k \in \mathbb{R}$ úgy, hogy

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (x-a)^p k. \tag{5.9}$$

5.2. Lemma. *Ha* $n \in \mathbb{N}^*$ *és létezik* $f^{(n+1)}$ *az* I *-n, valamint* $p \in \mathbb{N}$, *és* $a, x \in \in I$ *tetszőlegesen rögzítettek (* $a \neq x$ *), akkor létezik* ξ *az* a *és* x *között úgy, hogy teljesüljön az*

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^p (x-\xi)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi) \tag{5.10}$$

[123] Colin Maclaurin, 1698-1746

egyenlőség. Az n*-edrendű maradéknak ezt az alakját Schlömilch*[124] *alaknak nevezzük.*

Bizonyítás. A

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{x-t}{1!}f'(t) + \cdots + \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t) + (x-t)^p k, \ t \in I$$

segédfüggvény deriválható I-n, $\varphi(x) = f(x)$ és $\varphi(a) = f(x)$. A Rolle tétel alapján létezik ξ az a és x között úgy, hogy $\varphi'(\xi) = 0$. A derivált és k kiszámítása, illetve visszahelyettesítése után (5.10)-et kapjuk. □

Megjegyzés. Ha ξ-t $\xi = a+\theta(x-a)$, $0 < \theta < 1$ alakban keressük, akkor a maradék (5.10)-es alakjából

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)). \quad \triangle \tag{5.11}$$

A Maclaurin képlet maradéktagja

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\theta x). \tag{5.12}$$

A maradéknak a leggyakrabban használt alakjai a Cauchy-féle és a Lagrange-féle alak. Az elsőt $p = 1$-re, a másodikat $p = n+1$-re kapjuk.

(a) $p = 1$ esetén

$$R_n(x) = \frac{(x-a)(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi); \tag{5.13}$$

(b) $p = n+1$ esetén

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi). \tag{5.14}$$

Megjegyzések. (a) Az (5.10)-ben szereplő ξ közbeeső érték általában függ a-tól, x-től, n-től és p-től.
(b) Ha a Maclaurin képletbe a maradék Lagrange-féle alakját írjuk, akkor $x \in I$-re az

$$\begin{aligned} f(x) =& f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^n(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \\ & \text{ahol } \xi = \theta x, \ \ 0 < \theta < 1 \end{aligned} \tag{5.15}$$

egyenlőséghez jutunk. △

[124] Oscar Xavier Schlömilch, 1823-1901

Példa. Az (5.8) összefüggésben az

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!p}\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}$$

maradék Cauchy alakja

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}x^{n+1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n (1+\theta x)^{\alpha-1}.$$

Ha $|x|<1$, akkor

$$\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n < 1, \quad |1+\theta x| < 2 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}x^{n+1} = 0,$$

tehát

$$|R_n(x)| \le 2^{\alpha+1}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}x^{n+1}\right| \to 0, \quad \text{ha} \quad n\to\infty.$$

Ebből látható, hogy a Taylor polinom lokálisan közelíti a függvényt.

Például $\sqrt[3]{30}$ kiszámítására felírhatjuk, hogy

$$\sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{27+3} = 3\sqrt[3]{1+\frac{1}{9}},$$

tehát $\alpha = 1/3$-ra és $x = 1/9$-re megkapjuk a $\sqrt[3]{30}$ egy megközelítését. $\triangle$

5.6 Konvex függvények és deriválhatóság

6.1. Tétel. *Ha I egy nemüres intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ konvex függvény, $a = \inf I$ és $b = \sup I$, akkor*

(a) *f-nek minden $t \in]a,b[$ pontban van jobb- és baloldali deriváltja és $t_1, t_2 \in]a,b[$, $t_1 < t_2$ esetén*

$$f'_l(t_1) \le f'_r(t_1) \le f'_l(t_2) \le f'_r(t_2);$$

(b) *$a \in I$ $(b \in I)$ esetén f jobbról deriválható a-ban (balról deriválható b-ben) és*

$$f'_r(a) \le f'_l(t) \qquad (\textit{illetve } f'_r(t) \le f'_l(b)), \quad t \in \operatorname{int}(I);$$

(c) *létezik egy legfeljebb megszámlálható $A \subset I$ halmaz úgy, hogy f deriválható $I \setminus A$-n.*

Bizonyítás. (a) Legyen $t \in]a,b[$ egy rögzített pont. Mivel $s_{f,t}$ növekvő az $I \setminus \{t\}$ halmazon ((a) alpontja a 6.1-es tételnek, 202. oldal), az $s_{f,t}$ függvénynek véges jobb- és baloldali határértéke van t-ben. Így f-nek létezik a jobb- és baloldali deriváltja t-ben.

Ha $t_1, t_2 \in]a, b[\,,\ t_1 < t_2,$ akkor választhatunk olyan u, v, w számokat, amelyekre $a < u < t_1 < v < t_2 < w < b.$ Az

$$s_{f,t_1}(u) \leq s_{f,t_1}(v) = s_{f,v}(t_1) \leq s_{f,v}(t_2) = s_{f,t_2}(v) \leq s_{f,t_2}(w)$$

egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$f_l'(t_1) = s_{f,t_1}(t_1-) \leq s_{f,t_1}(t_1+) = f_r'(t_1) \leq s_{f,t_2}(t_2-) = f_l'(t_2) \leq s_{f,t_2}(t_2+) = f_r'(t_2).$$

(b) Ha $a \in I$, akkor megismételjük az előbbi gondolatmenetet $a < t_1 < u$-ra.
(c) Az (a) alapján $f_l'(t)$ növekvő az $]a, b[$-n, tehát létezik egy legfeljebb megszámlálható A halmaz úgy, hogy $f_l'(t)$ folytonos legyen $]a, b[\setminus A$-n.

Ha $t_0 \in]a, b[\setminus A$ rögzített, akkor $f_l'(\cdot)$ folytonos t_0-ban, és $t > t_0$-ra

$$f_l'(t_0) \leq f_r'(t_0) \leq f_l'(t).$$

Amikor $t \to t_0,$ az $f_l'(t_0) = f_r'(t_0)$ egyenlőséget kapjuk, tehát f deriválható t_0-ban. Így f deriválható az $I \setminus A$ halmazon. $\square$

6.1. Következmény. *Ha* $f : I \to \mathbb{R}$ *konvex függvény,* $a = \inf I,\ \ b = \sup I$ *és* $t_0 \in]a, b[\,,$ *akkor*

$$f(t) \geq f(t_0) + m(t - t_0),$$

bármely $t \in I$ *és* $m \in [f_l'(t_0), f_r'(t_0)]$ *esetén.*

Bizonyítás. Ha $t > t_0,$ akkor

$$s_{f,t_0}(t) = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \geq \inf_{\substack{s \in I \\ s > t_0}} s_{f,s}(s) = f_r'(t_0) \geq m.$$

$t < t_0$-ra

$$s_{f,t_0}(t) = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \leq \sup_{\substack{s \in I \\ s < t_0}} s_{f,s}(s) = f_l'(t_0) \leq m.$$

Az előbbi két egyenlőtlenségből következik a kért tulajdonság. $\square$

6.2. Következmény. *Az* $f : I \to \mathbb{R}$ *deriválható függvény pontosan akkor konvex, ha*

(6.1) $$f(t) \geq f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0), \quad \text{bármely } t, t_0 \in I \text{ esetén.}$$

Bizonyítás. A szükségesség következik az előbbi tulajdonságból.

Az elégségesség igazolásához a (6.1) alapján tetszőleges $a, b \in I$ és $\alpha \in [0, 1]$ esetén felírjuk az

$$\begin{aligned} f(a) \geq & f((1-\alpha)a + \alpha b) + f'((1-\alpha)a + \alpha b)\alpha(a - b), \\ f(b) \geq & f((1-\alpha)a + \alpha b) - f'((1-\alpha)a + \alpha b)(1-\alpha)(a - b) \end{aligned}$$

egyenlőtlenségeket. Ha az elsőt $(1-\alpha)$-val, a másodikat α-val szorozzuk, és összeadjuk a megfelelő oldalakat, az

$$(1-\alpha)f(a)+\alpha f(b)\geq f((1-\alpha)a+\alpha b)$$

egyenlőtlenséghez jutunk, tehát f konvex. □

6.3. Következmény. *I egy nemüres nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ egy deriválható függvény. Az f függvény pontosan akkor konvex, ha*

$$[f'(x)-f'(y)](x-y)\geq 0, \quad x,y\in I. \tag{6.2}$$

Bizonyítás. Ha f konvex, akkor a 6.2-es következményből

$$f'(x)(y-x)\leq f(y)-f(x), \quad f'(y)(x-y)\leq f(x)-f(y), \quad \forall\, x,y\in I.$$

A két egyenlőtlenség megfelelő oldalainak összeadásával (6.2)-t kapjuk.

Ha (6.2) teljesül, akkor f' növekvő, tehát tetszőleges $x,y\in I$, $x<y$, $\lambda\in]0,1[$ és $x_\lambda=(1-\lambda)x+\lambda y$ esetén írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)-f(x_\lambda)&=(1-\lambda)[f(x)-f(x_\lambda)]+\lambda[f(y)-f(x_\lambda)]=\\&=(1-\lambda)f'(x)(x-x_\lambda)+\lambda f'(y)(y-x_\lambda)=\\&=\lambda(1-\lambda)f'(x)(x-y)+\lambda(1-\lambda)f'(y)(y-x)=\\&=\lambda(1-\lambda)(x-y)[f'(x)-f'(y)]\geq 0.\end{aligned}$$ □

6.4. Következmény. (Fermat tétele konvex függvényekre) *Ha $f : I \to \mathbb{R}$ konvex és deriválható függvény I-n, akkor tetszőleges $t_0\in \operatorname{int}(I)$ pont esetén a következő állítások egyenértékűek:*

(a) *$(t_0, f(t_0))$ globális minimumpontja f-nek;*

(b) *$(t_0, f(t_0))$ lokális minimumpontja f-nek;*

(c) *$f'(t_0)=0$.*

Bizonyítás. Világos, hogy (a) $\Longrightarrow$ (b).

(b) $\Longrightarrow$ (c) igaz a Fermat tétel alapján (a konvexitási feltétel nélkül is).

(c) $\Longrightarrow$ (a) következik az előbbi tulajdonságból. □

6.2. Tétel. *Egy deriválható függvény pontosan akkor (szigorúan) konvex, ha az elsőrendű deriváltja (szigorúan) növekvő.*

Bizonyítás. A szükségesség következik a 6.1-es tételből.

Az elégségesség igazolásához feltételezzük, hogy létezik olyan $f : I \to \mathbb{R}$ deriválható függvény, amelynek a deriváltja növekvő és f nem konvex. Erre az f függvényre létezik olyan $a,b,c\in I$, $a<b<c$, amelyre $s_{f,b}(a)>s_{f,b}(c)$, azaz

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}>\frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

A Lagrange tétel alapján létezik $t_1 \in]a,b[$ és $t_2 \in]b,c[$ úgy, hogy $f'(t_1) > f'(t_2)$. Ez viszont ellentmond annak, hogy f' növekvő. A kapott ellentmondás alapján a bizonyítás teljes. $\square$

6.5. Következmény. *Egy deriválható függvény pontosan akkor (szigorúan) konkáv, ha az elsőrendű deriváltja (szigorúan) csökkenő.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk az előbbi tételt a $-f$ függvényre. $\square$

6.6. Következmény. (Jensen) *Az $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek minden $x \in I$ pontban létezik a másodrendű deriváltja. f pontosan akkor konvex (konkáv), ha $f'' \geq 0$ ($f'' \leq 0$).*

Bizonyítás. Az adott feltételek mellett az f' függvény pontosan akkor növekvő (csökkenő), ha $f'' \geq 0$ (illetve $f'' \leq 0$). $\square$

6.7. Következmény. *Az $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek minden $x \in I$ pontban létezik a másodrendű deriváltja. f pontosan akkor szigorúan konvex (szigorúan konkáv), ha $f'' > 0$ (illetve $f'' < 0$).*

5.6.1 Egyenlőtlenségek

6.1. Tulajdonság. (Young egyenlőtlenség) *Ha $n \in \mathbb{N}^*$, $y_k > 0$, $p_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$ esetén, és $\sum_{k=1}^{n} 1/p_k = 1$, akkor*

$$\prod_{k=1}^{n} y_k \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} y_k^{p_k}. \tag{6.3}$$

$n = 2$ esetén az (1.12) egyenlőtlenséget kapjuk vissza (lásd a 60. oldalt).
Bizonyítás. Tekintsük az $f(x) = \exp(x)$, $x \in \mathbb{R}$ függvényt. Mivel $f''(x) > 0$, bármely $x \in \mathbb{R}$-re, az f függvény konvex. A (6.3) Jensen egyenlőtlenséget alkalmazzuk (lásd a 201. oldalt) az $\alpha_k = 1/p_k$ és $x_k = \ln y_k^{p_k}$ számokra:

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} \ln y_k^{p_k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} \exp\left(\ln y_k^{p_k}\right).$$

Mivel

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} \ln y_k^{p_k}\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \ln y_k\right) \quad \text{és}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} \exp\left(\ln y_k^{p_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} y_k^{p_k},$$

következik a Young egyenlőtlenség. $\square$

6.2. Tulajdonság. (Közepek közti egyenlőtlenség súlyozott alakja) *Ha* $n \in \mathbb{N}^*$, $x_i > 0,\ \ \alpha_i \geq 0,\ \ i = 1, \ldots, n$ *esetén, és* $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$, *akkor*

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n. \tag{6.4}$$

Bizonyítás. Az $f(x) = \ln x,\ \ x > 0$ függvényre $f''(x) < 0$, bármely $x > 0$-ra, tehát f szigorúan konkáv. A Jensen egyenlőtlenség alapján

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln x_i,$$

tehát (6.4) is teljesül. □

6.8. Következmény. $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1/n$ *-re visszakapjuk az*

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \tag{6.5}$$

egyenlőtlenséget.

6.9. Következmény. *Ha a 6.2 tételben minden* x_i *-t helyettesítünk a megfelelő* $1/x_i$ *-vel, az*

$$\left(\frac{\alpha_1}{x_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x_n}\right)^{-1} \leq x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \tag{6.6}$$

egyenlőtlenséget kapjuk.

6.10. Következmény. *Ha az előbbi egyenlőtlenségben* $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1/n$, *akkor visszakapjuk a számtani és harmonikus közepek közti egyenlőtlenséget:*

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}. \tag{6.7}$$

Gyakorlatok. (a) Bizonyítsd be, hogy ha $m, n \in \mathbb{N}^*$ és $a_1, \ldots, a_n$ pozitív valós számok, akkor

$$\frac{a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^m.$$

(b) Bizonyítsd be, hogy minden ABC háromszögben teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq 3\sqrt{3}/2, \qquad \sin A \sin B \sin C \leq 3\sqrt{3}/8,$$
$$\cos A + \cos B + \cos C \leq 3/2, \qquad \cos A \cos B \cos C \leq 1/8. \quad \triangle$$

5.7 Függvénysorozatok és függvénysorok differenciálhatósága

Ebben a paragrafusban azt vizsgáljuk, hogy a deriválás és a határértékre térés művelete felcserélhető-e függvénysorozatok és függvénysorok esetén (vagyis a határfüggvény deriváltja egyenlő-e a deriváltak határértékével stb.). Könnyen szerkeszthetünk olyan példát, amelyből kitűnik, hogy általában ez a csere nem lehetséges. Az alábbi tétel elégséges feltételeket tartalmaz.

7.1. Tétel. *Ha az (f_n) függvénysorozat tagjai deriválhatóak az $[a,b]$ intervallumon, $(f_n(t))$ konvergens valamilyen $t \in [a,b]$-re és (f_n') egyenletesen konvergál $[a,b]$-n, akkor (f_n) az $[a,b]$-n egyenletesen tart egy f függvényhez és*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x), \quad \forall\, x \in [a,b]. \tag{7.1}$$

Bizonyítás. Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ valós számot. A feltételek alapján létezik olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, amelyre minden $n, m \geq n_\varepsilon$ esetén

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon/2, \tag{7.2}$$

$$|f_n'(z) - f_m'(z)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad \forall\, z \in [a,b]. \tag{7.3}$$

Az $f_n - f_m$-re alkalmazott Lagrange tétel (2.3 tétel) és (7.3) alapján írhatjuk, hogy

$$|f_n(x) - f_m(x) - f_n(u) + f_m(u)| \leq \frac{|x-u|\varepsilon}{2(b-a)} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \tag{7.4}$$

ha $n, m \geq n_\varepsilon$ és $x, u \in [a,b]$. Másrészt

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x) - f_n(t) + f_m(t)| + |f_n(t) - f_m(t)|,$$

tehát a (7.2) és (7.4) összefüggés alapján minden $n, m \geq n_\varepsilon$ és $x, t \in [a,b]$-re

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Ebből következik, hogy az (f_n) sorozat az $[a,b]$-n egyenletesen konvergál egy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényhez.

Igazolnunk kell, hogy f deriválható, és teljesül a (7.1) összefüggés. Ha $x \in [a,b]$ egy rögzített elem és

$$\phi_n(u) = \frac{f_n(u) - f_n(x)}{u-x}, \quad \phi(u) = \frac{f(u) - f(x)}{u-x},\ u \in [a,b],\ u \neq x, \tag{7.5}$$

akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\lim_{u\to x} \phi_n(u) = f_n'(x). \tag{7.6}$$

A (7.4) összefüggés alapján (ϕ_n) egyenletesen konvergál az $[a, b] \setminus \{x\}$ halmazon. Ugyanakkor (f_n) egyenletesen tart f-hez, tehát (7.5) alapján

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(u) = \phi(u), \tag{7.7}$$

és ez is egyenletes konvergencia az $[a, b] \setminus \{x\}$ halmazon. A 122. oldal 2.2 tételét alkalmazzuk a (ϕ_n) függvénysorozatra ((7.6) és (7.7) alapján a feltételek teljesülnek). Így

$$\lim_{u\to x} \phi(u) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x),$$

ami éppen a (7.1) egyenlőség. $\square$

7.1. Következmény. *Ha az (f_n) sorozat tagjai $[a, b]$-n folytonosan deriválható függvények, $(f_n(t))$ konvergál valamilyen $t \in [a, b]$-re, és az (f_n') sorozat egyenletesen konvergál $[a, b]$-n, akkor (f_n) is egyenletesen konvergál $[a, b]$-n, és az f határfüggvényre*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x), \quad \forall\, x \in [a, b]. \tag{7.8}$$

Ha átfogalmazzuk függvénysorokra, a következő tulajdonságot kapjuk:

7.2. Tétel. *Ha az $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvények folytonosan deriválhatók $[a, b]$-n, a $\sum f_n(t)$ sor konvergens valamilyen $t \in [a, b]$-re, és a $\sum f_n'$ sor egyenletesen konvergál g-hez, akkor $\sum f_n$ egyenletesen konvergál egy f függvényhez, f deriválható, és*

$$f' = g.$$

Bizonyítás. A 7.1 következményt alkalmazzuk. $\square$

5.8 Hatványsorok és Taylor-féle sorbafejtés

A 137. oldalon értelmeztük a hatványsorokat és a 236. oldalon a Taylor polinomokat. Láttuk, hogy egy f függvényhez pontosan akkor rendelhetünk n-ed fokú Taylor-féle polinomot, ha f legalább n-szer deriválható valamely pontban. A polinomokat tekinthetjük egy sor részletösszegének is, így egy végtelenszer deriválható függvényhez hozzárendelhetjük ezt a sort. Kérdés, hogy az így hozzárendelt sor egyáltalán konvergens-e, ha konvergens, az összege valóban az f függvény-e, illetve a sor segítségével hogyan kaphatjuk meg az f deriváltjait, stb. Ebben a paragrafusban néhány tételt ismertetünk, amelyek az előbi kérdésekre próbálnak választ adni.

A 137. oldal 3.22 tételéhez hasonló tulajdonság teljesül

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots \tag{8.1}$$

alakú sorokra is, ahol (a_n), $n \in \mathbb{N}$ egy sorozat, $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$, $f_0(x) = a_0$, és x_0 egy rögzített valós szám. Az ilyen alakú sorokat *hatványsoroknak* nevezzük. Látható, hogy a (8.1) sor legalább egy pontban konvergál (x_0 -ban). Azoknak a pontoknak a halmazát, amelyekben a sor konvergál, *konvergencia tartománynak* nevezzük. A konvergencia tartomány szerkezetére vonatkozik az alábbi tétel:

8.1. Tétel. *A* (8.1) *sorra megszerkesztjük az*

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{és} \quad R = \frac{1}{\alpha}$$

számokat (ha $\alpha = 0$, *akkor* $R = +\infty$, *és ha* $\alpha = \infty$, *akkor* $R = 0$ *). A* (8.1) *sor abszolút konvergens minden olyan* x *-re, amely teljesíti a* $|x - x_0| < R$ *egyenlőtlenséget és divergens, ha* $|x - x_0| > R$. *Sőt,* $0 < r < R$ *esetén a* (8.1) *sor egyenletesen konvergens az* $[x_0 - r, x_0 + r]$ *intervallumon.*

Megjegyzés. Az R számot a (8.1) sor *konvergencia sugarának* nevezzük. △

Bizonyítás. A bizonyítás elvileg ugyanaz, mint a 137. oldalon található 3.22 tétel bizonyítása. □

Az előbbi tétel második részét pontosíthatjuk, ha a konvergencia tartomány határán is van információnk a sor konvergenciájáról.

8.2. Tétel. *Ha a* $\sum a_n R^n$ *sor konvergens és az összege* s, *akkor a* $\sum a_n(x - x_0)^n$ *hatványsor egyenletesen konvergens az* $[x_0, x_0 + R]$ *intervallum, és ha* f *az összege, akkor*

$$\lim_{x\to x_0+R} f(x) = s. \tag{8.2}$$

Bizonyítás. A 8.1 tételből következik. □

8.3. Tétel. *Ha a* $\sum a_n(x - x_0)^n$ *hatványsor konvergencia sugara* $R > 0$, *akkor az*

$$a_1 + 2a_2(x - x_0) + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \dots \tag{8.3}$$

sor konvergencia sugara is R.

Bizonyítás. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, írhatjuk, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

és így a két sornak ugyanaz a konvergencia sugara. □

8.1. Következmény. *Ha* $k \in \mathbb{N}^*$ *és a* $\sum a_n(x - x_0)^n$ *hatványsor konvergencia sugara* $R > 0$, *akkor a*

$$k!a_k + (k+1)!a_{k+1}(x - x_0) + \dots + n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x - x_0)^{n-k} + \dots \tag{8.4}$$

sornak a konvergencia sugara szintén R.

A (8.1) sor *részletösszegeinek sorozata* az

$$s_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

egyenlőséggel értelmezett (s_n) sorozat.

8.4. Tétel. *Ha a (8.1) sor R konvergencia sugara nem nulla, akkor a sor összege által értelmezett $f :]x_0 - R, x_0 + R[\to \mathbb{R}$ összegfüggvény végtelenszer deriválható az $]x_0 - R, x_0 + R[$ intervallumon, és a deriváltjai előállíthatók*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k} \tag{8.5}$$

alakban (tehát hatványsorokat tagonként deriválhatunk). Sajátosan

$$f^{(k)}(x_0) = k!a_k. \tag{8.6}$$

Bizonyítás. A 213. oldalon található 9.2 tétel, valamint a 7.2 és 8.3 tétel alapján a bizonyítás azonnali. $\square$

Ha az f függvény végtelenszer deriválható az $]x_0 - R, x_0 + R[$ intervallumon ($R > 0$), akkor a (8.1) sort, amelynek a_n együtthatóit a (8.6) összefüggéssel értelemezzük, az f x_0 körüli *Taylor sorának* nevezzük.

Megjegyzés. Előfordulhat, hogy egy pontban az f-hez rendelt Taylor sor konvergens, és az összege nem az f függvény. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \tag{8.7}$$

függvényre és az $x_0 = 0$ pontra látható, hogy f végtelenszer deriválható 0-ban, és $f^{(n)}(0) = 0$, $n \geq 0$. Így a Taylor sor együtthatói mind 0-k, tehát a Taylor sor identikusan 0 és ez egyenletesen konvergál az egész $\mathbb{R}$-en az identikusan 0 függvényhez. Másrészt az f függgény csak 0-ban 0. $\triangle$

A paragrafus további eredményei olyan függvényekre vonatkoznak, amelyek Taylor sora a függvényhez konvergál.

Ha az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény

(i) végtelenszer deriválható;

(ii) Taylor sora abszolút konvergens a $J =]x_0 - R, x_0 + R[\subset I$ intervallumon, és az R konvergencia sugár nem 0;

(iii) Taylor sorának az összege a J intervallumon egybeesik f-el,

akkor az f függvényt *analitikus függvénynek* nevezzük x_0-ban. Ha f analitikus minden $x_0 \in I$ esetén, akkor azt mondjuk, hogy f *analitikus I-n.*

A következő tétel egy könnyen használható analitikussági kritérium.

8.5. Tétel. *Ha az* $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *függvény* C^∞ *osztályú, és létezik olyan* $R > 0$, *illetve* $M > 0$ *valós szám, amelyekre minden* $x \in]x_0 - R, x_0 + R[\subset]a,b[$ *és* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $|f^{(n)}(x)| \le M^n$, *akkor az* f *függvény analitikus* x_0*-ban.*

Bizonyítás. Az f függvényhez az x_0-ban rendelt Taylor sor általános tagjára a következő becslést írhatjuk fel:

$$\left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right| \le \frac{M^n R^n}{n!}, \quad |x-x_0| < R.$$

Mivel a

$$\sum \frac{M^n R^n}{n!}$$

számsor konvergens, az f Taylor sora egyenletesen konvergál az x_0 pont R sugarú környezetében. Másrészt az n-edrendű Taylor polinomra felírhatjuk a maradék Lagrange-féle alakját (lásd (5.14)), és így

$$|f(x) - s_n(x)| = |f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)| \le \frac{M^n R^n}{n!}.$$

Ebből következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} [f(x) - s_n(x)] = 0,$$

tehát a Taylor sor összege pontosan f, és így f analitikus x_0 körül. □

8.6. Tétel. *Ha* I *egy nyílt intervallum,* $x_0 \in I$ *és az* f *függvény analitikus* x_0*-ban, akkor* $f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$, *bármely* $x \in I \cap J$ *esetén, ahol* J *a Taylor sor konvergencia tartománya.*

8.2. Következmény. *Ha* f *analitikus az* I *nyílt intervallumon,* $x_0 \in I$ *és* $f^{(n)}(x_0) = 0$, *minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén, akkor* $f(x) = 0$, $\forall x \in I$.

8.3. Következmény. *Ha* f *és* g *analitikus függvények az* I *nyílt intervallumon,* $x_0 \in I$ *és* $f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$, *bármely* $n \in \mathbb{N}$*-re, akkor* $f = g$ *az* I *intervallumon.*

5.8.1 Műveletek hatványsorokkal

Tekintsük a

$$\sum a_n(x-x_0)^n \quad \text{és} \quad \sum b_n(x-x_0)^n \tag{8.8}$$

x_0 pont körüli hatványsorokat, amelyek hatványsugara R_1, illetve R_2. Ha $\min\{R_1, R_2\} > 0$, akkor tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén a 124. oldal 3.3 tétele alapján a

$$\sum (\alpha a_n + \beta b_n)(x-x_0)^n$$

sor konvergál, ha $|x - x_0| < R$, és $R = \min\{R_1, R_2\}$.

8.7. Tétel. *Ha a (8.8) sorok konvergencia sugara rendre* R_1 *és* R_2, *akkor a* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ *sorozat segítségével értelmezett* $\sum c_n(x-x_0)^n$ *szorzat-sor konvergál, ha* $|x - x_0| < R$, *és* $R = \min\{R_1, R_2\}$.

Bizonyítás. A 8.1 tétel alapján a (8.8) sorok abszolút konvergensek a konvergencia tartományuk belsejében. Így a 124. oldal 3.3 tétele alapján a $\sum c_n(x-x_0)^n$ sor is abszolút konvergens, ha $|x-x_0|<R$, és $R \le \min\{R_1, R_2\}$. $\square$

A $\sum c_n(x-x_0)^n$ hatványsort az $\sum a_n(x-x_0)^n$ és $\sum b_n(x-x_0)^n$ hatványsorok konvolúció szorzatának nevezzük.

8.8. Tétel. *Ha a $\sum a_n(x-x_0)^n$ hatványsor konvergencia sugara $R_1>0$, $a_0 \neq 0$ és f a sor összege az $|x-x_0|<R_1$ intervallumon, akkor létezik olyan $\sum b_n(x-x_0)^n$ hatványsor, amelynek a hatványsugara szintén nem 0, és amely a $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ függvényhez konvergál az $|x-x_0|<\min\{R_1,R_2\}$ intervallumon.*

Bizonyítás. Ha $R_2>0$, akkor a 8.7 tétel alapján a $\sum a_n(x-x_0)^n$ és $\sum b_n(x-x_0)^n$ hatványsorok konvolúció szorzata konvergál a $|x-x_0|<\min\{R_1,R_2\}$ intervallumon. Mivel a konvergencia tartomány belsejében mindhárom sor egy-egy analitikus függvényt értelmez, a 8.3 tételből következik, hogy azonosíthatjuk az együtthatókat, tehát a következő (végtelen sok egyenletből álló) rendszerhez jutunk:

$$a_0b_0=1, \quad a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0=0, \quad n\ge 1.$$

Ebből következik, hogy

$$b_0=\frac{1}{a_0}, \quad b_1=-\frac{a_1b_0}{a_0}=-\frac{a_1}{a_0^2}, \tag{8.9}$$

$$b_n=-\frac{a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0}{a_0}, \quad n\ge 2. \tag{8.10}$$

Igazoljuk, hogy az így értelmezett $\sum b_n(x-x_0)^n$ hatványsor konvergencia sugara nem nulla. Feltételezhetjük, hogy $a_0=1$ (a konvergencia sugarat nem változtatja meg, ha minden tagot beszorzunk egy 0-tól különböző számmal). Így (8.9) és (8.10) alapján

$$b_0=1,\ b_1=-a_1,\ b_n=-(a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_n),\ n\ge 2. \tag{8.11}$$

Ha $0<r<R_1$, akkor

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<1/r,$$

tehát létezik olyan ν, hogy bármely $n\ge\nu$-re

$$\sqrt[n]{|a_n|}<1/r \implies |a_n|r^n<1.$$

Válasszuk az M valós számot úgy, hogy teljesüljön az $M>\max\{1,|a_1|r,\dots,|a_\nu|r^\nu\}$ egyenlőtlenség. Így

$$M>\begin{cases}|a_n|r^n, & n\le\nu\\ |a_n|r^n(<1), & n>\nu,\end{cases}$$

tehát $|a_n|r^n<M$, bármely $n\in\mathbb{N}$ esetén.

A (8.11) alapján meghatározunk egy felső becslést a (b_n) sorozat tagjaira.

$$|b_0| = 1, \quad |b_1| = |a_1| < M/r, \quad |b_2| \le |a_1|\,|b_1| + |a_2| < M(M+1)/r^2,$$
$$|b_3| \le |a_1|\,|b_2| + |a_2|\,|b_1| + |a_3| < M(M+1)^2/r^3,$$
$$\dots$$
$$|b_n| \le |a_1|\,|b_{n-1}| + |a_2|\,|b_{n-2}| + \dots + |a_n| < \frac{M(M+1)^{n-1}}{r^n} = \frac{M}{r(M+1)}\left(\frac{M+1}{r}\right)^n,$$
$$\dots$$

Tehát

$$R_2 = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}} \ge \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{M}{r(M+1)}}\left(\dfrac{M+1}{r}\right)} = \frac{r}{M+1},$$

és így a $\sum b_n(x-x_0)^n$ hatványsor konvergencia sugara szigorúan pozitív. $\square$

8.9. Tétel. *Ha $f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$ egy analitikus függvény x_0 egy $R > 0$ sugarú környezetében, és a $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ függvényre, minden $t \in [\alpha,\beta]$ esetén $|\varphi(t) - x_0| < R$, akkor a*

$$\sum a_n[\varphi(t) - x_0]^n$$

hatványsor konvergens, bármely $t \in [\alpha,\beta]$-ra, és az összege $f(\varphi(t))$.

Példa. A (8.15) megadja az e^x Taylor sorát. Ha ebben a hatványsorban x helyett $-t^2$-et helyettesítünk, akkor megkapjuk az e^{-t^2} Taylor sorát:

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}. \quad \triangle \tag{8.12}$$

8.10. Tétel. *(Baricz Árpád[125]) Ha*

1. *az $f(x) = \sum_{n\ge 0} a_n x^n$ sor konvergens, minden $x \in (0,1)$-re;*
2. *$A_n > 0,\ \forall n \ge 0$;*
3. *az $\{(n+1)A_{n+1}/A_n - n\}$ sorozat szigorúan csökkenő,*

akkor az $m_f(x) = f(1-x^2)/f(x^2)$, $x \in (0,1)$, függvényre és tetszőleges $x_1, \dots, x_k \in$ $\in (0,1)$ számokra

$$\sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} m_f(x_i)} \le m_f\left(\sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} x_i}\right). \tag{8.13}$$

Az előbbi egyenlőtlenségben pontosan akkor van egyenlőség, ha $x_1 = x_2 = \dots = x_k$.

[125] bariczocsi@yahoo.com

Bizonyítás. Mivel $f(x)$ konvergens, minden $x \in (0,1)$-re, a $g(x) = (1-x)f'(x) = \sum_{n\geq 0}[(n+1)A_{n+1} - nA_n]x^n$ sor is konvergens, minden $x \in (0,1)$ esetén. A feltételek és a 3.23 tétel alapján következik, hogy

$$(\log(xh_f(x)))' > 0, \quad (\log(1-x)h_f(x))' < 0, \tag{8.14}$$

ahol $h_f(x) = f'(x)/f(x)$ és $x \in (0,1)$. Ezek alapján az $f(e^{-t})$ és $1/f(1-e^{-t})$ függvények szigorúan log-konvexek a $(0,\infty)$ intervallumon, és így a szorzatuk is szigorúan log-konvex. A Jensen egyenlőtlenség alapján az $e^{-t_i} = x_i,\ i \in \{1,2,\dots,n\}$ helyettesítésekkel a (8.13) egyenlőtlenséghez jutunk. □

5.8.2 Néhány elemi függvény Taylor sora

Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x,$ akkor f folytonos és akárhányszor deriválható az egész $\mathbb{R}$-en, ráadásul $f^{(n)}(x) = e^x,$ bármely $x \in \mathbb{R}$ és bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ha $|x| < R,$ akkor $|f^{(n)}(x)| < e^R,$ tehát a 8.5 tétel alapján f analitikus is minden $(-R,R)$ intervallumon. Ebből következik, hogy f analitikus $\mathbb{R}$-en. Ugyanakkor $f^{(n)}(0) = 1,$ tehát

$$e^x = \exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{8.15}$$

Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$ függvény is akárhányszor deriválható az $\mathbb{R}$-en, és a deriváltjai korlátosak (minden deriváltja -1 és 1 közt van). Így a 8.5 tétel alapján f analitikus $\mathbb{R}$-en. A matematikai indukció módszerével igazolható, hogy $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\pi/2),$ és így $f^{(n)}(0) = \sin(n\pi/2),\ n \in \mathbb{N}.$ Az előbbiek alapján az f Taylor sora

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{8.16}$$

Hasonló gondolatmenet alapján

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{8.17}$$

Az $f : (-1,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln(1+x)$ függvényre $f'(x) = 1/(1+x).$ A 128. oldal 3.10 tétele (vagy egy kis számolás) eredményeként kapjuk, hogy az f Taylor sora

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1};\ |x| < 1. \tag{8.18}$$

A (8.18) összefügésben megjelenő sor $x = 1$ esetén $\ln 2$-höz tart (111. oldal 1.10 következmény), ezért az f hatványsora egyenletesen és abszolút konvergens, ha $|x| < 1$.

Az $f : (-1.\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^\alpha = \exp(\alpha \ln(1+x))$ függvényre

$$f'(x) = e^{\alpha \ln(1+x)} \frac{\alpha}{1+x} = \alpha(1+x)^{\alpha-1},$$

és rendre a következő egyenlőségeket kapjuk:

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \dots, f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

A 0 körüli Taylor sor

$$(8.19) \qquad 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots .$$

Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}}{\dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}} \right| = 1,$$

a sor konvergencia sugara 1, tehát az $f(x) = (1+x)^\alpha$ függvény analitikus az $|x| < 1$ intervallumon, és ezen a halmazon

$$(8.20) \quad (1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots .$$

A (8.20) sort $|x| < 1$ esetén *binomiális sornak* nevezzük, és $\alpha \in \mathbb{N}$ esetén visszakapjuk belőle Newton binomiális tételét.

Az $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x$ függvényre $f'(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, és ezt hatványsorba tudjuk fejteni. Ha igazoljuk, hogy f deriváltjai korlátosak, akkor ebből következik, hogy f analitikus, és így $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, ha $|x| < R$. Ebből következik, hogy f deriváltja is analitikus, és így $(1-x^2)^{-1/2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, ha $|x| < R$. De a binomiális sor tulajdonságai alapján $R = 1$, és az együtthatók azonosításából az

$$(8.21) \qquad \arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \qquad |x| < 1$$

egyenlőséget kapjuk.

Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan x$ függvényre hasonló gondolatmenetet alkalmazhatunk. Az $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ hatványsorát a binomiális sorból és a tételből kapjuk, tehát

$$(8.22) \qquad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \qquad |x| < 1.$$

A Taylor sorokat (például (8.22)) gyakran használjuk konstansok (vagy kifejezések) közelítésére. Lássunk erre egy példát!

A 140. oldal 3.26 tétele alapján az

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} \tag{8.23}$$

sor konvergál. A 8.2 tétel biztosítja a (8.22) sor konvergenciáját az $x=1$ pontban, és így

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots.$$

Ezt nevezzük *Leibniz-Gregory*[126] *képletnek.* Ez alapján a π-t csak nagyon lassan lehet közelíteni.

Ha a (8.22) összefüggésbe $x=1/\sqrt{3}$-at helyettesítünk, akkor a

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 9}-\dots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)3^n}+\dots\right) \tag{8.24}$$

egyenlőséghez jutunk. Ez még gyorsabb közelítést tesz lehetővé.

Még gyorsabban közelíthetjük π-t, ha a

$$\tan(2\arctan\frac{1}{5})=\frac{5}{12},\quad \tan(4\arctan\frac{1}{5})=\frac{120}{119},\quad \tan(4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239})=1$$

egyenlőségeket használjuk. Ezek alapján

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}. \tag{8.25}$$

Ezt az összefüggést nevezzük Machbin[127] képletnek. Ha a jobb oldalon megjelenő két számot az arctan függvény hatványsorával számítjuk ki, akkor a

$$\frac{\pi}{4}=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}-\dots\right)-\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot 239^3}+\dots\right)$$

összefüggést kapjuk.

Megjegyzés. A (8.25) egyenlőséget elemileg is igazolhatjuk, ha kiszámítjuk az

$$\frac{(5+i)^4}{239+i}=2(1+i)$$

egyenlőség mindkét oldalának az argumentumát. $\triangle$

[126] James Gregory, 1638 - 1675

[127] John Machbin, 1680 - 1752

5.9 Primitiválható függvények

5.9.1 A primitív függvény fogalma

Az $F : I \to \mathbb{R}$ függvényt ($I \subset \mathbb{R}$ intervallum) a $f : I \to \mathbb{R}$ függvény *primitív* függvényének nevezzük I-n, ha F deriválható I-n, és

$$F'(x) = f(x), \quad \text{bármely } x \in I \text{ esetén.}$$

Az f függvényt *primitiválhatónak* nevezzük, ha létezik legalább egy primitív függvénye. Az I-n értelmezett primitiválható függvények halmazát $\mathcal{P}_I$-vel jelöljük.

9.1. Megjegyzések. 1. Értelmezhetjük a primitív függvény fogalmát tetszőleges $D \subset \mathbb{R}$ halmazon értelmezett függvényekre is, de nem összefüggő D esetén a primitív tanulmányozása visszavezetődik a D összefüggő komponensein értelmezett primitívek vizsgálatára. Így általában intervallumon értelmezett függvények primitív függvényeit vizsgáljuk.
2. Ha $f \in \mathcal{P}_I$, akkor f-nek végtelen sok primitív függvénye van. Ha F egy primitívje f-nek, akkor $F + c$ is primitívje, minden $c \in \mathbb{R}$ esetén.

Sőt az előbbi tulajdonságnál pontosabb is teljesül: Ha $f : I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ intervallum), akkor f bármely két F_1 és F_2 primitívjére létezik $c \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $F_1 = F_2 + c$. Ez a Lagrange középértéktételből következik. Ha

$$F_1'(t) = F_2'(t) = f(t), \quad \forall t \in I,$$

akkor az $F_1 - F_2$ deriválható függvény deriváltja identikusan nulla az I intervallumon, és így létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, amelyre

$$F_1(t) = F_2(t) + c, \quad \forall t \in I.$$

Ha $f : I \to \mathbb{R}$ primitiválható függvény és F egy primitívje, akkor az f primitívjeinek halmaza vagy *határozatlan integrálja* az

$$\int f(t)dt := \{F + c \mid c \in \mathbb{R}\} = F + \mathcal{C},$$

ahol $\mathcal{C}$ a konstans függvények halmaza.
3. Az előbbi megjegyzés alapján látható, hogy ha $c \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges valós szám, $x_0 \in I$ rögzített és $f : I \to \mathbb{R}$ egy primitiválható függvény, akkor pontosan egy olyan F primitívje van f-nek, amelyre $F(x_0) = c$. $\triangle$

9.1. Tétel. *Ha $f : I \to \mathbb{R}$ primitiválható I-n, akkor f Darboux tulajdonságú, vagyis*

$$\mathcal{P}_I \subset \mathcal{D}_I.$$

Bizonyítás. Legyen F a f egy primitívje I-n, $a, b \in I$, $a < b$ és λ egy tetszőleges érték $f(a)$, illetve $f(b)$ közt. Feltételezhetjük, hogy $f(a) < \lambda < f(b)$. A

$$G : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad G(t) := F(t) - \lambda t$$

függvény deriválható és

$$G'(a) = f(a) - \lambda < 0 < f(b) - \lambda = G'(b).$$

Mivel G folytonos, van legalább egy $c \in [a, b]$ minimumpontja.

Igazoljuk, hogy $c \notin \{a, b\}$. A

$$G'(a) = \lim_{\substack{t \to a \\ t > a}} \frac{G(t) - G(a)}{t - a} < 0$$

összefüggés alapján létezik $r > 0$ úgy, hogy $G(t) < G(a)$, minden $t \in]a, a+r[$ esetén, tehát $c \neq a$. Hasonlóan a $G'(b) > 0$ egyenlőtlenségből következik, hogy $c \neq b$, tehát $c \in]a, b[$. A Fermat tétel alapján $G'(c) = 0$, vagyis $f(c) = \lambda$. Az előbbiek alapján f Darboux tulajdonságú. $\square$

Megjegyzés. Ez a tétel tulajdonképpen a Darboux tétel (3.1 tétel a 233. oldalon), csak a bizonyítás alapötlete különbözik. $\triangle$

9.1. Következmény. *Ha az $f : I \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ függvény primitiválható, akkor minden primitívje szigorúan monoton.*

Bizonyítás. Ha F a f egy primitívje, akkor

$$F'(t) = f(t) \neq 0, \quad \forall t \in I,$$

tehát az f Darboux tulajdonsága alapján f előjeltartó. Így viszont F szigorúan monoton a 2.4 tétel alapján (lásd a 224. oldalt). $\square$

9.2. Következmény. *Ha $f \in \mathcal{P}_I$, akkor f-nek nincs elsőfajú szakadási pontja.*

Bizonyítás. Az állítás következik a 9.1 tételből és a 4.6 következményből (lásd a 195. oldalt). $\square$

9.3. Következmény. *Ha $f : I \to \mathbb{R}$ nem folytonos és monoton, akkor $f \notin \mathcal{P}_I$.*

Bizonyítás. Ha t_0 egy szakadási pontja f-nek, akkor a t_0 elsőfajú szakadási pont, tehát a 9.2 következmény alapján $f \notin \mathcal{P}_I$. $\square$

Példa. Az eddigiek alapján látható, hogy a Darboux tulajdonságú függvények halmaza nem ugyanaz, mint a primitívvel rendelkező függvények halmaza (az egyik zárt az összeadásra nézve, a másik nem). Ezt egy konkrét példával is szemléltetjük.

Az

$$f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_m(t) = \begin{cases} \sin \frac{1}{t}, & t \neq 0 \\ m, & t = 0, \end{cases}$$

függvény pontosan akkor Darboux tulajdonságú, ha $m \in [-1, 1]$ (mert minden $0 \in I$, $|I| > \aleph_0$ intervallumra $f_m(I) = [-1, 1] \cup \{m\}$), és pontosan akkor létezik f_m-nek primitív függvénye, ha $m = 0$. Így $m \in [-1, 0[\cup]0, 1]$ esetén $f_m \in \mathcal{D}_I \setminus \mathcal{P}_I$.

5.9.2 Folytonos függvények primitiválhatósága

Láttuk, hogy az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor primitiválható, ha primitiválható minden $[a, b] \subset I$ kompakt intervallumon. Ebben a paragrafusban igazoljuk, hogy minden kompakt intervallumon értelmezett folytonos függvénynek van primitívje.

Az $[a, b]$ intervallum egy P *felosztásán* egy véges $x_0,\ x_1,\ \dots x_n$ pontrendszert értünk, amelyre

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

A P felbontáshoz és az f korlátos függvényhez hozzárendeljük az

$$I_k := [x_{k-1}, x_k], \quad m_k := \inf_{I_k} f, \quad M_k := \sup_{I_k} f$$

jelöléseket és az

$$s(f, P) := \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$$

alsó Darboux összegnek nevezett valós számot. ($s(f, P)$ az f -hez rendelt alsó Darboux összeg a P felosztáson).

Megjegyzés. Ha f korlátos, akkor $m \le m_k \le M_k \le M$, tehát

$$m(b - a) \le s(f, P) \le M(b - a),$$

az $[a, b]$ tetszőleges P felosztására, és így az alsó Darboux összegek halmaza korlátos. Az

$$\underline{I} := \sup_{P} s(f, P)$$

számot az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény *alsó Darboux integráljának* nevezzük. Gyakran használjuk a

$$\underline{\int_a^b} f \quad \text{vagy} \quad \underline{\int_a^b} f(t)dt$$

jelölést is.

9.1. Tulajdonság. *Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor a*

$$F : I \to \mathbb{R}, \quad F(t) := \underline{\int_a^b} f$$

függvényre igazak a következő állítások:

(a) $F(b) = F(c) + \underline{\int_c^b} f$, *bármely $c \in [a, b]$ esetén;*

(b) *létezik $L > 0$ úgy, hogy $|F(t') - F(t'')| \le L|t' - t''|$, bármely $t', t'' \in I$ esetén.*

Bizonyítás. Értelmezés alapján $\underline{\int}_c^c f = 0$.

(a) Ha $c \in]a,b[$ rögzített és P_1, P_2 az $I_1 = [a,c]$, illetve $I_2 = [c,b]$ egy-egy tetszőleges felosztása, akkor a $P = P_1 \cup P_2$ felosztásra

$$s(f,P_1) + s(f,P_2) = s(f,P) \le F(b),$$
$$\sup_{P_1} s(f,P_1) + s(f,P_2) \le F(b), \quad F(c) + \sup_{P_2} s(f,P_2) \le F(b) \implies$$
$$\implies F(c) + \underline{\int_c^b} f \le F(b).$$

A fordított egyenlőtlenség igazolásához tekintsük az $[a,b]$ intervallum egy tetszőleges P felosztását.

- Ha $c \in P$, akkor a $P_1 = P \cap [a,c]$ és $P_2 = P \cap [c,b]$ jelölésekkel

$$s(f,P) = s(f,P_1) + s(f,P_2) \le F(c) + \underline{\int_c^b} f. \tag{9.1}$$

- Ha $c \notin P$, akkor a $P^* = P \cup \{c\}$ felosztásra

$$s(f,P) \le s(f,P^*) \le F(c) + \underline{\int_c^b} f. \tag{9.2}$$

Ha a (9.1) és (9.2) összefüggésekben szuprémumra térünk és használjuk a fordított egyenlőtlenséget, a kívánt egyenlőséghez jutunk.

(b) Ha $t', t'' \in I$, $t' < t''$ és $L := \sup_{t \in I} |f(t)|$, akkor (a)-ból következik, hogy

$$|F(t') - F(t'')| = |\int_{t'}^{t''} f| \le L(t'' - t') = L|t' - t''|. \quad \square$$

9.2. Tétel. *Minden $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervallum) folytonos függvény primitiválható.*

Bizonyítás. Az $f \in \mathcal{P}_I \iff f \in \mathcal{P}_{[a,b]}$, $\forall [a,b] \subset I$ tulajdonság alapján elégséges igazolni, hogy minden $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény primitiválható.

Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor korlátos, tehát az

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad F(t) := \underline{\int_a^t} f$$

függvényre teljesülnek az előbbi tulajdonság feltételei. Igazoljuk, hogy F a f egy primitívje.

Igazoljuk, hogy ha $t_0 \in [a, b[$ rögzített, akkor F-nek létezik t_0-ban jobb- és baloldali deriváltja, és mindkettő egyenlő $f(t_0)$-val. Bármely $\varepsilon > 0$-ra létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $t \in]t_0, t_0 + \delta[\subset]t_0, b[$ esetén

$$f(t_0) - \varepsilon < f(t) < f(t_0) + \varepsilon,$$

$$[f(t_0) - \varepsilon](t - t_0) < \underline{\int_{t_0}^{t}} f < [f(t_0) + \varepsilon](t - t_0).$$

Ebből következik, hogy

$$\left| \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} - f(t_0) \right| < \varepsilon, \quad \text{bármely } t \in]t_0, t_0 + \delta[\text{ esetén,}$$

tehát F-nek létezik jobboldali deriváltja t_0-ban, és ez $f(t_0)$.

A baloldali derivált létezését hasonlóan igazoljuk, tehát a bizonyítás teljes. □

9.4. Következmény. *Ha I egy kompakt intervallum és az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény injektív és primitiválható, akkor az $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ inverz függvény is primitiválható.*

Bizonyítás. Ha f primitiválható, akkor Darboux tulajdonságú, és így nem lehet elsőfajú szakadási pontja.

Másrészt, ha f injektív és Darboux tulajdonságú, akkor szigorúan monoton, tehát nem lehet másodfajú szakadási pontja sem. Így f folytonos az I kompakt intervallumon, tehát a 2.11-es tétel (lásd a 164. oldalt) alapján f^{-1} is folytonos, és így primitiválható. □

5.9.3 Primitiválható függvényekkel végzett műveletek

Igazoljuk, hogy $\mathcal{P}_I$ vektortér a függvények összeadásával és a skalárral való szorzással.

9.2. Tulajdonság. *Ha $f, g \in \mathcal{P}_I$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, akkor $\alpha f + \beta g \in \mathcal{P}_I$ és $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ esetén*

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g.$$

Bizonyítás. Ha $F \in \int f$ és $G \in \int g$, akkor a $H := \alpha F + \beta G$ függvény deriválható és $H' := \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g =: h$, tehát

$$\alpha \int f + \beta \int g \subset \int (\alpha f + \beta g), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Ha $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, akkor feltételezhetjük, hogy $\beta \neq 0$. A $H \in \int h$, $F \in \int f$ függvényekre a

$$G := \frac{H - \alpha F}{\beta} \quad \text{függvény deriválható, és} \quad G' = \frac{h - \alpha f}{\beta} =: g$$

Tehát $G \in \int g$ és $H = \alpha F + \beta G \in \alpha \int f + \beta \int g$. Ez alapján

$$\int (\alpha f + \beta g) \subset \alpha \int f + \beta \int g, \quad \text{ha} \quad \alpha^2 + \beta^2 > 0. \quad \Box$$

Megjegyzés. Az előbbi állítás $\alpha = \beta = 0$ esetén nem igaz, mert ebben az esetben bármely $f, g \in \mathcal{P}_I$ -re

$$\int (\alpha f + \beta g) = \int 0 = \mathcal{C} \neq \{0\} = \alpha \int f + \beta \int g. \quad \triangle$$

Megjegyzés. Két $\mathcal{P}_I$ -beli függvény szorzata általában nincs $\mathcal{P}_I$ -ben. Ez látható a következő példából is. Az

$$f(t) := \begin{cases} \sin^2 \frac{1}{t} - \sin \frac{1}{t}, & t \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \end{cases} \quad \text{és} \quad g(t) := \begin{cases} \sin^2 \frac{1}{t} + \sin \frac{1}{t}, & t \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \end{cases}$$

függvények primitiválhatók, mivel $f = f_1 - f_2$ és $g = f_1 + f_2$, ahol

$$f_1(t) := \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \begin{cases} \cos \frac{2}{t}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases} \quad \text{és} \quad f_2(t) := \begin{cases} \sin \frac{1}{t}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Másrészt az

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4} \sin^2 \frac{2}{t}, & t \neq 0 \\ \frac{1}{4}, & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény nem Darboux tulajdonságú, mert

$$(f \cdot g)(\mathbb{R}) = [-\frac{1}{4}, 0] \cup \{\frac{1}{4}\}.$$

A következő két tulajdonság arra mutat rá, hogy milyen feltételekkel lehet biztosítani a szorzatfüggvény primitiválhatóságát.

9.3. Tulajdonság. *Ha* $f : I \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{P}_I$ *és* $g : I \to \mathbb{R}$, $g \in C^1(I)$, *akkor* $f \cdot g \in \mathcal{P}_I$.

Bizonyítás. Ha $F \in \int f$ és $F_1 = F \cdot g$, akkor F_1 deriválható és $F_1' = fg + Fg'$. Mivel Fg' folytonos, $Fg' \in \mathcal{P}_I$. Így tetszőleges $G \in \int Fg'$ esetén a $H := F_1 - G$ függvény deriválható, és

$$H' = F_1' - G' = fg + Fg' - Fg' = fg,$$

tehát $fg \in \mathcal{P}_I$. $\Box$

A következő példa mutatja, hogy g folytonossága nem elégséges a szorzat deriválhatóságához.

Példa. Az

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(t)=\begin{cases} t\sin\frac{1}{t^2} & t\neq 0\\ 0 & t=0\end{cases}$$

függvény folytonos és a

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad g(t)=\begin{cases} \frac{1}{t}\sin\frac{1}{t^2} & t\neq 0\\ 0 & t=0\end{cases}$$

függvénynek van primitív függvénye, mert $g=g_2-g_1$, ahol $g_1,g_2\in\mathcal{P}_I$

$$g_1(t)=\begin{cases} t\cos\frac{1}{t^2} & t\neq 0\\ 0 & t=0,\end{cases}\qquad g_2(t)=G'(t),\quad G_2(t)=\begin{cases} \frac{t^2}{2}\cos\frac{1}{t^2} & t\neq 0\\ 0 & t=0.\end{cases}$$

Ha $fg\in\mathcal{P}_I$ teljesülne, akkor az

$$(fg)(t)=\begin{cases} \frac{1}{2} & t\neq 0\\ 0 & t=0\end{cases}-\frac{1}{2}\begin{cases} \cos\frac{2}{t^2} & t\neq 0\\ 0 & t=0\end{cases}$$

egyenlőség alapján a

$$h(t)=\begin{cases} \frac{1}{2} & t\neq 0\\ 0 & t=0\end{cases}$$

függvénynek is volna primitív függvénye. De ez a függvény nem Darboux tulajdonságú, tehát nincs primitívje. Így $fg\notin\mathcal{P}_I$. $\triangle$

Megjegyzés. A következő tulajdonság mutatja, hogy ha $f:I\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$, akkor a g folytonossága elégséges a szorzat primitiválhatóságához. $\triangle$

9.4. Tulajdonság. *Ha* $I=[a,b]$, *az* $f:I\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *függvényre* $f\in\mathcal{P}_I$ *és* $g\in C(I)$, *akkor* $f\cdot g\in\mathcal{P}_I$.

Bizonyítás. Ha $F\in\int f$, akkor a $f=F'$ függvény Darboux tulajdonságú, tehát előjeltartó, és így F szigorúan monoton. Ebből következik, hogy F^{-1} deriválható az $F(I)$ halmazon, tehát a $g\circ F^{-1}$ függvény folytonos $F(I)$-n. Így a $g\circ F^{-1}$ függvénynek van primitívje $F(I)$-n. Ha G a $g\circ F^{-1}$ egy tetszőleges primitívje, akkor

$$(G\circ F)'=(G'\circ F)\cdot F'=(g\circ F'\circ F)\cdot F'=gf',$$

tehát az $f\cdot g$ szorzatnak is van primitívje. $\square$

5.9.4 Gyakorlatok

1. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

függvénynek nincs primitívje $\mathbb{R}$-en.
1. megoldás Az f függvényt felírhatjuk

$$f(x) = f_1(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} + f_2(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

alakban. f_1 folytonos $\mathbb{R}$-en, tehát van primitívje. Ha f is primitiválható volna, akkor az f_2 függvénynek is lenne primitívje. Másrészt ez a függvény nem Darboux tulajdonságú, tehát nincs primitívje. Az előbbi ellentmondás alapján f-nek nincs primitívje.
2. megoldás Az f függvénynek az $x = 0$ pont elsőfajú szakadási pontja, mert

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0).$$

A 9.2-es következmény alapján f-nek nincs primitívje.
3. megoldás Az értelmezés alapján igazoljuk, hogy f nem Darboux tulajdonságú függvény. Mivel $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$,

$$\forall\ V \in \mathcal{V}(1)\ \exists\ ]-\delta, \delta[\in \mathcal{V}(0) \text{ úgy, hogy } \forall\ x \in]0, \delta[\,,\ f(x) \in V.$$

A $V =]1/2, 3/2[$ választással $f(x) > 1/2$, ha $x \in]0, \delta[$. Így

$$f(\,]-\delta, \delta[\,) = \{\frac{1}{2} < f(x) < \frac{3}{2} \mid x \in]0, \delta[\,\} \cup \{0\},$$

és ez nem egy intervallum.

9.13. Alkalmazás. *Határozzuk meg annak az m tömegű testnek a maximális sebességét, amely gravitációs térben mozog (például ejtőernyős), ha a rá ható fékező erő minden pillanatban egyenesen arányos a sebesség négyzetével.*

Feltételezhetjük, hogy a mozgás egyenes vonalú. Ha $v(t)$ a test sebessége a t időpillanatban, akkor a pillanatnyi gyorsulása $v'(t)$, és így a mozgásegyenlete $mv'(t) = mg - kv^2(t)$, ahol k egy pozitív arányossági tényező. Így a $\frac{v'(t)}{\frac{mg}{k} - v^2} = \frac{k}{m}$ egyenlethez jutunk. A Lagrange tétel következménye alapján létezik olyan c_1, amelyre

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}} \cdot \ln \frac{v + \sqrt{\frac{mg}{k}}}{v - \sqrt{\frac{mg}{k}}} = \frac{k}{m} t + c_1.$$

Ebből következik, hogy $v_0 = 0$ kezdősebesség esetén

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \left(\frac{e^{2\sqrt{\frac{gk}{m}}t} - 1}{e^{2\sqrt{\frac{gk}{m}}t} + 1} \right),$$

és így a végsebesség $\sqrt{\frac{mg}{k}}$. ♦

Megjegyzés. Ejtőernyős esetén a K értéke 40 körül van (ez az ernyőtől függ) és így egy 80 kg-os össztömeg esetén a maximális sebesség $\approx 4,4m/s$. A sebesség képletéből látható, hogy a sebesség exponenciálisan csökken, így nagyon hamar (kb. 2s) megközelíthetjük a biztonságos beérkezési sebességet (persze érdemes azt is kiszámolni, hogy ez alatt mekkora utat teszünk meg).

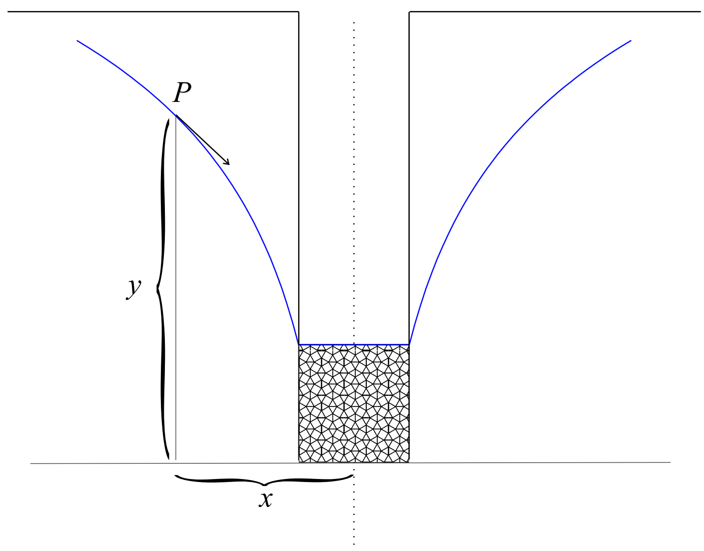
9.14. Alkalmazás. *Határozzuk meg annak a felszínnek az alakját, amelyet a talajvíz szintje alkot egy kör alakú kút közelében, ha a kút eléri a vízátnemeresztő talajszintet és a kútban a víz szintje állandó.*

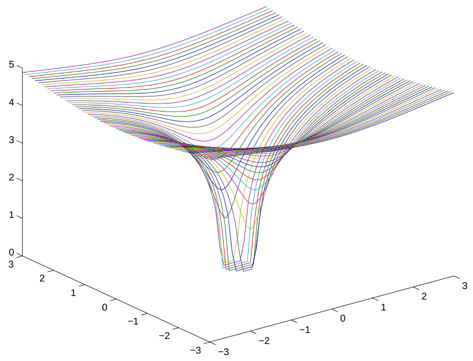
Megoldás. A szimmetria miatt elégséges csak egy síkmetszetet vizsgálni. A vízáteresztő talaj P pontjában a víz sebessége arányos az y görbe P-vel megegyező abszcisszájú pontjának meredekségével. Tehát $v = k\frac{dy}{dx}$. Így a kút középpontjától x távolságra levő hengerpaláston átszivárgó víz mennyisége $M = 2\pi xyv = 2\pi xyk\frac{dy}{dx}$ (ez adja a kút hozamát). Tehát az

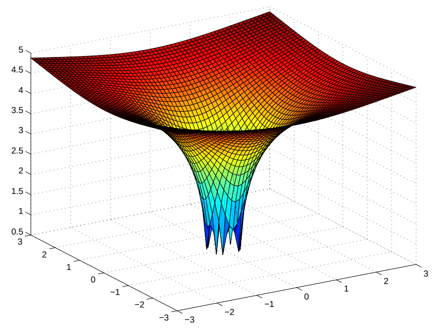
$$\frac{1}{x} = \frac{\pi k}{M}2yy' = \frac{\pi k}{M}(y^2)'$$

egyenlethez jutunk, ahonnan a Lagrange tétel következménye alapján $\ln x = \frac{\pi k}{M}y^2 + c$. Ha r a kút sugara és h a kútban levő víz magassága, akkor $y(r) = h$, tehát $c = \ln r - \frac{\pi k}{M}h^2$ és így az y görbe egyenlete

$$y^2 = \frac{M}{\pi k}\ln\frac{x}{r} + h^2.$$







Ha visszatérünk háromdimenziós ábrázolásra, akkor az y koordináta helyett z kerül és az x helyett a felület egy pontjának az xOy síkra eső vetületének az origótól való távolsága. Ez $\sqrt{x^2+y^2}$, tehát a keresett felület egyenlete $z^2 = \frac{M}{\pi k} \ln \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r} + h^2$. Ezt a mellékelt ábrán láthatjuk. ♦

9.15. Alkalmazás. *Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy t idő múlva pontosan n sejt legyen, ha kezdetben egy rákos sejt van, és a rákos sejtek minden pillanatban λ valószínűséggel osztódhatnak (és a létrejött sejtek is ugyanilyen valószínűséggel osztódnak tovább).*

Megoldás. Jelöljük $f_n(t)$-vel a keresett valószínűséget. Valószínűségszámítási meggondolások alapján $f_1(0) = 1$, $f_n(0) = 0$ és

$$f_n'(x) = -\lambda n f_n(x) + \lambda(n-1) f_{n-1}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}_+, \ \forall n \geq 2.$$

$n = 1$ esetén az $f_1'(x) = -\lambda f_1(x)$ egyenlethez jutunk, tehát $(f_1(x) \cdot e^{\lambda x})' = 0$. A Lagrange tétel következménye alapján $f_1(x) = ce^{-\lambda x}$, tehát az $f_1(0) = 1$ feltételből következik, hogy $f_1(x) = e^{-\lambda x}$. Ezt integrálással is megkaphattuk volna.

$n = 2$ esetén az $f_2'(x) = -2\lambda f_2(x) + \lambda e^{-\lambda x}$ egyenlethez jutunk, tehát

$$\left[f_2(x) \cdot e^{2\lambda x} - e^{\lambda x}\right]' = 0,$$

és így az $f_2(0) = 0$ egyenlőség és a Lagrange tétel alapján $f_2'(x) = e^{-\lambda}\left(1 - e^{-\lambda x}\right)$.

$n = 3$ esetén az $f_3'(x) = -3\lambda f_3(x) + 2\lambda\left(1 - e^{-\lambda x}\right) e^{-\lambda x}$ egyenlethez jutunk. Ebből következik, hogy

$$\left[f_3(x) \cdot e^{3\lambda x} - e^{2\lambda x} + 2e^{\lambda x}\right]' = 0$$

és így az $f_3(0) = 0$ egyenlőség és a Lagrange tétel alapján $f_3'(x) = e^{-\lambda}\left(1 - e^{-\lambda x}\right)^2$.

A továbbiakban a matematikai indukció módszerével igazoljuk, hogy $f_n'(x) = e^{-\lambda}\left(1 - e^{-\lambda x}\right)^n$, ha $n \geq 1$. Ehhez elégséges igazolni, hogy az $f_{n+1}'(x) = -(n+1)\lambda f_{n+1}(x) + n\lambda\left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{n-1} e^{-\lambda x}$ egyenletnek az egyetlen olyan megoldása, amelyre $f_{n+1}(0) = 0$, az $f_{n+1}(x) = e^{-\lambda}\left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{n+1}$ függvény. Ez szintén a Lagrange tételből következik, mert az f_{n+1}-re kapott egyenlet felírható

$$\left[f_{n+1}(x) \cdot e^{(n+1)\lambda x} - e^{n\lambda x}\left(1 - e^{\lambda x}\right)^n\right]' = 0$$

alakban. ♦

5.10 Kitűzött feladatok

1. (Bege Antal[128] és András Szilárd) Bizonyítsd be, hogy ha $n \geq 3,\ 0 < x_1 \leq \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ és $2x_2 \geq x_1 + x_n,$ akkor
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i x_{i+1}}{x_i + x_{i+1} + x_{i+2}} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i x_{i-1}}{x_i + x_{i-1} + x_{i-2}},$$
ahol $x_0 = x_{n+1} = x_1, x_{-1} = x_{n+2} = x_2.$

2. Bizonyítsd be, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ kétszer deriválható függvény pontosan akkor konvex, ha tetszőleges $0 < x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ esetén
$$x_1 f(x_2) + x_2 f(x_3) + \ldots + x_n f(1) \geq x_1 f(x_n) + x_2 f(x_1) + \ldots + x_n f(x_{n-1}).$$

3. (András Szilárd) a) Bizonyítsd be, hogy ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ egy növekvő konvex függvény és $0 < a \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ tetszőleges számok, akkor
$$\frac{f(x_1)}{x_n} + \frac{f(x_2)}{x_1} + \cdots + \frac{f(x_n)}{x_{n-1}} \leq \frac{f(x_1)}{x_2} + \cdots + \frac{f(x_{n-1})}{x_n} + \frac{f(x_n)}{x_1}.$$
b) Bizonyítsd be, hogy ha $0 < a \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy növekvő és konkáv függvény, akkor
$$\frac{f(x_1)}{x_1^2+x_n^2} + \frac{f(x_2)}{x_2^2+x_1^2} + \ldots + \frac{f(x_n)}{x_n^2+x_{n-1}^2} \leq \frac{f(x_1)}{x_1^2+x_2^2} + \frac{f(x_2)}{x_2^2+x_3^2} + \ldots + \frac{f(x_n)}{x_n^2+x_1^2}$$

4. (Sándor József) Ha az $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Rolle tulajdonságú függvényekre $g(b) - -g(a) \neq (b - a)g'(a),\ g(b) - g(a) \neq (b - a)g'(b)$ és $g'(a) \neq g'(x) \neq g'(b),$ ha $x \in (a, b),$ akkor léteznek olyan $c_1, c_2 \in (a, b)$ számok, amelyekre
$$\frac{f(b) - f(a) - (b - a)f'(a)}{g(b) - g(a) - (b - a)g'(a)} = \frac{f'(c_1) - f'(a)}{g'(c_1) - g'(a)} \quad \text{és}$$
$$\frac{f(b) - f(a) - (b - a)f'(b)}{g(b) - g(a) - (b - a)g'(b)} = \frac{f'(c_2) - f'(b)}{g'(c_2) - g'(b)}.$$
Megjegyzés. Ha f' és g' is Rolle tulajdonságúak, akkor a jobb oldal helyettesíthető $\frac{f''(c)}{g''(c)}$ -vel.

5. (Finta Béla) Ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $[a, b]$-n, minden $x \in (a, b)$ pontban létezik az f-nek jobb- és baloldali deriváltja, és ezek a deriváltak végesek, akkor azt mondjuk, hogy f rendelkezik az általánosított Rolle tulajdonsággal. Bizonyítsd be, hogy ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ rendelkezik az általánosított Rolle tulajdonsággal, akkor létezik $c \in (a, b)$ úgy, hogy
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \in \left[\min\{f'_j(c), f'_b(c)\}, \max\{f'_j(c), f'_b(c)\}\right].$$

[128] Bege Antal, bege@math.ubbcluj.ro

6. (András Szilárd) Bizonyítsd be, hogy ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Rolle tulajdonságú és $0 < a < b$, akkor létezik olyan $c \in (a, b)$, amelyre $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{c^2}{ab} \cdot f'(c)$.

7. (Jovan V. Malešević[129]) Bizonyítsd be, hogy ha $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Rolle tulajdonságú függvények, akkor létezik olyan $c_1, c_2 \in (a, b)$, amelyre

$$\frac{f(b)-f(c_1)}{g(c_1)-g(a)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_1)} \quad \text{és} \quad \frac{f(a)-f(c_2)}{g(c_2)-g(b)} = \frac{f'(c_2)}{g'(c_2)}.$$

8. Bizonyítsd be a következő egyenlőségeket:

   (a) $(\arcsin x)^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 C_{2k}^k} \cdot 2^{2k-1} x^{2k}$, ha $|x| < 1$;

   (b) $(\arcsin x)^3 = 6 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}(2k+1)} \cdot C_{2k}^k \left(1 + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(2k-1)^2}\right) x^{2k+1}$, ha $|x| < 1$.

9. (András Szilárd) Bizonyítsd be, hogy ha x, y, z pozitív valós számok, akkor

   (a) $(x+y+y)^{x+y+z} x^x y^y z^z \leq (x+y)^{x+y} (y+z)^{y+z} (z+x)^{z+x}$;

   (b) $(x+y+y)^{(x+y+z)^2} x^{x^2} y^{y^2} z^{z^2} \leq (x+y)^{(x+y)^2} (y+z)^{(y+z)^2} (z+x)^{(z+x)^2}$.

10. Bizonyítsd be, hogy ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos és periodikus, akkor a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0 \\ c, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$ függvénynek pontosan akkor létezik primitív függvénye, ha $c = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)dx$, ahol T az f főperiódusa.

11. Bizonyítsd be, hogy ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos és periodkus, akkor a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{\sin^n x}\right), & \text{ha } x \notin \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ c, & \text{ha } x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$ függvénynek pontosan akkor létezik primitív függvénye, ha $c = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)dx$, ahol T az f főperiódusa.

12. Számítsd ki az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ függvény n-edik deriváltjának behelyettesítési értékét egy tetszőleges $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban.

13. (András Szilárd) Bizonyítsd be, hogy ha a P polinom minden gyöke valós és x_0 a derivált polinom egy gyöke, akkor $P^{(4)}(x_0) \cdot P(x_0) < 3P''^2(x_0)$.

14. Tekintsük az $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ és $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, bármely $n \geq 0$-ra sorozatot (Fibonacci sorozat). Számítsd ki a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} F_k x^x$ sor összegét, ha x a sor konvergencia tartományán belül van.

---

[129]Jovan V. Malešević, malesh@EUnet.yu

15. (Lucas[130]) Bizonyítsd be, hogy ha egy P polinom minden gyökének geometriai képe egy síkbeli K konvex tartomány belsejébe esik, akkor a P' polinom gyökeire is teljesül ugyanez a tulajdonság.

16. Bizonyítsd be, hogy ha az $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ függvény harmadrendű deriváltja folytonos, akkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[n \left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(-\frac{1}{n}\right)\right) - 2f'(0) \right]$$

sor konvergens.

17. Bizonyítsd be, hogy ha a $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ polinom gyökei $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, akkor

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^j}{f'(x_k)} = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \le j \le n-2 \\ \frac{1}{a_0}, & \text{ha } j = n-1 \end{cases}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{jx_k^{j-1}f'(x_k) - x_k^j f''(x_k)}{[f'(x_k)]^3} = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \le j \le 2n-2 \\ \frac{1}{a_0^2}, & \text{ha } j = 2n-1 \end{cases}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^n f\left(\frac{1}{x_k}\right)}{f'(x_k)(1+x_k)} = (-1)^{n-1}(1 - x_1x_2\ldots x_n)$, ahol $0 \ne x_k \ne 1$, ha $1 \le$ $\le k \le n$.

18. Bizonyítsd be, hogy ha az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvénynek az $[a,b]$ intervallumban $n+1$ zérushelye van, és a $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ polinom minden gyöke valós, akkor létezik olyan $c \in (a,b)$, amelyre $a_0f(c) + a_1f'(c) + \ldots + a_nf^{(n)}(c) = 0$.

19. Ha az $f \in C^2[a,b]$ fügvénynek $x^* \in (a,b)$ egyszeres gyöke ($f(x^*) = 0$ és $f'(x^*) \ne 0$), akkor létezik az x^*-nak olyan U környezete, amelyre minden $x_0 \in U$-ra az $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, $k \ge 0$ sorozat konvergens és határértéke x^*. Sőt, létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^2}$ határérték is.

20. (Baricz Árpád, [1]) Az $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ hatványsor konvergens minden $x \in$ $\in (0,1)$ esetén és $a_n > 0$, minden $n \ge 0$ esetén. Bizonyítsd be, hogy ha az $\left(\frac{n!a_n}{(\log a)^n}\right)_{n\ge 0}$ sorozat csökkenő és $a > 1$, akkor a $g(x) = f(x^2)$ függvényre teljesül a $g\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) < cg(x)$ egyenlőtlenség, minden $x \in (0,1)$ és minden $c \ge$ $\ge a^{4\sqrt{2}-5}$ esetén.

[130]Franois Edouard Anatole Lucas, 1842-1891

6. Fejezet

Integrálszámítás

The ink of the scholar is more sacred,
than the blood of the martyr.
Mohammed

A fejezet célja a valós függvények integrálszámítására vonatkozó alaptulajdonságok ismertetése.

6.1 A Darboux integrál

Ha P az $[a, b]$ intervallum egy *felosztása*, és a felosztás pontjai x_0, $x_1, \ldots, x_n$, ahol

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b,$$

akkor

$$\Delta x_i := x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

számok közül a legnagyobbat a *felosztás normájának* nevezzük, és $\|P\|$-vel jelöljük. Tehát

$$\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i.$$

Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, akkor az $[a, b]$ intervallum minden P felosztása esetén értelmezzük az

$$m_i := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M_i := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$
$$L(P, f) := \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \quad U(P, f) := \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

számokat. A korlátosság alapján léteznek az

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup_P L(P, f), \tag{1.1}$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf_P U(P, f), \tag{1.2}$$

valós számok is (a szuprémumot és az infimumot a $[a, b]$ összes felosztása szerint számoljuk). Az $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ valós számot az f függvény $[a, b]$ intervallumon számolt *alsó Darboux integráljának* nevezzük, míg az $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ számot az f függvény $[a,b]$-n számolt *felső Darboux integráljának.* Ha f korlátos ($m \leq f(x) \leq M$, bármely $x \in [a,b]$ esetén), akkor az

$$m(b-a) \leq L(P,f) \leq U(P,f) \leq M(b-a) \tag{1.3}$$

egyenlőtlenségek alapján az alsó és felső Darboux integrál létezik.

Ha az f függvény $[a,b]$-n számolt alsó Darboux integrálja egyenlő a felső Darboux integráljával, akkor f-et *Darboux integrálhatónak* nevezzük az $[a,b]$ intervallumon, és a két integrál közös értékét

$$\int_a^b f(x)dx\text{-szel} \tag{1.4}$$

jelöljük. Az értelmezések alapján látható, hogy

$$m(b-a) \leq L(P,f) \leq \int_a^b f(x)dx \leq U(P,f) \leq M(b-a). \tag{1.5}$$

Az előbbi értelmezés általánosítható, mert a Δx_i növekmények helyett tetszőleges függvény növekményei is írhatók. Ha α egy növekvő függvény az $[a,b]$ intervallumon és $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ egy felosztása az $[a,b]$ intervallumnak, valamint

$$\triangle\alpha_i := \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

akkor $\Delta\alpha_i \geq 0$. Így tetszőleges $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény esetén az

$$L(P,f,\alpha) := \sum_{i=1}^n m_i \triangle\alpha_i, \quad U(P,f,\alpha) := \sum_{i=1}^n M_i \triangle\alpha_i$$

kifejezések korlátosak (amikor P változik), tehát léteznek az

$$\underline{\int_a^b} f(x)d\alpha := \sup_P L(P,f,\alpha), \tag{1.6}$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)d\alpha := \inf_P U(P,f,\alpha) \tag{1.7}$$

valós számok (a szuprémum és az infimum itt is az $[a,b]$ összes lehetséges felosztása szerint van). Az $\underline{\int_a^b} f(x)d\alpha$ számot az f függvénynek az α-ra vonatkozó $[a,b]$-intervallumon számolt *alsó Darboux-Stieltjes*[131] integráljának nevezzük, míg a $\overline{\int_a^b} f(x)d\alpha$ számot az f-nek α szerinti $[a,b]$-n számolt *felső Darboux-Stieltjes integráljának.* Ha az f-nek az α szerinti alsó és felső Darboux-Stieltjes integrálja egymással egyenlő, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény α szerint

[131]Thomas Jan Stieltjes, 1856-1894

Darboux-Stieltjes értelemben integrálható. Az I intervallumon Darboux integrálható függvények halmazát $\mathcal{D}_I$-vel jelöljük, míg az I-n α szerint Darboux-Stieltjes integrálható függvények halmazát $\mathcal{D}_I(\alpha)$-val.
Ha f Darboux-Stieltjes integrálható az α-ra nézve, akkor az (1.1) és (1.2) közös értékét

$$\int_a^b f(x)d\alpha\text{-val} \quad \text{vagy} \quad \int_a^b f(x)d\alpha(x)\text{-val} \tag{1.8}$$

jelöljük.

Ha $\alpha(x) = x$, $\forall x \in [a,b]$, akkor

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)d\alpha(x),$$

vagyis a Darboux integrál a Darboux-Stieltjes integrál sajátos esete.

Az $[a,b]$ intervallum P^* felosztását a P felosztás *finomításának* nevezzük, ha ha $P \subset P^*$. Ha P_1 és P_2 az $[a,b]$ intervallum két tetszőleges felosztása, akkor a $P^* := P_1 \cup P_2$ felosztást a P_1 és P_2 *közös finomításának* nevezzük.

1.1. Lemma. *Ha P^* egy finomítása P-nek, akkor*

$$L(P,f,\alpha) \le L(P^*,f,\alpha) \quad \textit{és} \tag{1.9}$$

$$U(P,f,\alpha) \ge U(P^*,f,\alpha). \tag{1.10}$$

Bizonyítás. Ha $P = P^*$, akkor az (1.9) és (1.10) összefüggésekben egyenlőség van. Ha P^* pontosan egy t ponttal tartalmaz többet, mint P, akkor létezik olyan $i \in \mathbb{N}^*$, amelyre $x_{i-1} < t < x_i$. Az

$$s_1 = \sup_{x\in[x_{i-1},t]} f(x), \quad s_2 = \sup_{x\in[t,x_i]} f(x)$$

jelölésekkel $s_1 \le M_i$ és $s_2 \le M_i$, tehát

$$\begin{aligned} U(P^*,f,\alpha) - U(P,f,\alpha) =& s_1[\alpha(t) - \alpha(x_{i-1})] + s_2[\alpha(x_i) - \alpha(t)] - M_i[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] \\ =& (s_1 - M_i)[\alpha(t) - \alpha(x_{i-1})] + (s_2 - M_i)[\alpha(x_i) - \alpha(t)] \le 0. \end{aligned}$$

Ha P^* pontosan m ponttal tartalmaz többet, mint P, akkor az előbbi gondolatmenetet m-szer megismételjük. Az (1.10) egyenlőtlenséget hasonló módon igazolhatjuk. $\square$

1.1. Tétel. *Ha $f : I \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor*

$$\underline{\int_a^b} f(x)d\alpha \le \overline{\int_a^b} f(x)d\alpha.$$

Bizonyítás. Ha P_1 és P_2 két tetszőleges felosztása $[a,b]$-nek és P^* a közös finomításuk, akkor az 1.1-es lemma alapján

$$L(P_1,f,\alpha) \le L(P^*,f,\alpha) \le U(P^*,f,\alpha) \le U(P_2,f,\alpha).$$

Ebből következik, hogy

$$L(P_1,f,\alpha) \le U(P_2,f,\alpha).$$

Ha P_2-t rögzítjük, és P_1 szerint a bal oldalnak a szuprémumát vizsgáljuk, akkor az

$$\underline{\int_a^b} f(x)d\alpha \le U(P_2,f,\alpha)$$

egyenlőtlenséget kapjuk, és ebből a jobb oldal P_2 szerinti infimumára következik a bizonyítandó egyenlőtlenség. □

A Darboux-Stieltjes integrálhatóság jellemzési tétele a következő:

1.2. Tétel. *Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor Darboux-Stieltjes integrálható az $[a,b]$ intervallumon az α függvényre nézve, ha bármely $\varepsilon > 0$-ra létezik $[a,b]-nek$ olyan P felosztása, amelyre*

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \varepsilon. \tag{1.11}$$

Bizonyítás. Az (1.11)-es feltétel elégséges, mert az

$$L(P,f,\alpha) \le \underline{\int_a^b} f(x)d\alpha \le \overline{\int_a^b} f(x)d\alpha \le U(P,f,\alpha)$$

egyenlőtlenségből következik, hogy

$$0 \le \overline{\int_a^b} f(x)d\alpha - \underline{\int_a^b} f(x)d\alpha \le \varepsilon,$$

tehát $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

Ha $\overline{\int_a^b} f(x)d\alpha = \underline{\int_a^b} f(x)d\alpha = \int_a^b f(x)d\alpha$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor találunk olyan P_1, illetve P_2 felosztást, amelyekre

$$U(P_2,f,\alpha) - \int_a^b f(x)d\alpha \le \varepsilon/2, \qquad \int_a^b f(x)d\alpha - L(P_1,f,\alpha) \le \varepsilon/2.$$

Ha P a P_1 és P_2 közös finomítása, akkor

$$U(P,f,\alpha) \le U(P_2,f,\alpha) \le \int_a^b f(x)d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \le L(P_1,f,\alpha) + \varepsilon \le L(P,f,\alpha) + \varepsilon,$$

tehát az (1.11) egyenlőtlenség teljesül. □

1.3. Tétel. *Ha* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *monoton,* α *növekvő és folytonos* $[a,b]$*-n, akkor* $f \in \mathcal{D}_{[a,b]}(\alpha)$.

Bizonyítás. Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ valós számot. Mivel α folyotnos és $[a,b]$ kompakt, az α egyenletesen folytonos $[a,b]$-n. Így létezik az $[a,b]$-nek olyan P felosztása, amelyre

$$\triangle\alpha_i = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Az általánosság csorbítása nélkül feltételezhetjük, hogy f növekvő. Így

$$M_i = f(x_i), \quad m_i = f(x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

tehát

$$\begin{aligned} U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) =& \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})] = \\ =& \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} [f(b) - f(a)] < \varepsilon, \end{aligned}$$

ha n elég nagy. Az 1.2-es tétel alapján $f \in \mathcal{D}_{[a,b]}(\alpha)$. $\square$

1.4. Tétel. *Ha* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *folytonos* $[a,b]$*-n, akkor* $f \in \mathcal{D}_{[a,b]}(\alpha)$*, és bármely* $\varepsilon > 0$*-ra létezik* $\delta > 0$ *úgy, hogy*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \triangle\alpha_k - \int_a^b f d\alpha \right| < \varepsilon \tag{1.12}$$

az $[a,b]$ *minden olyan* $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ *felosztására, amelynek normája nem nagyobb, mint* δ*, ahol* $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ *tetszőleges pontok.*

Bizonyítás. Rögzített $\varepsilon > 0$-ra válasszuk az $\eta > 0$ számot úgy, hogy teljesüljön az

$$[\alpha(b) - \alpha(a)]\eta < \varepsilon$$

egyenlőség. Mivel f egyenletesen folytonos $[a,b]$-n, létezik olyan $\delta > 0$, amelyre

$$|f(x) - f(t)| < \eta, \tag{1.13}$$

ha $|x - t| < \delta$ és $x, t \in [a,b]$.

Ha P egy olyan felosztása $[a,b]$-nek, amelyre $\mu(P) < \delta$, akkor (1.13) alapján $M_k - m_k \leq \eta$, minden $k = 1, 2, \ldots, n$ esetén. Így

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \triangle\alpha_k = \eta \sum_{k=1}^{n} \triangle\alpha_k = \eta[\alpha(b) - \alpha(a)] < \varepsilon.$$

Az 1.2-es jellemzési tétel alapján $f \in \mathcal{D}_{[a,b]}(\alpha)$.

A $\sum_{k=1}^{n} f(t_k) \triangle\alpha_k$ és $\int_a^b f d\alpha$ valós számok $U(P,f,\alpha)$ és $L(P,f,\alpha)$ között vannak, tehát az (1.12) egyenlőtlenség teljesül. $\square$

A következő tételben a Darboux-Stieltjes integrálható függvények néhány algebrai tulajdonságát vizsgáljuk.

1.5. Tétel. (a) *Ha* $f_1, f_2 \in \mathcal{D}_{[a,b]}(\alpha)$, *akkor*

$$f_1 + f_2 \in \mathcal{D}_{[a,b]}(\alpha),$$

$c \cdot f \in \mathcal{D}_{[a,b]}(\alpha)$, *minden* $c \in \mathbb{R}$ *esetén, és*

$$\int_a^b (f_1 + f_2) d\alpha = \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha, \tag{1.14}$$
$$\int_a^b c \cdot f d\alpha = c \int_a^b f d\alpha.$$

(b) *Ha* $f_1, f_2 \in \mathcal{D}_{[a,b]}(\alpha)$ *és* $f_1(x) \le f_2(x)$, *bármely* $x \in [a,b]$ *esetén, akkor*

$$\int_a^b f_1 d\alpha \le \int_a^b f_2 d\alpha.$$

(c) *Ha* $f \in \mathcal{D}_{[a,b]}(\alpha)$ *és* $c \in]a,b[$, *akkor* $f \in \mathcal{D}_{[a,c]}(\alpha)$ *és* $f \in \mathcal{D}_{[c,b]}(\alpha)$, *valamint*

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha.$$

(d) *Ha* $f \in \mathcal{D}_{[a,b]}(\alpha)$ *és* $|f(x)| < M$ *az* $[a,b]$*-n, akkor*

$$\left| \int_a^b f d\alpha \right| \le M[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

(e) *Ha* $f \in \mathcal{D}_{[a,b]}(\alpha_1)$ *és* $f \in \mathcal{D}_{[a,b]}(\alpha_2)$, *akkor* $f \in \mathcal{D}_{[a,b]}(\alpha_1 + \alpha_2)$ *és*

$$\int_a^b f d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f d\alpha_1 + \int_a^b f d\alpha_2.$$

(f) *Ha* $f \in \mathcal{D}_{[a,b]}(\alpha)$ *és* $c > 0$, *akkor*

$$\int_a^b f d(c\alpha) = c \int_a^b f d\alpha.$$

Bizonyítás. (a) Ha P az $[a,b]$ intervallum egy tetszőleges felosztása és $f = f_1 + f_2$, akkor

$$\begin{aligned} L(P, f_1, \alpha) + L(P, f_2, \alpha) &\le L(P, f, \alpha) \le U(P, f, \alpha) \le \\ &\le U(P, f_1, \alpha) + U(P, f_2, \alpha). \end{aligned} \tag{1.15}$$

A feltételek alapján létezik olyan P_1 és P_2 felosztás, amelyekre

$$U(P_k, f_k, \alpha) - L(P_k, f_k, \alpha) < \varepsilon, \quad k = 1, 2.$$

Ha P a P_1 és P_2 közös P finomítása, akkor az előbbi egyenlőtlenségek P-re is teljesülnek. Így (1.15) alapján

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < 2\varepsilon,$$

tehát $f \in \mathcal{D}_{[a,b]}(\alpha)$.

Az előbbi P felosztásra

$$U(P,f_k,\alpha) < \int_a^b f d\alpha + \varepsilon, \quad k = 1,2,$$

tehát (1.15) alapján

$$\int_a^b f d\alpha \leq U(P,f_k,\alpha) < \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha + 2\varepsilon.$$

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges, az előbbi egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha. \tag{1.16}$$

Ha az f_1 és f_2 függvények helyett a $-f_1$, illetve $-f_2$ függvényekre megismételjük ezt a gondolatmenetet, akkor a fordított egyenlőtlenséghez jutunk, tehát (1.14) teljesül.

A többi állítás bizonyítása az értelmezések alapján nyilvánvaló. □

1.6. Tétel. *Ha* $f \in \mathcal{D}_{[a,b]}(\alpha)$, $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a,b]$, g *folytonos a* $[m,M]$ *intervallumon és* $h(x) := g(f(x))$, $\forall x \in [a,b]$, *akkor* $h \in \mathcal{D}_{[a,b]}(\alpha)$.

Bizonyítás. [62, 110. oldal].

1.7. Tétel. *Ha* $f, g \in \mathcal{D}_{[a,b]}(\alpha)$, *akkor*

(a) $fg \in \mathcal{D}_{[a,b]}(\alpha)$;

(b) $|f| \in \mathcal{D}_{[a,b]}(\alpha)$ *és* $\left|\int_a^b f d\alpha\right| \leq \int_a^b |f| d\alpha$.

Bizonyítás. [62, 111. oldal].

1.8. Tétel. (A parciális integrálás képlete) *Ha* f *és* α *korlátos változású komplex függvények* $[a,b]$*-n, és* f *folytonos, akkor*

$$\int_a^b f d\alpha = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha df. \tag{1.17}$$

Bizonyítás. [62, 122. oldal].

Ha f egy m-ed fokú polinomiális függvény és

$$I(t) = \int_0^t e^{t-u} f(u) du, \tag{1.18}$$

akkor ismételt parciális integrálással az

$$I(t) = e^t \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(t) \tag{1.19}$$

egyenlőséghez jutunk. Sőt, ha $\tilde{f}$ -t az f -ből úgy kapjuk, hogy minden együtthatóját annak abszolút értékével helyettesítjük, akkor

$$|I(t)| \leq \int_0^t e^{t-u}|f(u)|du \leq |t|e^{|t|}\tilde{f}(|t|). \tag{1.20}$$

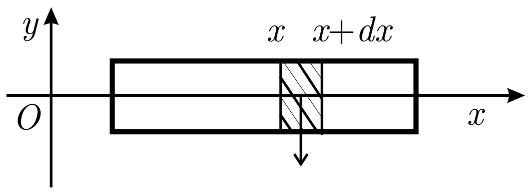
1.16. Alkalmazás. *Bizonyítsuk be, hogy* π *irracionális!*

Bizonyítás. Tekintsük az $I_n = \int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)^n \cos\alpha x dx$ sorozatot. Parciális integrálás segítségével az $\alpha^2 I_n = 2n(2n-1)I_{n-1} - 4n(n-1)I_{n-2}$ rekurzióhoz jutunk, tehát indukcióval igazolhatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan P_n és Q_n egész együtthatós polinom, amelyre $\mathrm{gr}P_n = n$, $\mathrm{gr}Q_n = n-1$ és

$$\alpha^{2n+1} I_n = n!\left(P_n(\alpha)\sin\alpha + Q_n(\alpha)\cos\alpha\right).$$

Ha $\pi = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$, akkor az $\alpha = \frac{\pi}{2}$ választással azt kapjuk, hogy a $J_n = \frac{a^{2n+1}J_n}{n!}$ sorozat egész számokból áll. Másrészt ez a sorozat nullához tart, mert a rögzített és $I_n \leq I_0$, $\forall n \geq 0$. Ez csak akkor lehetséges, ha egy indextől kezdve a sorozat minden tagja nulla. Ez viszont ellentmondás, mert $(1-x^2)^n \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) > 0$, ha $x \in (-1, 1)$, és így $I_n > 0$, bármely $n \geq 0$ esetén. ♦

1.17. Alkalmazás. *Határozzuk meg annak az* l *hosszúságú, henger alakú inhomogén rúdnak a tömegközéppontját, amelynek ismerjük a sűrűségeloszlását (az egyik végétől* x *távolságra a sűrűsége* $\rho(x)$, *ahol* $0 < x < l$ *).*



6.2. Ábra

Megoldás. Képzeljük el, hogy a rúdat az Ox tengely mentén helyezzük el (lásd a mellékelt ábrát). Az origótól x távolságra levő dx szélességű darab tömege $\rho(x) \cdot dx$, tehát a rúd teljes tömege $\int\limits_a^b \rho(x)dx$. Másrészt egy ilyen kis résznek az O szerinti forgatónyomatéka $x\rho(x)dx$, tehát a teljes rúd forgatónyomatéka $\int\limits_a^b x\rho(x)dx$. Ha a rúd teljes anyagát egy x_g abszcisszájú pontban koncentrálnánk, akkor ennek a pontnak a forgatónyomatéka $x_g \int\limits_a^b \rho(x)dx$ lenne. A tömegközéppont az a pont, amelyre ez a két nyomaték egyforma (ez ekvivalens azzal, hogy a tömegközéppontra vonatkozó teljes nyomaték 0), tehát a tömegközéppont abszcisszája

$$x_g = \frac{\int\limits_a^b x\rho(x)dx}{\int\limits_a^b \rho(x)dx}.$$

Megjegyzés. Érdemes ezt összehasonlítani a homogén síkidomokra kapott képlettel (lásd a XII. osztályos tankönyvet, [5]). ♦

1.18. Alkalmazás. *Egy lejtőről rendre legurítunk (kezdősebesség nélkül) egy gömböt, egy tömör hengert és egy üres hengert. Melyik ér le a leghamarabb, ha mindhárom tömege m, sugara R és a súrlódást elhanyagoljuk?*

Megoldás. A lejtő tetején a testnek csak E_p potenciális energiája van, és ez alakul át mozgási, illetve forgási energiává. Ha v a sebessége egy $H-h$ magasságban (H a lejtő magassága), akkor az átalakult potenciális energia $\Delta E_p = mgh$, a mozgási energiája $E_m = \frac{1}{2}mv^2$ és a forgási energiája $E_f = \frac{1}{2}I\omega^2$, ahol I a test tehetetlenségi nyomatéka és ω a szögsebessége. Mivel a test gurul a lejtőn (a két felület egymáson nem csúszik el), a szögsebesség és a sebesség közt érvényes a $v = R \cdot \omega$ egyenlőség. Így $H-h$ magasságban a test sebessége

$$v(h) = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I}{mR^2}}}.$$

A guruláshoz szükséges idő $\int\limits_0^H v(h)dh$, tehát elégséges a sebességeket összehasonlítani. Ugyanakkor a szimmetria tengely szerinti tehetetlenségi nyomaték az $I = \int r^2 dm$ integrálból számolható ki, ahol dm egy kis rész tömege, és r ennek a résznek a tengelytől való távolsága. Tömör hengerre a szimmetria tengelytől x távolságra levő dx falvastagságú henger tömege $dm = \rho\pi l\left((x+dx)^2 - x^2\right)$, ahol l a henger magassága, ρ a sűrűsége. Másrészt, ha az egész henger tömege m, akkor $\rho = \frac{m}{\pi R^2 l}$, tehát $dm = \frac{m}{R^2}(2xdx + (dx)^2)$. A $2xdx$-et tartalmazó kifejezés egy integrálösszeget eredményez (ha összegezzük), a $(dx)^2$-et tartalmazó rész összegzés után egy nullához tartó kifejezéshez vezet. Ez azt jelenti, hogy gyakorlatilag „elhanyagolhatjuk" a $(dx)^2$-et tartalmazó tagot, tehát az $I_{th} = \int_0^R \frac{2m}{R^2}x^3dx = \frac{mR^2}{2}$ tehetetlenségi nyomatékot kapjuk. Hasonló gondolatmenet alapján az üres henger esetében $I_{üh} = mR^2$, és a gömbre $I_g = \frac{2}{5}mR^2$. A sebességre kapott képletből látható, hogy annak a testnek a sebessége a legnagyobb, amelyiknek a legkisebb a tehetetlenségi nyomatéka (ennek a felpörgetése veszi fel a legkevesebb energiát), tehát leghamarabb a gömb érkezik a lejtő aljába. ♦

6.2 Függvénysorok integrálhatósága

2.1. Tétel. *Ha* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ *egy növekvő függvény,* $f_n \in \mathcal{D}_{[a,b]}$ *és az* (f_n) *függvénysorozat egyenletesen tart* f *-hez az* $[a,b]$ *-n, akkor* $f \in \mathcal{D}_{[a,b]}$ *és*

$$\int_a^b f d\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n d\alpha. \tag{2.21}$$

Bizonyítás. Előbb igazoljuk, hogy $f \in \mathcal{D}_{[a,b]}(\alpha)$ (vagyis a (2.21) bal oldala létezik).

Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ valós számot és válasszuk meg az $\eta > 0$ -t úgy, hogy teljesüljön az

$$\eta(\alpha(a) - \alpha(b)) \le \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.22}$$

egyenlőtlenség. Az (f_n) függvénysorozat egyenletes konvergenciája alapján létezik $m \in \mathbb{N}$ úgy, hogy

$$|f_m(x) - f(x)| \le \eta, \quad \forall\, x \in [a,b]. \tag{2.23}$$

Mivel $f_n \in \mathcal{D}_{[a,b]}$, létezik az $[a,b]$ intervallumnak olyan P felosztása, amelyre

$$U(P, f_m, \alpha) - L(P, f_m, \alpha) \le \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.24}$$

A (2.23) összefüggés alapján $f(x) \le f_m(x) + \eta$, és így a (2.22) egyenlőtlenségből következik, hogy

$$U(P, f, \alpha) \le U(P, f_m, \alpha) + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.25}$$

Hasonló módon az $f(x) \ge f_m(x) - \eta$ egyenlőtlenségből következik, hogy

$$L(P, f, \alpha) \ge L(P, f_m, \alpha) - \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.26}$$

A (2.24), (2.25) és (2.26) egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \le \varepsilon, \tag{2.27}$$

tehát az 1.2 tétel alapján $f \in \mathcal{D}_{[a,b]}(\alpha)$.

Mivel az (f_n) sorozat egyenletesen tart f -hez az $[a,b]$ -n, létezik n_ε úgy, hogy tetszőleges $n > n_\varepsilon$ esetén

$$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon, \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Így $n > n_\varepsilon$ -ra

$$\left| \int_a^b f d\alpha - \int_a^b f_n d\alpha \right| = \left| \int_a^b (f - f_n) d\alpha \right| \le \int_a^b |f - f_n| d\alpha \le \varepsilon(\alpha(a) - \alpha(b)).$$

De ε -t tetszőlegesen választottuk, következik a (2.21) egyenlőség. $\square$

2.1. Következmény. *Ha* $f_n \in \mathcal{D}_{[a,b]}(\alpha)$, *minden* $n \in \mathbb{N}$ *-re, és az*

$$\sum f_n(x), \quad \forall\, x \in [a,b]$$

sor az $[a,b]$ *intervallumon egyenletesen konvergál* $f(x)$ *-hez, akkor*

$$\int_a^b f d\alpha = \sum \int_a^b f_n d\alpha.$$

6.3 Improprius integrálok

A Darboux integrál értelmezése során két fontos feltevést használtunk: az intervallum kompaktságát és a függvény korlátosságát.

Ebben a paragrafusban értelmezzük egy tetszőleges függvény integrálját nem kompakt intervallumon is. Ha I egy nem kompakt intervallum, akkor a következő alakja lehet

$I = [a,b[$, ahol $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$;
$I =]a,b]$, ahol $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$;
$I =]a,b[$, ahol $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Az ilyen alakú intervallumokon értelmezett integrálokat *improprius integráloknak* vagy *általánosított Darboux integrálnak* nevezzük.

Ha f az $I = [a,+\infty[$ intervallumon értelmezett, és bármely $b \in I$ -re létezik az $\int_a^b f(t)dt$ Darboux integrál, akkor az I -n értelmezett általánosított Darboux integrált az

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(t)dt$$

egyenlőséggel értelmezzük, amennyiben a jobb oldali határérték létezik. Ha a jobb oldali határérték létezik, azt mondjuk, hogy az *improprius integrál konvergens*, ellenkező esetben az integrál *divergens*.

Ha f az $I =]-\infty,b]$ intervallumon értelmezett, és minden $a \in I$ -re létezik $\int_a^b f(t)dt$, akkor az

$$\int_{-\infty}^b f(t)dt = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(t)dt$$

egyenlőséggel értelmezzük az f integrálját az I intervallumon. Ebben az esetben is az integrált konvergensnek nevezzük, ha a jobb oldali határérték létezik, ellenkező esetben divergensnek. Az értelmezések alapján látszik, hogy ha f értelmezett a $(-\infty,b] \cup [b,\infty)$ halmazon, akkor

$$\int_{-\infty}^b f(t)dt = \int_{-b}^{+\infty} f(-t)dt.$$

Mindkét irányban korlátlan intervallum esetén az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)dt = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(t)dt$$

egyenlőséggel értelmezhetjük az integrált. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az integrál konvergens, ha az értelmezésben szereplő határérték létezik, ellenkező esetben az integrált divergensnek nevezzük.

Gyakran használjuk a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{+\infty} f(t)dt, \quad a \in \mathbb{R}$$

egyenlőséget.

3.1. Példák. (a) Tanulmányozzuk az

$$\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^p}, \quad a > 0 \tag{3.28}$$

integrál konvergenciáját.

Ha $p = 1$, akkor minden $b > a$ esetén $\int\limits_a^b \frac{dt}{t} = \ln\frac{b}{a}$. Így

$$\int_a^b \frac{dt}{t} \to +\infty, \quad \text{ha} \quad b \to +\infty,$$

tehát ebben az esetben az integrál divergens.

Ha $p \neq 1$, akkor tetszőleges $b > a$-ra

$$\int_a^b \frac{dt}{t} = \frac{1}{1-p}(b^{1-p} - a^{1-p}) \xrightarrow{b\to\infty} \begin{cases} \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p > 1 \\ \infty, & p < 1. \end{cases}$$

Ez alapján a (3.28) integrál pontosan akkor konvergál, ha $p > 1$.

(b) Tanulmányozzuk az

$$\int_a^{+\infty} e^{-pt}dt, \quad p \in \mathbb{R} \tag{3.29}$$

integrál konvergenciáját.

Ha $p = 0$, akkor

$$\int_a^b e^{-pt}dt = \int_a^b dt = b - a \xrightarrow{b\to\infty} \infty.$$

$p \neq 0$ esetén

$$\int_a^b e^{-pt}dt = \frac{1}{p}(e^{-ap} - e^{bp}) \xrightarrow{b\to\infty} \begin{cases} \dfrac{1}{p}\, e^{-ap}, & p > 0 \\ -\infty, & p < 0, \end{cases}$$

tehát a (3.29) integrál pontosan akkor konvergál, ha $p > 0$.

(c) Tanulmányozzuk az

$$\int_0^1 \frac{d\,t}{t^p} \tag{3.30}$$

integrál konvergenciáját.

$0 < a < 1$-re

$$\int_a^1 \frac{d\,t}{t^p} = \begin{cases} \int_a^1 \dfrac{d\,t}{t} = -\ln a, & a \to 0,\ p = 1 \\ \dfrac{1}{1-p} - \dfrac{a^{1-p}}{1-p} \to & \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}, & a \to 0,\ p < 1 \\ \infty, & a \to 0,\ p > 1. \end{cases} \end{cases}$$

Tehát a (3.30) integrál pontosan akkor konvergál, ha $p < 1$. $\triangle$

3.1. Lemma. *Ha az $f : [a,\infty[\to [0,\infty[$ függvény Darboux integrálható minden $[a,b]$ intervallumon, ahol $b > a$, akkor az $\int_a^\infty f(t)dt$ integrál konvergenciájának szükséges és elégséges feltétele olyan $M > 0$ létezése, amelyre*

$$\int_a^b f(t)dt \leq M, \quad \forall\, b > a. \tag{3.31}$$

Bizonyítás. Ha $\int_a^\infty f(t)dt$ konvergál, akkor a $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(t)dt$ határérték létezik. Ha M ez a határérték, mivel f nem vesz fel negatív értékeket, a $b \mapsto \int_a^b f(t)dt$ függvény növekvő. Ebből következik a kívánt állítás.

A $b \mapsto \int_a^b f(t)dt$ függvény növekvő, így ha (3.31) teljesül, akkor létezik a $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(t)dt$ határérték. $\square$

3.1. Tétel. *Ha az $f : [a,\infty[\to \mathbb{R}$ függvény Darboux integrálható minden $[a,b]$ ($b > a$) intervallumon, akkor az $\int_a^\infty f(t)dt$ integrál konvergenciájának szükséges és elégséges feltétele, hogy bármely $\varepsilon > 0$-ra létezzen $p > a$ úgy, hogy tetszőleges $d > c > p$-re teljesüljön az*

$$\left| \int_c^d f(t)dt \right| < \varepsilon \tag{3.32}$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. Értelmezzük az $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ függvényt. F-re alkalmazzuk a 154. oldal 1.2 tételét. Így F-nek pontosan akkor létezik határértéke $+\infty$-ben, ha bármely $\varepsilon > 0$-ra létezik $p > a$ úgy, hogy tetszőleges $d > c > p$-re teljesüljön a

$$|F(d) - F(c)| = \left| \int_c^d f(t)dt \right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség. □

Ha az $f : [a, \infty] \to \mathbb{R}$ függvényre $|f|$ Darboux integálható minden $[a, b]$ $(b > a)$ intervallumon és az $\int_a^\infty |f(t)|dt$ integrál konvergens, akkor az $\int_a^\infty f(t)dt$ integrált *abszolút konvergensnek* nevezzük.

3.2. Lemma. *Ha az $f : [a, \infty] \to \mathbb{R}$ függvényre $|f|$ Darboux integrálható minden $[a, b]$ $(b > a)$ intervallumon, akkor az $\int_a^\infty f(t)dt$ abszolút integrálhatóságának szükséges és elégséges feltétele olyan $K > 0$ létezése, amelyre*

$$\int_a^b |f(t)|dt < K, \quad \forall\, b > a.$$

3.2. Tétel. *Ha az $f : [a, \infty] \to \mathbb{R}$ függvény Darboux integrálható minden $[a, b]$ $(b > a)$ intervallumon és $\int_a^\infty f(t)dt$ abszolút konvergens, akkor konvergens is.*

Bizonyítás. A 3.1 tételt alkalmazzuk a $|f|$ függvényre. Így bármely $\varepsilon > 0$-ra létezik $p > a$, amelyre tetszőleges $d > c > p$ esetén

$$\int_c^d |f(t)|dt < \varepsilon.$$

Az 1.7 tétel (b) alpontja alapján

$$\left| \int_c^d f(t)dt \right| < \int_c^d |f(t)|dt < \varepsilon, \quad \forall\, d > c > p,$$

és így a 3.1 tételből következik a bizonyítandó tulajdonság. □

Ha az $f : [a, \infty] \to \mathbb{R}$ függvényre az $\int_a^\infty f(t)dt$ integrál konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor az $\int_a^\infty f(t)dt$ integrált *feltételesen konvergensnek* nevezzük.

Megjegyzés. Az $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, $\quad t \in [n, n+1[$, $n \in \mathbb{N}$ függvényre

$$\int_0^\infty f(t)dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2 \quad \text{és} \quad \int_0^\infty |f(t)|dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b |f(t)|dt = \infty,$$

tehát az $\int_0^\infty f(t)dt$ integrál feltételesen konvergens. △

3.3. Lemma. *Ha az $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ függvény Darboux integrálható $[a, \infty[$-en és létezik a $\lim_{t\to\infty} f(t)$ határérték, akkor $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$.*

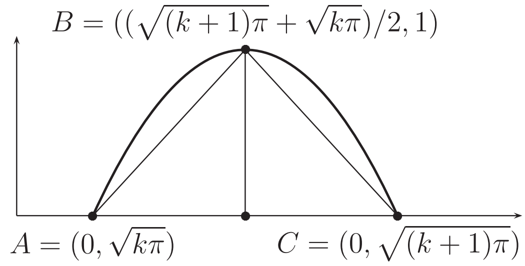
Bizonyítás. Ha $\lim_{t\to\infty} f(t) = l > 0$, akkor létezik olyan $b > a$, amelyre $f(t) > l/2$, minden $t \geq b$ esetén. Így $d > c > b$-re

$$\int_c^d f(t)dt > l(d-c)/2,$$

tehát a 3.1 tétel alapján az integrál nem konvergens. Hasonló gondolatmenet alapján az $l < 0$ esetben is ellentmondáshoz jutunk, tehát $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$. $\square$

Megjegyzés. A 3.3 lemmában a határérték létezése fontos feltétel. Az $f : [a,\infty[\to \to \mathbb{R}$, $f(t) = \sin t^2$ függvényre $\int_0^\infty \sin t^2 dt = \sqrt{2\pi}/4$ (lásd [48, 443. oldal]), és az integrálandó függvény határértéke nem 0. Az előbbi összefüggés általánosítása és sok más érdekes összefüggés található [70, III. fejezet]-ben. Például $\theta \in [0,\pi/4]$ esetén

$$\begin{cases} \int_0^\infty \exp(-x^2\cos(2\theta))\cos(x^2\sin(2\theta)dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\cos\theta, \\ \int_0^\infty \exp(-x^2\cos(2\theta))\sin(x^2\sin(2\theta)dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\sin\theta, \end{cases} \overset{\theta=\pi/4}{\Longrightarrow} \begin{cases} \int_0^\infty \cos t^2 dt = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{4}, \\ \int_0^\infty \sin t^2 dt = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{4}. \end{cases}$$



6.1. Ábra

Az előbbi improprius integrál feltételesen konvergens. Ezt igazolhatjuk, ha alsó becslést adunk $\int_0^a |\sin(t^2)|dt$-ra. Az előbbi integrál az Ox tengely és a $g(x) = = |\sin(x^2)|$, $x \in [0,a]$ függvény grafikus képe közti síkidom területe. Ez az ábrán látható $ABC_\triangle$ (6.1. ábra) területének többszörösével minorálható (mert a függvény szigorúan konkáv, bármely két egymásutáni gyöke közt). Így

$$\int_0^a |\sin(t^2)|dt \geq \sum_{k=0}^{[\frac{a}{\pi}]-1} \frac{\sqrt{(k+1)\pi} - \sqrt{k\pi}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{a}{\pi}\right]\pi} \xrightarrow{a\to\infty} \infty,$$

tehát az $\int_0^\infty \sin t^2 dt$ integrál feltételesen konvergens. $\triangle$

Gyengébb feltételt tartalmaz a következő tétel:

3.3. Tétel. (Barbălat[132]) *Ha* $f : [a,\infty[\to \mathbb{R}$ *egyenletesen folytonos és Darboux integrálható az* $[a,\infty[$ *intervallumon, akkor* $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$.

[132] Ioan Barbălat, 1907 -

3.4. Tétel. *Az $f, g : [a, \infty[\to [0, \infty[$ függvények Darboux integrálhatók minden $[a, b]$ $(b > a)$ intervallumon, és létezik olyan $c > 0$ állandó, amelyre $f(t) \leq cg(t)$, bármely $t \in [a, \infty[$ esetén. Ekkor igazak a következő állítások:*

(a) *ha $\int_a^\infty g(t)dt$ konvergens, akkor $\int_a^\infty f(t)dt$ is konvergens;*

(b) *ha $\int_a^\infty f(t)dt$ divergens, akkor $\int_a^\infty g(t)dt$ is divergens.*

Bizonyítás. (a) Mivel $\int_a^\infty g(t)dt$ konvergens, a 3.1 tétel alapján bármely $\varepsilon > 0$-ra létezik $p > a$ úgy, hogy $v > u > p$ esetén

$$\left|\int_u^v g(t)dt\right| < \varepsilon/c.$$

A feltételekből következik, hogy

$$\left|\int_u^v f(t)dt\right| < c\left|\int_u^v g(t)dt\right| < \varepsilon.$$

(b) A feltételbeli egyenlőtlenség alapján, ha

$$\int_a^b f(t)dt \xrightarrow{b\to\infty} \infty, \text{ akkor } \int_a^b g(t)dt \xrightarrow{b\to\infty} \infty,$$

tehát $\int_a^\infty g(t)dt$ divergens. □

3.2. Következmény. *Ha az $f, g : [a, \infty[\to [0, \infty[$ függvények Darboux integrálhatók minden $[a, b]$ $(b > a)$ intervallumon és $\lim_{t\to\infty} f(t)/g(t) = l$, akkor igazak a következő állítások:*

(a) *ha $l < \infty$ és $\int_a^\infty g(t)dt$ konvergens, akkor $\int_a^\infty f(t)dt$ is konvergens;*

(b) *ha $l > 0$ és $\int_a^\infty g(t)dt$ divergens, akkor $\int_a^\infty f(t)dt$ is divergens;*

(c) *$l \in]0, \infty[$ esetén az $\int_a^\infty f(t)dt$ integrál pontosan akkor konvergens, ha az $\int_a^\infty g(t)dt$ integrál konvergens.*

3.5. Tétel. *Csökkenő $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$ függvény esetén az $\int_0^\infty f(t)dt$ integrál pontosan akkor konvergens, ha a $\sum f(n)$ sor konvergens.*

Bizonyítás. Tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ és $t \in [k, k+1]$ esetén

$$f(k+1) \leq f(t) \leq f(k),$$

tehát

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k),$$

és ha ezeket az egyenlőtlenségeket összegezzük, akkor a

$$\sum_{k=1}^{n+1} f(k) \leq \int_0^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) \tag{3.33}$$

egyenlőtlenségeket kapjuk. Ha $\sum f(n)$ konvergens, akkor létezik olyan M, amelyre tetszőleges $b \leq n+1$ esetén

$$\int_0^b f(t)dt \leq \int_0^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) \leq M.$$

Így a 3.1 lemmából következik, hogy $\int_0^\infty f(t)dt$ konvergál.

A fordított irányú egyenlőtlenség igazolásához a sor részletösszegét majoráljuk az integrállal. $\square$

3.6. Tétel. (Abel) *Ha az $f, g : [a, b[\to [0, \infty[$ függvények Darboux integrálhatók az $[a, b[$ intervallum bármely kompakt részintervallumán, és teljesül az alábbi két feltétel:*

(i) *f monoton és $\lim_{t\to b} f(t) = 0$;*

(ii) *létezik olyan $M > 0$, amelyre $|\int_a^t g| < M$, ha $t \in [a, b[$,*

akkor az $f \cdot g$ szorzat Darboux integrálható $[a, b[$ -n.

3.7. Tétel. (Dirichlet) *Ha az $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ függvények Darboux integrálhatók az $[a, b[$ intervallum minden kompakt részintervallumán, és teljesül a következő két feltétel:*

(i) *f monoton és korlátos az $[a, b[$ intervallumon;*

(ii) *g Darboux integrálható $[a, b[$ -n,*

akkor $f \cdot g$ Darboux integrálható $[a, b[$ -n.

Az integrálok kiszámítása során gyakran használjuk a parciális integrálást, ez improprius integrálokra is kiterjeszthető.

3.8. Tétel. *Ha $-\infty < a < b \leq \infty$, az $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ függvények C^2 osztályúak, létezik a $\lim_{t\uparrow b} f(t)g(t)$ határérték és az $\int_a^b f'g$ integrál konvergál, akkor az $\int_a^b fg'$ integrál is konvergál és*

$$\int_a^b fg' = \lim_{t\uparrow b} f(t)g(t) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g. \tag{3.34}$$

6.4 Paramétertől függő integrálok

6.4.1 A gamma függvény

Euler a faktoriális függvény meghosszabbításaként bevezetett egy C^∞ osztályú függvényt. Ezt nevezzük *gamma függvénynek,* és minden $x > 0-$ ra a

$$\Gamma(x) = \int_0^1 [-\ln(t)]^{x-1} dt \tag{4.35}$$

egyenlőséggel értelmezzük. Néha másodfajú *Euler-féle integrálnak* is nevezik.

4.1. Tétel. *(Euler, 1730) Ha* $x > 0$, *akkor*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \tag{4.36}$$

$$\Gamma(x) = 2\int_0^\infty t^{2x-1}e^{-t^2}dt. \tag{4.37}$$

Bizonyítás. Az $y = -\ln(t)$, illetve $y^2 = -\ln(t)$ változócserét használjuk a (4.35) összefüggésben. □

Ezekből a reprezentációkból látszik, hogy a gamma függvény jól értelmezett, és C^∞ osztályú.

A (4.36) összefüggésben $n-$ szer integrálva, a

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\ln^n(t)dt, \quad n \in \{1, 2, \dots\} \tag{4.38}$$

összefüggéshez jutunk.

Látható, hogy

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1, \tag{4.39}$$

és $x > 0$ esetén parciális integrálással

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}dt = [-t^x e^{-t}]_0^\infty + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x), \quad \text{tehát} \tag{4.40}$$

$$\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{4.41}$$

A (4.40) függvényegyenletnek más megoldása is létezik, például a $\cos(2m\pi x)\Gamma(x)$ függvény teljesíti a (4.39) és (4.40) összefüggéseket, ha $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Másrészt, ha csak a logaritmikusan konvex megoldásokat keressük, akkor a megoldás egyértelmű.

4.2. Tétel. *([14]) Egyetlen olyan* $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ *függvény létezik, amelyre* $\ln[f(x)]$ *konvex,*

$$f(1) = 1 \quad \text{és} \quad f(x+1) = xf(x).$$

A gamma függvényt meghosszabbíthatjuk úgy, hogy negatív értékekre is értelmezett legyen (kivéve a negatív egészeket). Ezt a

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

egyenlőség alapján tehetjük meg. Ez alapján

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\dots(x+n-1)}, \quad \text{ha } x+n > 0. \tag{4.42}$$

A [38, 2. rész, 293. oldal]-ban megtalálhatjuk a gamma függvény sorbafejtését.

4.3. Tétel. *Ha* $x > 0$, *akkor*

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\, x^x\, e^{-x} \left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} + \frac{O(1)}{x^3}\right). \tag{4.43}$$

Ebből következik a Stirling[133] képlet.

4.4. Tétel. *Ha* $n \in \mathbb{N}^*$, *akkor*

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}\, (1 + \alpha_n)\,, \tag{4.44}$$

ahol $\alpha_n \to 0$, *amikor* $n \to \infty$.

6.5 Az e és a π transzcendens

A 107. oldalon láttuk, hogy az e irracionális, a 274. oldalon igazoltuk, hogy a π is irracionális. Ebben a paragrafusban ezeknél az eredményeknél pontosabb állításokat igazolunk. Az első részben a Niven[134]-féle polinomokat használjuk. Ezeket a

$$P_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=n}^{2n} c_k x^k$$

összefüggéssel értelmezzük, ahol $c_k \in \mathbb{Z}$. A Niven-féle polinomok rendelkeznek a következő tulajdonságokkal (ezeknek a bizonyítása azonnali, ezért nem részletezzük):

$$\begin{aligned}
&0 < P_n(x) < \frac{1}{n!}, \quad 0 < x < 1,\\
&P_n(0) = 0,\\
&P_n^{(m)}(0) = 0, \quad \text{ha } m < n \text{ vagy } m > 2n,\\
&P_n^{(m)}(0) = \frac{m!}{n!}\, c_m, \quad n \le m \le 2n,\\
&P_n(x) = P_n(1-x), \quad 0 < x < 1.
\end{aligned}$$

Az előbbi összefüggésekből következik, hogy P_n-nek és az összes deriváltjának az $x = 0$-ban és az $x = 1$-ben a behelyettesítési értéke egész szám.

5.1. Tétel. *Ha* $a > 0$ *egész szám, akkor* e^a *irracionális.*

Bizonyítás. Ha $e^a = p/q$ és p, q természetes számok, akkor az

$$U(x) = a^{2n}P_n(x) - a^{2n-1}P_n'(x) + \cdots - aP_n^{(2n-1)}(x) + P_n^{(2n)}(x)$$

segédfüggvényre

$$q[e^{ax}U(x)]' = qe^{ax}[aU(x) + U(x)'] = qe^{ax}a^{2n+1}P_n(x)$$

[133] James Stirling, 1710 - 1761
[134] Ivan Niven, 1915-1999

és

$$qa^{2n+1}\int_0^1 e^{ax}P_n(x)dx = q[e^{ax}U(x)]|_0^1 = pU(1) - qU(0).$$

A Niven-féle polinomok tulajdonságai alapján $U(0)$ és $U(1)$ egész számok, tehát $qa^{2n+1}\int_0^1 e^{ax}P_n(x)dx \in \mathbb{Z}$. Másrészt

$$0 < qa^{2n+1}\int_0^1 e^{ax}P_n(x)dx < \frac{qa^{2n}(e^a-1)}{n!} < 1,$$

ha az n elég nagy. Ez ellentmondás, tehát e^a nem lehet racionális. □

5.3. Következmény. *Ha $p/q \in \mathbb{Q}^*$, akkor $e^{p/q}$ irracionális.*

Bizonyítás. Ha $e^{p/q}$ racionális lenne és $p > 0$, akkor az $[e^{p/q}]^q = e^p$ szám sem lehetne irracionális, tehát az 5.1 tétel alapján $e^{p/q}$ irracionális. $p < 0$ esetén az $1/e^p$ irracionalitását használjuk. □

5.4. Következmény. *e^2 és $\sqrt{e}$ irracionálisak.*

5.2. Tétel. *Ha $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+ \setminus \{1\}$, akkor $\ln\left(\frac{p}{q}\right)$ irracionális.*

Bizonyítás. Ha $\ln(p/q) = a/b$ és $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, akkor az

$$e^{\frac{a}{b}} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

ellentmondáshoz jutunk. □

5.3. Tétel. *π^2 irracionális.*

Bizonyítás. Ha π^2 racionális lenne, akkor létezne olyan p, q természetes szám, amelyre $\pi^2 = p/q$, $q \neq 0$. A

$$Q(x) = q^n[\pi^{2n}P_n(x) - \pi^{2n-2}P_n^{(2)}(x) + \pi^{2n-4}P_n^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n P_n^{(2n)}(x)]$$

segédfüggényre

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{dQ(x)}{dx}\sin\pi x - Q(x)\pi\cos\pi x\right] = [Q''(x) + \pi^2 Q(x)]\sin\pi x = \pi^2 p^n P_n(x)\sin\pi x,$$

tehát

$$\pi p^n \int_0^1 P_n(x)\sin(\pi x)\,dx = \left[\frac{1}{\pi}\frac{dQ(x)}{dx}\sin(\pi x) - Q(x)\cos(\pi x)\right]_0^1 = Q(1) + Q(0).$$

A Niven-féle polinomok tulajdonságai alapján $Q(1) + Q(0) \in \mathbb{Z}$. Másrészt

$$0 < \pi p^n \int_0^1 P(x)\sin\pi x\,dx < \frac{\pi p^n}{n!} < 1,$$

és ez ellentmondás, tehát π^2 nem racionális. □

5.5. Következmény. *π irracionális.*

Láttuk, hogy a valós számok halmaza nem megszámlálható (lásd a 2.12-es következményt a 27. oldalon) és, hogy az algebrai számok halmaza megszámlálható (lásd a 2.17-es következményt a 28. oldalon). Így léteznek olyan valós számok is, amelyek nem algebrai számok, ezeket *transzcendens* számoknak nevezzük. Ebben a paragrafusban igazoljuk, hogy e és π transzcendensek.

5.4. Tétel. (Hermite[135]) *Az e szám transzcendens.*

Bizonyítás. Feltételezzük, hogy e algebrai szám, vagyis létezik olyan algebrai egyenlet, amelynek e az egyik gyöke. Tehát léteznek az $a_0 \neq 0$, $a_1, a_2, \dots a_n$ egész számok úgy, hogy

$$a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \cdots + a_n e^n = 0. \tag{5.45}$$

Tekintsük a

$$J = a_0 I(0) + a_1 I(1) + a_2 I(2) + \cdots + a_n I(n)$$

számot, ahol az I függvényt az (1.18) összefüggés segítségével értelmeztük, és legyen

$$f(x) = x^{p-1}(x-1)^p \dots (x-n)^p,$$

ahol p egy nagy prímszám. Az (1.19) és (5.45) összefüggésekből

$$J = -\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{m} a_k f^{(j)}(k),$$

ahol $m = (n+1)p - 1$. Másrészt $f^{(j)}(k) = 0$, ha $j < p$, $k > 0$ vagy $j < p-1$, $k = 0$. Így a j, k számoknak minden $j = p-1$ és $k = 0-$tól különböző értékeire $f^{(j)}(k)$ egész szám és osztható $p!-$sal. Ha $j = p-1$ és $k = 0$, akkor az

$$f^{(p-1)}(0) = (p-1)!(-1)^{np}(n!)^p$$

egyenlőséget kapjuk. Ha $p > n$, akkor $f^{(p-1)}(0)$ egész szám és osztható $(p-1)!-$sal, de nem osztható $p!-$sal. Így $p > |a_0|$ és $p > n$ esetén J nemnulla egész szám, amely osztható $(p-1)!$-sal. Ez csak akkor lehetséges, ha $|J| \geq (p-1)!$.

Ugyanakkor az $\tilde{f}(k) \leq (2n)^m$ becslésből (1.20) alapján következik, hogy

$$|J| \leq |a_1| e \tilde{f}(1) + \cdots + |a_n| n e^n \tilde{f}(n) \leq c^p,$$

valamilyen $p-$től független $c-$re. A két becslés egymásnak ellentmond, ha p elég nagy, tehát e nem algebrai szám. $\square$

5.5. Tétel. (Lindemann[136]) *π transzcendens.*

[135] Charles Hermite, 1822-1901
[136] Carl Louis Ferdinand von Lindemann, 1852-1939

Bizonyítás. Ha π teljesíti a $P(x) = 0$ algebrai egyenletet (az együtthatók egész számok), akkor az $i\pi$ is teljesít egy $P_1(x) = 0$ algebrai egyenletet. Ennek a gyökei legyenek $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. A feltételezés alapján létezik olyan $1 \leq k \leq n$, amelyre $\alpha_k = i\pi$. Mivel $e^{i\pi} = -1$, írhatjuk, hogy

$$(e^{\alpha_1} + 1)(e^{\alpha_2} + 1) \cdots (e^{\alpha_n} + 1) = 0. \tag{5.46}$$

Előállítunk egy olyan egész együtthatójú polinomot, amelynek gyökei az előbbi szorzat kifejtésében megjelenő e hatványok hatványkitevői. A szorzat kifejtésében minden kitevő az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ számok közül néhánynak az összege. Csoportosítjuk ezeket a kitevőket, az összegben megjelenő tagok száma szerint. Például a kéttagú összegek minden szimmetrikus alappolinomja az eredeti $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ számok valamilyen szimmetrikus polinomja és így a Viéte összefüggések és a szimmetrikus polinomok reprezentációs tétele alapján ezek is racionális számok. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan egész együtthatós P_2 polinom, amelynek gyökei az $\alpha_i + \alpha_j$ alakú számok, ahol $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ és $i \neq j$. Hasonló gondolatmenet alapján létezik olyan P_k egész együtthatós polinom, amelynek gyökei az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ számokból képezett k tagú összegek. Így a $P_1(x)P_2(x)\ldots P_n(x)$ polinom gyökei az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ számokból képezett összegek, vagyis az (5.46) szorzat kifejtésében megjelenő hatványkitevők. Ha az előbbi polinomszorzatnak elhagyjuk a 0-val egyenlő gyökeit (ha vannak ilyenek), akkor egy olyan egész együtthatós P polinomot kapunk, amelynek a gyökei az (5.46) szorzat kifejtésében megjelenő nullától különböző hatványkitevők. Így az (5.46) összefüggés felírható

$$\sum_{k=1}^{r} e^{\beta_k} + N = 0 \tag{5.47}$$

alakban, ahol $N \in \mathbb{N}$ és a $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ számok a P egész együtthatójú polinom gyökei. Tekintsük az

$$f(x) = \frac{c^s x^{p-1}(P(x))^p}{(p-1)!}$$

függvényt, ahol c a P polinom domináns tagjának együtthatója, $s = rp - 1$ és a p természetes számot később határozzuk meg. Az $F(x) = f(x) + f'(x) + \ldots + f^{(s+p)}(x)$ függvényre $(e^{-x}F(x))' = -e^{-x}f(x)$, tehát

$$e^{-x}F(x) - F(0) = -\int_0^x e^{-t}f(t)dt.$$

Ha az előbbi egyenlőségbe rendre β_j-t helyettesítünk x helyett, és a kapott egyenlőségeket összeadjuk, akkor az (5.47) egyenlőség alapján a

$$\sum_{j=1}^{r} F(\beta_j) + NF(0) = -\sum_{j=1}^{r} \beta_j \int_0^1 e^{(1-\lambda)\beta_j} f(\lambda\beta_j)d\lambda \tag{5.48}$$

összefüggést kapjuk. Igazoljuk, hogy ennek a bal oldalán megjelenő kifejezés egy nullától különböző egész szám, ha a p elég nagy, és a jobb oldalon levő összeg minden tagja tart nullához, ha $p \to \infty$. Ez ellentmondás, tehát a π transzcendens. Az, hogy a jobb oldali összeg minden tagja nullához tart, nyilvánvaló, mert $p \to \infty$ esetén az f maximuma tart a nullához, és minden integrált a $[0,1]$ intervallumon számolunk. Az f értelmezése alapján $\sum\limits_{j=1}^{r} f^t(\beta_j) = 0$, ha $0 \le t < p$. A $p \le t \le p+s$ esetben $f^{(t)}(\beta_j)$ a β_j-nek egy legfeljebb s-ed fokú polinomja, amelynek minden együtthatójából kiemelhető a p és a c^s. Mivel a $\sum\limits_{j=1}^{r} f^{(t)}(\beta_j)$ összeg szimmetrikus (β-kban), ezért kifejezhető a szimmetrikus alappolinomok segítségével, és így $\sum\limits_{j=1}^{r} f^{(t)}(\beta_j)$ egy p-vel osztható egész szám. Ugyanakkor $f^{(t)}(0) = 0$, ha $0 \le t \le p-2$, $f^{(p-1)}(0) = c^s c_r^p$, ahol c_r a P polinom szabadtagja, tehát $c_r \neq 0$, és $f^{(t)}(0)$ osztható p-vel, ha $t \ge p$. Ez alapján elég nagy p-re a bal oldali összeg egy p-vel nem osztható természetes szám (ha $p > N$, $p > c^s$ és p-nek van c_r-nél nagyobb prímosztója, akkor $Nc^sC_r^p$ nem osztható p-vel), és így nem lehet 0. $\square$

5.6. Tétel. (Gelfond[137]) *Ha*

(i) *a algebrai és $a \notin \{0,1\}$;*

(ii) *b algebrai és irracionális,*

akkor a^b transzcendens.

Gelfond tétele részleges választ ad Hilbert hetedik kérdésére[138]. Az általános eset (β irracionális) a mai napig megoldatlan (és természetesen cáfolatlan is).

Hasonló módon a $\pi + e-$ről, vagy az Euler-Mascheroni állandóról sem tudjuk, hogy transzcendens-e vagy sem.

6.6 A Grönwall egyenlőtlenség

Nagyon sok eredmény bizonyításában fontos szerepe van a következő egyenlőtlenségnek.

6.1. Lemma. (Grönwall[139] egyenlőtlenség) *Ha az $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény teljesíti a*

$$0 \le x(t) \le c + \int_a^t h(s)x(s)ds, \quad t \in [a,b] \tag{6.49}$$

[137] Alexander Gelfond, 1906-1968

[138] 1900 augusztus 8-án, Párizsban, a második nemzetközi matematika kongresszuson Hilbert 23 problémát fogalmazott meg. Ezek közt a hetedik a következő volt: ha $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ algebrai szám és β irracionális, akkor igaz-e, hogy α^β transzcendens.

[139] Thomas Hakon Grönwall, 1877-1932

egyenlőtlenséget valamilyen $c \in \mathbb{R}_+$ *állandóra, és* $h : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ *integrálható függvényre, akkor*

$$0 \le x(t) \le c + c\int_a^t h(r)\exp(\int_r^t h(s)ds)dr, \quad t \in [a,b]. \tag{6.50}$$

Bizonyítás. 1. eset. Ha $c > 0$, akkor a

$$w(t) := c + \int_a^t h(s)x(s)ds$$

segédfüggvényre

$$w'(t) = h(t)x(t), \quad w(t) > 0 \text{ és } w(a) = c.$$

(6.49) alapján $x(t) \le w(t)$, bármely $t \in [a,b]$-re és így

$$w'(t) = h(t)x(t) \le h(t)w(t) \implies \frac{w'(t)}{w(t)} \le h(t) \implies$$
$$\implies \int_a^t \frac{w'(s)}{w(s)}ds \le \int_a^t h(s)ds \implies \ln w(t) \le \int_a^t h(s)ds + \ln c \implies$$
$$\implies w(t) \le c \cdot \exp\left(\int_a^t h(s)ds\right) \implies x(t) \le c \cdot \exp\left(\int_a^t h(s)ds\right).$$

Ha ezt visszahelyettesítjük (6.49)-be, a (6.50) egyenlőtlenséghez jutunk.

2. eset. Ha a (6.49) egyenlőtlenség $c = 0$-ra teljesül, akkor minden $\varepsilon > 0$-ra teljesül a $0 \le x(t) \le \varepsilon + \int_a^t h(s)x(s)ds, \quad t \in [a,b]$ egyenlőtlenség is. Az 1. eset alapján

$$0 \le x(t) \le \varepsilon + \varepsilon\int_a^t h(r)\exp(\int_r^t h(s)ds)dr, \quad t \in [a,b],$$

tehát $\varepsilon \downarrow 0$ esetén következik, hogy $x(t) = 0$, $\forall t \in [a,b]$. $\square$

A Grönwall egyenlőtlenség egy általánosabb alakja a következő:

6.2. Lemma. *Az* x, f, h *és* g *nemnegatív folytonos függvények az* $[a,b]$ *intervallumon értelmezettek és valós értékeket vesznek fel. Ha* h *deriválható és deriváltja nemnegatív, valamint*

(6.51)

$$x(t) \le c + \int_a^t f(s)x(s)ds + \int_a^t f(s)h(s)\left(\int_a^s g(u)x(u)du\right)ds, \quad a \le u \le s \le t \le b,$$

valamilyen nemnegatív c*-re, akkor bármely* $t \in [a,b]$ *esetén*

$$x(t) \le c\left[1 + \int_a^t f(s)\exp\left(\int_a^s (f(u) + g(u)h(u) + h'(u)\int_a^u g(v)dv)du\right)ds\right]. \tag{6.52}$$

Megjegyzés. A Grönwall egyenlőtlenségnek a diszkrét analogonja a következő egyenlőtlenség:

Ha az $(y_n)_{n\geq a}$ sorozat teljesíti a

$$y_k \leq \alpha + \sum_{j=a}^{k-1} y_j \cdot g_j, \quad k \geq a+1$$

egyenlőtlenséget és $u(a) \leq \alpha$, akkor

$$y_k \leq \alpha \left(1 + \sum_{j=a}^{k-1} g_j \prod_{i=j+1}^{k-1} (1+g_i) \right), \ \forall k \geq a. \quad \triangle$$

6.7 Kitűzött feladatok

1. Bizonyítsd be, hogy ha $a_i \in \mathbb{R}$, minden $0 \leq i \leq n$-re, $a_n \neq 0$, és létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, amelyre $\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{a_i}{ki+k+1} = x_0 \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{a_i}{ki+1}$, ahol $x_0 \in \mathbb{R} \setminus (0,1)$, akkor az $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ egyenletnek van legalább egy gyöke a $(0,1)$ intervallumban.

2. Bizonyítsd be, hogy
$$\sum_{l=0}^{n} \frac{x^{n+l(k-1)+1}(1-x^k)^{n-l} k^l n!}{(n-l)! \prod\limits_{i=0}^{l} (n+i(k-1)+i)} = \prod_{i=0}^{n} (n(i+1)+1) \cdot \sum_{v=0}^{n} (-1)^v C_n^v \frac{x^{kv+n+1}}{kv+n+1},$$
ahol n és k rögzített természetes számok.

3. Bizonyítsd be, hogy ha $f : [0,\, 1] \to \mathbb{R}$ kétszer deriválható, szigorúan növekvő és konvex függvény, akkor bármely $x_1,\, x_2 \in [0,\, 1]$ esetén
$$\tfrac{(x_1-x_2)^2}{2} f'(x_1) \leq (x_1-x_2)\, f(x_2) - \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx \leq \tfrac{(x_1-x_2)^2}{2} f'(x_2).$$
Ennek segítségével számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int\limits_0^1 f(x)dx \right)$ határértéket.

4. Az $f : (-a,a) \to \mathbb{R}$ végtelenszer deriválható függvényre az $(f^{(n)})_{n\geq 1}$ sorozat egyenletesen konvergens a $(-a,a)$ intervallumon és $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(0) = 1$. Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(x)$ határértéket.

5. (Opial[140]) Bizonyítsd be, hogy ha az $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ C^1 osztályú függvényre $f(0) = 0$, akkor
$$2 \int_0^1 |f(t) f'(t)| dt \leq \int_0^1 |f'(t)|^2 dt,$$

[140] Zdzisław Opial, 1930-1974

és egyenlőség csak az $f(t) = ct,\ t \in [0,1]$ alakú függvényekre teljesül.

6. Bizonyítsd be, hogy
   (a) ha $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f(x)dx = 0$;
   (b) ha $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ C^1 osztályú, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx = f(1)$;
   (c) ha $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ C^2 osztályú, akkor
   $$\lim_{n\to\infty} n\left(n\int_0^1 x^n f(x)dx - f(1)\right) = -f(1) - f'(1).$$
7. Bizonyítsd be, hogy ha az $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényre $\int\limits_{-1}^{1} x^{2n} f(x)dx = 0$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor f páratlan.
8. (Riemann lemma) Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann integrálható, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos és periodikus, akkor
   $$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)g(nx)dx = \frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx \int_a^b f(x)dx.$$
9. (O. Pop[141]) Bizonyítsd be, hogy ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $2n$-szer folytonosan deriválható $[a,b]$-n és $f^{(2n)}(x) \geq 0,\ \forall x \in [a,b]$, akkor
   $$\sum_{p=0}^{n-1} \frac{(b-a)^{2n-2p-2}}{2^{2n-2p-2}(2n-2p-1)!} f^{(2n-2p-2)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$
10. Sorbafejtés segítségével igazold, hogy $-\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
11. Bizonyítsd be, hogy ha az $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ függvény
    (a) integrálható $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$-n;
    (b) $f(x+\pi) = f(x)$, ha $x \geq 0$;
    (c) $f(x) = f(\pi - x)$, ha $x \in [0,\pi]$,

    akkor az $\int\limits_0^\infty f(x)\frac{\sin x}{x}dx$ integrál konvergens, és $\int\limits_0^\infty f(x)\frac{\sin x}{x}dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.
12. Bizonyítsd be, hogy az $f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2$ és $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$ függvények összege állandó. Határozd meg ezt az állandót és igazold, hogy $\int\limits_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

[141] Ovidiu Pop, ovidiutiberiu@yahoo.com

13. Bizonyítsd be, hogy

(a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx = \begin{cases} \frac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{ha } m \text{ páros} \\ \frac{(m-1)!!}{m!!}, & \text{ha } m \text{ páratlan;} \end{cases}$

(b) $\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n};$

(c) (Wallis[142] képlet) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}.$

14. Bizonyítsd be, hogy

(a) $(1-x^2)^n < e^{-nx^2}$, ha $0 < x < 1$ és $e^{-nx^2} < \frac{1}{(1+x^2)^n}$, ha $x > 0$;

(b) a $K = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$ integrálra teljesülnek a

$$\sqrt{n} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < K < \sqrt{n} \cdot \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

egyenlőtlenségek;

(c) $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

15. Bizonyítsd be, hogy

(a) $\int\limits_0^1 \frac{x^{2n+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!};$

(b) $0 \le e^{-\alpha} - \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n \le \frac{\alpha^2 e^{-\alpha}}{n};$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int\limits_0^\infty e^{-t^2} dt;$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

16. Bizonyítsd be, hogy ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan deriválható függvény, akkor minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén létezik olyan $\eta \in (a,b)$, amelyre

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left(f(x_0) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(x_n)\right) - \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\eta),$$

ahol $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, ha $0 \le k \le n$ (összetett trapéz képlet).

17. (a) Bizonyítsd be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\int_0^\infty \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x} dx}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

[142] John Wallis, 1616-1703

(b) Egy K kísérletnek n lehetséges kimenetele van. Ezt a kísérletet addig ismételjük, amíg valamelyik kimenetel másodszor is bekövetkezik. Mennyi az ismétlések számának várható értéke?

18. Egy kertész az első nap n virágot ültet, majd minden nap újraülteti azokat, amelyek nem gyökereznek meg. Határozd meg az ültetéshez szükséges napok számának várható értékét, ha minden elültetett virág $\frac{1}{2}$ valószínűséggel gyökerezik meg egy nap alatt!

19. Adott az $M = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \,\middle|\, \int\limits_0^1 f(x)dx = 0, \int\limits_0^1 xf(x)dx = 0, \int\limits_0^1 x^2 f(x)dx = 1 \right\}$ halmaz. Határozd meg a $\min\limits_{f \in M} \left(\int\limits_0^1 f^2(x)dx \right)$ értékét!

20. Az $f : (-a,a) \to \mathbb{R}$ függvény akárhányszor folytonosan deriválható és az $(f^{(n)}(x))_{n \geq 1}$ sorozat egyenletesen konvergens a $(-a,a)$ intervallumon. Számítsd ki a $\lim\limits_{n \to \infty} f^{(n)}(x)$ határértéket, ha $\lim\limits_{n \to \infty} f^{(n)}(0) = 1$.

7. Fejezet

Differenciálszámítás $\mathbb{R}^n$-ben

Nem szeretem azokat a művelt embereket,
akiket nem lehet megkülönböztetni
a műveltségüktől.

Ebben a fejezetben olyan függvények differenciálhatóságát vizsgáljuk, amelyek értelmezési tartománya vagy értékkészlete egy véges dimenziós euklideszi tér részhalmaza.

6.1 Lineáris és korlátos leképezések

Ebben a fejezetben lineáris és korlátos függvények tulajdonságait vizsgáljuk. Ezeket a tulajdonságokat a többváltozós vektorfüggvények differenciálhatóságánál használjuk.

Az 55. oldalon láttuk, hogy az X és Y $\mathbb{K}$ feletti vektorterek közti $f : X \to Y$ leképezést akkor nevezzük

1. *additívnak,* ha
$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall\, x, y \in X,$$
2. *homogénnek,* ha
$$f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ x, y \in X,$$
3. *lineárisnak,* ha f additív és homogén, vagyis
$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y), \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ x, y \in X.$$

Megjegyzés. Minden $f : X \to Y$ additív függvényre
$$f(0) = 0,$$
vagyis az X nullelemét az Y nullelemébe transzformálja. $\triangle$

A Cauchy függvényegyenlet tanulmányozása során láttuk, hogy ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvény folytonos 0-ban, akkor folytonos az egész $\mathbb{R}$-en. Ez általánosabb esetben is igaz.

1.1. Tétel. *Ha X és Y két normált tér $\mathbb{K}$ fölött, akkor az $f : X \to Y$ leképezésre a következő állítások egyenértékűek:*

(a) *f folytonos X -en;*

(b) *f folytonos $0 \in X$ -ben;*

(c) *$\|f(x)\|$ korlátos a $\mathrm{B}[0,1]$ egységgömbön.*

Bizonyítás. Az $(a) \implies (b)$ implikáció nyilvánvaló.

A $(b) \implies (c)$ implikáció igazolásához tekintsük az Y tér $\mathrm{B}_Y(0,1)$ egységgömbjét. Ennek az $f^{-1}(\mathrm{B}_Y(0,1))$ ősképe X -ben az origó egy nyílt környezete (lásd a 2.3-as tételt a 159. oldalon), tehát létezik $r > 0$ úgy, hogy

$$\|x\| \le r \implies \|f(x)\| \le 1.$$

Igazoljuk, hogy igaz a

$$\|x\| \le 1 \implies \|f(x)\| \le \frac{1}{r}$$

implikáció is. Ha $x \in Y$ és $\|x\| \le 1$, akkor létezik az $y = rx \in X$, és $\|y\| \le r$. Így az $\|f(y)\| = r\|f(x)\|$ egyenlőség és a $\|f(y)\| \le 1$ egyenlőtlenség alapján $\|f(x)\| \le 1/r$, tehát $\|f(x)\|$ korlátos az X tér egységgömbjén.

$(c) \implies (a)$. A feltétel alapján létezik olyan $M > 0$, amelyre $\|f(x)\| \le M$, ha $\|x\| \le 1$. Így minden $x \in X$ -re

$$\|f(x)\| \le M\|x\|.$$

Ha $a \in X$ és $\varepsilon > 0$ rögzített, akkor minden olyan $x \in X$ -re, amely teljesíti a $\|x - a\| \le \varepsilon/M$ egyenlőtlenséget, írhatjuk, hogy

$$\|f(x) - f(a)\| = \|f(x - a)\| \le M\frac{\varepsilon}{M},$$

tehát f folytonos $a \in X$ -ben. Mivel a tetszőleges volt, f folytonos az egész X -en. $\square$

Megjegyzések. (a) Az előbbi tétel alapján normált terek közt a lineáris és folytonos leképezések ugyanazok, mint a lineáris és korlátos leképezések.

(b) A legegyszerűbb lineáris leképezés az X és Y normált terek közt az identikusan nulla leképezés, amit *nulloperátornak* is nevezünk:

$$f(x) = 0, \quad \forall\, x \in X. \quad \triangle$$

Véges dimenziós terekre az előbbi tételnél sokkal mélyebb állítás is igaz.

1.2. Tétel. *Ha Y egy normált tér $\mathbb{K}$ fölött és $f : \mathbb{K}^n \to Y$ egy lineáris leképezés, akkor f folytonos.*

Bizonyítás. Jelöljük $\{e_1,\dots,e_n\}$-nel a $\mathbb{K}^n$ kanonikus bázisát. Minden $x = (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ egyértelműen felírható $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$ alakban. Mivel f lineáris és $|x_i|\le\|x\|$, írhatjuk, hogy

$$\|f(x)\| = \|f(\sum x_ie_i)\| = \|\sum x_if(e_i)\| \le \sum |x_i|\cdot\|f(e_i)\| \le \|x\|\sum\|f(e_i)\|.$$

Így $M=\sum\|f(e_i)\|$ választással, bármely $x\in\mathbb{K}^n$ esetén $\|f(x)\|\le M\|x\|$, és mivel M nem függ x-től, az 1.1-es tétel alapján a bizonyítás teljes. □

Az X normált teret az Y normált térbe képező lineáris függvények halmazát $L(X,Y)$-nal jelöljük, és az alábbi műveletekkel szintén vektortér $\mathbb{K}$ fölött:

$$f,g\in L(X,Y),\ (f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad \forall\, x\in X,$$
$$\alpha\in\mathbb{K},\ f\in L(X,Y),\ (\alpha f)(x)=\alpha f(x),\quad \forall\, x\in X.$$

Sőt, ha $f\in L(X,Y)$, akkor értelmezhetjük az f normáját a

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\le 1}\|f(x)\| \tag{1.1}$$

egyenlőséggel (az egyenlőség jobb oldala létezik az 1.1-es tétel (c) alpontja miatt). A következő tulajdonság alapján az így értelmezett $\|\cdot\|: L(X,Y)\to\mathbb{R}$ függvény egy norma az $L(X,Y)$ vektortéren.

1.1. Tulajdonság. *Ha X és Y normált terek a $\mathbb{K}$ test fölött, akkor az (1.1) összefüggéssel értelmezett $\|\cdot\|: L(X,Y)\to\mathbb{R}$ leképezés egy norma.*

Bizonyítás. Az $L(X,Y)$ tér nulleleme az identikusan nulla leképezés (nulloperátor) és ennek a normája 0, mert $\|0\| = \sup_{\|x\|\le1}\|0(x)\| = 0$. Fordítva, ha $\|f\|=0$ valamilyen $f\in L(X,Y)$ esetén, akkor $f(x)=0$, $\forall x\in \mathrm{B}(0,1)$. Az f homogenitása alapján $f(x)=0$, $\forall x\in X$, tehát $f=0$.

Ha $\alpha\in\mathbb{K}$, akkor

$$\|\alpha f\| = \sup_{\|x\|\le1}\|\alpha f(x)\| = |\alpha|\sup_{\|x\|\le1}\|f(x)\|.$$

A háromszögegyenlőtlenséget a következőképpen láthatjuk be:

$$\|f+g\| = \sup_{\|x\|\le1}\|(f+g)(x)\| = \sup_{\|x\|\le1}\|f(x)+g(x)\| \le \sup_{\|x\|\le1}[\|f(x)\|+\|g(x)\|] \le$$
$$\le \sup_{\|x\|\le1}\|f(x)\| + \sup_{\|x\|\le1}\|g(x)\| = \|f\|+\|g\|,$$

ahol $f,g\in L(X,Y)$ tetszőlegesek. □

Az $f:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}$ típusú leképezéseket *funkcionáloknak* nevezzük. Az előbbi tétel alapján a lineáris funkcionálok halmaza szintén egy normált tér. A következő tétel a lineáris és korlátos funkcionálok reprezentáció tételeként ismert.

1.3. Tétel. (Riesz[143]) *Ha* $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ *lineáris, akkor létezik olyan* $\chi \in \mathbb{K}^n$, *amelyre*

(a) $f(x) = \langle x, \chi\rangle$, *bármely* $x \in \mathbb{K}^n$ *esetén;*

(b) $\|f\| = \|\chi\|$;

(c) $\chi \in \mathbb{K}^n$ *az egyetlen olyan elem, amelyre* (a) *teljesül.*

Bizonyítás. A $\mathbb{K}^n$ kanonikus bázisának elemeit jelöljük $\{e_1, \dots, e_n\}$ -nel. Így minden $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ elem felírható $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ alakban. Mivel f lineáris,

$$f(x) = f(\sum x_i e_i) = \sum x_i f(e_i).$$

Látható, hogy a $\chi = (\overline{f(e_1)}, \dots, \overline{f(e_n)})$ elemre teljesül az (a).

Ha $\chi = 0$, akkor $\|\chi\| = 0$, és $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{K}^n$. Tehát $\|f\| = 0$ és $0 = f(\chi) = \langle \chi, \chi\rangle$ -ből következik, hogy ez az egyetlen ilyen elem.

Ha $\chi \neq 0$, akkor

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|f(x)\| \geq \left| f(\frac{\chi}{\|\chi\|}) \right| = \left\langle \frac{\chi}{\|\chi\|}, \chi \right\rangle = \|\chi\|.$$

Másrészt a Cauchy-Buniakowski-Schwarz egyenlőtlenség alapján (lásd 58. oldalt)

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|\langle x, \chi\rangle\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|x\| \cdot \|\chi\| = \|\chi\|,$$

tehát (b) is igaz.

Ha az (a) feltétel teljesülne $\psi \in \mathbb{K}^n$ -re is, akkor az $f(x) = \langle x, \psi\rangle = \langle x, \chi\rangle$, $\forall x \in \mathbb{K}^n$ egyenlőség alapján $\langle x, \chi - \psi\rangle = 0$, minden $x \in \mathbb{K}^n$ -re. Viszont $x = \chi - \psi \in \mathbb{K}^n$, tehát

$$0 = \langle \chi - \psi, \chi - \psi\rangle = \|\chi - \psi\|^2 \implies \psi = \chi.$$

□

6.1.1 Bilineáris és kvadratikus leképezések

Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n$ és Y ugyanazon $\mathbb{K}$ test fölötti vektorterek. Az

$$f : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \to Y$$

függvényt *multilineárisnak* nevezzük (*bilineárisnak* $n = 2$ -re), ha minden $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén és tetszőleges $a_i \in X_i$, $i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k\}$ elemekre az

$$X_k \ni x_k \mapsto f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$$

[143] Frigyes Riesz, 1880-1956

megfeleltetés lineáris. Az értelmezésből következik, hogy minden multilineáris függvény nulla, ha valamelyik komponense nulla, $f(0,0,\dots,0)=0$, és

$$f(\lambda_1 x_1,\dots,\lambda_n x_n)=(\lambda_1\cdots\lambda_n)\cdot f(x_1,\dots,x_n). \tag{1.2}$$

Példa. Az

$$f: X_1\times X_2\to Y$$

függvény pontosan akkor bilineáris, ha bármely $x,y\in X_1$, $u,v\in X_2$ és $\alpha\in\mathbb{K}$ esetén

$$\begin{aligned} f(x+y,u)&=f(x,u)+f(y,u), &\qquad f(\alpha x,u)&=\alpha f(x,u),\\ f(x,u+v)&=f(x,u)+f(x,v), &\qquad f(x,\alpha u)&=\alpha f(x,u). \quad \triangle \end{aligned}$$

Az 1.1-es tételhez hasonlóan

1.4. Tétel. ([19]) *Ha $X_1,X_2,\dots,X_n$ és Y normált terek a $\mathbb{K}$ test fölött és $f: X_1\times X_2\times\dots\times X_n\to Y$ egy leképezés, akkor a következő állítások egyenértékűek:*

(a) *f folytonos $X_1\times X_2\times\dots\times X_n$-en;*

(b) *f folytonos $(0,0,\dots,0)\in X_1\times X_2\times\dots\times X_n$-ban;*

(c) *$\|f(x_1,\dots,x_n)\|$ korlátos a $\|x_1\|\le 1,\dots,\|x_n\|\le 1$ egységkockán.*

Az $X_1\times\dots\times X_n$ halmazt Y-ba képező multilineáris függvények halmazát $L(X_1\times\dots\times X_n;Y)$-nal jelöljük. A függvények összeadásával és skalárral való szorzásával az $L(X_1\times\dots\times X_n;Y)$ egy vektortér, és a

$$\|f\|=\sup\{\|f(x_1,\dots,x_n)\| \mid \|x_k\|\le 1,\ k=1,\dots,n\}$$

összefüggéssel egy normát értelmezhetünk rajta. $n=1$ esetén a lineáris leképezések $L(X,Y)$ terét kapjuk.

Példa. Ha $X,Y,$ és Z három normált tér a $\mathbb{K}$ fölött, akkor a

$$h: L(Y,Z)\times L(X,Y)\to L(X,Z),\quad h(g,f)=g\circ f$$

összefüggéssel értelmezett függvény folytonos és bilineáris. A bilinearitás ellenőrzése az értelmezés alapján nyilvánvaló, a folytonosság a $g: Y\to Z$ és $f: X\to Y$ lineáris függvényre felírt

$$\|h\|=\|g\circ f\|\le\|g\|\cdot\|f\|$$

egyenlőtlenségből következik. $\triangle$

1.5. Tétel. ([19]) *Ha X,Y és Z normált terek a $\mathbb{K}$ test fölött, akkor létezik egy lineáris izometria az*

$$L(X,Y;Z)\quad \text{és}\quad L(X,L(Y,Z)) \tag{1.3}$$

terek közt.

Az izometrikus terek fogalmát a 71. oldalon értelmeztük. Az előbbi tétel alapján az $L(X,Y;Z)$ és $L(X,L(Y,Z))$ tereket azonosíthatjuk egymással.

6.1.2 Kvadratikus alakok

Ha $A \in M_n(\mathbb{R})$ egy rögzített mátrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \dots & a_{1\,n-1} & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \dots & a_{2\,n-1} & a_{2\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \dots & a_{n\,n-1} & a_{n\,n} \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

és $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, akkor a

$$\Phi(h) = h\,A\,h^t, \tag{1.5}$$

(ahol h^t a h transzponáltja) összefüggéssel értelmezett $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt *kvadratikus alaknak* vagy *n*égyzetes alaknak nevezzük, és az A mátrixot a Φ mátrixának.

A mátrixok szorzásának értelmezése alapján írhatjuk, hogy

$$\Phi(h) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} h_i h_j. \tag{1.6}$$

Az A mátrix *szimmetrikus,* ha $a_{i\,j} = a_{j\,i}$, bármely $i, j \in \mathbb{N}_n^*$.

A Φ kvadratikus alakot *pozitív definitnek* (*negatív definitnek*) nevezzük, ha bármely $h \neq 0$ esetén $\Phi(h) > 0$ ($\Phi(h) < 0$). A Φ négyzetes alakot *előjeltartónak* vagy *d*efinitnek nevezzük, ha pozitív definit vagy, ha negatív definit. Egy négyzetes alak *alternáló*, ha felvesz pozitív értékeket is és negatívakat is.

Egy kvadratikus alak *szemi-definit,* ha csak nemnegatív vagy csak nempozitív értékeket vesz fel.

A következő determinánsokat az A mátrix *főminoránsainak* nevezzük.

$$A_1 = a_{1\,1},\ A_2 = \begin{vmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} \end{vmatrix},\ A_3 = \begin{vmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1\,3} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & a_{2\,3} \\ a_{3\,1} & a_{3\,2} & a_{3\,3} \end{vmatrix},\ \dots,\ A_n = \begin{vmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \dots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \dots & a_{2\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \dots & a_{n\,n} \end{vmatrix}.$$

1.6. Tétel. (Sylvester[144]) *Az A szimmetrikus mátrixhoz tartozó* (1.5) *négyzetes alak pontosan akkor pozitív definit, ha*

$$A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \dots, \ A_n > 0, \tag{1.7}$$

és pontosan akkor negatív definit, ha

$$A_1 < 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 < 0, \dots, \ (-1)^n A_n > 0. \tag{1.8}$$

[144]James Joseph Sylvester, 1814 - 1897

A Sylvester tétel fontos gyakorlati kritériumot biztosít egy kvadratikus alak előjelének vizsgálatára. A következő tétel valamivel többet árul el a pozitív (negatív) definit kvadratikus alakok viselkedéséről.

1.7. Tétel. *Az* (1.6) *kvadratikus alak pontosan akkor pozitív definit, ha létezik olyan* $\lambda > 0$ *valós szám, amelyre*

$$\Phi(x) \geq \lambda \|x\|^2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.9}$$

Bizonyítás. Ha az (1.9) egyenlőtlenség teljesül, akkor világos, hogy a Φ kvadratikus alak pozitív definit, tehát csak a másik implikációt kell igazolni.

Jelöljük S-sel az egységgömböt ($S = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| = 1\}$). Mivel S korlátos és zárt (a $\|\cdot\| \to \mathbb{R}$ függvény folytonos és S az 1 őstképe ebben a függvényben), kompakt is. A Φ folytonossága alapján létezik olyan $x_0 \in S$, amelyre $\Phi(x) \geq \Phi(x_0)$, $\forall x \in S$ (x_0 a Φ minimumpontja S-en). Ha $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ tetszőleges, akkor írhatjuk, hogy $\Phi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq \Phi(x_0)$. Ebből következik, hogy $\Phi(x) \geq \Phi(x_0)\|x\|$, tehát a $\lambda = \Phi(x_0)$ választással az (1.9) egyenlőtlenség teljesül. $\square$

1.8. Tétel. *Az* (1.6) *négyzetes alak pontosan akkor negatív definit, ha létezik olyan* $\lambda > 0$ *valós szám, amelyre*

$$\Phi(x) \leq -\lambda \|x\|^2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

6.2 Differenciálható függvények

Ebben a paragrafusban a Gâteaux[145] és Fréchet[146] differenciál értelmezésével és alaptulajdonságaival foglalkozunk.

6.2.1 Variációk

Jelöljön Y egy normált teret és I egy nemüres és nyílt valós intervallumot. Az $f : I \to Y$ függvénynek az x_0 pontban számolt deriváltját ugyanúgy értelmezhetjük, mint a valós változójú esetben. Azt mondjuk, hogy az f *deriválható* az $x_0 \in I$ pontban, ha létezik a

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

határérték. Ezt $f'(t_0)$-val jelöljük és az f deriváltjának nevezzük a $t_0 \in I$ pontban (a határértéket az Y normája segítségével értelmezzük, és a tört az $\frac{1}{t - t_0}$-val való szorzást

[145] M. R. Gâteaux, - 1914

[146] René Maurice Fréchet, 1878 - 1973

jelenti). Megjegyezzük, hogy ha a derivált létezik, akkor egyértelműen meghatározott, és ha f deriválható t_0 -ban, akkor f folytonos is t_0 -ban. A bizonyítás a 217. oldalon található 1.1 tétel bizonyításához hasonló gondolatmenetet igényel.

A magasabb rendű deriváltakat a 235. oldalon használt induktív eljárás segítségével értelmezhetjük.

Ha az értelmezési tartomány nem a valós számhalmaz része, akkor a probléma bonyolultabb, mert több irányból közelíthetjük a vizsgált pontot.

Legyen A az X normált tér egy nyílt részhalmaza, Y egy tetszőleges normált tér és $f : A \to Y$ egy függvény. Ha $x_0 \in A$ tetszőleges és $h \neq 0$, $h \in X$, akkor létezik olyan $\varepsilon(x_0, h)$, amelyre $x_0 + th \in A$, ha $|t| \leq \varepsilon(x_0, h)$. A

$$\tau = \sup\{\varepsilon \mid |t| \leq \varepsilon \implies x_0 + th \in A\}$$

jelöléssel $f(x_0 + th)$ értelmezett, bármely $|t| < \tau$ esetén. Ha létezik a

$$\frac{d}{dt} f(x_0 + th)|_{t=0}$$

derivált, akkor ezt nevezzük az f *Gâteaux variációjának* vagy *gyenge differenciáljának* az x_0 pontban a h irány mentén. A Gâteaux variációt a

$$\delta f(x_0; h) \tag{2.10}$$

szimbólummal jelöljük. Ha az f -nek minden $x \in A$ pontban létezik a Gâteaux variációja, akkor azt mondjuk, hogy f -nek létezik az első variációja A -n. Az egyszerűség kedvéért ezentúl a Gâteaux variációra a *G -variáció* megnevezést használjuk.

Hasonlóan értelmezzük a magasabbrendű variáció fogalmát is. Az f függvény n -edrendű variációjának nevezzük az $f(x_0 + th)$ függvény (t szerinti) n -edrendű deriváltjának a $t = 0$ -ban számolt behelyettesítési értékét, ha létezik. Ezt a $\delta^n f(x_0; h)$ szimbólummal jelöljük.

Az értelmezés alapján igazolható, hogy az n -edik variáció a h változóban n -edrendű homogén, tehát ha $\delta^n f(x_0; h)$ létezik és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\delta^n f(x_0; \lambda h) = \lambda^n \delta f(x_0; h)$.

Megjegyezzük, hogy a gyenge differenciál nem feltétlenül lineáris vagy folytonos h -ban. Ezt mutatja a következő példa.

Megjegyzések. (i) Tekintsük az

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

függvényt. Ha $h = (h_1, h_2)$, akkor a G -variáció létezik és egyenlő $h_1 h_2^2 (h_1^2 + h_2^2)^{-1}$ -nel. Látható, hogy a $h \to h_1 h_2^2 (h_1^2 + h_2^2)^{-1}$ függvény nem lineáris h -ban.

(ii) Ha f -nek létezik a Gâteaux variációja az x_0 pontban a h irány mentén, akkor erre az irányra teljesül a

$$\lim_{t\to 0} \|f(x_0+th)-f(x_0)\| = 0$$

egyenlőség, de h nem biztos, hogy folytonos x_0 -ban. $\triangle$

6.2.2 A Gâteaux differenciál

Ha a (2.10) összefüggéssel értelmezett $\delta f(x_0,h)$ varáció lineáris h -ban, akkor az f *Gâteaux differenciáljának* vagy egyszerűen csak *G -differenciáljának* nevezzük és $D\,f(x_0;h)$ -val jelöljük. Ezt az f függvény x_0 pontban a h irány mentén számolt G-differenciáljának olvassuk.

A G -differenciál egyfajta lokális közelítést tesz lehetővé.

2.1. Tétel. *Ha A az X normált tér egy nyílt részhalmaza, akkor az $f: A \to Y$ függvény x_0 pontbeli G -differenciálhatóságának szükséges és elégséges feltétele, hogy létezzen olyan L és R, amelyekre*

$$f(x+h)-f(x) = L(x,h)+R(x,h), \tag{2.11}$$

bármely $h\in X$, amelyre $x+h\in A$, ahol $L(x,h)$ lineáris és folytonos h -ban, és

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|R(x,th)\|}{t} = 0, \qquad \text{bármely } h\text{-ra.} \tag{2.12}$$

Bizonyítás. Előbb lássuk be, hogy ha ilyen reprezentáció létezik, akkor egyértelmű. Valóban, ha legalább két ilyen reprezentáció létezik (L' és R' egy másik reprezentáció függvényei), akkor

$$L(x,h)-L'(x,h) = \lim_{t\to 0}\frac{L(x,th)-L'(x,th)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{R'(x,th)-R(x,th)}{t} = 0.$$

Ez alapján $L=L'$, tehát $R=R'$.

Ha a (2.11) reprezentáció létezik, akkor

$$\frac{d}{dt}f(x_0+th)|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+th)-f(x)}{t} = L(x,h)+\lim_{t\to 0}\frac{R(x,th)}{t} = L(x,h),$$

tehát G -variáció létezik, lineáris és folytonos h -ban.

Fordítva, ha f -nek létezik a G -differenciálja, akkor

$$\frac{f(x+tk)-f(x)}{t} = D\,f(x,k)+\varepsilon(x,tk),$$

ahol $\varepsilon(x,tk)\to 0$, amikor $t\to 0$. A $tk=h$ jelöléssel pontosan a (2.11) egyenlőséghez jutunk, ahol $R(x,h)=t\varepsilon(x,h)$. Ez alapján a (2.12) is teljesül. $\square$

A G -variáció és a G -differenciál kapcsolatát mutatja a következő tétel is:

2.2. Tétel. *Ha az $f : A \to Y$ függvény G-variációja létezik az x_0 egy környezetében, a $\delta f(x,h)$ variáció folytonos az x változóban az x_0 pontban, és a $\delta f(x,h)$ folytonos a h változóban a 0 pontban, akkor $\delta f(x_0,h)$ az f függvény G-differenciálja az x_0 pontban a h irány mentén.*

6.2.3 A Fréchet differenciál

Ebben a paragrafusban normált tereken értelmezett függvények Frechét differenciáljával foglalkozunk.

Legyen $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ két normált tér, és A az X-nek egy nemüres és nyílt részhalmaza. Az $f : A \to Y$ függvényt *(Fréchet) differenciálhatónak* nevezzük az $x \in A$ pontban, ha

(a) f folytonos x-ben;

(b) létezik olyan $L_x : X \to Y$ lineáris leképezés, amelyre teljesül az

$$f(x+h) - f(x) = L_x h + \omega(x,h) \tag{2.13}$$

egyenlőség, bármely $h \in X$ és $x + h \in A$ esetén, és $\omega(x,h) \in Y$ teljesíti a

$$\frac{\|\omega(x,h)\|_Y}{\|h\|_X} \to 0, \quad \text{amikor} \quad \|h\|_X \to 0 \tag{2.14}$$

feltételt.

Ha f Fréchet differenciálható x-ben, akkor az L_x lineáris operátor is folytonos, mert

$$\|f(x+h) - f(x) - L_x h\| = \|\omega(x,h)\|.$$

A Fréchet differenciálhatóság egy ekvivalens értelmezése a következő:
Az $f : A \to Y$ függvényt *Fréchet differenciálhatónak* nevezzük az $x \in A$ pontban, ha létezik olyan lineáris és folytonos $L_x : X \to Y$ operátor, amelyre teljesül (2.13). Ebben az esetben az L_x folytonosságából következik az f folytonossága az x pontban.

Az $L_x : X \to Y$ lineáris és korlátos operátort f-nek az x pontbeli *(Fréchet) differenciáljának* nevezzük, és az

$$f'(x) = L_x \quad \text{vagy} \quad f^{(1)}(x) = L_x \tag{2.15}$$

szimbólummal jelöljük.

Az $L_x h \in Y$ kifejezést az f Fréchet differenciáljának nevezzük a $h \in X$ növekménnyel és

$$(\mathrm{d}f)(x,h) = L_x h\text{-val} \tag{2.16}$$

jelöljük. A (2.15) és (2.16) jelölésekkel írhatjuk, hogy

$$(\mathrm{d}f)(x,h) = f'(x)h.$$

A $h = \mathrm{d}x \in X$ jelöléssel a

$$(\mathrm{d}f)(x, \mathrm{d}x) = (\mathrm{d}f)(x) = \mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x$$

jelölést is használjuk.

Az f függvényt C^1 osztályúnak nevezzük A-n, ha f differenciálható A minden pontjában és az $x \to f'(x)$ megfeleltetés is folytonos az A minden pontjában.

Példák. Legyen X és Y két normált tér.

(1) Ha A nemüres és nyílt részhalmaza X-nek és $x_0 \in X$ egy rögzített elem, akkor az $f : X \to Y$, $f(x) = x_0$, bármely $x \in A$ konstans függvényre az

$$f(x + h) - f(x) = 0 = L_x h + \omega(x, h)$$

egyenlőségből $L_x = 0 = \omega(x, h)$. Tehát a konstans függvény differenciálja minden pontban az identikusan nulla lineáris függvény.

(2) Ha $f : X \to Y$ lineáris és korlátos, akkor $f(x + h) = f(x) + f(h)$, tehát

$$f(x + h) - f(x) = f(h) + 0.$$

Így az $f'(x) = f$, $x \in X$, és $\omega(x, h) = 0$, $\forall x, h \in X$. $\triangle$

Az előbbi példákban az L és ω függvényeket megválasztottuk. Kérdés, hogy hány (L, ω) pár teljesítheti az értelmezés feltételeit.

2.3. Tétel. (A Fréchet differenciál egyértelműsége) *Ha X és Y normált terek, $A \subset$ $\subset X$ nemüres és nyílt, $f : A \to Y$ Fréchet differenciálható az $x \in A$ pontban, akkor a* (2.13)*-ben szereplő $L_x : X \to Y$ lineáris leképezés egyértelműen meghatározott.*

Bizonyítás. Feltételezzük, hogy az L_{1x} és L_{2x} két lineáris és korlátos operátorok teljesítik a (2.13) összefüggést. Az $L_x = L_{1x} - L_{2x}$ operátorra

$$\|L_x h\| \leq \|f(x + h) - f(x) - L_{1x}h\| + \|f(x + h) - f(x) - L_{2x}h\|,$$

tehát $\|L_x h\|/\|h\| \to 0$, ha $\|h\| \to 0$. Így rögzített $h \neq 0$-ra

$$\frac{\|L_x(th)\|}{\|th\|} \to 0, \quad \text{amikor} \quad t \to 0. \tag{2.17}$$

Ez csak akkor lehetséges, ha $L_x h = 0$, minden $h \in X$-re, és így L_x a nulloperátor, vagyis $L_{1x} = L_{2x}$. $\square$

2.4. Tétel. (A láncszabály) *X, Y, Z normált terek, $A \subset X$ nemüres és nyílt, $B \subset Y$ nyílt. Ha az $f : A \to Y$ függvény Fréchet differenciálható $x \in A$-ban, $f(x) \in B$, és a $g : B \to Z$ függvény Fréchet differenciálható $f(x)$-ben, akkor a $h = g \circ f$ függvény is Fréchet differenciálható x-ben és*

$$d'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x). \tag{2.18}$$

Ennek a tételnek egy sajátos esetét már igazoltuk (1.4-es tétel a 219. oldalon).
Bizonyítás. Az $y = f(x)$, $L = f'(x)$, $M = g'(y)$ és

$$u(h) = f(x+h) - f(x) - Lh, \quad v(k) = g(y+k) - g(y) - Mk$$

jelölésekkel (h és k olyanok, hogy $f(x+h)$ és $g(y+k)$ értelmezettek legyenek)

$$\|u(h)\| = \varepsilon(h)\|h\|, \quad \|v(k)\| = \eta(k)\|k\|,$$

ahol $\varepsilon(h) \to 0$, amikor $\|h\| \to 0$, és $\eta(k) \to 0$, amikor $\|k\| \to 0$.

Rögzítsük h-t úgy, hogy $x + h \in A$. A $k = f(x+h) - f(x)$ különbségre

$$\|k\| = \|Lh + u(h)\| \leq (\|L\| + \varepsilon(h))\|h\|$$

és

$$\begin{aligned} d(x+h) - d(x) - MLh = g(y+k) - g(y) - MLh = Mk + v(k) - MLh = \\ = M(k - Lh) + v(k) = Mu(k) + v(k), \end{aligned}$$

tehát

$$\frac{\|d(x+h) - d(x) - MLh\|}{\|h\|} \leq \|M\|\varepsilon(h) + (\|L\| + \varepsilon(h))\eta(k).$$

Ha h tart 0-hoz, akkor $\varepsilon(h) \to 0$ és $k \to 0$, tehát $\eta(k) \to 0$. Így $d'(x) = ML$. □

$(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált terek és A az X-nek nemüres és nyílt részhalmaza. Az $f : A \to Y$ függvényt *Fréchet differenciálhatónak* nevezzük A-n, ha az A halmaz minden pontjában Fréchet differenciálható.

A következő tétel a Lagrange középértéktétel (2.3-as tétel a 223. oldalon) egy általánosítása.

2.5. Tétel. (Denjoy-Bourbaki, [23, 230. oldal], [19, 1. fejezet, §3]) *Ha X egy Banach tér, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, (s_n) egy sorozat az $[a, b]$ intervallumból, az $f : [a, b] \to X$ és $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényekre teljesülnek a következő feltételek:*

(a) *f és g folytonosak $[a, b]$-n;*

(b) *f és g differenciálhatók $[a, b] \setminus S$-en, ahol $S = \{s_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$;*

(c) *$\|f'(t)\| \leq g'(t)$, bármely $t \in [a, b] \setminus S$-re,*

akkor

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

Bizonyítás. A 2.7-es lemma (lásd 231. oldalt) alapján g növekvő.

Minden $\varepsilon > 0$-ra tekintsük a

$$C_\varepsilon = \left\{ t \in [a, b] \mid \|f(s) - f(a)\| \leq g(s) - g(a) + \varepsilon(s - a) + \varepsilon \sum_{s_n < s} \frac{1}{2^n}, \ \forall s \in [a, t[\right\}$$

halmazt. $C_\varepsilon \neq \emptyset$, mert $a \in C_\varepsilon$. A C_ε értelmezéséből következik, hogy C_ε intervallum. Ha $c = \sup C_\varepsilon$, akkor bármely $s \in [a, c[$ -re létezik $t \in C_\varepsilon$ úgy, hogy $s < t \leq c$. Mivel C_ε intervallum, $s \in C_\varepsilon$, és így $s \in C_\varepsilon$, minden $s \in [a, c[$ esetén. Ugyanakkor $c \in C_\varepsilon$, tehát

$$C_\varepsilon = [a, c].$$

Ha $(c_n)_n$ egy olyan sorozat, amelyre $c_n \in [a, c[$ és $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$, akkor

$$\|f(c_n) - f(a)\| \leq g(c_n) - g(a) + \varepsilon(c_n - a) + \varepsilon \sum_{s_k < c_n} \frac{1}{2^k}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

De f és g folytonosak, tehát

$$\|f(c) - f(a)\| \leq g(c) - g(a) + \varepsilon(c - a) + \varepsilon \sum_{s_k < c} \frac{1}{2^k}. \tag{2.19}$$

Ha teljesülne a $c < b$ egyenlőtlenség, akkor két esetet vizsgálunk. Az első esetben $c \neq s_n$, egyetlen $n \in \mathbb{N}^*$-ra sem. Ebben az esetben f és g differenciálható c-ben, tehát rögzített $\varepsilon > 0$-ra létezik $r > 0$ úgy, hogy $]c - r, c + r[\subset [a, b]$, és

$$\left\| \frac{f(t) - f(c)}{t - c} - f'(c) \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{és} \quad \left| \frac{g(t) - g(c)}{t - c} - g'(c) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, t \in]c - r, c + r[\,.$$

Így

$$\|f(t) - f(c)\| < (t - c)(\|f'(c)\| + \frac{\varepsilon}{2}), \quad \forall\, t \in]c, c + r[\,, \tag{2.20}$$

$$(t - c)g'(c) < g(t) - g(c) + \frac{\varepsilon}{2}(t - c), \quad \forall\, t \in]c, c + r[\,. \tag{2.21}$$

A (2.20), (2.21) egyenlőségekből és a (c) feltételből következik, hogy

$$\|f(t) - f(a)\| \leq g(t) - g(a) + \varepsilon(t - a) + \varepsilon \sum_{s_n < t} \frac{1}{2^n}, \quad \forall\, t \in]c, c + r[\,. \tag{2.22}$$

Mivel $c \in C_\varepsilon$, írhatjuk, hogy

$$\|f(t) - f(a)\| \leq g(t) - g(a) + \varepsilon(t - a) + \varepsilon \sum_{s_n < t} \frac{1}{2^n}, \quad \forall\, t \in [a, c[\,. \tag{2.23}$$

A (2.23), (2.19) és (2.22) összefüggések alapján

$$\|f(t) - f(a)\| \leq g(t) - g(a) + \varepsilon(t - a) + \varepsilon \sum_{s_n < t} \frac{1}{2^n}, \quad \forall\, t \in [a, c + r[\,.$$

Ebből következik, hogy $c + r \in C_\varepsilon = [a, c]$, és ez ellentmond a c megválasztásának.

A második eset, amikor létezik olyan $m \in \mathbb{N}^*$, amelyre $c = s_m$. Az f függvény folytonos c-ben, tehát létezik olyan $d_\varepsilon \in]c, b]$, amelyre

$$\|f(t) - f(c)\| < \frac{\varepsilon}{2^m}, \quad \forall\, t \in]c, d_\varepsilon[\,. \tag{2.24}$$

A (2.19), (2.24) összefüggések és az (a) feltétel alapján

$$\begin{aligned}
\|f(t) - f(a)\| &\le \|f(t) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\| < \\
&< \frac{\varepsilon}{2^m} + g(c) - g(a) + \varepsilon(c-a) + \varepsilon \sum_{s_n < c} \frac{1}{2^n} < \\
&< g(t) - g(a) + \varepsilon(t-a) + \varepsilon \sum_{s_n < t} \frac{1}{2^n}, \quad \forall\, t \in [a, d_\varepsilon[\,.
\end{aligned}$$

(2.19)-ből és (2.23)-ből következik, hogy

$$\|f(t) - f(a)\| \le g(t) - g(a) + \varepsilon(t-a) + \varepsilon \sum_{s_n < t} \frac{1}{2^n}, \quad \forall\, t \in [a, d_\varepsilon[\,,$$

tehát $d_\varepsilon \in C_\varepsilon = [a, c]$. Ez ismét ellentmond a c megválasztásának.

Mivel mindkét esetben ellentmondáshoz jutottunk, következik, hogy $c = b$, és így a (2.19)-es egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\|f(b) - f(a)\| \le g(b) - g(a) + \varepsilon(t-a) + 2\varepsilon.$$

Ez viszont bármely $\varepsilon > 0$-ra csak akkor teljesülhet, ha

$$\|f(b) - f(a)\| \le g(b) - g(a). \quad \square$$

Megjegyzés. A bizonyításból látható, hogy ha a 2.5-ös tételben S üreshalmaz, akkor az (a) feltétel fölösleges. $\triangle$

2.1. Következmény. *Ha X egy Banach tér, az $f : [a, b] \to X$ függvény folytonos $[a, b]$-n és differenciálható $[a, b] \setminus S$-n, ahol S legfeljebb megszámlálható, akkor a $\|f'(t)\| \le M$, $\forall t \in [a, b] \setminus S$ egyenlőtlenségből következik, hogy*

$$\|f(b) - f(a)\| \le M\|b - a\|.$$

Bizonyítás. Válasszuk a $g(t) = Mt$, $\forall t \in [a, b]$ függvényt, és alkalmazzuk a 2.5-ös tételt. $\square$

2.2. Következmény. *Ha X egy Banach tér, az $f : [a, b] \to X$ függvény folytonos $[a, b]$-n és differenciálható $[a, b] \setminus S$-n, ahol S legfeljebb megszámlálható, akkor az $f'(t) = 0$, $\forall t \in [a, b] \setminus S$ feltételből következik, hogy f állandó az $[a, b]$ intervallumon.*

Bizonyítás. Ha $x, y \in [a, b]$, $x < y$, akkor

$$\|f'(t)\| < \frac{1}{n}, \quad \forall\, t \in [a, b] \setminus S,\ n \in \mathbb{N}^*,$$

tehát a 2.1-es következmény alapján

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \frac{1}{n}|x - y|, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

$n \to \infty$-re kapjuk, hogy $f(x) = f(y)$, tehát f állandó. $\square$

2.6. Tétel. [23, 232. oldal] *Ha A egy nemüres, nyílt és konvex részhalmaza az X Banach térnek, az $f : A \to Y$ függvény differenciálható A-n, és Y is Banach tér, akkor*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|b - a\| \sup_{x \in [a,b]} \|f'(x)\|, \quad \forall\, a, b \in A,$$

ahol $[a, b]$ az a és b pontok által generált intervallum, vagyis $[a, b] = \{z \mid z = = pa + (1 - p)b,\ p \in [0, 1]\}$.

Bizonyítás. Tekintsük az $a, b \in A$ rögzített pontokat és a $g : [0, 1] \to A$

$$g(t) = tu + (1 - t)v, \quad t \in [0, 1]$$

függvényt. g differenciálható $[0, 1]$-en és $g'(t) = v - u$, bármely $t \in [0, 1]$ esetén. Mivel A konvex halmaz, $g([0, 1]) \subset A$, és így értelmezhetjük a $h = f \circ g$ függvényt.

$$h'(t) = f'(g(t)) \circ g'(t) = f'(tu + (1 - t)v)(v - u), \quad \forall\, t \in [0, 1],$$

tehát

$$\|h'(t)\| \leq \|f'(tu + (1 - t)v)\| \cdot \|u - v\| \leq M, \quad \forall\, t \in [0, 1],$$

ahol

$$M := \|u - v\| \sup_{t \in [0,1]} \|f'(tu + (1 - t)v)\| = \|u - v\| \sup_{x \in [a,b]} \|f'(x)\|.$$

h-ra alkalmazzuk a 2.1-es következményt:

$$\|f(v) - f(u)\| = \|h(1) - h(0)\| \leq M(1 - 0) = \|u - v\| \sup_{x \in [a,b]} \|f'(x)\|. \quad \square$$

2.3. Következmény. *Ha X és Y Banach terek, A nemüres, nyílt és konvex részhalmaza X-nek és az $f : A \to Y$ differenciálható függvényre létezik $M \geq 0$, amelyre $\|f'(x)\| \leq M$, $\forall x \in A$, akkor*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\|, \quad \forall\, a, b \in A.$$

6.3 Parciális deriváltak

Legyen A egy nemüres, nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$ -nek és $f : A \to \mathbb{R}^m$ egy tetszőleges függvény. Jelöljük $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ -nel az $\mathbb{R}^n$ és $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ -mel az $\mathbb{R}^m$ kanonikus bázisát. Ha $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, akkor írhatjuk, hogy $f(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x)u_i$, bármely $x \in A$ -ra vagy $f_i(x) = \langle f(x), u_i\rangle$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Az f függvénynek az x pontban a j -edik változó szerinti *parciális deriváltjának* nevezzük a $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}$ vektort, amelyet a következő egyenlőséggel értelmezünk:

(3.25)
$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x+te_j)-f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \sum_{i=1}^m \frac{f_i(x+te_j)-f_i(x)}{t} u_i = \\ &= \left(\lim_{t\to 0} \frac{f_1(x+te_j)-f_1(x)}{t}, \dots, \lim_{t\to 0} \frac{f_m(x+te_j)-f_m(x)}{t}\right) = \\ &= \left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_j}\right)\end{aligned}$$

(ha a megfelelő határértékek léteznek).

3.1. Tétel. *Ha A nemüres, nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$ -nek, $a \in A$, és $f : A \to \mathbb{R}^m$ egy a -ban differenciálható függvény, akkor a -ban létezik az összes $\dfrac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ parciális derivált, és teljesül az*

(3.26)
$$f'(a)e_j = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j} u_i, \quad 1 \le j \le n$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Rögzített j -re az f differenciálhatósága alapján

$$f(a+te_j) - f(a) = f'(a)(te_j) + r(te_j), \qquad \frac{\|r(te_j)\|}{t} \to 0, \text{ ha } t \to 0.$$

De $f'(a)$ lineáris, tehát

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_j)-f(a)}{t} &= \lim_{t\to 0} \sum_{i=1}^m \frac{f_i(a+te_j)-f_i(a)}{t} u_i = \\ &= \sum_{i=1}^m \lim_{t\to 0} \frac{f_i(a+te_j)-f_i(a)}{t} u_i = f'(a)e_j. \quad \square\end{aligned}$$

Megjegyzések. (1) Az előbbi tétel fordítottja általában nem igaz. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

(3.27)
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \ne (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvénynek $(0,0)$-ban léteznek a parciális deriváltjai és a függvény nem folytonos, tehát nem is differenciálható.

A parciális deriváltakat az értelmezés alapján számíthatjuk ki.

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0 = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}.$$

Annak igazolásához, hogy f nem folytonos, tekintsünk egy tetszőleges 0-hoz tartó (x_n) sorozatot, és az $y_n = ax_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ sorozatot.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \frac{a}{1+a^2},$$

és ez függ a-tól, tehát f nem folytonos az origóban.

(2) A 158. oldalon tanulmányozott 2.1-es példában láttuk, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény folytonos az origóban. Ugyanakkor $(0,0)$-ban léteznek a parciális deriváltjai, mert

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0, \\ \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} &= \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0. \end{aligned}$$

Ha az f differenciálható lenne $(0,0)$-ban, akkor létezne olyan $a, b \in \mathbb{R}$, amelyekre a $\dfrac{\left| f(h,k) - f(0,0) - (a,b)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{h^2+k^2}}$ tört 0-hoz tart, ha $h \to 0$ és $k \to 0$. Másrészt

$$\frac{\left| f(h,k) - f(0,0) - (a,b)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\left| \dfrac{h^3+k^3}{h^2+k^2} - (ah+bk) \right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \begin{cases} \dfrac{\left| \dfrac{9}{5} - (2a+b) \right|}{\sqrt{5}}, & h = 2k \\ |1-a|, & k = 0 \\ |1-b|, & h = 0, \end{cases}$$

és ez nem tarthat 0-hoz, egyetlen $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ esetén sem.

(3) Az

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény differenciálható $(0,0)$-ban és a parciális deriváltjai nem folytonosak 0-ban, mert

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(4) A 3.1-es tételben megfogalmazott állítás egy fordítottja igaz, ha a parciális deriváltak folytonosak, ezt igazoljuk a 3.2-es tételben. $\triangle$

3.4. Következmény. *Ha a 3.1-es tétel feltételei teljesülnek, akkor a differenciál mátrixa*

$$f'(a) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_{n-1}} & \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(a)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(a)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_2(a)}{\partial x_{n-1}} & \dfrac{\partial f_2(a)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_{n-1}(a)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_{n-1}(a)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_{n-1}(a)}{\partial x_{n-1}} & \dfrac{\partial f_{n-1}(a)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_n(a)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n(a)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_n(a)}{\partial x_{n-1}} & \dfrac{\partial f_n(a)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

3.5. Következmény. *Ha teljesülnek a 3.1-es tétel feltételei, akkor*

$$f'(a) \cdot (h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} h_i, \quad \forall\, (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{3.29}$$

Feltételezzük, hogy $A \subset \mathbb{R}^n$ nyílt és nemüres, $f : A \to \mathbb{R}^m$ differenciálható A-n. Az f függvényt *folytonosan differenciálhatónak* nevezzük A-n, ha az $f' : A \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ függvény folytonos. Tehát f pontosan akkor folytonosan differenciálható, ha bármely $x \in A$ és $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $\|f'(x) - f'(y)\| < \varepsilon$, ha $y \in A$ és $|x - y| < \delta$. Az A-n folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^1(A)$-val jelöljük.

3.2. Tétel. *$A \subset \mathbb{R}^n$ nemüres és nyílt. Az $f : A \to \mathbb{R}^m$ függvény pontosan akkor folytonosan differenciálható az A-n, ha az összes parciális deriváltja folytonos A-n.*

Bizonyítás. Ha $f \in C^1(A)$, akkor (3.26) alapján

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = (f'(x)e_j)u_i, \quad 1 \le j \le n,\ 1 \le i \le m$$

és

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial f_i(y)}{\partial x_j} = \{[f'(x) - f'(y)]e_j\}u_i.$$

Mivel $|u_i| = |e_j| = 1$, következik, hogy

$$\left|\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial f_i(y)}{\partial x_j}\right| \leq |[f'(x) - f'(y)]e_j| \leq \|f'(x) - f'(y)\|,$$

tehát a $\dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$ parciális derivált folytonos A-n.

A fordított állítás nyilvánvaló. □

A 2.4-es tétel és 3.4-es következmény alapján az összetett függvény parciális deriváltjaira igaz a következő tulajdonság:

3.3. Tétel. *Ha a 2.4-es tétel feltételei teljesülnek, akkor*

$$\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial g_i(y)}{\partial y_l} \cdot \frac{\partial f_l(x)}{\partial x_j}, \quad \forall\, i = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, n. \tag{3.30}$$

Bizonyítás. A (3.28) és (2.18) összefüggésekből következik. □

6.3.1 Az inverz függvény és az implicit függvény tétele

Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy függvény, amelynek a deriváltja egy I intervallumon nem nulla, akkor ezen az intervallumon a függvény szigorúan monoton. Így, ha csak a képtartományára képezzük, akkor a kapott $f_I : I \to f(I)$ függvény bijektív is. Az f_I függvénynek tehát létezik inverze. Ha az f függvény C^1 osztályú, $f(x_0) = y_0$ és $f'(x_0) \neq 0$, akkor az x_0 egy V környezetében az $f'(x) \neq 0$, és így az y_0 pont egy környezetében létezik az $f_V : V \to f(V)$ inverze. Ezt a függvényt az f függvény y_0 pont körüli lokális inverzének nevezzük (ez nem egyértelműen meghatározott, mert a V megválasztásától is függ). Világos, hogy ha f-nek a képtartománya minden pontja körül van lokális inverze, akkor f-nek is van inverze. A következő tétel ennek a tulajdonságnak a megfelelője többváltozós függvényekre.

3.4. Tétel. *Ha az $f : A \to \mathbb{R}^n$ függvény C^1 osztályú, A az $\mathbb{R}^n$ nyílt részhalmaza és az $a \in A$ pontban a Jacobi mátrix determinánsa nem 0 (az $f'(a)$ mátrix invertálható), akkor*

(a) *létezik az a és $b = f(a)$ pontnak olyan U, illetve V nyílt környezete ($a \in U$ és $b \in V$), amelykre az $f_U : U \to V$ függvény bijektív és $f(U) = V$;*

(b) *ha $g : V \to U$ az f inverze, akkor g C^1 osztályú a V halmazon.*

Ha az értelmezési tartomány és az értékkészlet nem azonos dimenzójú vektortérben vannak, akkor az előbbi tétel nem használható. Ilyen esetekben a következő tétel segítségével biztosíthatjuk a többletváltozók lokális kiküszöbölését. Ha $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ és $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, akkor az (x, y) pár az $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^{n+m}$ vektort jelöli.

3.5. Tétel. *Ha $f : A \to \mathbb{R}^n$ egy C^1 osztályú függvény, ahol $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ nyílt halmaz, és az $(a, b) \in \mathbb{R}^{n+m}$ $(a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m)$ vektorokra $f(a, b) = 0$, valamint az $B = f'(a, b)$ mátrixra teljesül a*

$$B(h, 0) = 0 \implies h = 0 \in \mathbb{R}^n$$

implikáció, akkor létezik a b-nek olyan V környezete $(V \subset \mathbb{R}^m)$, amelyen egyértelműen értelmezhető olyan C^1 osztályú $g : V \to \mathbb{R}^n$ függvény, amelyre $g(b) = 0$, és

$$f(g(y), y) = 0, \quad \forall\, y \in V. \tag{3.31}$$

Ha a tétel feltételei teljesülnek, akkor azt mondjuk, hogy a g implicit függvényt a (3.31) egyenlet egyértelműen meghatározza.

6.3.2 Iránymenti deriváltak és a gradiens

Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ egy nem üres és nyílt részhalmazát, az $M_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in A$ pontot, az $f : A \to \mathbb{R}$ függvényt és a $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ egységvektort ($\|\overrightarrow{v}\| = (\sum v_i^2)^{1/2} = 1$). Az M_0 ponton át a $\overrightarrow{v}$ vektorral húzott párhuzamos l egyenes parametrikus egyenlete

$$x_i = x_i^0 + tv_i, \quad t \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{N}_n^*.$$

Az f-nek az $l \cap A$ halmazra vonatkozó leszűkítését egy valós változójú és valós értékű függvénynek is tekinthetjük, amelynek a változója t (ez tulajdonképpen egy összetett függvény). Ennek a függvénynek a $t = 0$ pontbeli deriváltját nevezzük *az f függvény $\overrightarrow{v}$ irány menti deriváltjának* az M_0 pontban. Az f függvénynek az M_0 pontban a $\overrightarrow{v}$ irány menti deriváltját $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial t}$-val jelöljük. Ha teljesülnek a 3.3 tétel feltételei, akkor írhatjuk, hogy

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_i} v_i.$$

Látható, hogy ez a derivált a $\overrightarrow{v}$ irányvektor és a parciális deriváltakból alkotott vektor skaláris szorzata. A parciális deriváltakból alkotott vektort nevezzük az f gradiensének az M_0 pontban.

Tehát, ha az $f : A \to \mathbb{R}$ függvénynek léteznek a parciális deriváltjai az $M_0 \in A$ pontban, akkor a

$$\operatorname{grad} f|_{M_0} = \left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_n} \right) \tag{3.32}$$

vektor az f gradiense az M_0 pontban.

6.4 Magasabbrendű differenciálok és parciális deriváltak

Ebben a fejezetben a magasabbrendű differenciálok értelmezésével és tulajdonságaival foglakozunk, előbb általános esetben, majd $\mathbb{R}^n$-ben.

Feltételezzük, hogy $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált terek, A az X-nek nyílt és nemüres részhalmaza és $f : A \to Y$ differenciálható függvény A-n. Az f-et *kétszer (Fréchet) differenciálhatónak* nevezzük az $a \in A$ pontban, ha az

$$f' : A \to L(X, Y)$$

függvény Fréchet differenciálható a-ban.

f-nek az a-beli másodrendű Fréchet differenciálját $f''(a)$-val vagy $f^{(2)}(a)$-val jelöljük. Az értelmezés alapján

$$f''(a) \in L(X, L(X, Y)). \tag{4.33}$$

Az f függvényt *kétszer (Fréchet) differenciálhatónak* nevezzük A-n, ha kétszer (Fréchet) differenciálható minden $a \in A$ pontban. Ebben az esetben az $x \mapsto f''(x)$ megfeleltetés egy

$$f'' : A \to L(X, L(X, Y))$$

függvényt értelmez. Ezt nevezzük az f másodrendű differenciáljának. A 1.5 tétel alapján f'' bilineáris és folytonos az $X \times X$-ről az Y-ba. Az

$$X \times X \ni (x, y) \mapsto (f'' \cdot x) \cdot y \tag{4.34}$$

összefüggés azt jelenti, hogy minden $x \in X$-re az $f'' \cdot x$ lineáris és folytonos X-ből $L(X, Y)$-ba, tehát $y \in X$-ben számolt behelyettesítési értékére $(f'' \cdot x) \cdot y \in Y$.

4.1. Tétel. ([19]) *Ha $f : A \to Y$ kétszer differenciálható a-ban, akkor az $f''(a) \in$ $\in L(X, Y)$ függvény szimmetrikus, azaz*

$$(f'' \cdot x) \cdot y = (f'' \cdot y) \cdot x, \quad \forall\, x, y \in X. \tag{4.35}$$

Az f függvényt C^2 osztályúnak nevezzük A-n, ha f kétszer differenciálható A-n, és az f'' függvény folytonos ($f' \in C^1(A)$).

6.4.1 Az $X = \mathbb{R}^n$ eset

Legyen A egy nemüres és nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek, és $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ az $a \in A$ pontban kétszer differenciálható függvény. Az f differenciálható az a egy környezetén, és (3.29) alapján

$$f'(a) \cdot (h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} \cdot h_i, \quad \forall\, (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{4.36}$$

Ha ezt az összefüggést f'-re is felírjuk, az

$$f''(a)\cdot(k_1,\dots,k_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f'(a)}{\partial x_i}\cdot k_i,\quad \forall\,(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{R}^n \tag{4.37}$$

egyenlőséghez jutunk, tehát

$$(f''(a)\cdot(k_1,\dots,k_n))\cdot(h_1,\dots,h_n)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f'(a)}{\partial x_i}\cdot k_i\right)\cdot(h_1,\dots,h_n). \tag{4.38}$$

Mivel

$$\frac{\partial f'(a)}{\partial x_i}\in L(\mathbb{R},L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)),$$

írhatjuk, hogy

$$\frac{\partial f'(a)}{\partial x_i}\cdot k_i\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m))$$

(a $(h_1,\dots,h_n)\in\mathbb{R}^n$ vektor képe egy vektor $\mathbb{R}^m$-ben).

(4.36)-ból következik, hogy

$$\left(\frac{\partial f'(a)}{\partial x_i}\cdot k_i\right)\cdot(h_1,\dots,h_n)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)\cdot k_i\right)\cdot h_j, \tag{4.39}$$

tehát ha a $\partial/\partial x_i\,(\partial f/\partial x_j)$ parciális derivált a pontbeli értékét a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(a)=\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i\,\partial x_j}$$

szimbólummal jelöljük, akkor (4.38) és (4.39) alapján

$$(f''(a)\cdot(k_1,\dots,k_n))\cdot(h_1,\dots,h_n)=\sum_{i,j}^{n}\left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i\,\partial x_j}\cdot k_i\right)\cdot h_j. \tag{4.40}$$

4.2. Tulajdonság. (H. A. Schwarz[147]) *Ha A nemüres és nyílt részhalmaza az $\mathbb{R}^n$-nek, és az $f:A\to\mathbb{R}^m$ függvény kétszer differenciálható A-n, akkor minden $a\in A$ esetén*

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i\,\partial x_j}=\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j\,\partial x_i},\qquad i,j=1,\dots,n. \tag{4.41}$$

Ha $f:A\to Y$ kétszer differenciálható, akkor létezik az

$$f'':A\to L(X,X;Y)$$

[147] H. A. Schwarz, 1843-1921

függvény. A tömörebb jelölés kedvéért általában az $L(X, L_{n-1}(X,Y))$ teret $L_n(X,Y)$-nal jelöljük, ahol $L_1(X,Y) = L(X,Y)$. Így az $L(X,X;Y)$ teret $L_2(X,Y)$-nal jelölhetjük.

Ha f'' differenciálható az $a \in A$ pontban ($A \subset X$ nemüres és nyílt), akkor a differenciálját $f'''(a)$-val vagy $f^{(3)}(a)$-val jelöljük, és az f *harmadrendű differenciáljának nevezzük* az a pontban. Világos, hogy $f'''(a) \in L(X, L_2(X,Y))$. Az f függvényt háromszor differenciálhatónak nevezzük A-n, ha az A halmaz minden pontjában háromszor differenciálható. Induktíven értelmezzük az f-nek az a pontbeli *n-edik differenciálját.* Azt mondjuk, hogy az f függvény n-szer differenciálható az $a \in A$ pontban, ha létezik a-nak olyan V környezete, amelyben f $(n-1)$-szer differenciálható és az $x \mapsto f^{(n-1)}(x)$ függvény (V-t az $L_{n-1}(X,Y)$-ba képezi) differenciálható a-ban. Az $f^{(n-1)}(x)$ függvény a-beli differenciálját $f^{(n)}(a)$-val jelöljük és az f függvény n-edik differenciáljának nevezzük az a pontban.

$f^{(n)}(a)(h_1, \ldots, h_n)$-val jelöljük a $(h_1, \ldots, h_n) \in X \times \cdots \times X$ vektornak az $f^{(n)}(a)$ függvény általi képét.

Az $f : A \to Y$ függvényt C^n osztályúnak nevezzük az A halmazon, ha f n-szer differenciálható az A minden pontjában, és az

$$f^{(n)} : A \to L_n(X,Y)$$

függvény folytonos. Értelmezés alapján

$$f^{(0)} = f.$$

Az f függvényt C^∞ osztályúnak nevezzük A-n, ha $f \in C^n(A)$, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

A 4.1-es tételhez hasonlóan igaz az alábbi tétel:

4.2. Tétel. ([19]) *Ha az $f : A \to Y$ függvény n-szer differenciálható az $a \in A$ pontban, akkor az $f^{(n)}(a) \in L_n(X,Y)$ függvény egy multilineáris és szimmetrikus leképezés az $X \times \cdots \times X$-ből Y-ba. Tehát*

$$f^{(n)}(a)(h_1, \ldots, h_n) = f^{(n)}(a)(h_{\sigma(1)}, \ldots, h_{\sigma(n)}), \tag{4.42}$$

ahol $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ tetszőleges permutáció.

6.5 A Taylor-féle képlet

5.1. Tétel. ([19]) *Ha az $f : A \to \mathbb{R}^m$ függvény C^{n+1} osztályú $A-n$ és $[a, a+h] \subset A$, akkor*

$$\begin{aligned} f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{1}{2} f''(a) \cdot (h,h) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot (h)^n + \\ + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+th) \cdot (h)^{n+1}\, dt. \end{aligned} \tag{5.43}$$

5.2. Tétel. ([19]) *Ha az* $f : A \to \mathbb{R}^m$ *függvény* $n+1-$ *szer differenciálható és*

$$\|f^{(n+1)}(a)\| \leq M, \quad \forall\, a \in A, \tag{5.44}$$

akkor

$$\|f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h - \cdots - \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot (h)^n\| \leq M \frac{\|h\|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{5.45}$$

5.3. Tétel. *Ha teljesülnek az 5.1 tétel feltételei, akkor*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot (h)^n + R_n(h), \tag{5.46}$$

ahol

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|R_n(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

6.6 Lokális szélsőértékek

6.6.1 Szükséges feltételek

A 222. oldalon láttuk, hogy ha X egy metrikus tér és $f : X \to \mathbb{R}$ egy függvény, akkor a $p \in X$ pontot az f *lokális maximumpontjának* nevezzük, ha létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $f(q) \leq f(p)$, bármely $q \in \mathrm{B}(p, \delta)$-re. A $p \in X$ pontot az f *szigorú lokális maximumpontjának* nevezzük, ha létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $f(q) < f(p)$, bármely $q \in \mathrm{B}(p, \delta) \setminus \{p\}$-re. Az előbbihez hasonlóan a $p \in X$ pontot *lokális minimumpontnak* nevezzük, ha létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $f(q) \geq f(p)$, bármely $q \in \mathrm{B}(p, \delta)$-re, és *szigorú lokális minimumpontnak,* ha létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $f(q) > f(p)$, bármely $q \in$ $\in \mathrm{B}(p, \delta) \setminus \{p\}$-re.

A 2.1-es tételhez hasonló tétel igaz általánosabb esetben is.

6.1. Tétel. (Fermat) *Ha* A *nemüres és nyílt részhalmaza az* X *Banach térnek, az* $f : A \to \mathbb{R}$ *függvénynek lokális szélsőértékpontja az* $a \in A$ *és* f *differenciálható* a*-ban, akkor* $f'(a) = 0$.

Bizonyítás. Ha $x \in X$ rögzített, akkor a $g(t) = f(a + tx)$ függvény értelmezhető a $0 \in \mathbb{R}$ egy elég kis környezetében, és g-nek lokális szélsőértékpontja a $t = 0$. A 2.1-es tétel alapján $g'(0) = 0$. Másrészt

$$g'(t) = f'(a + tx) \cdot x,$$

és így $g'(0) = f'(a) \cdot x$, bármely $x \in X$-re, tehát $f'(a) = 0$. $\square$

Az $f'(a) = 0$ egyenlőséget teljesítő pontokat az f *stacionárius* pontjainak nevezzük.

A Fermat tétel alapján látható, hogy deriválható függvények lokális szélsőértékpontjait a stacionárius pontok közül kell kiválasztani. Sajnos általában nem minden stacionárius pont szélsőértékpont, ezért további feltételekre van szükségünk.

6.6.2 Másodrendű feltételek

6.2. Tétel. *Ha $A \subset \mathbb{R}^n$ egy nyílt halmaz, az $f : A \to \mathbb{R}$ függvény kétszer deriválható az $a \in A$ pontban és f-nek az a lokális minimumpontja, akkor $f''(a) \geq 0$.*

Bizonyítás. Az $f''(a) \geq 0$ egyenlőtlenség azt jelenti, hogy az $f''(a)$ szimmetrikus és bilineáris alak nem negatív ($f''(a)(h,h) \geq 0$, bármely $h \in \mathbb{R}^n$ esetén).

A Fermat tétel alapján $f'(a) = 0$, tehát a Taylor képletből (5.3 tétel) következik, hogy elég kis h esetén

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} f''(a)(h,h) + R_2(h),$$

ahol $|R_2(h)| = o(\|h\|^2)$. Mivel a lokális minimumpont, írhatjuk, hogy

$$f''(a)(h,h) + 2R_2(h) \geq 0.$$

Ez alapján tetszőlegesen rögzített h-ra és elég kis t-re

$$f''(a)(th,th) + 2R_2(th) \geq 0. \tag{6.47}$$

Másrészt

$$f''(a)(th,th) = t^2 f''(a)(h,h),$$
$$2R_2(th) = t^2 \varepsilon(t,h), \quad \lim_{t \to 0} \varepsilon(t,h) = 0,$$

tehát ha t elég kicsi, akkor

$$f''(a)(h,h) + \varepsilon(t,h) \geq 0.$$

De $\varepsilon(t,h)$ tart 0-hoz, ha t tart a 0-hoz, tehát az előbbi egyenlőtlenség bal oldalának létezik a határértéke $t \to 0$ esetén. Ez alapján

$$f''(a)(h,h) \geq 0. \quad \square$$

Hasonlóan igazolható a következő állítás is:

6.3. Tétel. *Ha $A \subset \mathbb{R}^n$ egy nyílt halmaz, az $f : A \to \mathbb{R}$ függvény kétszer deriválható az $a \in A$ pontban és f-nek az a lokális maximumpontja, akkor $f''(a) \geq 0$.*

A következő tételek azt mutatják, hogy valamivel erősebb feltételek már elégségesek is ahhoz, hogy egy stacionárius pont lokális szélsőértékpont legyen.

6.4. Tétel. *Ha $A \subset \mathbb{R}^n$ nemüres és nyílt halmaz, az $f : A \to \mathbb{R}$ függvénynek létezik a másodrendű differenciálja az $a \in A$ pontban és $f'(a) = 0$, valamint az $f''(a)$ pozitív definit, akkor a az f függvény lokális minimumpontja.*

Bizonyítás. A Taylor képlet alapján

$$f(a+h)-f(a)=\frac{1}{2}f''(a)(h,h)+\varepsilon(h)\|h\|^2,$$

ahol $\varepsilon(h)\to 0$, amikor $h\to 0$. Az 1.7 tétel alapján létezik $\lambda>0$ úgy, hogy $f''(a)(h,h)\geq\lambda\|h\|^2$. Ebből következik, hogy

$$f(a+h)-f(a)\geq\left(\frac{\lambda}{2}+\varepsilon(h)\right)\|h\|^2,$$

ha $\|h\|$ elég kicsi. Ugyanakkor elég kicsi h-ra $\lambda/2+\varepsilon(h)>0$, és így $h\neq 0$ esetén

$$f(a+h)-f(a)>0. \quad \square$$

Hasonlóan látható be a következő tétel is:

6.5. Tétel. *Ha $A\subset\mathbb{R}^n$ nemüres és nyílt halmaz, az $f:A\to\mathbb{R}$ függvénynek létezik a másodrendű differenciálja az $a\in A$ pontban és $f'(a)=0$, valamint az $f''(a)$ negatív definit, akkor a az f függvény lokális maximumpontja.*

6.6.3 Kötött szélsőértékek

Az $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ és $y=(y_1,\dots,y_m)\in\mathbb{R}^m$ vektorok esetén az (x,y) pár az $(x,y)=(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)\in\mathbb{R}^{n+m}$ vektort jelöli. Tekintsük az $f:A\subset\subset\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}$ és $g_i:A\subset\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}$, $i=1,2,\dots,m$, függvényeket, ahol A egy nyílt halmaz.

Keressük az

$$(x,y)\to f(x,y) \tag{6.48}$$

függvény azon szélsőértékeit, amelyek teljesítik a

$$\begin{cases} g_1(x,y)=0\\ \dots\\ g_m(x,y)=0\end{cases} \tag{6.49}$$

feltételeket. Az ilyen feladatokat *kötött szélsőértékfeladatoknak* nevezzük. Az $M_0(x_0^1,\dots,x_0^n,y_0^1,\dots,y_0^m)$ pont a (6.48) függvénynek a (6.49) feltételeket teljesítő kötött lokális szélsőértékpontja, ha létezik az M pontnak olyan környezete, amelyben M_0 lokális szélsőértékpontja a (6.48) függvénynek, és teljesíti a (6.49) feltételeket. Világos, hogy ha a (6.49) egyenletekből kiküszöbölhetnénk az $y_1,\dots,y_m$ ismeretleneket (például az implicit függvény tételének megfelelően), akkor a továbbiakban már használhatnánk a szélsőértékek létezésére vonatkozó tételeket. Ez az elgondolás általában nem kivitelezhető, ezért gyakran a Lagrange-féle multiplikátorok módszerét használjuk.

6.6. Tétel. *Feltételezzük, hogy* $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ *egy nyílt halmaz, a* (6.48) *és* (6.49) *feltételekben szereplő* f*, illetve* g_j*,* $j = 1, 2, \dots, m$ *függvények pedig differenciálhatók* A*-n. Ha* $M_0(x_0^1, \dots, x_0^n, y_0^1, \dots, y_0^m) \in A$ *a* (6.48) *függvény* (6.49) *feltételeket teljesítő lokális szélsőértékpontja, és a* g_j *függvények* $y_1, \dots, y_m$ *szerinti elsőrendű parciális deriváltjai az* M_0 *pont egy környezetében folytonosak, valamint*

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{6.50}$$

akkor léteznek olyan $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ *valós számok, amelyekre az* $F : A \to \mathbb{R}$*,*

$$F(x, y) = f(x, y) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x, y) \tag{6.51}$$

függvényre teljesülnek a

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \ \dots, \ \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial y_1} = 0, \ \dots, \ \frac{\partial F}{\partial y_m} = 0, \\ g_1(x, y) = 0, \ \dots, \ g_m(x, y) = 0 \end{cases} \tag{6.52}$$

egyenlőségek az M_0 *pontban.*

Az F függvényt a f-hez rendelt *Lagrange-féle függvénynek* nevezzük és a $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ számokat *Lagrange-féle multiplikátoroknak.*

Bizonyítás. Mivel M_0 a (6.48) függvénynek a (6.49) feltételeket teljesítő lokális szélsőértékpontja, írhatjuk, hogy

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} d\,x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} d\,x_n + \frac{\partial f}{\partial y_1} d\,y_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_m} d\,y_m = 0 \tag{6.53}$$

és

$$\begin{cases} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} d\,x_1 + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial x_n} d\,x_n + \frac{\partial g_1}{\partial y_1} d\,y_1 + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial y_m} d\,y_m = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} d\,x_1 + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial x_n} d\,x_n + \frac{\partial g_m}{\partial y_1} d\,y_1 + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial y_m} d\,y_m = 0. \end{cases} \tag{6.54}$$

Ha a (6.54) egyenleteket rendre beszorozzuk a $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ állandókkal, és az így kapott egyenlőségek megfelelő oldalait hozzádjuk a (6.53) egyenlőséghez, akkor a

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} d\,x_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} d\,x_n + \frac{\partial F}{\partial y_1} d\,y_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_m} d\,y_m = 0 \tag{6.55}$$

egyenlőséghez jutunk, ahol $F = f + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j$.

Ezt tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ számokkal megtehetjük. A továbbiakban meghatározzuk ezeket az állandókat úgy, hogy teljesüljenek a

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, m$$

egyenlőségek. Ez a

$$\frac{\partial f}{\partial y_j} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial y_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, m \tag{6.56}$$

egyenletrendszer megoldását jelenti. A (6.50) feltétel alapján ennek a rendszernek mindig egyértelmű megoldása van, tehát az így meghatározott állandókra a (6.55) egyenlőségből következik, hogy

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} d\,x_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n} d\,x_n = 0. \tag{6.57}$$

Másrészt a feltételek alapján az $x_1, \ldots, x_n$ változók függetlenek, tehát a (6.57) egyenlőségből következik, hogy

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \; \ldots, \; \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0. \tag{6.58}$$

Így a tétel bizonyítása teljes. □

Megjegyzés. A 6.6 tétel csak szükséges feltételeket biztosít a kötött szélsőértékfeladat megoldására. Látható, hogy a tételben kapott egyenletrendszer megoldása gyakorlatilag a Lagrange-féle függvény stacionárius pontjainak meghatározását jelenti. Elégséges lenne tehát megoldani a (6.52) egyenletrendszert az $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ismeretlenekben, és a megoldások közül kiválasztani azokat a pontokat, amelyek az eredeti szélsőértékfeladatnak is megoldásai. △

Ha az f és a g_i függvényeknek létezik a másodrendű differenciálja az M_0 egy környezetén, és a másodrendű parciális deriváltak folytonosak M_0-ban, akkor az f Lagrange függvényének a szélsőértékpontjainak meghatározásához tanulmányozzuk a d^2F másodrendű differenciált. De

$$d^2F = \left(\sum_{i=1}^{n} d\,x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} d\,y_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right)^2 F + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial y_j} d^2 y_j, \tag{6.59}$$

és mivel az M_0 pontban

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = 0, \; \ldots, \; \frac{\partial F}{\partial y_m} = 0,$$

azt kapjuk, hogy

$$d^2F = \left(\sum_{i=1}^{n} d\,x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} d\,y_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right)^2 F. \tag{6.60}$$

Annak az eldöntésére, hogy d^2F pozitív vagy negatív definit (a (6.49) feltételek mellett) a $dy_1, \ldots, dy_m$ differenciálokat a (6.60) egyenlőségben a (6.54) egyenletrendszerből kapott kifejezéseikkel helyettesítjük.

6.7 Kitűzött feladatok

1. Számítsd ki az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = e^{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}$ függvény k-adik differenciálját!

2. A z és u függvényt az

$$\begin{cases} f(x-y, z+u) &= 1 \\ xyz + \ln(x^2+y^2+z^2) &= 2 \end{cases}$$

egyenletrendszer értelmezi a $D \subset \mathbb{R}^2$ tartományon, ahol az $f \in C^1(D)$ függvény parciális deriváltjai sehol sem 0-k a D-n. Számítsd ki a z és az u függvény x és y szerinti parciális deriváltját az f parciális deriváltjainak függvényében.

3. Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt k-adrendű Euler értelembe vett homogén függvénynek nevezzük, ha

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítsd be, hogy ha f Euler értelembe vett k-adrendű homogén függvény, akkor

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = nf(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

4. Bizonyítsd be, hogy ha $v : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ egy C^2 osztályú függvény, akkor

$$\frac{D\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial x_n},\right)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \frac{D\left(\frac{\partial v}{\partial y_1}, \frac{\partial v}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial y_n},\right)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

ahol $v = v(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

5. Bizonyítsd be, hogy az $f(x, y, a) = 0$ egyenletű egyparaméteres görbesereg burkológörbéje teljesíti az

$$\begin{cases} f(x, y, a) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial a}(x, y, a) &= 0 \end{cases}$$

egyenletrendszert. Fogalmazz meg (és bizonyítsd is be) egy hasonló tulajdonságot felületekre!

6. A $VA_1A_2A_3\dots A_n$ gúlában az $A_1A_2A_3\dots A_n$ rögzített sokszög kör köré írható és a V csúcsnak az alapra eső vetülete az alapsokszög belsejében van. Határozd meg a gúla teljes felszínének minimumát, ha a gúla magassága h! Oldd meg a feladatot elemi módszerrel és többváltozós függvények segítségével!

7. Számítsd ki $\mathbb{R}^n$ -ben az $\alpha_0 + \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = 0$ egyenletű hipersík és az $M(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ pont távolságát.

8. Határozd meg az $M(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$ pont távolságát a $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i - x_i^0)^2 = R^2$ egyenletű felülettől, ha $\alpha_i > 0$, minden $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén!

9. Bizonyítsd be, hogy ha $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$, akkor
$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

10. Határozd meg az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \|x - x_i\|^2$ függvény minimumát, ha $\alpha_i \in \mathbb{R}$, minden $1 \leq i \leq n$ esetén ($\|x\|$ az x euklideszi normája).

11. Tekintsük az $r > 0$ valós számot és a $B = \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x\| < r\}$ halmazt. Bizonyítsd be, hogy ha az $u : B \to \mathbb{R}_+$ függvényre létezik $a \in B$ úgy, hogy $u(a) = 0$ és $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \leq 1$ a B -n, akkor $u(x) < 2r^2$, bármely $x \in B$.

12. $D \subset \mathbb{R}^n$ egy nyílt halmaz, A a D egy zárt konvex része, valamint $f : D \to \mathbb{R}^n$ egy Frechét differenciálható függvény. Bizonyítsd be, hogy ha $f(A) \subset A$ és létezik olyan $q \in (0, 1)$, amelyre $\sum\limits_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right| \leq q < 1$, bármely $1 \leq j \leq n$ esetén, akkor az
$$\begin{cases} x_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots & \\ x_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$
egyenletrendszernek egyetlen megoldása van A -ban.

13. Bizonyítsd be, hogy ha $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt és konvex halmaz, valamint $f : D \to \mathbb{R}$ egy C^2 osztályú függvény és
$$\Delta_m(x) = \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i,j \leq m},$$
akkor a következő két állítás egyenértékű:

1° f konvex;

2° $\Delta_m(x) \geq 0$, ha $x \in D$ és $1 \leq m \leq n$.

14. $\mathbb{R}^n$-ben adottak az $M_i(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$, $1 \leq i \leq m$ pontok. Határozd meg azt a $x_n = a_0 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i x_i$ egyenletű hipersíkot, amelyre a pontoknak a hipersíktól való eltéréseinek négyzetösszege minimális, ha a hipersíktól való eltéréseket az Ox_n tengely mentén számítjuk.

15. Bizonyítsd be, hogy az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$
függvénynek a $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ gömbre való leszűkítésének a maximuma és minimuma az $A = [a_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$ mátrix legnagyobb, illetve legkisebb sajátértéke ($\|x\|$ az x euklideszi normája).

16. Határozd meg az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ függvény minimumát, ha $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$, minden $1 \leq i \leq m$, és $\operatorname{rang}[a_{ij}] = m \leq n$.

17. (Răzvan Satnoianu[148]) Legyen $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ egy kétszer deriválható függvény, amelyre $f''(x) > 0$, $\forall x > 0$, és a $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $g(x) = x^2 f''(x) + x f'(x)$ függvényre létezik olyan $r > 0$, amelyre $g(x) < 0$, ha $x \in (0, r)$ és $g(x) \geq 0$, ha $x > r$. Bizonyítsd be, hogy ha a
$$h : (0, \infty)^n \to (0, \infty),\ \ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - n f(0)$$
függvény $K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \prod\limits_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$ halmazra való leszűkítésének minden stacionárius pontja legfeljebb két különböző koordinátával rendelkezik, és $\lim\limits_{x_k \to 0} h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, minden $1 \leq k \leq n$ esetén, akkor $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$, bármely $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K$ esetén.

18. Bizonyítsd be, hogy ha a $P(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} p_i p_j$ polinomban a $p_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{ik} q_k$, $1 \leq i \leq n$ változócserét hajtjuk végre, akkor a $q_i q_j$ szorzat együtthatója ugyanaz, mint az $L(u) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ operátorban az $\eta_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ik} x_i$, $1 \leq i \leq n$ változócsere után a $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta_i \partial \eta_j}$ együtthatója.

[148] JIPAM, 2002:3, r.a.satnoianu@city.ac.uk

19. Bizonyítsd be, hogy ha az

$$
\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{7.61}
$$

mátrix maximális rangja r, amikor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$, akkor az $f_1, f_2, \dots, f_n$ függvények közt pontosan r darab funkcionálisan független van (a többi ezektől függ).

20. (András Szilárd) Bizonyítsd be, hogy ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ kétszer deriválható, növekvő és konkáv függvény, az $L : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}_+$ függvény szimmetrikus és $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y(x, y)} \cdot \frac{\partial L}{\partial x}(y, x) < 0$, bármely $x, y \in [a, b]$-re, akkor tetszőleges $0 < a \le x_1 \le x_2 \dots \le x_n \le b$ valós számokra

$$
\sum_{i=1}^{n} f(x_i) L(x_i, x_{i-1}) \ge \sum_{i=1}^{n} f(x_i) L(x_i, x_{i+1}).
$$

Megjegyzés. Ha $L(x, y)$ egy pozitív együtthatójú homogén kétváltozós polinom reciproka, akkor teljesíti a feltételt.

8. Fejezet

Állandók

Ha ε egy kicsit kisebb volna,
akkor Univerzumunk egyszerűen
hidrogénből állna, ...
Martin Rees

Ebben a fejezetben néhány fontos matematikai állandóval és azoknak tulajdonságaival foglalkozunk. Ezek közül néhány csak történeti szempontból fontos (például a $\sqrt{2}$), de a legtöbbet inkább a felhasználásokbeli gyakori előfordulása miatt érdemes ismerni. Mi csak egy-egy kis ízelítőt próbálunk adni ezekkel az állandókkal kapcsolatban, ezért ezt a fejezetet inkább figyelemfelkeltőnek szánjuk.

8.1 A Pithagorász-féle állandó

A $\sqrt{2}$ számot néha Pithagorász-féle állandónak nevezik.[149] Ez megközelítőleg $\sqrt{2} = 1,4142135623\ldots$. A 14. oldalon igazoltuk, hogy ez a szám nem racionális.

A $\sqrt{2}$ szám történeti szempontból érdekes, talán ez volt az első olyan szám, amelyről igazolták, hogy nem racionális. Talán a pithagorászi iskolához tartozó Hipassus[150] egy geometriai gondolatmenet segítségével igazolta, hogy az egységoldalú négyzet átlója és oldala nem összemérhető. Ez pontosan azt jelenti, hogy a $\sqrt{2}$ nem racionális. Felfedezéséért a pithagoreusok tengerbe is hajították.

Több száz évvel később Euklidesz *Elemek* című munkájának X. kötetében megtalálható egy tetszőleges $\sqrt{n}$ szám irracionalitásának a bizonyítása, ha n nem teljes négyzet.

A $\sqrt{2}$ számot korábban is ismerték, például a babilóniaktól származik a

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1,41421296296296\ldots$$

közelítés.

[149] számoszi Pithagorász ($\Pi\upsilon\vartheta\alpha\gamma o\varrho\alpha\varsigma$) , $\sim$ 560 - $\sim$ 480 i.e.
[150] metapontoszi Hippasus, $\sim$ 500 i.e.

8.1.1 A $\sqrt{2}$ közelítése

A 93. oldalon láttuk, hogy az $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$ sorozat konvergens és határértéke $\sqrt{2}$. Ez talán a $\sqrt{2}$ legismertebb közelítő sorozata.

Az

$$\left\{ \begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 2b_n, \\ b_{n+1} &= a_n + b_n, \end{aligned} \right. \tag{1.1}$$

rekurziókkal értelmezett sorozatokra

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{\dfrac{a_n}{b_n} + 2}{\dfrac{a_n}{b_n} + 1},$$

tehát

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2}.$$

Ha ezzel a sorozattal közelítjük a $\sqrt{2}$-t, akkor az utolsó osztástól eltekintve csak összeadásokat használunk. A közelítés gyorsaságára vonatkozóan igazolhatjuk, hogy az $\varepsilon_n = |\sqrt{2} - a_n/b_n|$ különbségekre teljesül az $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n/5$ egyenlőtlenség.

A mezopotámiaiak $a_1 = 1$ és $b_1 = 1$ kezdőértékkel az $a_4 = 17$ és $b_4 = 12$ értékeket használták a $\sqrt{2}$ közelítésére.

Megemlítjük, hogy lineáris rekurziók esetén mátrixok segítségével is reprezentálhatjuk a sorozat tagjait. Ebben az esetben a rekurziót

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

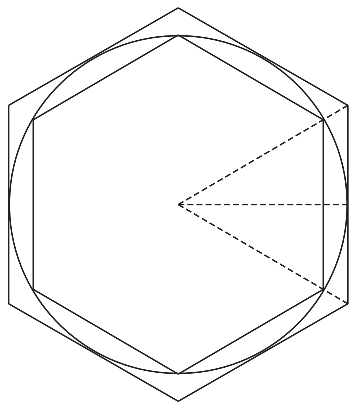
alakban is írhatjuk, tehát az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix segítségével

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}.$$

A közelítések egyik legfontosabb problémája a gyorsaság növelése. Ebben az esetben használhatjuk az $n = 2^p$ alakú indexeket (így a mátrixot minden lépésben négyzetre emeljük), és egy gyorsabban konvergáló sorozatot kapunk.



8.1. Ábra. Arkhimédesz algoitmusa $n = 6$-ra

8.2 Az Arkhimédesz-féle állandó

Az Arkhimédesz-féle állandó közismert nevén a π.

Arkhimédesz egy kör köré és a körbe írható 96 oldalú sokszög tanulmányozásának segítségével igazolta, hogy

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}. \tag{2.1}$$

A π történetéről és tulajdonságairól érdemes elolvasni a [15] cikket.

8.2.1 A π közelítése

2.1. Tulajdonság. ([73]) *Ha a_n és b_n az egységsugarú kör köré, illetve a körbe írt szabályos n oldalú sokszög kerülete, akkor*

$$a_{2n} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} \text{ és} \tag{2.2}$$

$$b_{2n} = \sqrt{a_{2n}b_n}. \tag{2.3}$$

Bizonyítás. Jelöljük l_k-val és l_b-vel az egységsugarú kör köré, illetve a körbe írt szabályos n oldalú sokszög oldalának hosszát. Írhatjuk, hogy

$$l_k = 2\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}, \quad l_b = 2\sin\frac{\pi}{n},$$

és így

$$a_n = 2n\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}, \quad b_n = 2n\sin\frac{\pi}{n}.$$

A

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{tg}x \sin x}{\operatorname{tg}x + \sin x}$$

azonosság alapján

$$\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} = \frac{2\cdot(2n)^2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{2n\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}+\sin\frac{\pi}{n}\right)} = 4n\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}+\sin\frac{\pi}{n}} = 4n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n} = a_{2n},$$

tehát a (2.2) egyenlőség teljesül. Ugyanakkor

$$\sqrt{a_{2n}b_n} = 2n\sqrt{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}2\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}} = 4n\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{2n}} = 4n\sin\frac{\pi}{2n} = b_{2n},$$

tehát (2.3) is teljesül. $\square$

Látható, hogy az előbbi rekurziók egy viszonylag egyszerű algoritmust eredményeznek a π közelítésére. Ezt nevezzük Arkhimédesz-féle algoritmusnak. Egyes szerzők Borchardt-Pfaff algoritmusnak is nevezik (lásd a 96. oldalt).

Megjegyzés. Bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$b_n < 2\pi < a_n.$$

A 96. oldalon ismertetett gondolatmenet alapján az (a_n) és (b_n) sorozatok konvergensek, és ugyanaz a határértékük. Így

(2.4) $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 2\pi.$$

Ezzel a 96. oldalon található 1.3 gyakorlat (7) alpontjában tanulmányozott sorozat határértékét is kiszámoltuk. $\triangle$

Megjegyzés. Ha a hatszögből indulunk ki, akkor írhatjuk, hogy

$$c_0 = a_6 = 4\sqrt{3}, \quad d_0 = b_6 = 6,$$

és a

(2.5) $$c_n = a_{6\cdot 2^n}, \quad d_n = b_{6\cdot 2^n}$$

sorozatok határértéke 2π. Látható, hogy

$$c_1 = 24(2-\sqrt{3}), \quad d_1 = 6(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

és $n \in \{0,1,2,3,4\}$ esetén a következő megközelítő értékeket kapjuk:

$$3,00000 < \pi < 3,46410, \quad 3,10583 < \pi < 3,21539, \quad 3,13263 < \pi < 3,15966,$$
$$3,13935 < \pi < 3,14609, \quad 3,14103 < \pi < 3,14271.$$

Látható, hogy az $n = 4$-re kapott értékek (ezek származnak a szabályos 96 oldalú sokszögből) egy jó racionális közelítése az Arkhimédesz által használt

(2.6) $$3,14084507 = 3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7} = 3,14285714$$

közelítés.

8.2.2 A Buffon-féle probléma

Buffon[151] a következő valószínűségszámítási problémát vizsgálta (lásd [29, 36. oldal]):

A síkon tekintsük az $y_k = 2ak$ egyenletű egyenesek családját (ezek egymással párhuzamos egyenesek, és két szomszédos egyenes távolsága $2a$). Egy $2l$ $(l < a)$ hosszúságú tűt véletlenszerűen hajítsunk rá a síkra. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a tű metszeni fog legalább egy egyenest?

Igazolható, hogy a keresett valószínűség

$$p = \frac{2l}{a\pi},$$

tehát a centrális határeloszlás tételek értelmében a kísérletet sokszor megismételve, a relatív gyakoriság közelítő értéke a valószínűségnek, és így a π-nek is kiszámítható egy közelítő értéke.

8.2.3 A π n-edik számjegyének kiszámítása

A [9]-es cikkben igazolták a

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right) \frac{1}{16^k} \tag{2.7}$$

összefüggést, amely lehetővé teszi, hogy kiszámítsuk a π n-edik számjegyét kevés memória felhasználásával.

8.3 A számtani-mértani közép

Az a és b pozitív számok számtani-mértani közepét a 96. oldalon az 1.3 gyakorlat (6)-os alpontjában értelmeztük az (x_n) és (y_n) sorozatok közös határértékeként, ahol

$$x_1 = a \geq 0,\ y_1 = b \geq 0,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n),\ y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}. \tag{3.1}$$

Ezt a határértéket $M(a,b)$-vel jelöljük. Világos, hogy $M(a,b) = M(b,a)$, és ha $a = 0$, akkor $M(0,b) = 0$, bármely $b \geq 0$ esetén. A következő tulajdonságban néhány azonnali összefüggést sorolunk fel.

3.1. Tulajdonság. *Ha a, b két pozitív szám és az (x_n), (y_n) sorozatokat a (3.1) összefüggések segítségével értelmeztük, akkor az $M(a,b)$ teljesíti az alábbi*

[151] Georges Louis Leclerc de Buffon, 1707 - 1788

egyenlőségeket:

$$M(a,b) = M(x_n, y_n), \quad n \geq 0, \tag{3.2}$$

$$M(a,b) = M((a+b)/2, \sqrt{ab}), \tag{3.3}$$

$$\lambda M(a,b) = M(\lambda a, \lambda b), \quad \lambda \geq 0, \tag{3.4}$$

$$M(1, \sqrt{1-x^2}) = M(1+x, 1-x), \qquad |x| \leq 1, \tag{3.5}$$

$$M(1,b) = \frac{1+b}{2} M\left(1, \frac{2\sqrt{b}}{1+b}\right). \tag{3.6}$$

Bizonyítás. Egy konvergens sorozat határértéke nem változik meg, ha az első néhány tagját elhagyjuk, tehát (3.2) teljesül. Ez alapján következik a (3.3) és (3.5) is.

A (3.4) egyenlőség nyilvánvaló, mert a sorozatok minden tagja szorzódik λ-val. Az utolsó egyenlőség következik a második és a harmadik egyenlőségből. □

Az előbbi tulajdonságok alapján látható, hogy elégséges kiszámítani az $M(1,b)$ értékét, és ebből a felsorolt tulajdonságok alapján kiszámítható az $M(a,b)$, tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén is. Ez a magyarázata annak, hogy az $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$,

$$f(x) = M(1, x) \tag{3.7}$$

függvény tulajdonságait tanulmányozzuk. Igazolható, hogy az f függvény folytonos és

$$M(a,b) = \frac{(a+b)\pi}{4K\left(\frac{a-b}{a+b}\right)},$$

ahol

$$K(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 x^{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \varphi}}$$

az elsőfajú elliptikus integrál. A bizonyítást nem részletezzük, megtalálható [30]-ban. Szintén [30]-ban található a Brent-Salamin algoritmus a π megközelítésére.

$$a_0 = 1, \; b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \; a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \; b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

$$U_m = \frac{4a_m^2}{1 - 2\sum_{n=1}^{m} 2^n (a_n^2 - b_n^2)} \xrightarrow{m \to \infty} \pi.$$

8.4 Az e szám

Az e számot a 104. oldalon az 1.2 tulajdonság segítségével értelmeztük. A 287. oldalon igazoltuk, hogy az e transzcendens szám (5.4 tétel). A következő néhány problémával arra szeretnénk rávilágítani, hogy a természetes logaritmus alapjának megválasztása nem véletlen, és hogy az e szám előfodul több gyakorlati feladat megoldása során.

A XV-XVI. században a kamatos kamat kiszámításához táblázatokat készítettek (pl. Simon Stevin[152]). Ezekkel a táblázatokkal való számolást szerette volna Joost Bürgi[153] felgyorsítani. Adott p kamatláb mellett az $x_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ mértani sorozathoz elemenként a 0, 10, 20,..., 10n számtani sorozat elemeit rendelte. Így az első sorozat bármely két elemének szorzatához éppen az a szám tartozik, amely a megfelelő számtani sorozatból való elemek összege. A táblázat 1611-ben készült el, de csak 9 évvel később jelent meg. Ennek köszönhette John Napier[154] skót matematikus, hogy először az övé vált ismertté (1614). Napier munkája annak a mozgásnak a közelítő leírásából származik, amikor valaki egy d hosszúságú úton halad úgy, hogy sebességének mérőszáma minden pillanatban megegyezik a hátralevő út hosszával. Az időt rövid hosszúságú szeletekre vágta, és a sebességet minden szeletben állandónak vette. Az így kapott út-idő értékekből táblázatot készített. Látható, hogy mindkét megfeleltetés olyan jellegű, hogy ha az argumentum a k-szeresére növekszik, akkor a függvényértékek egy k-tól függő konstans értékkel módosulnak. A második esetben ha $v(t)$ a sebesség t idő után, akkor a $[0, t]$ idő alatt megtett út hossza $\int_0^t v(x)dx$, és így, ha l az út teljes hossza, akkor az

$$l - \int_a^t v(x)dx = v(t),\ v(0) = 1,\ t \geq 0$$

integrálegyenlethez jutunk. Ha mindkét oldalt deriváljuk, következik, hogy $v'(t) = = v(t)$. Ez magyarázatot ad arra, hogy a természetes logaritmus alapjának miért választották e-t.

Ha $N(t)$-vel jelöljük a t időpillanatban egy radioaktív anyag atomjainak a számát, akkor a Δt idő alatt elbomló atomok száma egyenesen arányos a Δt-vel és az atomok számával. Így a $[t, t + \Delta t]$ intervallumban elbomlott atomok száma

$$N(t + \Delta t) - N(t) = -\lambda N(t)\Delta t.$$

Ha $\Delta t \to 0$, akkor a

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

egyenlethez jutunk. A $\lambda > 0$ paramétert *bomlási állandónak* nevezzük. Ha mindkét tagot a bal oldalra visszük, és beszorozzuk az egyenlet mindkét oldalát $e^{\lambda t}$-vel, akkor azt kapjuk, hogy az $U(t) = N(t) \cdot e^{\lambda t}$ függvény deriváltja 0. A Lagrange tétel következménye alapján U állandó, tehát létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, amelyre $N(t) = ce^{-\lambda t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. A c állandó pontosan az $N(0)$, tehát

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t}, \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Ez a függvény kifejezhető ugyan tetszőleges a alapú exponenciális függvény segítségével, de ennek ellenére a feltételbeli bomlási állandó csak akkor jelenik meg

[152]Simon Stevin, 1548-1620
[153]svájci műszerkészítő, 1552-1632
[154]John Napier, 1550-1617

egyszerű szorzótényezőként, ha $a = e$. Tetszőleges t_0 esetén, ha meg szeretnénk határozni azt a T időt, amely alatt az $N(t_0)$ atomok fele elbomlik, akkor az $N(t_0 + T) = \frac{1}{2}N(t_0)$ egyenletet kell megoldanunk. Ebből következik, hogy

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}. \tag{4.2}$$

A T állandót *felezési időnek nevezzük.* Érdemes megjegyezni, hogy valahányszor egy mennyiség változásának sebbessége a mennyiség pillanatnyi értékének valahányad része, mindig egy ilyen modellt kapunk. Például, ha egy baktériumtenyészetet vizsgálunk, akkor a szaporodás egyenesen arányos a tenyészet nagyságával, tehát ismét a

$$\frac{dx}{dt} = Cx$$

egyenlethez jutunk, ahonnan

$$x(t) = x(0)e^{Ct}.$$

A következő problémát *egybeesési feladatnak* nevezzük. Gyakran *ajándékozási paradoxon,* vagy a *kalapmegőrző* problémája, vagy a *kártyakeverési* feladat, vagy az *összejövetel* problémájának szokták nevezni.

A kalapmegőrző problémája a következő: egy megőrzőbe n kalapot adnak be és kiadáskor a kalapokat véletlenszerűen szétosztják. Mennyi a valószínűsége annak, hogy senki sem kapja vissza a saját kalapját?

A kártyakeverés problémája: ha egy kártyacsomagot összekevernek, mennyi a valószínűsége annak, hogy egyetlen kártya sem kerül ugyanarra a helyre, mint a keverés előtt (vagyis, ha az eredeti sorrendben megszámozzuk a kártyákat 1-től n-ig, akkor a keverés után a k-adik kártya nem szabad a k-adik helyen legyen).

Látható, hogy ez gyakorlatilag azoknak a $\sigma : \mathbb{N}_n^* \to \mathbb{N}_n^*$ permutációknak a megszámlálását jelenti, amelyekre $\sigma(i) \neq i$, ha $i \in \mathbb{N}_n^*$. A számlálást a szitaformula segítségével végezzük el. $0 \geq j \geq n$ esetén azt mondjuk, hogy a σ permutációnak legalább j darab egybeesése van, ha létezik $p_1, p_2, \ldots, p_j$ úgy, hogy $\sigma(p_i) = p_i$, minden $i \in \{1, 2, \ldots j\}$ esetén. Látható, hogy ha S_j a legalább j egybeeséssel rendelkező permutációk halmaza, akkor

$$S_n \subset S_{n-1} \subset \ldots \subset S_2 \subset S_1.$$

Másrészt $|S_k| = \binom{n}{k} \cdot (n-k)!$, mert $\binom{n}{k}$ különböző módon választhatjuk ki azt a k elemet, amelyeknél egybeesés van, és a többi $(n-k)$ elem tetszőleges sorrendben lehet. Ugyanakkor, ha a keresett permutációk száma $|S|$, akkor $|S| = n! - |S_1|$, tehát a szitaformula alapján

$$|S| = n! - 1 - \binom{n}{1} \cdot (n-1)! + \binom{n}{2} \cdot (n-2)! - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} \cdot (0)!.$$

Ebből következik, hogy a keresett valószínűség

$$p_n = \frac{|S_0|}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

Ha határértékre térünk ($n \to \infty$), akkor a

$$\lim_{n\to\infty} p_n = e^{-1} \tag{4.3}$$

egyenlőséget kapjuk, tehát ismét megjelenik az e.

A feladat a következőképpen általánosítható:

Tekintsünk egy kn kártyát tartalmazó paklit, amelyben k színű kártyák vannak, minden színből n féle (1-től n-ig számozott). Kétszer egymás után megkeverjük a paklit és kiosztjuk a kártyákat k játékos közt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egyetlen játékos sem kap olyan kártyát, amely ugyanannyiadik helyen szerepel mindkét osztásnál? Ha $p_{n,k}$ a keresett valószínűség, akkor rögzített k esetén

$$\lim_{n\to\infty} p_{n,k} = e^{-k}$$

(lásd [64]). Látható, hogy innen $k = 1$ esetén visszakapjuk a (4.3) eredményt.

8.5 $\ln 2$

A $\ln 2$ szám egyszerű sorozatok határértékeként jelent meg a 110. oldalon (az 1.9 következmény $k = 2$-re, vagy az 1.10 következmény). Láttuk, hogy a felezési idő és a bomlási állandó közti összefüggésben is szerepelt (lásd a (4.2) összefüggést).

Értelmezhetjük a $\ln 2$-t a következő egyenlőségekkel is:

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dt}{t} = \int_0^1 \frac{dt}{t+1} = \int_0^{1/2} \frac{dt}{1-t}\,. \tag{5.1}$$

Az integrál közelítésére a téglalapok képletét használjuk:

$$\int_a^b f(t)dt = h\sum_{k=1}^{n} f(a+kh) + R(h),$$

ahol f folytonos az $[a,b]$ intervallumon és $h = (b-a)/n$. Ez alapján az $f(t) = 1/(1+t)$ függvényre a $[0,1]$ intervallumon a

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2$$

egyenlőséghez jutunk, ami pontosan a 110. oldalon található 1.9 következmény $k = 2$ esetén.

Ha ugyanannak az integrálnak a közelítésére a trapézok képletét használjuk, akkor a

$$\ln 2 = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{4n} + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right)\right]$$

egyenlőséghez jutunk. A trapézok képlete

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)\right] + R(h^2)$$

alakban írható. Hasonlóan a Simpson[155] képlet

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{h}{6}\sum_{k=0}^{n} [f(a+kh) + f(a+(k-1)h) + 4f(a+(k-1/2)h)] + R(h^4),$$

tehát ugyanabból az integrálból a

$$\ln 2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+k-1} + \frac{4}{n+k-1/2}\right]$$

egyenlőséghez jutunk.

8.6 Az optimális megállás problémája

Az *optimális megállás problémája* sok más néven is megtalálható a szakirodalomban. Gyakran előfordul a *titkárnő problémája,* vagy a *házasodási probléma,* vagy a *szultán háremének problémája* néven is.

Tekintsünk egy különböző jelöltekből álló rendezetlen, véges $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sorozatot. A jelöltek közül egyet kell kiválasztani a következő algoritmus szerint: egyenként megvizsgáljuk a jelölteket, és a vizsgálat pillanatában vagy elfogadjuk, vagy elutasítjuk azt. Az elutasított jelölteket nem lehet visszahívni, és az a_{k+1} jelöltet csak akkor vizsgálhatjuk meg, ha az a_k jelöltet már elutasítottuk. A probléma természetesen az, hogy a legmegfelelőbb jelöltet válasszuk ki. Pontosabban akkor álljunk le, amikor a legjobb jelölt kiválasztásának valószínűsége a legnagyobb.

Igazolható, hogy ha

$$m = \min\left\{k \mid k \geq 1,\ \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{j-1} \leq 1\right\}, \tag{6.1}$$

akkor a legjobb stratégia, ha az első $m-1$ jelöltet elutasítjuk és az m-edik jelöltet elfogadjuk. A bizonyítást megtalálhatjuk [28]-ban. Látható, hogy

$$m \sim \frac{n}{e}, \tag{6.2}$$

tehát az optimális választás valószínűsége megközelítőleg $1/e = 0.367894\ldots$.

A problémáról részletesebben olvashatunk a [20] és [36] cikkekben.

[155]Thomas Simpson, 1710 - 1761

8.7 Általánosított Fubini számok

Ebben a paragrafusban az általánosított Fubini[156] számok értelmezését és tulajdonságait ismertetjük. Igazoljuk az általánosított Fubini számok és a másodfajú Stirling, illetve az Euler-féle számok közti kapcsolatot.

Rögzített $n \in \mathbb{N}^*$ esetén az n-edik Fubini szám (a_n) egy n elemű halmaz rendezett partícióinak száma. Látható, hogy $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, és $a_3 = 13$.

Az a_n-re vonatkozóan megemlítünk néhány eredményt:

(i) Az $S(n, j)$ másodfajú Stirling szám egy n elemű halmaz j nemüres halmazból álló particióinak a száma. Igazolható, hogy

$$a_n = \sum_{j=1}^{n} j!\, S(n, j). \tag{7.1}$$

(ii) Ha σ egy permutációja a $\mathbb{N}_n^* = \{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak, akkor azt mondjuk, hogy σ-nak i-nél növekvése (csökkenése) van, ha $\sigma(i) < \sigma(i+1)$ ($\sigma(i) >$ $> \sigma(i+1)$). Az $A(n, j)$ Euler-féle szám azoknak a σ permutációknak a száma, amelyeknek pontosan $j-1$ helyen van növekvésük. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$a_n = \sum_{j=1}^{n} 2^{j-1} A(n, j). \tag{7.2}$$

(iii) Igaz az

$$a_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^n}{2^{j+1}} \tag{7.3}$$

összefüggés.

(iv) A Fubini számok exponenciális generátorfüggvénye

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{2 - e^z}, \tag{7.4}$$

ahol $a_0 = 1$ és $|z| < \ln 2$. Ezzel ekvivalens a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!} = \frac{e^z - 1}{2 - e^z} \tag{7.5}$$

összefüggés.

[156] Guido Fubini, 1879 - 1943

(v) Teljesül az

$$\frac{a_n}{n!} \approx \frac{1}{2(\ln 2)^{n+1}}, \quad n \to \infty \tag{7.6}$$

aszimptotikus becslés.

A (7.1), (7.2) és (7.4) egyenlőségek bizonyítása megtalálható [24]-ben (228. oldal). A (7.3), (7.4) és (7.6) összefüggések [46]-ban találhatók meg (1.15-ös feladat). A (7.3) és (7.4) egyenlőségek [71]-ben is megtalálhatók (3.32-es feladat).

[54]-nek megfelelően értelmezzük egy halmaz *k-ig cimkézett rendezett partícióit*. Az $\mathbb{N}_n^*$ halmaz egy k-ig cimkézett rendezett partíciója egy olyan rendezett partíciója a $\mathbb{N}_n^*$ halmaznak, amelyben minden halmazt ellátunk egy $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ cimkével úgy, hogy az első halmaz cimkéje 1 legyen.

Az $f_{n,k}$ általánosított Fubini szám az $\mathbb{N}_n^*$ halmaz k-ig cimkézett rendezett partícióinak száma. Az értelmezés alapján $f_{n,1} = a_n$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Ugyanakkor $f_{0,k} = 1$, ha $k \in \mathbb{N}^*$. Ezeknek a számoknak néhány tulajdonsága megtalálható az [54] cikkben.

7.1. Tulajdonság. *Teljesül az*

$$f_{1,k} = 1, \quad f_{n,k} = 1 + k\sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} f_{j,k}, \ n \geq 2 \tag{7.7}$$

rekurzió.

Bizonyítás. Ha $n = 1$, akkor csak egy eleme van a partíciónak, és ezt 1-gyel cimkézzük, tehát ebben az esetben (7.7) teljesül.

Ha $n \geq 2$, akkor minden $1 \leq j \leq n-1$ esetén az $\mathbb{N}_n^*$ halmaznak kiválasztjuk egy $(n-j)$ elemű részhalmazát, és ezt cimkézzük 1-gyel. Ez lesz a partíció első halmaza. Ezt $\binom{n}{j}$ különböző módon tehetjük meg. A megmaradt j elemből $f_{j,k}$ darab k-ig cimkézett rendezett partíció készíthető, de ezekben az első halmaz cimkéje kicserélhető, tehát $k\binom{n}{j}f_{j,k}$ darab k-ig cimkézett rendezett partíciót kaphatunk. Ha $j = n$, akkor csak egy eleme van a partíciónak és ezt 1-gyel cimkézzük, tehát (7.7) teljesül. □

7.2. Tulajdonság. *Az $f_{n,k}$ sorozat exponenciális generátorfüggvénye*

$$F_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n,k}\frac{z^n}{n!} = \frac{e^z - 1}{k + 1 - ke^z}. \tag{7.8}$$

Bizonyítás. A (7.8) bizonyításához a (7.7) egyenlőséget használjuk.

$$F_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n,k}\frac{z^n}{n!} = z + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n,k}\frac{z^n}{n!} = z + \sum_{n=2}^{\infty}\left(1 + k\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}f_{j,k}\right)\frac{z^n}{n!} =$$

$$= -1 + e^z + k\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}f_{j,k}\frac{z^n}{n!} = -1 + e^z + k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\sum_{i=1}^{\infty}f_{i,k}\frac{z^i}{i!} =$$

$$= -1 + e^z + k(e^z - 1)F_k(z).$$

Ezek alapján

$$F_k(z) = -1 + e^z + k(e^z - 1)F_k(z),$$

tehát (7.8) teljesül. $k = 1$ esetén visszakapjuk a (7.5) egyenlőséget. □
Megjegyzés. A (7.8) összefüggésből a (7.7) azonnal következik, mert

$$(k + 1 - ke^z)F_k(z) = e^z - 1,$$

$$\left(1 - k\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^m}{m!}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_{n,k}\frac{z^n}{n!}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!},$$

és a megfelelő hatványok együtthatóit azonosítva

$$f_{n,k}/n! - k\sum_{\substack{m+j=n\\ m,j\geq 1}} f_{m,k}/(m!j!) = 1/n!, \quad n \geq 1,$$

ami éppen a (7.7) egyenlőség. △

7.3. Tulajdonság. *Teljesül az*

$$f_{n,k} = \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}f_{j,k}f_{n-j,k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots \tag{7.9}$$

rekurzió.

Bizonyítás. [54]-ben találhatunk erre egy kombinatorikus bizonyítást is, itt csak az analitikus bizonyítást részletezzük. Feltételezzük, hogy $k \geq 2$. Az $F_k(z)$ képletéből következik, hogy

$$(1 + F_k(z))\, F_{k-1}(z) = F_k(z),$$

tehát írhatjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{n,k}z^n/n! = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_{n,k}z^n/n!\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_{n,k-1}z^n/n!\right).$$

Ha azonosítjuk a z^n együtthatóját az egyenlőség két oldalán, akkor az

$$f_{n,k}/n! = \sum_{j=0}^{n-1} f_{j,k} f_{n-j,k-1}/(j!(n-j)!)$$

egyenlőséget kapjuk, ami éppen a (7.9) rekurzió. $\triangle$

7.4. Tulajdonság. *Teljesül az*

$$f_{n,k} = \sum_{j=1}^{n} k^{j-1} j! S(n,j) \tag{7.10}$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Az $\mathbb{N}_n^*$ halmaz minden j halmazból álló osztályfelbontásából $j!$ rendezett partíció alkotható, tehát ezeknek a száma $j!S(n,j)$. Ha az első halmazt 1-gyel cimkézzük és a többit tetszőlegesen, akkor ez $k^{j-1}j!S(n,j)$ lehetőséget jelent, tehát az összes k-ig cimkézet rendezett osztályfelbontások száma $\sum_{j=1}^{n} k^{j-1} j! S(n,j)$. $\square$

Megjegyzés. Igazolható, hogy ebből az összefüggésből következik az exponenciális generátorfüggvény alakja (lásd [54]). $k=1$ esetén visszakapjuk a (7.1) egyenlőséget. $\triangle$

7.5. Tulajdonság. *Teljesül az*

$$f_{n,k} = \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^j j^n \tag{7.11}$$

reprezentáció ($k=1$ esetén visszakapjuk a (7.3) egyenlőséget).

Bizonyítás. Az $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \dots$, ha $|x| < 1$ azonosság alapján

$$F_k(z) = -\frac{1}{k} + \frac{1}{k(k+1)} \frac{1}{1 - \dfrac{k}{k+1} e^z} = -\frac{1}{k} + \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{ke^z}{k+1}\right)^j =$$

$$= -\frac{1}{k} + \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^j \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j^n}{n!} z^n = -\frac{1}{k} + \frac{1}{k(k+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^j j^n \frac{z^n}{n!},$$

ahonnan következik a (7.11) egyenlőség. $\square$

7.6. Tulajdonság. *Teljesül az*

$$f_{n,k} = \sum_{j=1}^{\infty} A(n,j) k^{n-j} (k+1)^{j-1} \tag{7.12}$$

egyenlőség ($k=1$ esetén visszakapjuk a (7.2) azonosságot).

7.1. Tétel. *Az* $l_k = \ln(1+1/k)$, $k \in \mathbb{N}^*$ *jelöléssel*

$$\frac{f_{n,k}}{n!} = \frac{1}{k(k+1)}\left[\frac{1}{l_k^{n-1}} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(l_k+2\pi i m)^{n+1}} + \frac{1}{(l_k-2\pi i m)^{n+1}}\right)\right]. \tag{7.13}$$

Bizonyítás. Kifejezzük az $F_k(z)$ függvényt a ctg függvény segítségével és használjuk a

$$\mathrm{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{z+k\pi}\right)$$

azonosságot, ahol z nem egész számú többszöröse π-nek.

Ha $z = 2\pi i u + l_k$, akkor

$$F_k(z) = -\frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{k+1-ke^z}\right) = -\frac{1}{k} - \frac{1}{k(k+1)(e^{2\pi i u}-1)} =$$
$$= -\frac{1}{k} - \frac{\cot \pi u - i}{2ik(k+1)} = -\frac{1}{k} + \frac{1}{2k(k+1)} - \frac{\pi \cot \pi u}{2\pi i k(k+1)} =$$
$$= -\frac{1}{k} + \frac{1}{2k(k+1)} - \frac{1}{2\pi i k(k+1)}\left[\frac{1}{u} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{u-m} + \frac{1}{u+m}\right)\right] =$$
$$= -\frac{1}{k} + \frac{1}{2k(k+1)} + \frac{1}{k(k+1)}\left[\frac{1}{l_k - z} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{l_k - z - 2\pi i m} + \frac{1}{l_k - z + 2\pi i m}\right)\right],$$

tehát a (7.13) egyenlőség igaz. □

A (7.13) reprezentáció alapján igazolható a következő két aszimptotikus közelítés (lásd [54]).

7.7. Tulajdonság. *Rögzített* k*-ra*

$$\frac{f_{n,k}}{n!} \approx \frac{1}{k(k+1)l_k^{n+1}}, \quad n \to \infty. \tag{7.14}$$

$k=1$ *esetén visszakapjuk a (7.6) összefüggést.*

7.8. Tulajdonság. *Rögzített* n*-re*

$$f_{n,k} \approx \frac{n!}{k(k+1)l_k^{n+1}}, \quad k \to \infty. \tag{7.15}$$

A mellékelt táblázat néhány általánosított Fubini számot tartalmaz.

	k=1	k=2	k=3	k=4
n=1	1	1	1	1
n=2	3	5	7	9
n=3	13	37	73	121
n=4	75	365	1 015	2 169
n=5	541	4 501	17 641	48 601
n=6	4 683	66 605	367 927	1 306 809
n=7	47 293	1 149 877	8 952 553	40 994 521
n=8	545 835	22 687 566	248 956 855	1 469 709 369
n=9	7 087 261	503 589 781	7 538 499 561	59 277 466 201
n=10	102 247 563	12 420 052 205	270 733 288 647	2 656 472 295 609

Szakirodalom

[1] BARICZ, Á., *Landen type inequality for Bessel functions,* Comput. Method. Funct. Theory. **5** (2005), 373-379

[2] ANDRÁS SZ., CSAPÓ H. és SZILÁGYI J., *Matematika a IX. osztály számára*, Státus Kiadó, 2002.

[3] ANDRÁS SZ. és SZILÁGYI J., *Matematika a X. osztály részére*, Ábel Kiadó, 2001.

[4] ANDRÁS SZ., BALÁZS V., CSAPÓ H. és SZILÁGYI J., *Matematika a XI. osztály számára*, Státus Kiadó, 2002.

[5] ANDRÁS SZ., CSAPÓ H., és LUKÁCS A., *Matematika a XII. osztály számára*, Státus Kiadó, 2002.

[6] ANDRÁS SZ., SZILÁGYI M., CSAPÓ H., LÁSZLÓ T. és SZILÁGYI J., *Matematika a XII. osztály számára, megoldások*, Státus Kiadó, 2004.

[7] GH. ANDREI, I. CUCURUZEANU és CARAGEA C., *Probleme de algebră*, Editura GIL, 1996.

[8] L. ARAMĂ és T. MOROZAN, *Culegere de probleme de analiză matematică*, Ed. Universal Pan, Bukarest, 1996.

[9] D. H. BAILEY, P. B. BORWEIN és S. PLOUFFE, *On the rapid computation of various polylogarithmic constants*, Math. Comp. **66** (1997), 903–913.

[10] BALÁZS M. és KOLUMBÁN J., *Matematikai Analízis*, Dacia, Kolozsvár, 1978.

[11] D. M. BĂTINEŢU, *Probleme de matematică pentru treapta a II-a de liceu*, Albatros, Bukarest, 1979.

[12] BEGE A., *Differenciaegyenletek*, Egyetemi Kiadó, Kolozsvár, 2005.

[13] M. BIERNACKI and J. KRZYŻ, *On the monotonity of certain functionals in the theory of analytic functions.*

[14] H. BOHR és I. MOLLERUP, *Loerbog I Matematisk Analyse*, vol. 3, Kopenhagen, 1922.

[15] J. M. BORWEIN, *The life of* π, Australian Colloquia, June 21 - July 17, 2003, www.cecm.sfu.ca/ jborwein/taks.html.

[16] W. W. BRECKNER, *Analiză matematică. Topologia spaţiului* $\mathbb{R}^n$, Universitatea Babesş-Bolyai, Cluj-Napoca, 1985.

[17] ULAM BURKART, *Interval mapping graph and periodic points of continous functions*, Journal of Combinatorial Theory Series B **32** (1982), 57-68.

[18] G.J. BUTTLER és G. PIANIGIANI *Periodic points and chaotic functions in the unit interval*, Bull. Austral Math. Soc., **18** (1978), 255-265.

[19] H. CARTAN, *Calcul Différentiel. Formes Différentielles*, Hermann, Paris, 1967.

[20] R. W. CHEN, B. ROSENBERG és L. A. SHEPP, *A secretary problem with two decision makers*, kiadatlan jegyzet.

[21] W.-S. CHEUNG, *Generalizations of Hölder's inequality*, Internat. J. Math. & Math. Sci. **26** (2001), no. 1, 7–10.

[22] Ş. COBZAŞ, *Analiză matematică*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 1997.

[23] I. COLOJOARĂ, *Analiză matematică*, EDP, 1983.

[24] L. COMTET, *Advanced Combinatorics*, D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht, 1974.

[25] M.O. DRIMBE, *200 de identităţi şi inegalităţi cu "partea întreagă"*, Editura GIL, 2004.

[26] D. I. DUCA és E. DUCA, *Culegere de probleme de analiză matematică, 1,2*, GIL, Zalău, 1997.

[27] R. ENGELKING, *General Topology*, Monografie Matematyczne, PWN, Warszawa, 1977.

[28] S. R. FINCH, *Optimal stopping problem*, kiadatlan jegyzet, 2003.

[29] B. GNEDENKO, *The Theory of Probability*, Mir, Moscow, 1976.

[30] B. GOUREVICH, *L'univers de Pi*, //go.to/pi314.

[31] R. L. GRAHAM, D. E. KNUTH, és O. PATASHNIK, *Konkrét Matematika*, Műszaki Könyvkiadó, 1998.

[32] HAJNAL A. és HAMBURGER P., *Halmazelmélet*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.

[33] P. R. HALMOS, *Naive Set Theory*, Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1967.

[34] E. HEWITT és K. STROMBERG, *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1975, A modern treatment of the theory of functions of a real variable, Third printing, Graduate Texts in Mathematics, No. 25.

[35] C.-W. HO és CH. MORRIS, *A graph theoretic proof of Sharkovsky's theorem on the periodic points of continuous functions*, Pacific Journal of Mathematics, **96** (1981), 361-370.

[36] S.-R. HSIAU és J.-R. YANG, *A natural variation of the standard secretary problem*, Statist. Sinica **10** (2000), 639–646.

[37] X.C. HUANG, *From intermediate value to chaos*, Math. Mag, **65** (1992), 91-103.

[38] V. A. ILYIN és E. G. POZNYAK, *Fundamentals of Mathematical Analysis*, Mir, Moscow, 1982.

[39] IZSÁK J., JUHÁSZ P., és VARGA Z., *Bevezetés a Bio-Matematikába*, Tankönyvkiadó, 1982.

[40] J. E. JAYNE, *IMC International Mathematics Competition for University Students*, Princeton, 2003.

[41] T. J. JECH, *Lectures on Set Theory with Particular Emphasis on the Method of Forcing*, Lecture Notes on Mathematics, vol. 217, Springer, Berlin, 1971.

[42] P.E. KLOEDEN, *Chaotic differenece equations are dense*, Bull. Austral. Math. Soc, **15** (1976), 371-379.

[43] ______, *On Sarkovsky's cycle coexistence ordering*, Bull. Austral. Math. Soc., **20** 1979, 171-177.

[44] D. E. KNUTH, *Seminumerical Algorithms*, second ed., The Art of Computer Programming, vol. 1-7, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1973.

[45] T.Y. LIE és J.A. YORKE, *Period three implies chaos*, Am. Math. Mon., **82** (1975), 985-992.

[46] LOVÁSZ L., *Combinatorial Problems and Exercises*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1979.

[47] I. MARUŞCIAC, *Analiză matematică I*, Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, 1980.

[48] O. MAYER, *Teoria funcţiilor de variabilă complexă*, Acad. R.S.R., Bukarest, 1981.

[49] M. MEGAN, *Bazele analizei matematice*, Matuniv, vol. 2, Eurobit, Timişoara, 1997.

[50] ______, *Analiză matematică*, vol. 1, Mirton, Timişoara, 1999.

[51] ______, *Analiză matematică*, vol. 2, Mirton, Timişoara, 1999.

[52] M. MEGAN, A. L. SASU és B. SASU, *Calcul diferenţial pe* $\mathbb{R}$ *prin probleme şi exercitţii*, West University Press, Timişoara, 2001.

[53] C. MEGHEA, *Fundamentele analizei matematice*, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucharest, 1977.

[54] M. MUREŞAN, *On the generalized Fubini numbers*, Stud. Cerc. Mat. **37** (1985), no. 1, 70–76.

[55] ______, *Introducere în controlul optimal*, Risoprint, Cluj-Napoca, 1999.

[56] ______, *Introduction to Set-Valued Analysis*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 1999.

[57] ______, *Analiză nenetedă şi aplicaţii*, Risoprint, Cluj-Napoca, 2001.

[58] M. NICOLESCU, *Analiză Matematică*, vol. I, Ed. Tehnică, Bukarest, 1957.

[59] PÓLYA GY. és SZEGÖ G., *Problems and Theorems in Analysis* I, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[60] K.K. PONOMARJOV, *Differenciálegyenletek felállítása és megoldása*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1969.

[61] T. POPOVICIU, *Numerical Analysis. Basic Notions of Approximative Calculus*, Calculus Theory, Numerical Analysis, and Computer Science, vol. 1, Acad. R. S. R., Bucharest, 1975.

[62] W. RUDIN, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1976.

[63] V. A. SADOVNICHIĬ, A. A. GRIGORIAN és S. B. KONIAGIN, *Problems from Students's Mathematics Olympiads*, Ed. Moscow University, 1987.

[64] R. SCOVILLE, *The hat-check problem*, Amer. Math. Monthly **73** (1966), no. 3, 262–265.

[65] A.N. SHARKOVSKI, *Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself*, Ukrainian Math. J. **16** (1964), 61-71.

[66] W SIERPINSKI, *Cardinal and ordinal numbers*, Tankönyvkiadó, 1982.

[67] G. SIREŢCHI, *Calcul diferenţial şi integral I, II*, EDP, Bucharest, 1985 (Romanian).

[68] P. STEFAN, *A theorem of Sarkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorrphism of the real line*, Commun. Math. Phys., **54** 1977, 237-248.

[69] P.D. STRAFFIN, *Periodic points of a continuous function*, Math. Mag, **51** (1978), 99-105.

[70] E. C. TITCHMARSH, *The Theory of Functions*, second ed., Oxford University Press, Oxford, 1939.

[71] I. TOMESCU, *Combinatorial Problems and Graph Theory*, Ed. Didactică şi Pedag., Bucharest, 1981 (Romanian).

[72] M. VUORINEN and S. PONNUSAMY, *Asymptotic expansions and inequalities for hypergeometric functions*, **44** (1997), no. 2, 278–301.

[73] E. W. WEISSTEIN, *Archimedes' Recurrence Formula*,

http://mathworld.wolfram.com/ArchimedesRecurrenceFormula.html.

[74] Gaz. Mat. (Bukarest).

[75] BAO-QUAN YUAN, *Refinements of Carleman's inequality*, J. Ineq. Pure Appl. Math. **2** (2001), no. 2, Art. 21.

Szimbólumok

$x \in A$, 2
$\emptyset$, 2
$\mathbb{N}$, 2
$\mathbb{Z}$, 2
$\mathbb{N}^*$, 2
$\mathbb{Q}$, 2
$A \cup B$, 3
$A \cap B$, 3
$A \setminus B$, 5
$\complement_X A$, 5
$A \triangle B$, 6
$X \times Y$, 6
$\inf\ A$, 10
$\sup\ A$, 10
$\mathbb{R}$, 18
$\sqrt[n]{x}$, 21
$|A|$, 25
$\aleph_0$, 25
$\operatorname{int} A$, 28
$\mathcal{C}$, 29
$\operatorname{cl} A$, 30
$\operatorname{fr}\ A$, 33
$(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_p)$, 51
$(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_\infty)$, 51
$\operatorname{lin} Y$, 53
$\dim X$, 55
$\langle\cdot,\cdot\rangle$, 58
$\mathrm{B}(x,r)$, 66
$\mathcal{O}$, 66
$\operatorname{int} A$, 66
$\operatorname{cl} A$, 67
A', 68
$\operatorname{fr}\ A$, 69
$\mathrm{diam} A$, 70
$x_n \to x^*$, 85
$\lim_{n\to\infty} x_n$, 85
$\lim x_n$, 85
$M(a,b)$, 96
$\mathcal{D}_I$, 170
$\mathcal{A} \otimes \mathcal{R}$, 283

Névmutató

Abel, N. H., 16, 52, 124, 139, 283
D'Alembert, J., 133
Apery, Roger, 145
Arkhimédesz, 19, 20, 24, 329

Baire, R.-L., 92
Banach, S., 57, 198
Barbălat, I., 281
Bernoulli, J., 37
Bernstein, S. N., 160
Borchardt, C. W., 96, 330
Borel, E., 77
Bourbaki, N., 230, 231, 306
Buffon, G. L. L., 331
Buniakovski, V. Ya., 52, 58, 59, 62
Butler G. és Pianigiani G., 191

Cantor, G. F. L. Ph., 1, 27, 28, 77, 79, 80, 91, 167
Carleman, T., 132
Cartesius, R., 6
Catalan, E. Ch., 111
Cauchy, A. L., 38, 52, 58, 59, 62, 89–91, 122–124, 128, 129, 133, 137, 139–142, 148, 154, 161, 198, 223
Cesaro, E., 99, 102, 110
Csebisev, P.L., 41

Darboux, G., 170, 193–195, 233, 268–270, 277, 279–283
Darboux, G. , 271
Dedekind, R., 17
Denjoy, A., 230, 231, 306
Descartes, R., 6, 7
Dini, U., 211
Dirichlet, P. G. L., 140, 283
Duhamel, J. M. C., 134

Euklidesz, 50, 65, 70, 327
Euler, L., 110, 144, 145, 283, 289, 337

Fermat, P., 222, 241, 318
Fréchet, R. M., 301
Fubini, G., 337, 338, 341

Gâteaux, M. R., 301–303
Gauss, K. F., 136
Gelfond, A. , 289
Grönwall, T. H., 289, 290
Gregory, J., 253

Hadamard, J. S., 137
Heine, H. E., 77, 154, 155
Hermite, Ch., 287
Hilbert, D., 58, 289
Hipassus, 327
Hölder, O. L., 60–63
L'Hospital, G. F. A., 233

Jensen, J. L. W. V., 201, 204, 242
Jordan, C., 209

Kloeden P., 189
Kummer, E. E., 136

Lagrange, J. L., 40, 109, 223, 242, 321
Lalescu, T., 111
Leibniz, G. W., 140, 236, 253
Li T. Y. és Yorke J., 176
Lindemann, C.L.F., 287
Lipschitz, R. O. S., 197, 198, 230

Machbin, J., 253
Maclaurin, C., 40, 237, 238
Mascheroni, L., 110, 289
Mertens, F., 124
Minkowski, H., 51, 64
de Morgan, A., 5

Napier, J., 224
Newton, I., 105, 252
Niven, I., 285

Pfaff, J. F., 96, 330
Pithagorász, 327

Raabe, J. L., 134
Riemann, G. F. B., 143
Riesz, F., 298
Rolle, M., 224

Schlömilch, O. X., 238
Schwarz, H. A., 58, 59, 316
Sharkovski A. N., 176
Sierpinski, W., 195
Simpson, T., 336
Stieltjes, T. J., 268–271
Stirling, J., 285, 337
Stolz, O., 99, 102, 110
Straffin P.D., 177
Sylvester, J. J., 300

Taylor, B., 236, 245, 247, 248, 250, 251, 319, 320

Weierstrass, W. T. K., 42, 78, 79, 148, 160, 217

Young, W. H., 60, 242

Tárgymutató

összeadás, 15
összeg
  Darboux
    alsó, 256
  részlet, 247
állandó
  Euler-Mascheroni, 110
átmérő, 70

azonosság
  Lagrange, 40

bázis, 54
  kanonikus, 55
belső, 66
belső pont, 28

család, 1
  páronként diszjunkt, 4
csoport
  kommutatív, 16

derivált
  irány menti, 314
  parciális, 310
differenciál
  G-differenciál, 303
  Gâteaux, 303
  gyenge, 302
dimenzió, 54
  véges, 50

egyenlőtlenség
  Bernoulli, J., 37
  Carleman, 132
  Cauchy-Buniakovski-Schwarz, 59
  Csebisev, 41
  háromszög, 65
  Jensen, 201
  középarányosok
    súlyozott, 243
  középarányosok közti, 38
  Maclaurin, 40
  Napier, 224
  Weierstrass, 42
  Young, 60
egyenlet
  függvény
    Cauchy, 161
egyenletesen folytonos leképezés, 166
ekvivalencia osztály, 13
elem, 1
  egység, 16
  ellentett, 16
  inverz, 16
  korlát
    alsó, 9
    felső, 10
    legkisebb felső, 10
    legnagyobb alsó, 10
  legkisebb, 9
  null, 16
  zérus, 16
epigráf, 200

függvény, 10
  k-ad rendű derivált, 236
  abszolút érték, 17
  additív, 55
  affin, 200
  analitikus, 247
  Darboux tulajdonságú, 170, 193
  deriválható
    halmazon, 217
    pontban, 217
  derivált, 217
    elsőrendű, 217
    másodrendű, 235
  egészrész, 22
  folytonos egy pontban, 158
  folytonosan differenciálható, 312
  Fréchet differenciál

    pontban, 304
  Fréchet differenciálható
    halmazon, 306
  gamma, 283
  halmazon folytonos, 158
  homogén, 55
  identikus, 56
  injektív, 11
  integrálható
    Darboux, 268
    Darboux-Stieltjes, 269
  invertálható, 10
  kétszer deriválható, 236
  kétszer Fréchet differenciálható
    halmazon, 315
    pontban, 315
  konvex, 200
    Jensen, 204
    szigorúan, 200
  korlátos változású, 206
  Lagrange, 321
  lineáris, 55
  Lipschitz tulajdonságú, 197
  másodrendű differenciál, 315
  monoton, 171
    növekvő, 171
    sehol sem, 174
  növekmény, 202
  periodikus, 192
  primitív, 254
  szürjektív, 11
  szakadási pont, 171
  törtrész, 22
  távolság, 18
  zéta, 144
főminoránsok, 300
faktorhalmaz, 13
felosztás, 205, 256, 267
  finomítás, 269
  normája, 267
fixpont, 198
funkcionál, 55, 297
gömb, 65
  nyílt, 65
gradiens, 314
gyök
  n-edrendű, 21
  köb-, 21
  négyzet-, 21
gyűjtemény, 1

házasodási probléma, 336
halmaz, 1
  összefüggő, 170
  üres, 2
  átmérő, 70
  Cantor, 80
  határa, 33, 69
  inverz képe, 10
  képe, 10
  kompakt, 74
  korlátlan, 70
  korlátos, 10, 70
    alulról, 9
    felülről, 10
  legfeljebb megszámlálható, 25
  lezárás, 30, 67
  művelet
    Descartes-szorzat, 6
    egyesítés, 3
    metszet, 3
    szimmetrikus különbség, 5
  megszámlálható, 25
  megszámlálhatatlan,, 25
  nemkorlátos, 10
  nyílt, 28, 66
  osztályfelbontás, 4
  partíció, 4
  prekompakt, 92
  rendezett, 8
    jól, 9
    teljesen, 9
  sűrű, 32, 70
  tökéletes, 70
  véges, 25

végtelen, 25
zárt, 29, 67
halmazok
diszjunkt, 4
különbsége, 5
határérték
egyenletes, 121
pontszerű, 121
határpont, 32
hatványsorok, 246

infimum, 10
integrál
Darboux
általánosított, 277
abszolút konvergens, 280
alsó, 256, 268
felső, 268
feltételesen konvergens, 280
Darboux-Stieltjes
alsó, 268
felső, 268
Euler
másodfajú, 283
improprius, 277
integrálás
parciális, 273, 283
intervallum, 22
hossza, 22
korlátos, 22
nemkorlátos, 22
iránymenti derivált, 314

köbgyök, 21
környezet, 31, 68
közép
számtani-mértani, 331
középarányos
hatvány, 61
számtani-mértani, 96
képlet
Leibnitz, 236
Leibniz-Gregory, 253
Simpson, 336
Taylor, 236
Kakeya tétele, 116
k-ig cimkézett rendezett partíció, 338
kompakt
halmaz, 74
megszámlálhatóan, 75
szekvenciálisan, 75
tér, 74
komponens, 160
kongruencia, 8
kontrakció, 198
konvergencia
egyenletes, 121
pontonkénti, 121
konvergencia sugár, 137, 246
koordináta, 49
kritérium
összehasonlítási, 128
egyenletes konvergencia, 122, 148
Gauss, 136
gyök, 133
hányados, 133
kondenzációs, 129
Kummer, 136
Raabe-Duhamel, 134
Weierstrass, 148
kvadratikus
alak, 300
alternáló, 300
definit, 300
negatív definit, 300
pozitív definit, 300
szemi-definit, 300

Lagrange-féle multiplikátorok
módszere, 321
lefödés
nyílt, 74
lefödése, 73
leképezés, 10
izometria, 71
kvadratikus, 300
lineáris burkoló, 53

lineáris kombináció, 53
lineáris tér, 50
lineárisan függő rendszer, 54
lineárisan független, 54

mátrix
  főminoránsok, 300
  szimmetrikus, 300
módszer
  multiplikátorok
    Lagrange-féle, 321
maximum
  lokális, 222, 318
    szigorú, 222, 318
metrika, 65
  euklideszi, 65
minimum
  globális, 204
  lokális, 222, 318
    szigorú, 222, 318
multiplikátor
  Lagrange-féle, 321

négyzetgyök, 21
nevező, 2
norma, 52, 56
  l^∞-norma, 51
  Csebisev, 51
  euklideszi, 50
  l^1-norma, 51
  l^p-norma, 51
  Minkowski, 51
nullelem, nullvektor, 50

operátor, 10
  null-, 296
optimális megállás problémája, 336
origó, 50
osztály, 1

paralelogramma szabály, 59
partíció
  halmaz, 4
  rendezett
    k-ig cimkézett, 338
polinom
  Niven-féle, 285
pont, 49
  aderens, 32
  izolált, 69
  stacionárius, 318
pozitív tagú szubkonvex sorozatok konvergenciája, 115
probléma
  összejövetel, 334
  Buffon-féle, 331
  házasodási, 336
  kártya keverési, 334
  kalapmegőrző, 334
  optimális megállás, 336
  szultán háremének problémája, 336
  titkárnő, 336

részhalmaz, 2
  valódi, 3
részhalmaz által kifeszített lineáris résztér, 53
részsorozat, 88
reláció, 7
  összetevés, 7
  bináris, 7
  doménium, 7
  egyértékű, 10
  ekvivalencia, 7
    reflexív, 8
    szimmetrikus, 8
    tranzitív, 8
  inverze, 7
  rendezés
    antiszimmetrikus, 8
    jól, 9
    parciális, 8
    reflexív, 8
    teljes, 9
    tranzitív, 8
  szorzat, 7
  tartománya, 7

rendezett pár, 6

skaláris szorzat, 50
sor
  összege, 147
  binomiális, 252
  divergens, 123
  függvény, 147
    abszolút konvergens, 148
    egyenletesen konvergens, 148
    konvergens, 147
  hatvány
    konvolúció, 249
  hipergeometrikus, 137
  konvergencia sugara, 246
  konvergens, 123
  Taylor, 247
sorok
  összehasonlítási kritérium, 128
  általános kritérium, 123
  abszolút konvergens, 141
  feltételesen konvergens, 141
  gyök-kritérium, 133
  hányadoskritérium, 133
  harmonikus, 130
  hatvány, 137, 246
  kondenzációs kritérium, 129
  konvergencia sugár, 137
  kritérium
    Cauchy, 133
    D'Alembert, 133
    Kummer, 136
sorozat, 12
  Cauchy, 57, 89
  divergens, 75, 85
  függvény
    konvergens, 120
  függvények
    Cauchy, 211
  fundamentális, 57, 89
  határérték
    alső, 98
    felső, 98
  határértékpontja, 75
  konvergáló, 75
  konvergens, 56, 75, 85
  konvex, 119
  korlátos, 85
  monoton, 92
    csökkenő, 92
    növekvő, 92
  szubkonvex, 116
  szukcesszív approximációs, 199
  tag, 12
szám
  algebrai, 24
  egész, 2
  egész rész, 22
  irracionális, 24
  racionális, 2
  törtrész, 22
  természetes, 2
  transzcendens, 24
  valós, 18
számláló, 2
számosság, 25
szakadási pont
  elsőfajú, 171
  másodfajú, 171
szorzás, 15
szorzat
  scaláris, 58
szubkonvex sorozat, 115
p-ed rendű szubkonvex sorozat, 115
szultán háremének problémája, 336
szuprémum, 10

távolság, 65
  euklideszi, 65
tér
  Hilbert, 58
  lineáris, 50
  metrikus, 64
    háromszög egyenlőtlenség, 65
    izometrikus, 71
    szétválasztható, 72

pre-Hilbert, 58
teljes, 90
topológikus, 70
vektor, 50, 52
komplex, 52
normált, 56
valós, 52
tétel
Cesaro-Stolz, 99
tartomány
konvergencia, 246
Taylor polinom, 236
maradék, 236
Taylor sor, 247
test
rendezett
teljesen, 16
titkárnő problémája, 336
topológia, 70
torlódási pont, 32, 68
transzcendens, 287
transzformáció, 10
trichotómia, 9

változás, 205
korlátos, 210
teljes, 206, 210
variáció
G-variáció, 302
Gâteaux, 302
vektor, 49
résztér, 53
vektortér, 50

zéta függvény, 144