AVIZUL COORDONATORULUI ȘTIINȚIFIC

Subsemnatul **dr. András Szilárd**, conferențiar la Facultatea de Matematică și Informatică a Universității Babeș-Bolyai, avizez lucrarea *Aplicarea metodelor vedice în predarea matematicii la clasele liceale*, elaborată de Oláh Csaba, profesor de matematică la Liceul Tehnologic „Liviu Rebreanu” din Bălan, pentru depunere la DPPD.

Data:_____ Semnătura:_____

Coordonator științific,

Lector dr. András Szilárd

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI, CLUJ-NAPOCA
DEPARTAMENTUL PENTRU PREGĂTIREA PERSONALULUI DIDACTIC
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

LUCRARE METODICO-ŞTIINŢIFICĂ PENTRU OBŢINEREA GRADULUI DIDACTIC I

COORDONATOR ŞTIINŢIFIC:
conf. dr. András Szilárd

CANDIDAT:
Oláh Csaba
Liceul Tehnologic *Liviu Rebreanu*
Bălan

CLUJ NAPOCA

SERIA
2014-2016

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI, CLUJ-NAPOCA
DEPARTAMENTUL PENTRU PREGĂTIREA PERSONALULUI DIDACTIC
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

LUCRARE METODICO-ŞTIINŢIFICĂ PENTRU OBŢINEREA GRADULUI DIDACTIC I

Aplicarea metodelor vedice în predarea matematicii la clasele liceale

COORDONATOR ŞTIINŢIFIC:
conf. dr. András Szilárd

CANDIDAT:
Oláh Csaba
Liceul Tehnologic *Liviu Rebreanu*
Bălan

CLUJ NAPOCA

SERIA
2014-2016

BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM
TANÁRKÉPZŐ INTÉZET
MATEMATIKA-INFORMATIKA KAR

I-ES FOKOZATI SZAKDOLGOZAT

Védikus módszerek alkalmazása a középiskolai matematika oktatásában

TÉMAVEZETŐ TANÁR:
dr. András Szilárd docens

TANÁR:
Oláh Csaba
***Liviu Rebreanu* Szakközépiskola,**
Balánbánya

KOLOZSVÁR
2014-2016

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék **1**

1.Fejezet: A matematika tanításának problémáiról – az *Eurydice* jelentés **4**

1.1. Gyenge teljesítmény a matematika terén 4

1.2. A tanulók motiváltságának erősítése 6

2.Fejezet: A védikus matematika **9**

2.1. Általános bemutatás 9

2.2. A védikus matematika helyzete Indiában 15

3.Fejezet: Védikus módszerek alkalmazása a középiskolai matematika oktatásában **17**

3.1. Alapműveletek 17

3.1.1. Az „*Ekadhikena Purvena*” – szútra. Az 5-tel végződő számok négyzete 17

3.1.2. Az $\frac{1}{19}$ tizedes törtté alakítása 18

3.1.3. Szorzás az alapok segítségével - a „*Nikhilam navatascaramam Dasatah*” – szútra 21

3.1.3.1. A szorzótényezők kisebbek mint az alap 22

3.1.3.2. A szorzótényezők nagyobbak mint az alap 22

3.1.3.3. Az egyik tényező kisebb mint az alap, a másik nagyobb 23

3.1.4. Szorzás 10^k - tól különböző alap esetén 24

3.1.5. $999\ldots$-cel való szorzás 26

3.1.6. Függőlegesen és átlósan – az “*Urdhva Tiryagbhyam” - szútra* 27

3.1.7. Három kétjegyű szám szorzata 31

3.1.8. Szorzás vonalakkal 32

3.1.9. Négyzetre emelés védikusan. 34

3.1.9.1. A „*Yavadunam Tavadunikrtya Varganca Yojayet*” szútra 34

3.1.9.2. Általános módszer 36

3.1.10. Négyzetgyökvonás védikusan 38

3.1.11. Köbre emelés védikusan 41

3.1.11.1. A „*Yavadunam*” – szútra 41

3.1.11.2. Az „*Anurupyena*” – szútra 42

3.1.12. Köbgyökvonás 43

3.2. Mátrixok, determinánsok 44

3.2.1. Negyedrendű determinánsok – függőlegesen és átlósan 47

3.2.2. A piramis szabály 49

3.2.3. Determináns számítás pivotálással 50
3.2.4. Egyenletrendszerek megoldása 51
3.3. Polinomok faktorizálása 54
3.3.1. II. Fokú polinomok faktorizálása 55
3.3.2. III. fokú polinomok faktorizálása – a „*Gunitasamuchyah*”- szútra 56
3.3.3. A faktorizálás és a deriválás kapcsolata 57
3.3.4. Többváltozós polinomok faktorizálása – a „*Lhopana - Stapana*” - szútra 59
3.4. Egyenletek megoldása – a „*Purana – Apurnabhayam*” - szútra 61
3.4.1. Másodfokú egyenletek megoldása 62
3.4.2. Harmadfokú egyenletek megoldása 63
3.4.3. Negyedfokú egyenletek megoldása 64
3.4.4. A „*Vyasti Samasti*” - szútra 66
4.Fejezet: Tapasztalatok, következtetések 67
Irodalomjegyzék 68

Bevezetés

Találkozva régi és új ismerősökkel, gyakran feltevődik a kérdés: „-Mivel foglalkozol, hol dolgozol?”. Az esetek többségében a válaszom „sokkoló” hatást vált ki: „-Matematika? Azt annyira nem szerettem, s most se nagyon kedvelem. Biztos nem könnyű...”. Ilyenkor eltöprengek - valóban ennyire púp a háton a matematika nemcsak a gyerekek, de a felnőttek körében is? Miért és honnan ez a matematika-fóbia? A válasz egyszerű lehet: amit nem értünk, attól idegenkedünk, muszájból végezzük a teendőket és nem is igazán kedveljük, ezért nehezen feledjük a keserű ízét. Egy szülő hogyan segítse ki a gyerekét a házi feladat megoldásában, ha diákkorában ő sem tudta megoldani a házi feladatát matematikából, és az ő szülei sem tudtak segítséget nyújtani ebben. És így tovább, forog a mókuskerék... Valahol, valamikor, valami rosszul működött, többek között a hozzáállás. Feltevődik egy nagyon fontos kérdés: nem lehetett volna „másképp” csinálni? Most nem lehetne „másképp” csinálni, esetleg egyszerűbben, hozzáférhetőbben a gyerek/szülő számára?

A „másképp” gondolata vezérelt a dolgozatom témájának választásában és a dolgozatom megírásában is. Dolgozatom témája a védikus matematika (ősi indiai matematikai rendszer). A szútrák használatáról lesz szó, négy főbb fejezetben. Az első fejezetben alapműveleteket végzünk el, védikus módszerekkel – a megszokottól eltérően, nagyrészt fejben. A második fejezetben a determinánsok kiszámítására adunk, nem annyira ismert módszereket, és lineáris egyenletrendszereket oldunk meg, szintén nem hagyományosan (a líceumi módszerekhez képest). A harmadik fejezetben egy- és többváltozós polinomok faktorizálását, a negyedik fejezetben egyenletek megoldását mutatjuk be, védikus módszerekkel. Ez csak egy kis ízelítő (egy csepp a tengerben) a *Nagy Könyv*-ből (*Védikus Matematika*). Részletesebben az irodalomjegyzékben felsoroltak között lehet információkat találni.

Nagyon sok IX-XII. osztályos diákkal találkozom, akiknél halmozott hiányosság észlelhető az alapműveletek terén. A líceumban nem lehet újratanulni-tanítani (vagy megtanulni-tanítani) ezeket a dolgokat, de valahogy be kell lopni az órai tevékenységbe. Ezt valahogy úgy lehet elképzelni, hogy egy ház felépült félig, valahogy, de a téglák már esnek ki a fundamentum felett. Ezeket a téglákat vissza kell rakni, hogy tovább építhessük a házat. Megfelelő hozzáállással és segítséggel, ha nem kedvenccé is, de kedveltebbé tehető a matematika, gyerek és szülő számára egyaránt. Mert a matematikára szükség volt, van és lesz.

Köszönetemet szeretném kifejezni dr. András Szilárd egyetemi docensnek a dolgozat megírásában nyújtott segítségéért.

1.Fejezet: A matematika tanításának problémáiról – az *Eurydice* jelentés[1]

Az utóbbi években a matematikai kompetencia problémája nagyon fontos lett. Ezt a kompetenciát az oktatási miniszterek az egyik olyan kulcskompetenciaként jelölték meg, amely szükséges, többek között az önmegvalósításhoz és a munkaerő piacon való elhelyezkedéshez. A tanulási teljesítményszinttel kapcsolatos aggodalmak egy 2020-ig megvalósítandó referenciaérték elfogadását eredményezték, ami szerint „*Azon 15 éves tanulók százaléka, akiknek nehézségeik vannak az olvasásban és természettudományok terén, ne haladja meg a 15%-ot.*” 2009-ben Romániában a matematikában nehézségekkel küzdők aránya 45% felett volt (Bulgáriával együtt), míg az ellentétes oldalon Finnország és Litvánia állt, 20% alatt. Természettudományok esetén sem állt fényesebben a helyzet: Romániában 40% felett volt a természettudományokkal küzdő, 15 éves tanulók száma, így az utolsó volt a listán (Bulgária előtt). Mindkét esetben Románia sereghajtó. Ezek az adatok a 2009-es PISA felmérések alapján születtek. A matematika tanulásának és tanításának módját több tényező is befolyásolja. Ilyen tényezők nemcsak a családi háttér, hanem a tanítás minősége és a tanítási rendszerek egyes jellemzői is.

Az ***Eurydice*** jelentés 6 fejezetből áll, mi a 4. és 5. fejezetekről fogunk beszélni: a **Gyenge teljesítmény a matematika terén** és az **A tanulók motivációjának javulásáról**.

1.1. Gyenge teljesítmény a matematika terén

A gyenge teljesítmény az E.U. országainak egy közös problémája a matematika tantárgynál. Itt nem csak a tanítás és tanítás hatékonysága van szem előtt tartva, hanem egy jobb oktatási rendszer biztosítása is.

A nemzeti és nemzetközi felmérések eredményei alapján elmondható, hogy a matematika terén elért gyenge teljesítmény egy összetett jelenség. Ez köthető a tanuló származási helyéhez és az iskolához is. Romániában a nemzeti jelentések több olyan tényezőt is azonosítottak, amelyek befolyásolják a vidéken tanuló diákok teljesítményét. Ezek, általában: az emelkedett fejlődés az oktatás terén, a tanulmányok félbeszakítása, a csökkent érdeklődés, az iskolákban tanító tanárok nem megfelelő képesítése valamint a vegyes elemi

[1] http://europa.eu/rapid/press-release_IP-11-1358_en.htm

osztályok. 2010 óta a vegyes osztályokat megszüntették, és 600 matematika tanár egyetemi továbbképzésen vett részt. Ugyancsak Romániában az algebra, a matematikai közlés és a feladatok megoldása jelent problémát a tanulók számára. Nem meglepő, hogy ugyanezek problémát jelentenek a tanároknak is.

Próbálkozásokat kell tenni a matematikai oktatásban az olyan jellegű felfogások megváltoztatására, mint: a matematika nehéz, elvont vagy nem érdekes, vagy hogy nem fontos a mindennapi életben. Egy lehetőség erre, hogy az óra témája legyen tudományközi, amely segítheti a tanulót kapcsolatot teremteni a matematika és a mindennapi élet vagy más tantárgyak között (Van den Heuvel-Panhuizen, 2001).

Az elemi osztályok szintjén való beavatkozás is segíthet – az első két iskolai év rakja le a jövő matematikai nevelés alapjait. A tanító, azonosítva a problémákat ezen a szinten, segíthet a tanulónak kikerülni helytelen stratégiák vagy koncepciók fejlesztését, amik hosszú távon akadályt jelenthetnek a matematika tanulásában.

Összpontosítva a tanulók gyenge pontjaira, egyénileg, jelentősen nőtt a gyerekek teljesítménye (Wright et al., 2000, 2002). Megfigyelhető, hogy „*Az esetek többségében, ha a beavatkozás időben történik, és a tanuló gyenge pontjaira összpontosít, ezek nem lesznek hosszasak vagy intenzívek*” (Dowker, 2009).

A tanároknak minél nagyobb elvárásokat kell leszögezni és ezeket közölni a diákokkal is, minden diákot bátorítani kell az aktív részvételben ezen a téren (Hambrick, 2005).

A kutatásokból az derül ki, hogy a gyenge teljesítményszint megszüntetésére irányuló hatékony intézkedések átfogóak és időszerűek kell legyenek. Ahhoz, hogy hatékonyan követhessük a tanulók gyenge teljesítményének problémáját, figyelni kell a képzések szükségét és ezek változását mérni kell. A szülőkkel együtt, a tanároknak ki kellene emelniük annak fontosságát, hogy nem szabad elbátortalanítson az a koncepció, miszerint a siker a matematikában nagyrészt a tanuló velejáró képességeihez kötődik.

A szülőket bátorítani kell, hogy segítsék gyerekeiket a tanulásban, és hogy tessen nekik a matematika. A szülők bevonása létfontosságú a beavatkozási programok sikeréhez (Williams, 2008). Sajnos nagyon sok szülő nem tud segítséget nyújtani gyerekének a tanulásban.

Az európai államok többségében a központi hatóságok segítséget nyújtanak a tanároknak és az iskoláknak a matematikában nyújtott gyenge teljesítmény problémájának

megoldásában. Csak néhány európai országban beszélhetünk olyan tanárok létezéséről, akik matematika tanulása során tapasztalt nehézségekkel foglalkoznak, ez a szakképesítésük. Elmondható, hogy szükséges a gyenge teljesítmény leküzdése érdekében tett lépések megfigyelésének és felmérésének javítása, mivel csak néhány ország készített felmérést a végrehajtott segédprogramok hatásáról és kevés ország tűzött ki célokat, nemzeti szinten, a matematikában gyenge teljesítményt nyújtó tanulók számának csökkentésére.

1.2. A tanulók motiváltságának erősítése

Néha, úgy az iskolában, mint a társadalomban, a matematikát nehéz és elvont tantárgyként kezelik, amely olyan képletek és folyamatok sorának megtanulását feltételezi, amelyek látszólag kapcsolatban sem állnak egymással, és a mindennapi életben való használatuk látszólag elhanyagolható. A matematikához való negatív hozzáállás és az önbizalom hiánya hatással lehet a tanulási teljesítményszintre és a matematika tanulására, a kötelező oktatás után. Az iskolák és a tanárok fontos szerepet játszhatnak a tanulók érdeklődésének növelésében a matematika iránt és abban is, hogy érthetőbbé tegyék a matematikát. Figyelmet kell szentelni a továbbiakban az olvasás, írás és az aritmetikai számítások elsajátítása szintjének emelésére (az Európai Unió Tanácsa, 2009). A fiatalok érdeklődése a matematika és a rokon tantárgyak tanulmányozása iránt fontos, mert meghatározza egy, a matematika, tudományok és technológia területein való karrier lehetőségét.

Általánosan kijelenthető, hogy a tanulók hatékonyabban tanulnak, ha érdekli őket az amit tanulnak. Sőt, sokkal több dolgot elsajátíthatnak ha tetszik az, amit tanulnak. A szakirodalom kimutatta, hogy a motiváció egy fontos tényező az elméleti részek elsajátításában (Grolnick et al., 1991; Ma & Kishor, 1997). A tanulmányok azt is kimutatták, hogy a belső motiváció pozitívan befolyásolja az elméleti részek elsajátítását (Deci & Ryan, 2002; Urdan & Turner, 2005). Tehát, azoknál a tanulóknál, akiknek tetszik a tananyag, nő a tanulás iránti belső motiváció és fordítva.

Egyes országos felmérések többet vizsgálták ezt a témát. Például a csehországi „*Magma*” nevezetű felmérésből az látszik, hogy azokban a IX. osztályokban, ahol a tanulók elégedettek voltak képességeikkel a matematika órán, kétszer olyan jó eredményt értek el, mint a többi osztályokban. Másrészt, ugyanabban az osztályban különböző alacsony vagy magas teljesítmény-színtű) tanulók gyakran egyformán válaszoltak a feltett kérdésekre, ez kapcsolatban lehet a tanáruk minőségével is. A tanulók motiváltsága és a matematikai

teljesítményük befolyásolható azzal is, hogy mennyire fontos számukra ez a tantárgy.

A TIMSS felmérés arról gyűjtött információkat, hogy a VIII. osztályos tanulók mennyire tartják fontosnak az elsajátított matematikai ismereteket a továbbtanulásban vagy a jövőbeli munkahely választásában. 2007-ben, a tanulók 68%-a a matematikát nagy értékűre becsülte. A VIII. osztályos tanulók csak 6%-a nem tartotta fontosnak a matematikát a jövőjüket tekintve. Litvánia és Törökország azok országok, ahol a matematikát a diákok legnagyobb többsége tartotta fontosnak (87-88%). Az EU-ban átlagban 31 ponttal volt nagyobb az eredmény azoknál a tanulóknál, akik értékelték a matematikát, azokkal szemben, akik nem. Észrevehető, viszont, hogy a tanuló azon jellegű motiváltsága, hogy matematikával foglalkozzon, nem stabil, inkább dinamikus, változó. Csehországban és Skóciában (2008-ban) összehasonlították a tanulók motiváltságát különböző osztályokban, és arra a következtetésre jutottak, hogy ez csökken az V-VIII osztályok során. Ez a megfigyelés is kiemeli a tanárok és a tanítási folyamat szerepét a tanuló érdeklődésének felkeltésében. A TIMSS eredményei azt is megerősítik, hogy a IV. osztályos tanulók nagyobb többségének – 67%-ának, míg a VIII. osztályos tanulók 39%-ának volt pozitív hozzáállása a matematikához.

Az iskolán kívüli tevékenységeken kívül az UE országainak csak egyharmada támogat olyan sajátos tanítási stratégiákat, amelyek a tanulók bevonását erősíti. Ezek főleg újító jellegű tanítási stratégiák, beleértve azokat is, amelyek informatikát használnak. Az a következtetés vonható le, hogy „*a tanítási módszerek inkább a gyerekek természettudományok iránti természetes kíváncsiságát kellene kiaknázzák, minél fiatalabb kortól kezdve.*” (az EU Tanácsa, 2010). Románia, például, az együttműködési stratégiák használatával (párosával vagy csoportokban), nagy hangsúlyt fektet az aktív részvételre és az aktív tanulásra. Áttérés történt a frontális oktatásról az együttműködésben való tanításra és tanulásra. Ennek célja a motiváció serkentése
és a tanulók bevonása a matematikai tevékenységekbe.

A szülők bevonása és a tanulók bátorítása, már kiskorúktól, jelentős hatással lehet a matematika tanulására. Több ország, közöttük Románia is, kiemeli a szülők bevonását a tanulási folyamatba, és konkrét kezdeményezéssel jön. Romániában, a szülők bevonása a tanulási folyamatba, hangsúlyozottabban az elemi oktatásban történik. Célja, hogy tudatosítsa a szülőket a matematika szerepéről a tanulók kognitív fejlődésében, és módszerek javaslása a tanulók matematikai képességének fejlesztésére.

2000-2008 között 37%-kal nőtt az MST (Math Science Technology) végzősök száma.

Ezzel az UE több mint kétszeresen túllépte a 2010-re előírt 15%-os növekedési standardot. Mégis, ha összehasonlítjuk az MST végzősök számát az összes egyetemet végzők számával az EU-ban, a helyzet másképp alakul. Lényegében ez a százalék csökkenő tendenciát mutat, ami nemcsak a hatóságokat foglalkoztatja, de az üzleti szférát is. A nemzeti oktatási hatóságok próbálják ellensúlyozni ezt a tendenciát. Úgy gondolják, hogy az MST végzősök száma egy fontos tényező, hogy versenyképesek legyenek a globális gazdaságban. A legnagyobb csökkenést elkönyvelő országok között szerepel Románia is.

Elmondható, tehát, hogy a matematika az egyik alapkompetencia az egész életen át tartó tanulásban. Fontos lépés a tanulók motiválása a matematika tanulására. Azért, hogy emeljék az iskolai teljesítményüket, azért is, hogy növeljék egy matematika profilú egyetem elvégzésének lehetőségét, és a későbbiekben egy, a matematikával rokon területen való karrier lehetőségét. Azok a tanulók, akik pozitív hozzáállással és önbizalommal közelednek a matematika felé, jobb eredményeket érnek el. A TIMSS adatai igazolják azt a tényt hogy, különösen a VIII. osztályosok körében, azok a tanulók, amelyek pozitívan álltak hozzá a matematikához, jobb eredményeket értek el, mint a negatív hozzáállásúak. Ugyanez mondható el olyan tanulók esetén, akik fontosnak tartják a matematikai kompetenciákat a nevelésükben és a karrierjükben. A nemzeti és nemzetközi felmérések azt mutatják, hogy a gyerekek motiváltsága, a matematikát illetően, csökken az iskolában töltött évek alatt, ezért föltétlenül lépéseket kell tenni ennek ellensúlyozására.

Kijelenthető az is, hogy azon tanulók esetében, akik motiváltak és jól teljesítenek matematikából az elemi és V-VIII osztályokban, inkább ajánlott egy matematika – technika - tudományok profilú egyetem, vagy egy MST orientált karrier számításba vétele, mint más tanulóknál.

2.Fejezet: A védikus matematika

„És mikor a rend a határt kiszabta,
Mi volt alul: és mi került fölébe?
Itt vak álmok, ott erők forradalma,
Lent bomlás, fent a formák büszkesége”
Himnuszok a *Rig*-védából (*A teremtés himnusza* – Szabó Lőrinc fordítása)

2.1. Általános bemutatás

A Védikus Matematika az indiai matematika egy ősi rendszere. Eredete a Védákig nyúlik vissza, pontosabban az *Atharva Védá*-ig. Az *Atharva Véda* mérnöki tudományokkal, matematikával, szobrászattal, orvostudománnyal és még sok ma ismert ágazattal foglakozik. A „*Véda*” szó szanszkrit eredetű, a „*Vid*” szóból származtatott, ami „*határok nélküli tudást*” jelent.

A védikus matematika, amely lényegesen leegyszerűsíti az aritmetikai és algebrai műveleteket, fokozatosan befogadásra talált az egész világon. A szakértők szerint (is) egy praktikus eszköz a matematika feladatok gyorsabb megoldására. Egy ősi technika, amely leegyszerűsíti a szorzást, osztást, négyzetre emelést, köbre emelést, négyzet- és köbgyökvonást.

Ezt a témát nagyrészt *Sri Bharati Krsna Tirthaji* (1884-1960) dolgozta fel újra. Évekig tartó kutatások után sikerült 16 kötetben összefoglalnia a védikus matematikát. Mindegyik kötet egy szútrán[2] alapszik (a szútrák itt nemcsak egy szabályt jelentenek, hanem egy megoldási gondolkodásmódot is). A köteteknek idő közben megmagyarázhatatlanul nyoma veszett, így az emlékezetei alapján egy könyvbe foglalta mind a 16 szútrát, amelynek a „Vedic Mathematics” – „Védikus Matematika” címet adta. Kéziratai alapján, postumus került nyomda alá, 1965-ben. Ez a ma használt védikus matematika alapkönyve.

A mentális vagy az egy-két soros megoldási módszerek hatékonyan használhatók: szorzás-osztás elvégzésére, faktorizálásra, l.n.k.o., négyzet és négyzetgyök, köb és köbgyök kiszámítására, (magasabb fokú) algebrai egyenletek és egyenletrendszerek megoldására,

[2] Szútra – aforizma; szó szerint fonalat vagy dolgokat összekötő vonalakat jelent (Wikipédia)

differenciálszámításra, kúpszeleteknél stb. Ezek közül több esetről is történik említés az dolgozat következő részében.

A védikus rendszer talán legmeglepőbb jellemzője a következetesség. Az összefüggés nélküli technikák helyett az egész rendszer összefüggő és egységes. Például: az általános szorzási módszer egyszerűen megfordítható egysoros osztásra, vagy egy egyszerű négyzetre emelést visszafelé elvégezve, egy sorban gyököt vonhatunk egy számból, és ezek mind viszonylag egyszerűen megérthetők. Ez az egységesség a matematikát élvezetessé teheti, és újításra bátorít.

Nehéznek vélt matematikai feladatok könnyedén megoldhatók a védikus rendszer segítségével. A rendszer egyszerűsége abban rejlik, hogy a számításokat könnyen fejben tudjuk tartani (bár ezek le is írhatók). Nagyon sok előnye van egy rugalmas mentális rendszer használatának. A tanulók saját módszereket „fedezhetnek fel" , nincsenek egy megadott módszer használatára korlátozva. Ez a tanulókat kreativitásra buzdítja, és jobban felkelti a matematika iránti érdeklődésüket. A szútrák alkalmazása racionális gondolkodással jár, ami segít az intuíció fejlesztésében is. Az oktatás fejlődése a védikus rendszernek is érdeke. Kutatások folynak azzal kapcsolatban, hogy milyen hatással van a V.M. tanulása a gyerekekre; fejlesztik a védikus rendszer alkalmazhatóságát a geometriában, számításokban.

De a V.M. igazi szépségét és hatékonyságát a rendszer gyakorlatban való alkalmazása adja. Kiderül, hogy a V.M. az egyik lehetséges legkifinomultabb és hatékonyabb matematikai rendszer. Elképesztő, hogy 16 szútra és 13 szub-szútra segítségével fejben végezhetők el a hagyományos módszerrel nehezebben elvégezhető matematikai számítások és oldhatók meg összetettebb matematika feladatok is.

Következzen a fent említett 16 szútra és 13 szub-szútra[3], esetenként egy-egy példával alátámasztva, de előtte szóljunk még pár szót róluk:

A szútrák rövid, tömör műveleti utasítások. A szútra következőképpen van meghatározva: „*Aforizmák gyűjteménye, amely minden tudás lényegét a lehető legkevesebb szóval fejezi ki, s amelynek egyetemesen alkalmazhatónak és nyelvtanilag hibátlannak kell lennie*"[4].

Jelölések:

- $2/3/4 = 234$ - a számot felosztottuk egy számjegyű csoportokra;

[3] Függelék, korollárium
[4] http://www.tattva.hu/index.php?inc=article&id=103

- $13/_{1}32 = 13\cdot 10^2 + 132 = (13+1)\cdot 10^2 + 32 = 1432$;
- $2/_{3}2/_{4}1 = 5_{3}6_{4}1 = 561$ - hátulról kezdjük a számot leírni: 1, marad a 4, $4+32=36$ - leírjuk a 6-ot, marad a 3, $3+2=5$, tehát az eredmény 561;
- V.M. – Védikus Matematika.

1.*Ekadhikena Purvena – Eggyel több, mint az előző*. Ez a szabály az 5-tel végződő természetes számok négyzetére vonatkozik.

75^2 hagyományosan:

$$\begin{array}{r} \underline{75}\cdot 75 \\ 375 \\ \underline{525} \\ 5625 \end{array}$$

Védikusan: $75\cdot 75 = \underset{7\cdot 8}{56}\,\underset{5^2}{25}$ - az első két számjegy

$7\cdot(7+1)=8$, az utolsó kettő mindig 25

2. *Nikhilam Navatascaramam Dasatah – Mindent a* 9*-ből és az utolsót a* 10*-ből*. A módszer két szám szorzására vonatkozik.

A $997\cdot 649$ hagyományosan:

$$\begin{array}{r} \underline{997}\cdot 649 \\ 8973 \\ 3988 \\ \underline{5982} \\ 647053 \end{array}$$

Védikusan:

$$\begin{array}{cccccc} 9 & 9 & 7 & 6 & 4 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 5 & 1 \end{array},\quad 649-3=646,$$

$3\cdot 351 = 1053$, tehát

$997\cdot 649 = 646/_{1}053 = 647053$

3. *Urdhva – tiryagbhyam – Függőlegesen és átlósan*.

$37\cdot 48$ hagyományosan:

$$\begin{array}{r} \underline{37}\cdot 48 \\ 296 \\ \underline{148} \\ 1776 \end{array}$$

Védikusan: $3\cdot 4 = 12$, $3\cdot 8 + 7\cdot 4 = 52$,

$8\cdot 7 = 56$. Tehát $37\cdot 38 = 12/_{5}2/_{5}6 = 1776$.

4. *Paravartya Yojayet – Helyezd át és alkalmazd*. Két természetes szám osztására vonatkozik.

5. *Sunyam Samyasamuccaye – Amikor a samuchchaya egyforma, akkor a samuchchaya nulla vagy nullává tehető*.

6. (*Anurupye*) *Sunyamanyat – Ha egyes van a törtben, a többi nulla*.

7. *Sankalana – vyavakalanabhyam – Összeadással és kivonással*. Lineáris egyenletrendszerek

megoldására használatos. Nézzük a $\begin{cases} 39x - 67y = 11 \\ 67x - 39y = 95 \end{cases}$ rendszert.

Először összeadjuk majd kivonjuk egymásból az egyenleteket. Kapjuk

$106x-106y=106 \Rightarrow x-y=1$ és $28x+28y=84 \Rightarrow x+y=3$. Az így kapott egyenleteket újra összeadjuk, majd kivonjuk egymásból: $2x=4 \Rightarrow x=2$ és $2y=2 \Rightarrow y=1$.

8. *Puranapuranabhyam – Kiegészítéssel vagy ki nem egészítéssel.*

Határozzuk meg az $x^3+9x^2+24x+24=0$ gyökeit.

$$x^3+9x^2+24x+24=0 \Big| +(x+3) \Leftrightarrow (x+3)^3=x+3,\ x+3\in\{-1,01\} \Rightarrow x\in\{-4,-3,-2\}.$$

9. *Calana – Kalanabhyam – Számítással.*

$$2x^2+x-6=0 \Big| :2 \Rightarrow x^2+\frac{x}{2}-3=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{49}{16}=0.$$

Azaz $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{49}{16}$, ahonnan $x+\frac{1}{4}\in\left\{-\frac{7}{4},\frac{7}{4}\right\} \Rightarrow x\in\left\{-2,\frac{3}{2}\right\}$.

10. *Yavadunam – A hiány segítségével.*

98^2 hagyományosan:

$$\begin{array}{r} \underline{98}\cdot 98 \\ 784 \\ \underline{882} \\ 9604 \end{array}$$

Védikusan: $100-98=2$, $2^2=4$, $98-2=96$, tehát $98^2=96/04=9604$.

11. *Vyastisamastih – Használd a számtani középarányost.*

$65\cdot 75=?$ A két szám számtani középarányosa $\frac{65+75}{2}=70$, $70^2=4900$. Továbbá $\frac{75-65}{2}=5$ és $5^2=25$. Ekkor $65\cdot 75=4900-25=4875$.

12. *Sesanyankena Caramena – Az utolsó számjegy szerinti maradékok.* Tizedes tört közönséges törtbe való átalakítására (és fordítva) használható.

Például: $\frac{1}{19}=0,(052631578947368421)$ - az átalakítási módszer az 1.2 Fejezetben található.

13. *Sopantyadvayamantyam – Az utolsót és az utolsó előtti kétszeresét.*

$143\cdot 12=?$ A 143-at felírjuk 01430 alakban. $0+2\cdot 3=6$, $3+2\cdot 4=11$, $4+2\cdot 1=6$, $1+2\cdot 0=1$. Írhatjuk $143\cdot 12=1/6/_{1}1/6=1716$.

14. *Ekanyunena Purvena – Az előtte levőnél eggyel kevesebb.* A $9;99;999;...;999...$ alakú számokkal való szorzás esetén használható.

$476\cdot 999=?$ $476-1=475$, $999-475=524$, így $476\cdot 999=475/524=475524$.

15. *Gunitasamuchyah – A szorzótényezők együtthatói összegeinek szorzata*. Polinomok tényezőkre bontásának helyességét lehet ellenőrizni.

$(x+3)(x-5)(3x+4)=3x^3-2x^2-53x-60$. A szorzótényezők együtthatói összegeinek szorzata $(1+3)(1-5)(3+4)=-112$, a polinom együtthatóinak összege $3-2-53-60=-112$, tehát a felbontás helyes lehet.

Az $x^3+2x^2+2x-6=(x+3)(x-2)(x+1)$ felbontás viszont nem helyes, mert $\underbrace{1+2+2-6}_{=-1}\neq\underbrace{(1+3)(1-2)(1+1)}_{=-8}$.

16. *Gunakasamuccayah – Minden szorzótényező.*

Ezek voltak a szútrák. Következzenek a *szub-szútrák*, ezek száma 13.

1.*Anurupyena – Arányosság*.

$53\cdot 57=?$ $53-50=3$, $57-50=7$. $53+7=60$ és $60:2=30$, $3\cdot 7=21$, így $53\cdot 57=30/21=3021$

2. *Sisyate sesasanfitah – A maradék állandó marad*.

3. *Adyamadyenantyainantyena – Az első az elsővel, az utolsó az utolsóval*.

4. *Kevalalh Saptakan Gunyat* - 7 *esetén a szorzandó* 143.

5. *Vestanam – összekapcsolással* (a *vinculum* használata). Az oszthatóság vizsgálatánál használható.

$593957\vdots 13$? Az osztó 13, számjegyeinek összege 4, ezt *ekadhiká*-nak nevezzük. Az oszthatóság vizsgálatában ez lesz az úgynevezett *osculator*. A lépések a következők:

$4\cdot 7=28$, $59395+28=59423$. $4\cdot 3=12$, $5942+12=5954$. $4\cdot 4=16$, $595+16=611$. $4\cdot 1=4$, $61+4=65$ és $65\vdots 13$, tehát $593957\vdots 13$.

6. *Yavadunam Tavadunam – Csökkenteni a hiánnyal*. A négyzetre és köbre emelésnél használható.

$43^2=4^2/2\cdot 4\cdot 3/3^2=16/_2 4/9=1849$.

7. *Yavadunam Taradunikrtya Varganca Yojayet – Bármennyi is legyen a hiány, kivonjuk a számból és használjuk a hiány négyzetét*.

$89^2=?\,100-89=11$, így $89^2=(89-11)/11^2=78/_1 21=7921$.

8. *Antyayordasake'pt – Az utolsók összege* 10.

9. *Antyayoreva – Csak az utolsó tag*. (Bizonyos egyenlettípusok megoldására használható)

10. *Samuccayagunitah – A szorzatok összege*.

11. *Lopanasthapanabhyam – Kiküszöböléssel és megtartással* (Többváltozós polinomok faktorizálására használható).

Faktorizáljuk a $f = 3x^2 + 2y^2 + z^2 + 7xy - 4xz - 3yz$ polinomot. „Eltűntetünk", szerre, egy-egy változót, a többit megtartva. Ha $y = 0$, kapjuk $f = 3x^2 - 4xz + z^2 = (x - z)(3x - z)$, ha $z = 0$, $f = 3x^2 + 7xy + 2y^2 = (x + 2y)(3x + y)$. A két eredményt „egybeolvasztva" kapjuk, hogy $f = (x + 2y - z)(3x + y - z)$.

12. *Vilokanam – Észrevétel alapján* (Egyenletek megoldásánál használható).

Például az $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$ egyenlet valós gyökei 3 és $\frac{1}{3}$, mert $\frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$.

13. *Gunitsamuccayah Samuccayagunitah – Az összeg szorzata a szorzat összege*.

A szútrák rövid áttekintése után összefoglalhatjuk a védikus rendszer néhány fő (pozitív) jellemzőjét.

- *Összefüggő*: A védikus rendszer egyik legszembetűnőbb jellemzője az összefüggőség. Például: az általános szorzási módszer egyszerűen megfordítható egysoros osztásra, vagy egy egyszerű négyzetre emelést visszafele elvégezve, egy sorban gyököt vonhatunk egy számból, és ezek mind viszonylag egyszerűen megérthetők. Ez az egységesség a matematikát élvezetessé teheti, és újításra bátorít.
- *Rugalmas*: A számítások elvégzése, a feladatok egy előre megadott, egységes módon való megoldása unalmas lehet. A védikus rendszer serkenti a tanuló kreativitását. Például létezik általános szorzási módszer de léteznek módszerek speciális esetekre, amelyek még jobban megkönnyítik a munka elvégzését. Nem muszáj alkalmazni ezeket a speciális módszereket de aki használni akarja, ott vannak. Ez a rugalmasság szabad kezet ad a tanulónak arra, hogy a saját szempontjai szerint válasszon és dolgozzon, fejlesztve és megerősítve ezzel a kreativitását és intuícióját. A védikus rendszer nem ragaszkodik a matematika tiszta analitikus megközelítéséhez, mint ahogy ez sok modern oktatási módszer esetén történik. Ez sokat számít abban, hogy viszonyulnak a tanulók a matematikához.

- *Mentális, memória javító*: A védikus rendszer egyszerűségének köszönhetően sok számítást fejben is el lehet végezni. A tanulók saját módszereket találhatnak ki, nincsenek egy „helyes módszer” alkalmazására korlátozva. Ugyanakkor memória fejlesztő hatása is van (nem beszélve a műveletek fejben való, gyors elvégzéséről).
- *Kreativitásfejlesztő:* A védikus rendszer sajátosságai arra bátorítják a tanulókat, hogy kreatívan végezzék a matematikai munkájukat.
- *Mindenkihez szól*: A V.M. hatékonynak tűnik minden képességi szférában. A tehetségesebb gyerekek szeretnek kísérletezni, és a kevésbé tehetségesek megmaradnak az általános (nem védikus módszereknél), de kedvelik az egyszerű szabályokat.
- *Fejleszti a gyors gondolkodást*: Mivel a rendszer ultra-egyszerű módszereket használ, előnyben részesül a fejben számolás és a gyors gondolkodás természetes fejlődéséhez vezet.
- *Egyszerű, játékos*: A matematika alkalmazása élvezetes is lehet, ez tapasztalható a V.M.-nál. És ez a matematika igazi jellege.
- *Alkalmazható az algebrában*: A rendszer egy másik fontos jellemzője, hogy a már megtanult aritmetikai módszerek alkalmazhatók az algebrában is. Itt is látszik az aritmetika és az algebra közötti szoros kapcsolat.

A V.M. indiai termék, mégsem tanítják az indiai iskolákban. Mondhatnánk, hogy inkább export termék, a világ neves egyetemein (Oxford) is tartanak előadásokat róla, ennek segítségével készítenek fel tanulókat matematikából. Erről lesz szó, röviden, a következő alfejezetben.

2.2. A védikus matematika helyzete Indiában

Indiában, az ASER 2014 jelentés alapján, a vidéki V. osztályos gyerekek esetén 10-ből 2 gyerek tudott háromjegyű számokat összeadni, 46,5%-uk pedig nem tudott segítség nélkül kivonni kétjegyű számokat egymásból (a *The Telegraph*[5] szerint). De nem csak Indiában vannak gondok. Az Egyesült Királyságban 17 millió felnőtt él, akik matematikai képessége egyenlő egy 11 éves gyerekével; több kelet-ázsiai és európai ország elkerülte az Egyesült Államokat, az elemi- és középiskolák matematika szintjét nézve; Dél-Afrika az utolsó előtti a listán a matematikai oktatás minőségét illetően. Egy megoldás a védikus matematika használata lenne, írja ugyancsak a *The Telegraph*. Egy gyorsszámoló matematikai rendszer

[5] *The Thelegraph*: Vedic Maths answer to the Global Maths Crisis, 20.01.2015.

használata vitatható lehet a technológia korában. De, például, az Egyesült Királyságban, az elemi iskolákban már megtiltották a számológépek használatát a vizsgákon (megj.: nálunk be sem vezették), tehát csak van helye a mentális matematikának az iskolai rendszereken belül. Gaurav Tekriwal[6], az indiai Védikus Matematika Fórum elnöke kérte az indiai Emberi Erőforrások Minisztere, Mr.Smriti Irani támogatását abban, hogy az indiai matematikai tanterv tartalmazza V.M.-t is.

Indiai szakemberek (pl. Tekriwal) már végeztek kísérleti felmérést a V.M. alkalmazásának hatékonyságáról a dél-afrikai Durban-ban, az oktatási minisztériummal szövetkezve. Az eredmények meglepően jók lettek. A legelején felmérték a diákokat: 30 percet kaptak 20 fejben elvégezhető gyakorlat megoldására. Egy hét képzés után a gyerekek már 9 perc alatt el tudtak végezni fejben 20 gyakorlatot (fejszámolásról van szó).

Szingapúrban született az úgynevezett „*Singapore Math*”[7], a szingapúri matematika. Ez a matematikai rendszer a tanterv része már nemcsak Szingapúrban, hanem az Egyesült Államokban is, ahol a világ legjobb módszereit választják a gyerekek oktatása érdekében. „*Miért ne lehetne ugyanezt tenni a V.M.-val Indiában?*” írja Gaurav Tekriwal. Meg kell említeni azt is, hogy 2009-ben a PISA felmérésen India 74 nemzet közül a 73-ik lett. Az ilyen kínos helyzetek elkerülése érdekében döntött úgy az indiai kormány, hogy India nem vesz részt a későbbi felmérésekben. 2015 márciusában, egy Bhopálban tartott gyűlésen, ahol több akadémikus is részt vett, felvetődött a V.M. kötelezővé tétele Indiában[8].

2015 júliusának második felében Smriti Irani – RSS[9] találkozó lesz, ahol szó fog esni az új indiai oktatáspolitikáról és a V.M. bevezetéséről a matematika tantervbe. Az új oktatáspolitikával kapcsolatban már 2015 januárjában elkezdődtek a tárgyalások, az év végére már vitára bocsátható is lehet[10].

[6] https://in.linkedin.com/in/gtekriwal
[7] http://www.singaporemath.com/
[8] http://www.dnaindia.com/india/report-new-education-policy-centre-sets-ball-rolling-2066826
[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Rashtriya_Swayamsevak_Sangh
[10] http://www.ndtv.com/india-news/union-minister-smriti-irani-holds-talks-with-rss-bodies-on-education-policy-782848

3.Fejezet: Védikus módszerek alkalmazása a középiskolai matematika oktatásában

3.1. Alapműveletek

3.1.1. Az „*Ekadhikena Purvena*” – szútra. Az 5-tel végződő számok négyzete

Számoljuk ki a 35 négyzetét, használva az „*Ekadhikena Purvena*” – szútrát (ami egyet jelent az „*Eggyel több, mint az előző*” - vel).

A 35 esetén az utolsó számjegy 5, és az ezt megelőző szám a 2, ennél eggyel több a 3. A négyzetre emeléshez következő műveleteket fogjuk elvégezni: $3\cdot 4=12$ és $5^2=25$. A szorzás eredménye: $35^2=3\cdot 4/25=1225$. Hasonlóan: $45^2=4\cdot 5/25=2025$, $75^2=7\cdot 8/25=5625$, $195^2=19\cdot 20/25=38025$. Most nézzük általánosan a fenti szorzásokat. Egy kétjegyű természetes szám általános alakja (tízes számrendszerben) $\overline{ab}=10a+b$, ennek négyzete $\overline{ab}^2=(10a+b)^2=100a^2+20ab+b^2$. Ha most sajátosan $b=5$-öt veszünk, akkor írhatjuk: $\overline{a5}^2=100a^2+100a+25=a(a+1)\cdot 100+25$. Innen látszik, hogy az $\overline{a5}^2$ számok utolsó két számjegye mindig 25 lesz, és az első két számjegy is könnyen kiszámolható. Ha, például, $a=8$, akkor a 85^2 első két számjegye $8\cdot 9=72$ és az utolsó kettő 25, tehát $85^2=7225$.

A háromjegyű, 5-tel végződő számok esetén hasonlóan járunk el: $\overline{abc}=100a+10b+c$. Használva az $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$, $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ képletet, írhatjuk

$$\overline{abc}^2=(100a+10b+c)^2=10^4\cdot a^2+10^2\cdot b^2+c^2+2\cdot 10^3\cdot ab+2\cdot 10bc+2\cdot 10^2\cdot ac=$$
$$=a^2\cdot 10^4+2ab\cdot 10^3+(b^2+2ac)\cdot 10^2+2\cdot 10\cdot bc+c^2.$$

$c=5$ esetén: $\overline{ab5}^2=a^2\cdot 10^4+2ab\cdot 10^3+(b^2+10a)\cdot 10^2+10^2\cdot b+25=$

$$=\underbrace{\underbrace{a^2\cdot 10^4+2ab\cdot 10^3+b^2\cdot 10^2}_{=(10a+b)^2\cdot 10^2}+\underbrace{10^3\cdot a+10^2\cdot b}_{=(10a+b)\cdot 10^2}}_{=(10a+b)(10a+b+1)\cdot 10^2}+25=\overline{ab}\cdot(\overline{ab}+1)\cdot 10^2+25.$$

Ebben az esetben is könnyen látszik, hogy az eredmény utolsó két számjegye 25 lesz, a 25 előtti számot az $\overline{ab}(\overline{ab}+1)$ szorzás eredménye adja.

Például $145^2 = 14 \cdot 15/25 = 210/25 = 21025$, vagy $395^2 = 39 \cdot (39+1)/25 = 1560/25 = 156025$

Hasonlóan: $\overline{abc5}^2 = \overline{abc}\left(\overline{abc}+1\right) \cdot 10^2 + 25$ vagy a legáltalánosabban $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 5} =$ $= \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1} \cdot \left(\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1}+1\right) \cdot 10^2 + 25$, $n \in \mathbb{N}^*$. A bizonyítás az előzőhöz hasonlóan elvégezhető, használva a matematikai indukció módszerét.

Két és háromjegyű számok esetén a négyzetre emelések viszonylag hamar elvégezhetők fejben, mert viszonylag könnyen összeszorozható két egymás utáni szám egymással (egy-, vagy kétjegyű számokról beszélünk). A kérdés az, hogy érdemes-e foglalkozni a fenti képlettel, ha a szám négy- vagy többjegyű? A válasz lehet igenlő sajátos esetekben vagy ha még ismerünk egy pár „trükköt". Ezekről a „trükkökről" beszélni fogunk később és vissza is fogunk térni ezekre az esetekre.

Következzen egy érdekes átalakítás közönséges törtből tizedes törtbe.

3.1.2. Az $\frac{1}{19}$ tizedes törtté alakítása

Olyan törtekről fogunk beszélni, ahol a nevező utolsó számjegye 9. Lássuk, példának okáért, az $\frac{1}{19}$ törtet. Az átalakítás után egy szakaszos tizedes törtet kapunk, a szakasz hossza $19-1=18$ számjegy lesz. Hogyan fogjuk ezt a szakaszt meghatározni? Viszonylag könnyen:

Először is: a nevező 19, ennek első számjegye 1, ezt növeljük 1-gyel: $1+1=2$, ezzel osztunk.

Az osztást 18 (egyszerű) lépésben fogjuk elvégezni.

1. lépés: $1:2=0$, maradék 1, - r.e. $0,{}^{1}0$ (r.e. = részleges eredmény)

2. lépés: $10:2=5$, maradék 0, - r.e. $0,0^{0}5$

3. lépés: $5:2=2$, maradék 1, - r.e. $0,05^{1}2$

4. lépés: $12:2=6$, maradék 0, - r.e. $0,052^{0}6$

5. lépés: $6:2=3$, maradék 0, - r.e. $0,0526^{0}3$

6. lépés: $3:1=1$, maradék 1, - r.e. $0,05263^{1}1$

7. lépés: $11:2=5$, maradék 1, - r.e. $0,052631^{1}5$

8. lépés: $15:2=7$, maradék 1, - r.e. $0,0526315^{1}7$

9. lépés: $17:2=8$, maradék 1, -r.e. $0,05263157^{1}8$

10. lépés: $18:2=9$, maradék 0, - r.e. $0,052631578^{0}9$

11. lépés: $9:2=4$, maradék 1, - r.e. $0,0526315789^{1}4$

12. lépés: $14:2=7$, maradék 0, - r.e. $0,05263157894^{0}7$

13. lépés: $7:2=3$, maradék 1, - r.e. $0,052631578947^{1}3$

14. lépés: $13:2=6$, maradék 1, - r.e. $0,0526315789473^{1}6$

15. lépés: $16:2=8$, maradék 0, - r.e. $0,05263157894736^{0}8$

16. lépés: $8:2=4$, maradék 0, - r.e. $0,052631578947368^{0}4$

17. lépés: $4:2=2$, maradék 0, - r.e. $0,0526315789473684^{0}2$

18. lépés: $2:2=1$, maradék 0, eredmény $0,052631578947368421$, tehát írhatjuk

$\frac{1}{19}=0,\underbrace{(052631578947368421)}_{\text{18 számjegy}}$. Észrevehető, hogy nem osztottunk sehol 19- cel.

Az átalakítás elvégezhető szorzás segítségével is, ha a fenti számítások sorrendjét megfordítjuk, és kettővel szorzunk, valahogy így (a tizedes vessző utáni számot írjuk fel):

1. lépés: 1

2. lépés: 21 ($2\cdot 1=2$ elől)

3. lépés: 421 ($2\cdot 2=4$ elől)

4. lépés: 8421 ($2\cdot 4=8$ elől)

5. lépés: ${}_{1}68421$($2\cdot 8=16$ - 6 elől, marad az 1)

6. lépés: ${}_{1}368421$ ($2\cdot 6=12$, $12+1=13$- 3 elől, marad az 1)

.....

17. lépés: 52631578947368421

18. lépés: 052631578947368421 ($2\cdot 5=10$, 0 elől)

Tehát $\frac{1}{19}=0,(052631578947368421)$.

Észrevehető, hogy 19-cel való osztás helyett 2-vel szoroztunk mindvégig. Még észrevehető egy igen érdekes dolog, éspedig: ha vesszük a $0,052631578947368421$ számot, a vessző utáni számjegyeket megszámozzuk - azaz a_i - a vessző utáni i - edik számjegy, $i=\overline{1,18}$-, írhatjuk, hogy $a_1+a_{10}=a_2+a_{11}=...=a_9+a_{18}=9$, vagyis $a_k=a_{k+9}$, $k=\overline{1,9}$. Tehát a fenti két módszer segítségével (vagy más módszerekével) elégséges az első 9 lépést elvégezni, a többi számjegyet be lehet írni a már meglevők segítségével.

Ha az első módszert vesszük: leírjuk a 9. lépésnél kapott részeredményt, azaz $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9}=052631578$ és az $\overline{a_1a_2...a_9(9-a_1)(9-a_2)...(9-a_9)}=052631578947368421$ számra egészítjük ki. A második módszer esetén leírjuk a 9. lépésnél kapott részeredményt, azaz $\overline{a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}a_{16}a_{17}a_{18}}=947368421$ és kiegészítjük $\overline{(9-a_{10})(9-a_{11})...(9-a_{18})a_{10}a_{11}...a_{18}}$ $=052631578947368421$-re. Jó tudni, hogy ilyen törtek esetén a szakasz utolsó számjegye mindig 1. Megjegyezzük, hogy a fenti osztást el lehet végezni egy sorban is, természetesen, és ajánlott is.

Felvetődik a kérdés: a mai számítógépes világban miért kellene egy osztást papíron elvégezni? Azonnal következik egy másik kérdés: mi történik akkor, ha éppen nem rendelkezünk számológéppel, számítógéppel, mobiltelefonnal stb.? Vagy: miért is kell nekünk az $\frac{1}{19}$ tizedes értéke? Erre, mondjuk, lenne egy válasz: egy esztergályos több mint valószínű, hogy nem tud egy $\frac{1}{19}$ m átmérőjű fémrúdat esztergálni, viszont $0,0526$ m átmérőjűt igen. Ez a gyakorlati életben szükséges, tehát az $\frac{1}{19}$ egy megközelítő értékét használtuk. A matematikában szeretnénk tudni, hogy néz ki **pontosan** ez a szám tizedes alakban. Nézzük meg, miért is működnek a fenti módszerek:

$$\frac{1}{\overline{a9}}=\frac{1}{10a+9}=\frac{1}{10(a+1)-1}=\frac{1}{10(a+1)\left(1-\frac{1}{10(a+1)}\right)}=\frac{1}{10(a+1)}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10(a+1)}}=$$

$$=\frac{1}{10(a+1)}\cdot\left(1+\frac{1}{10(a+1)}+\left(\frac{1}{10(a+1)}\right)^2+\ldots\right)=10^{-1}\cdot\frac{1}{a+1}+10^{-2}\cdot\frac{1}{(a+1)^2}+10^{-3}\cdot\frac{1}{(a+1)^3}+\ldots$$

Ha $a=1$: $\frac{1}{19}=10^{-1}\cdot\frac{1}{2}+10^{-2}\cdot\frac{1}{2^2}+10^{-3}\cdot\frac{1}{2^3}+10^{-4}\cdot\frac{1}{2^4}+\ldots=10^{-1}\cdot 0,5+10^{-2}\cdot 0,25+$

$$+10^{-3}\cdot 0,625+10^{-4}\cdot 0,125+\ldots=0,05+0,0025+0,000125+0,0000625+\ldots=0,0526\ldots$$

Az általános eset megtalálható a „*Vedic Mathematics*”-ben.

Gyakorlatként elvégezhető az $\frac{1}{29}$ és $\frac{1}{59}$ törtek átalakítása tizedes törtekké.

A továbbiakban nézzünk egy ”más” típusú szorzást.

3.1.3. Szorzás az alapok segítségével - a „*Nikhilam navatascaramam Dasatah*” – szútra

Ismerősek a klasszikus szorzási módszerek: a szorzótábla használata, amit már elemiben megtanítanak, két vagy többjegyű szám szorzata, ami papíron viszonylag gyorsan kiszámítható, és még sorolhatnánk. A második védikus szútra, a „*Nikhilam navatascaramam Dasatah*” ami magyarul annyit jelent, hogy „*Mindent* 9*-ből és az utolsót a* 10*-ből*” egy érdekes szorzási módszert takar (hamarosan következik). Nézzünk egy példát: $9\cdot 7=?$ Klasszikus módszerrel (szorzótábla) egyből irható az eredmény: 63. Védikus módszerrel a következőképpen járunk el: Mivel számjegyről van szó vizsgáljuk, hogy mennyi hiányzik az adott számjegyektől a 10-ig, mivel a számok közel vannak a 10-hez.

$\begin{matrix}9 & -1\\ 7 & -3\end{matrix}$: Látjuk, hogy $9-3=7-1=6$ és $(-1)\cdot(-3)=3$. Akkor a szorzás eredménye a 63.

Lássunk még egy példát, most két kétjegyű számot szorzunk egymással: $87\cdot 94$.

$\begin{matrix}87 & -13\\ 94 & -06\end{matrix}$: $87-6=94-13=81$ és $(-6)\cdot(-13)=78$, a szorzás eredménye 8178.

Látható, hogy a második szorzás könnyen elvégezhető fejben is. A módszer tehát a következő: nézzük a szorzat tagjait (a számok számjegyeinek száma egyelőre egyenlő) és vizsgáljuk, melyikhez vannak közelebb a $10,100,1000,10000,\ldots$ számok közül. A fenti

második példában láttuk, hogy ez a szám a 100- ezt **alap**nak nevezzük. Ezután nézzük, hogy ezek a számok kisebbek/nagyobbak mint az alap (a fenti esetben kisebbek voltak). Leírjuk a számokat egymás alá, mindkettő mellé odaírjuk a hiányt vagy a többletet az alaphoz képest (a fenti második esetben a hiányok: -13 és -6). Összeadjuk a számokat átlósan – ez lesz az eredmény első része (81 a fenti esetben) – majd a második oszlopban szereplő számokat összeszorozzuk egymással – ez lesz az eredmény második része (78 a fenti esetben).

3.1.3.1. A szorzótényezők kisebbek mint az alap

A $88\cdot 88$ esetén: $\begin{matrix} 88 & 12 \\ 88 & 12 \end{matrix}$, $88-12=76$, $(-12)\cdot(-12)=144$, az eredmény $76/_{1}44=7744$.

A $76\cdot 91$ esetén: $\begin{matrix} 76 & 24 \\ 91 & 09 \end{matrix}$, $76-9=91-24=67$, $(-24)(-9)=216$, az eredmény $67/_{2}16=6916$.

Algebrai bizonyítás: Legyen $x=10^k$, $k\in\mathbb{N}^*$ a szorzás esetében vett alap, n_1 és n_2 a két szám, amelyeket össze akarunk szorozni egymással, a és b a hiányok. Ekkor $n_1=x-a$ és $n_2=x-b$, $a,b\in\mathbb{N}$. Írhatjuk: $n_1\cdot n_2=(x-a)(x-b)=x^2-ax-bx+ab$. Ezt az eredményt többféleképpen is felírhatjuk, a helyzetnek megfelelően:

1) $x^2-ax-bx+ab=x\lfloor(x-a)-b\rfloor+ab=x(n_1-b)+ab$ vagy

2) $x^2-ax-bx+ab=x\lfloor(x-b)-a\rfloor+ab=x(n_2-a)+ab$ vagy

3) $x^2-ax-bx+ab=x\lfloor(x-a)+(x-b)-x\rfloor+ab=x(n_1+n_2-x)+ab$.

Vegyük a $93\cdot 97$ szorzatot, majd alkalmazzuk a 3). képletet: $n_1=93$, $n_2=97$ és $x=100$, tehát $a=7$ és $b=3$. Akkor $93\cdot 97=100(93-97-100)-7\cdot 3=100\cdot 90+21=9021$. Fejben számolás esetén problémát jelenthet, ha az a és b többletek két- vagy többjegyű számok. Gyakorlatként el lehet végezni a következő szorzásokat: a). $86\cdot 89$; b). $92\cdot 95$; c). $89\cdot 89$.

Lépjünk tovább: mi történik ha a szorzat tényezői meghaladják az alapnak vett értéket?

3.1.3.2. A szorzótényezők nagyobbak mint az alap

Vegyük például a $12\cdot 13$ szorzatot, és vegyük alapnak a 10-et, így a 2 illetve 3 többletekről beszélhetünk. Az eljárás ugyanaz mint az előző esetben.

a) $\begin{matrix} 12 & +2 \\ 13 & +3 \end{matrix}$: $12+3=13+2=15$, $2\cdot 3=6$, tehát $12\cdot 13=15/6=156$;

Nézzünk még egy néhány példát:

b) $\begin{matrix} 17 & +7 \\ 19 & +9 \end{matrix}$: $17+9=19+7=26$, $7\cdot 9=63$, tehát $17\cdot 19=26/_{6}3=323$;

c) $\begin{matrix} 103 & +03 \\ 105 & +05 \end{matrix}$: $103+5=105+3=108$, $3\cdot 5=15$, $103\cdot 105=108/15=10815$;

d) $\begin{matrix} 112 & +12 \\ 112 & +12 \end{matrix}$: $112+12=124$, $12\cdot 12=144$, $112\cdot 112=124/_{1}44=12544$.

Algebrai bizonyítás: Legyen $x=10^k$, $k\in\mathbb{N}^*$ a szorzás esetében vett alap, n_1 és n_2 a két szám, amelyeket össze akarunk szorozni egymással, a és b többletek. Ekkor $n_1=x+a$ és $n_2=x+b$ $a,b\in\mathbb{N}$. Írhatjuk: $n_1\cdot n_2=(x+a)(x+b)=x^2+ax+bx+ab$. Tehát

1) $n_1\cdot n_2=x\cdot(x+a+b)+ab=x\cdot(n_1+b)+ab$ vagy

2) $n_1\cdot n_2=x\cdot(x+b+a)+ab=x\cdot(n_2+a)+ab$ vagy

3) $n_1\cdot n_2=x\cdot(x+a+b)+ab=x\cdot(n_1+n_2-x)+ab$.

Vegyük például a $112\cdot 112$ szorzatot és a 2). képletet: $n_1=n_2=112$, $x=100$, $a=b=12$. Akkor $112\cdot 112=100\cdot(112+12)+12\cdot 12=100\cdot 124+144=100\cdot(124+1)+44=12544$.

Gyakorlatként elvégezhetők a következő szorzások: a). $1235\cdot 1002$; b). $132\cdot 105$;c). $1456\cdot 1002$.

Maradt az eset, amikor az egyik tényező kisebb, mint a választott alap, míg a másik nagyobb (vagy fordítva).

3.1.3.3. Az egyik tényező kisebb mint az alap, a másik nagyobb

Egy ilyen szorzás lehetne, mondjuk a $105\cdot 94$. Alapnak vehetjük a 100-at, $105-100=5$, $94-100=-6$. Írhatjuk $\begin{matrix} 105 & +05 \\ 94 & -06 \end{matrix}$: $105-6=94+5=99$, $(+5)\cdot(-6)=-30$, tehát

$99/-30=\overline{9(9-1)(10-3)0}=9870$. Mit jelent a $99/-30$: $99/-30=9900-30=9870$.

Nézzünk még néhány példát:

a) $112\cdot 89$ - alapnak a 100-at vesszük.

$\begin{matrix}112 & +12\\ 89 & -11\end{matrix}$: $112-11=89+12=101$, $(+12)\cdot(-11)=-132$, tehát $101/-132=99/\underset{=200-132}{68}=$

$=9968$.

Magyarázat: $101/-132=10100-132=9900+(200-132)=9900+68=9968$.

b) $1003\cdot995$- alapnak az 1000-t vesszük.

$\begin{matrix}1003 & 003\\ 995 & -005\end{matrix}$: $1003-5=995+3=998$, $(+3)\cdot(-5)=-15\Rightarrow 998/-015=997/\underset{=1000-15}{985}=997985$;

c) $10014\cdot9994$ - alapnak a 10.000-t vesszük:

$\begin{matrix}10014 & +0014\\ 9994 & -0006\end{matrix}$: $10014-6=9994+14=10008$, $(+14)\cdot(-6)=-84$, az eredmény

$10008/-0084=10007/9916=100079916$

Algebrai bizonyítás: Ha $x=10^k$, $k\in\mathbb{N}^*$ az alap, n_1 és n_2 a szorzótényezők, a a többlet és b a hiány, akkor $n_1=x+a$ és $n_2=x-b$ $a,b\in\mathbb{N}$. Írhatjuk: $n_1\cdot n_2=(x+a)(x-b)=$

$=x^2+ax-bx-ab=x(x+a-b)-ab=x(n_1-b)-ab=x(n_2+a)-ab$.

Gyakorlatként végezzük el: a). $1003\cdot997$ b). $113\cdot94$ c). $10026\cdot9996$.

Érdekességképpen nézzük a „*Mindent* 9*-ből, és az utolsót a* 10*-ből*” módszert.

A $998\cdot648$ szorzat esetén vegyük alapnak az 1000-et. $\begin{matrix}9 & 9 & 8\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ 0 & 0 & 2\end{matrix}\rightarrow 2\begin{matrix}6 & 4 & 8\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ 3 & 5 & 2\end{matrix}\rightarrow 352$.

$\begin{matrix}998 & -002\\ 648 & -352\end{matrix}$: $998-352=648-2=646$, $(-2)\cdot(-352)=704$, $998\cdot648=646/704=646704$.

Elég könnyen észrevehető, hogy ez a módszer ugyanaz mint az első. De mi történik akkor, ha a szorzótényezők „távol vannak” a $10,100,1000,1000,\ldots$ számoktól? Ilyen eseteknél választhatunk más alapot.

3.1.4. Szorzás 10^k - tól különböző alap esetén

Vegyük a $47\cdot42$ szorzatot. Mivel mindkét szám elég közel van az 50-hez, legyen ez az alap (nagyon fontos, hogy az alap 10 többszöröse legyen). Az 50-et felírhatjuk $50=5\cdot10=\frac{100}{2}$.

i) Ha $50=5\cdot 10$, akkor $\begin{matrix}47 & -3\\ 42 & -8\end{matrix}$: $47-8=42-3=39$, $(-3)\cdot(-8)=24$. Mivel $50=5\cdot 10$, a 39 -et meg kell szorozni 5 -tel: $39\cdot 5=195$. Az eredmény $47\cdot 42=195/_2 4=1974$.

ii) Ha $50=\frac{100}{2}$, akkor $47-8=42-3=39$, $(-3)\cdot(-8)=24$. $\frac{39}{2}=19\frac{1}{2}$, az eredmény $19(5+2)4=1974$.

Magyarázat: az „$\frac{1}{2}$” a tízesek helyére jön, egy „fél százast” jelent, tehát ötös számjegyet. Még van egy kettes számjegy, ami a tízesek helyére jön, így kapjuk a $5+2=7$ -et.

Ha a $69\cdot 57$-nél alapnak a 60 - t vesszük, akkor $60=6\cdot 10$, tehát:

$\begin{matrix}69 & +9\\ 57 & -3\end{matrix}$: $69-3=57+9=66$, $(+9)\cdot(-3)=-27$, $66\cdot 6=396$, az eredmény $396/-27=3933$.

Következzen még néhány példa:

a) $406\cdot 375$ - alap a 400, $400=4\cdot 100$. $406-400=+6$, $375-400=-25$; $406-25=375+6=381$, $381\cdot 4=1524$, $6\cdot(-25)=-150$, akkor $406\cdot 375=1524/-150=$ $=152250$;

b) $367\cdot 298$ - alap a 300, $300=3\cdot 100$: $367-300=67$, $298-300=-2$, $367-2=298+67=365$, $365\cdot 3=1095$, $(-2)\cdot 67=-134$, az eredmény $1095/-134=109366$;

c) $307\cdot 311$ - alap a 300, $300=3\cdot 100$: $307-300=7$, $311-300=11$, $307+11=311+7=318$, $318\cdot 3=954$ és $7\cdot 11=77$. Az eredmény, tehát: $307\cdot 311=954/77=95477$.

Algebrai bizonyítás: Ha az alap nx, ahol $x=10^k$, $k\in\mathbb{N}^*$, n_1,n_2 a szorzótényezők.

a) $n_1=nx-a$, $n_2=nx-b\Rightarrow n_1n_2=(nx-a)(nx-b)=nx(nx-a-b)+ab$. Tehát

$n_1n_2=nx(n_1-b)+ab=nx(n_2-a)+ab$. (lásd $47\cdot 42$)

b) $n_1=nx+a$, $n_2=nx-b\Rightarrow n_1n_2=(nx+a)(nx-b)=nx(nx+a-b)-ab$. Tehát

$n_1n_2=nx(n_1-b)-ab=nx(n_2+a)-ab$. (lásd $69\cdot 57$).

c) $n_1=nx+a$, $n_2=nx+b\Rightarrow n_1n_2=(nx+a)(nx+b)=nx(nx+a+b)+ab$. Tehát

$n_1n_2=nx(n_1+b)+ab=nx(n_2+a)+ab$. (lásd $307\cdot 311$).

Gyakorlatként végezzük el: a). $76\cdot 63$; b). $213\cdot 205$; c). $407\cdot 396$; d). $247\cdot 243$.

Megismertünk egy pár érdekes trükköt amit úgy az iskolában, mint a való világban lehet alkalmazni. Természetesen, ez még csak egy csepp a tengerben de, gondolom, egy átlagos diák/átlagember érdeklődését sikerült felkelteni annyira, hogy „belevágjon” és kövesse tovább a dolgok alakulását.

3.1.5. 999...-cel való szorzás

Maradt még egy „trükk”: hogyan szorzunk össze egy számot a $9;99;999;9999;...$ alakú számokkal. Ha 9- cel szeretnénk szorozni, szorozzunk $10-1$-gyel, azaz pótoljuk nullával a szorzott számot és az eredményből kivonjuk ugyancsak a szorzott számot. Például $27\cdot 9=27\cdot 10-27=270-27=243$. Ez az alapja a következő eljárásoknak is. Két esetet különböztetünk meg:

I. A két szám számjegyeinek száma megegyezik. Vegyük a $87\cdot 99$ szorzatot. Az eljárás a következő: kivonunk a 87-ből 1-et, azaz $87-1=86$, ez lesz az eredményünk első két számjegye. Alkalmazzuk a „*Mindent* 9*-ből és az utolsót a* 10*-ből*” módszert a 87-re, tehát $87\to 13$, ez lesz az eredményünk utolsó két számjegye. Tehát $87\cdot 99=8613$. Nézzünk még néhány szorzást:

a) $1325\cdot 9999$: $1325-1=1324$, $\begin{matrix}1&3&2&5\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 8&6&7&5\end{matrix}$, az eredmény $1325\cdot 9999=13248675$;

b) $87654\cdot 99999$: $87654-1=87653$, $\begin{matrix}8&7&6&5&4\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 1&2&3&4&6\end{matrix}$, az eredmény 8765312346;

c) $432596\cdot 999999$: $432596-1=432595$, $\begin{matrix}4&3&2&5&9&6\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 5&6&7&4&0&4\end{matrix}$, az eredmény

432595567404.

II.A két szám számjegyeinek száma nem egyezik meg. Itt két esetről beszélhetünk: a $99...$ számban van a kevesebb számjegy vagy a $99...$ számban van a több számjegy.

i). Kevesebb a 9 számjegy, például a $563\cdot 99$ esetén. Látjuk, hogy két 9-es van, így az 563-at felírjuk $5/63$ alakban. Hozzáadunk az 5-höz 1-et, azaz $5+1=6$ és az eredményt kivonjuk az 563-ból - $563-6=557$. Alkalmazzuk a „*Mindent* 9*-ből és az utolsót a* 10*-ből*” módszert a 63-ra: $\begin{matrix}6&3\\ \downarrow&\downarrow\\ 3&7\end{matrix}$. Az eredmény a következő $563\cdot 99=55737$. Nézzünk még néhány példát:

a) $4965 \cdot 999$; $4+1=5$, $4965-5=4960$, $\begin{matrix} 9 & 6 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 3 & 5 \end{matrix}$, az eredmény 4960035;

b) $76583 \cdot 999$; $76+1=77$, $76583-77=76506$, $\begin{matrix} 5 & 8 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 1 & 7 \end{matrix}$, az eredmény 76506417;

c) $6479 \cdot 99$; $64+1=65$, $6479-65=6414$, $\begin{matrix} 7 & 9 \\ \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 \end{matrix}$, az eredmény 641421.

ii). Ha 9-ből van több: $78 \cdot 999$ - kivonunk a 78-ból 1-et, azaz $78-1=77$. Mivel a 999-ben három kilences van, kipótoljuk a 78-at egy nullással, elől, azaz 078-at írunk, és erre alkalmazzuk a „*Mindent* 9*-ből és az utolsót a* 10*-ből*” módszert : $\begin{matrix} 0 & 7 & 8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 9 & 2 & 2 \end{matrix}$, az eredmény pedig 77922. Nézzünk még néhány példát:

a) $53 \cdot 9999$: $53-1=52$, $\begin{matrix} 0 & 0 & 5 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 9 & 9 & 4 & 7 \end{matrix}$, az eredmény 529947;

b) $493 \cdot 99999$: $493-1=492$, $\begin{matrix} 0 & 0 & 4 & 9 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 9 & 9 & 5 & 0 & 7 \end{matrix}$, az eredmény 49299507;

c) $10864 \cdot 999999$: $10864-1=10863$, $\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 8 & 6 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 9 & 8 & 9 & 1 & 3 & 6 \end{matrix}$, az eredmény 10863989136.

Ezek a szorzások, amint láttuk, többé-kevésbé könnyen elvégezhetők fejben is. Lényegében ez az módszer előnye.

3.1.6. Függőlegesen és átlósan – az “*Urdhva Tiryagbhyam*” - *szútra*

Ebben a fejezetben bemutatunk és gyakorlati példákon keresztül szemléltetünk egy, a klasszikusnál egyszerűbb módszert a számok szorzására. Ahol szükség, algebrai bizonyítást is adunk. Nézzük a $6 \cdot 7$ szorzatot: $\begin{matrix} 2\cdot \\ \underline{4} \\ 8 \end{matrix}$. A két számot függőlegesen szoroztuk össze egymással, nevezhetnénk ezt a szorzást függőleges szorzásnak is. Mi történik a $12 \cdot 13$ esetében?

$\begin{array}{r} 1\ \ 2\cdot \\ \underline{1\ \ 3} \\ 156 \end{array}$. A lépések a következők: $\begin{array}{c}13\\ \downarrow \\ 12\end{array} \to 1\cdot 1 = 1$, $\begin{array}{ccc}1 & \searrow\swarrow & 3\\ 1 & & 2\end{array} \to 1\cdot 2 + 3\cdot 1 = 5$, $\begin{array}{c}13\\ \downarrow \\ 12\end{array} \to 2\cdot 3 = 6$, az eredmény tehát 156. Látszik, hogy: először szoroztunk függőlegesen, balról. Utána szoroztunk átlósan, az eredményeket összeadtuk, végül pedig szoroztunk függőlegesen, jobbról és az eredményeket leírtuk egymás mellé. Megtörténhet, hogy a műveletek eredménye nem számjegy, például a $43\cdot 57$ szorzat esetén.

$\begin{array}{r} 4\ \ 3\cdot \\ \underline{4\ \ 7} \\ 2021 \end{array}$. A következőképpen járunk el: $\begin{array}{c}43\\ \downarrow \\ 47\end{array} \to 4\cdot 4 = 16$, $\begin{array}{ccc}4 & \searrow\swarrow & 3\\ 4 & & 7\end{array} \to 4\cdot 7 + 3\cdot 4 = 40$ (leírjuk a 0-t, marad a 3), $\begin{array}{c}43\\ \downarrow \\ 47\end{array} \to 3\cdot 7 = 21$ (leírjuk az 1-et, marad a 2), az eredmény

$16/_4 0/_2 1 = 20_4 2_2 1 = 2021$

Fejben a következőképpen történik a számolás: vesszük az eredményeket fordított sorrendben.

$21 \to$ az utolsó számjegy 1, marad a 2, tehát írjuk, hogy $_2 1$; $40 + 2 = 42$, a tízesek számjegye 2, marad a 4. Írjuk, hogy $_4 2_2 1$; $16 + 4 = 20$, az eredmény $20_4 2_2 1 = 2021$.

Ezzel a módszerrel, tehát, a szorzás fejben nagyon könnyen elvégezhető. Könnyen észrevehető az is, hogy honnan jön ez az eljárás. Ha vesszük az n_1 és n_2 kétjegyű számokat, ezek az $n_1 = \overline{a_1 b_1} = 10a_1 + b_1$, $n_2 = \overline{a_2 b_2} = 10a_2 + b_2$ alakban írhatók. Ekkor $n_1 n_2 = (10a_1 + b_1)(10a_2 + b_2) = = 10^2 \cdot a_1 a_2 + 10\cdot(a_1 b_2 + b_1 a_2) + b_1 b_2$. Elmondhatjuk, hogy a módszer két polinom szorzásán alapszik.

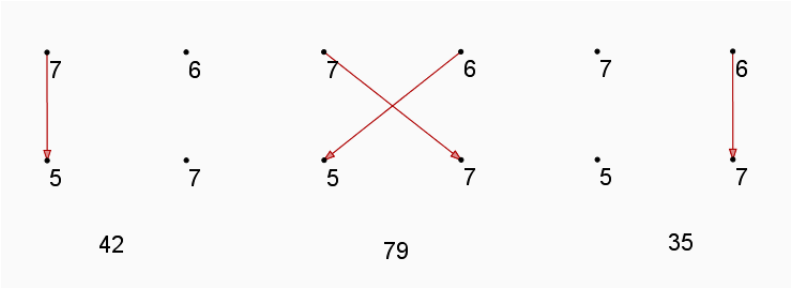
Szemléletesebb lehet a dolog, ha bevezetjük a következő jelöléseket :

bal-függőleges szorzat: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix} = a_1 \cdot a_2$, átlós szorzat: $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 + a_2 b_1$, jobb-függőleges szorzat: $\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = b_1 \cdot b_2$.

Végezzük el a $76\cdot 57$ szorzást: $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 7 \end{matrix} = 7\cdot 5 = 35$, $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = 7\cdot 7 + 6\cdot 5 = 79$, $\begin{matrix} 7 \\ 5 \end{matrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = 6\cdot 7 = 42$.

Ekkor az eredmény: $35/_{7}9/_{4}2 = 43_{8}3_{4}2 = 4332$.

A módszer grafikusan is szemléltethető:



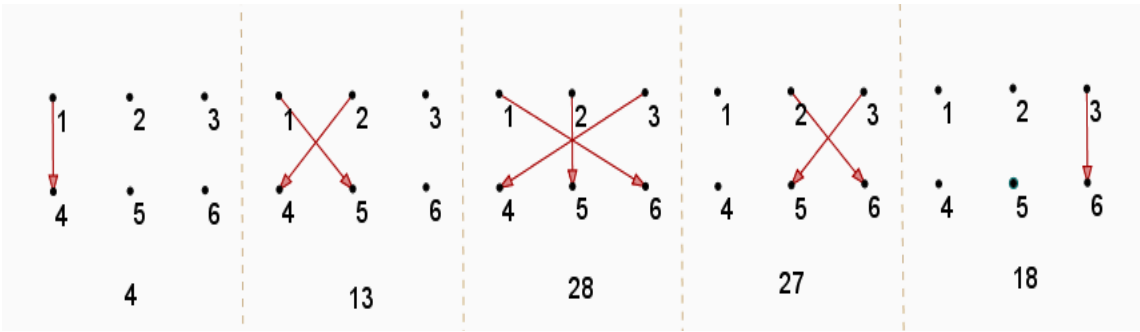
3.1.6-1 ábra

Nézzük meg, mi történik háromjegyű számoknál, például a $123 \cdot 456$ esetén.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{matrix} = 1 \cdot 4 = 4, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 6 \end{matrix} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 13, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 28,$$

$$\begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 = 27, \quad \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \cdot 6 = 18.$$

Az eredmény $4/_{1}3/_{2}8/_{2}7/_{1}8 = 5_{1}6_{3}0_{2}8_{1}8 = 56088$. Grafikusan szemléltetve:



3.1.6-2 ábra

Még egy példa két háromjegyű szám szorzatára $134 \cdot 267$: $1 \cdot 2 = 2$, $1 \cdot 6 + 3 \cdot 2 = 12$, $1 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 2 = 33$, $3 \cdot 7 + 4 \cdot 6 = 45$, $4 \cdot 7 = 28$. Tehát $134 \cdot 267 = 3_{1}5_{3}7_{4}7_{2}8 = 35778$.

Nézzük meg két négyjegyű szám szorzatát is, például $1359 \cdot 6523$ - itt hét lépés lesz.

$\begin{matrix} 1 & 3 & 5 & 9 \cdot \\ 6 & 5 & 2 & 3 \end{matrix} \rightarrow 8_{2}8_{5}6_{9}4_{6}7_{3}5_{2}7 = 8864757$. A számítások a következők:

$1\cdot 6=6$; $1\cdot 5+3\cdot 6=23$; $1\cdot 2+3\cdot 5+5\cdot 6=47$; $1\cdot 3+3\cdot 2+5\cdot 5+9\cdot 6=88$; $3\cdot 3+5\cdot 2+9\cdot 5=64$, $5\cdot 3+9\cdot 2=33$; $9\cdot 3=27$.

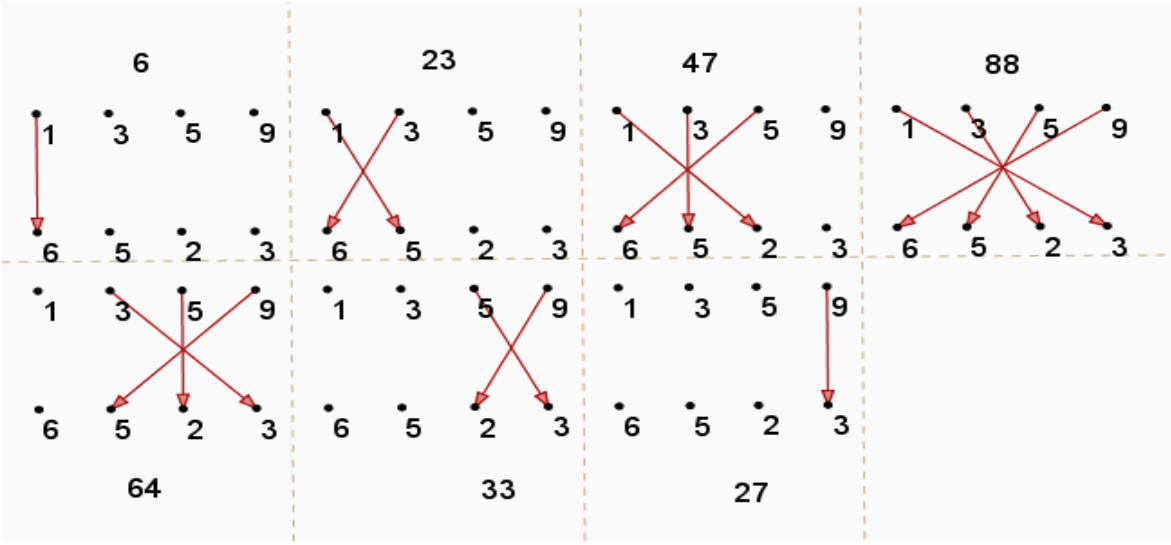
Indulunk hátulról előre:

$27\to {}_2 7$; $33+2=35\to {}_3 5_2 7$; $64+3=67\to {}_6 7_3 5_2 7$; $88+6=94\to {}_9 4_6 7_3 5_2 7$;

$47+9=56\to\to {}_5 6_9 4_6 7_3 5_2 7$; $23+5=28\to {}_2 8_5 6_9 4_6 7_3 5_2 7$; $6+2=8\to$

$\to 8_2 8_5 6_9 4_6 7_3 5_2 7$.

A szorzás grafikus szemléltetése:



3.1.6-3 ábra

Négyjegyű számokig még el lehet fejben végezni a szorzásokat, de négynél több jegyű számok esetén a szorzás már próbára teszi a fejszámolót. Ötjegyű számok esetén 9 lépés van és általánosan, n számjegy esetén, $2n-1$ lépés. A védikus szorzási módszerrel a hagyományos szorzáshoz képest jóval hamarabb eredményhez jutunk papíron, ceruzával a kézben is, a közbeni szorzásokat fejben végezve el. Lényegében egy fél sorban ki lehet számolni az eredményt.

Nem beszéltünk még olyan esetekről, amikor a szorzótényezők számjegyeinek száma különbözik, ilyen eset például a $2463\cdot 43$. Ilyenkor a két számot egyforma számjegyűvé tesszük, azaz pótoljuk két zéróval a 43-at, a százasok és az ezresek helyén. Így a $2463\cdot 0043$ szorzást kell elvégezni, öt lépésben. Írhatjuk $2463\cdot 0043=10_2 5_3 909=105909$. Vagy $6421\cdot 326==20_2 9_5 3_3 2_1 46=2093246$. Nincsen ilyen esetekben sem probléma a módszer alkalmazásával és, ha kell, még egyszerűbb az eljárás. Érdemes grafikusan is elvégezni a szorzást. Ahol nincsenek összekötve a számjegyek, ott az eredmény nulla lesz.

Nem mellékes dolog az sem, hogy a polinomok szorzását is hamarabb el lehet végezni, használva ezt a módszert.

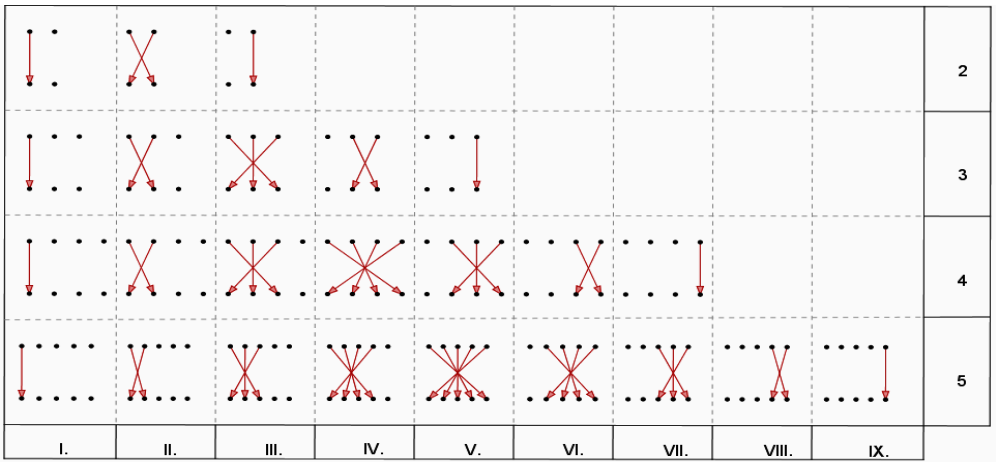
Nézzük, például, a $\left(2x^2+3x-5\right)\left(x^2+4x+4\right)$ szorzatot.

$$\begin{array}{lll} 2x^2 & 3x & -5\cdot \\ 1x^2 & 4x & 4 \end{array} \rightarrow$$

$$(2\cdot 1)\cdot x^4+(2\cdot 4+3\cdot 1)x^3+(2\cdot 4+3\cdot 4+(-5)\cdot 1)x^2+(3\cdot 4+(-5)\cdot 4)x+(-5)\cdot 4$$

$=2x^4+11x^3+15x^2-8x-20$. Fejben ki lehet számolni az együtthatókat.

A „*Függőlegesen és átlósan*” módszer grafikus szemléltetése:



3.1.6-4 ábra

Kezdetben lehet használni az ábrát, számjegyeket lehet írni a pontok helyére, és végigcsinálni az egész lépést. Így fog majd következni ugyanez a műveletsor elvégzése, csak fejben.

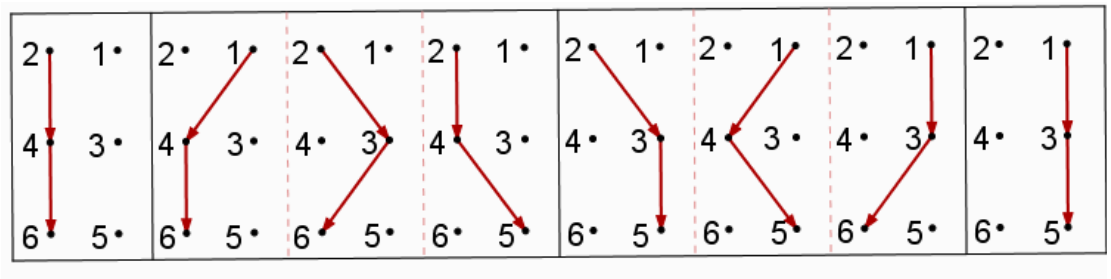
Ezek után jöhet a hatványozás, a gyökvonás, az eredmények ellenőrzése a számjegyek összegének segítségével és, nem utolsó sorban, ezek kamatoztatása: a determináns kiszámítása (harmad- és negyedrendű), polinomok szorzótényezőre bontása, egyenletek megoldása... De, még maradt egy érdekes eset.

3.1.7. Három kétjegyű szám szorzata

Még nem fogytak el a trükkök: végezzük el a $21\cdot 43\cdot 65$ szorzást. Az eljárás itt is egyszerű: leírjuk egymás alá a számokat $\begin{array}{c}21\\43\\65\end{array}$, majd kiszámoljuk eredmény egyeseit, tízeseit, százasait és ezreseit. Egyesek: $1\cdot 3\cdot 5=15$, tízesek: $2\cdot 3\cdot 5+1\cdot 4\cdot 5+6\cdot 3\cdot 1=68$, százasok:

$1\cdot 4\cdot 6+2\cdot 3\cdot 6+ +5\cdot 4\cdot 2=100$, ezresek: $2\cdot 4\cdot 6=48$. tehát $21\cdot 43\cdot 65=48/_{10}0/_{6}8/_{1}5$ $=58_{10}6_{6}9_{1}5=58695$.

A fenti szorzás grafikusan a következőképpen szemléltethető:



3.1.7-1 ábra

Az eljárás *algebrai bizonyítása* is egyszerű: legyen a három szám $n_1=10a_1+b_1$, $n_2=10a_2+b_2$ és $n_3=10a_3+b_3$. Akkor írhatjuk, hogy:

$$n_1\cdot n_2\cdot n_3=(10a_1+b_1)(10a_2+b_2)(10a_3+b_3)=$$

$$=\lfloor 10^2\cdot a_1a_2+10\cdot(a_1b_2+b_1a_2)+b_1b_2\rfloor\cdot(10a_3+b_3)=$$

$$=10^3\cdot a_1a_2a_3+10^2(a_1a_2b_3+a_1b_2a_3+b_1a_2b_3)+10\cdot(a_1b_2b_3+b_1a_2b_3+b_1b_2a_3)+b_1b_2b_3.$$

Grafikusan könnyebben megjegyezhető a módszer, ezért nem is ajánljuk alkalmazni (esetleg megjegyezni) a fenti képletet. Gyakorlásképpen nézzünk még egy utolsó szorzást: $29\cdot 32\cdot 43$.

$$\underset{24}{2\cdot 3\cdot 4}\Big/\underbrace{9\cdot 3\cdot 4+2\cdot 2\cdot 4+3\cdot 3\cdot 2}_{14\,2}\Big/\underbrace{2\cdot 2\cdot 3+9\cdot 3\cdot 3+4\cdot 2\cdot 9}_{16\,5}\Big/\underset{5\,4}{9\cdot 2\cdot 3}=39_{15}9_{17}0_{5}4=39904.$$

Végül következzen egy, a *youtube*[11]-on elég sűrűn bemutatott módszer, amit ott „*ősi kínai szorzási módszer*”-nek neveznek.

3.1.8. Szorzás vonalakkal

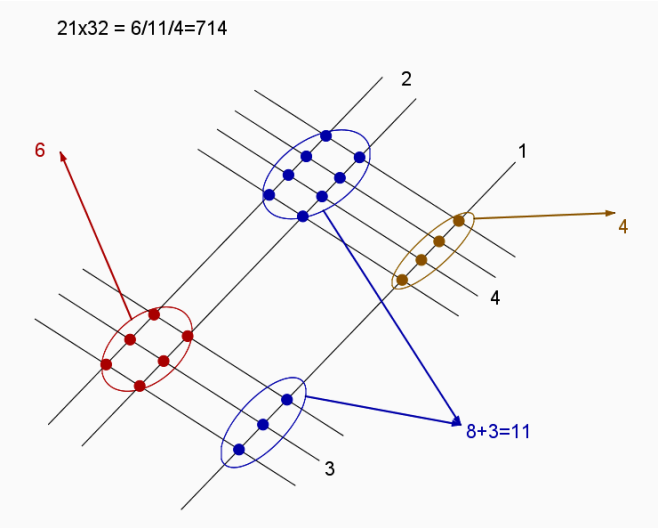
El lehet végezni egy szorzást rajzolva, vonalak segítségével. Például végezzük el a $21\cdot 34$ szorzást, használva a 3.1.8-1 ábrát.

Az eljárás a következő: húzunk két vonalat átlósan, balról jobbra, alulról felfele és ezekkel párhuzamosan, egy kicsit távolabb, még egy vonalat – ez lesz a 21. Ugyanezt elvégezzük átlósan, jobbról balra, alulról felfele, $3+4$ vonalra. Ezek után számoljuk a metszéspontokat. Három csoportot különböztetünk meg: piros, kék és barna. A piros pontok

[11] https://www.youtube.com/watch?v=_AJvshZmYPs

száma adja a százasok számát, a kékeké a tízesekét míg a barnáké az egyesekét. Az ábra alapján írhatjuk $21 \cdot 34 = 6 \cdot 10^2 + 11 \cdot 10 + 4 \cdot 1 = 7_1 14 = 714$.

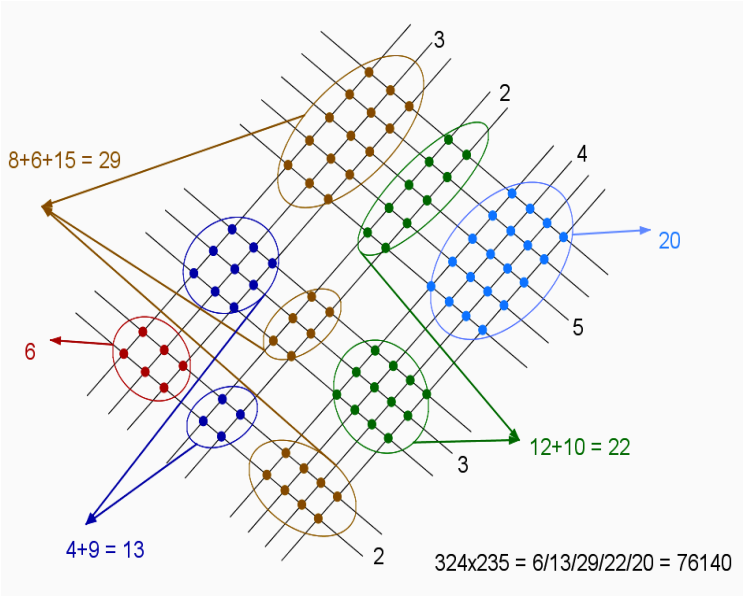
Az ábra a következő:



3.1.8-1 ábra

Ha a $31 \cdot 35$-t szeretnénk kiszámolni, még húzunk: egy vonalat – balról jobbra, lentről felfele és egyet jobbról balra, lentről felfele. A piros metszéspontok száma hárommal nő, tehát 9 a kékeké héttel, tehát 18 míg a barnáké eggyel, tehát 5. Tehát $31 \cdot 35 = 9 \cdot 10^2 + 18 \cdot 10 + 5 = 1085$.

Két háromjegyű szám szorzata, például a $324 \cdot 235$ esetén az ábra a következő:



3.1.8-2 - ábra

Látszik, hogy itt mivel két háromjegyű számot szorzunk egymással, három – három rend vonalat húzunk. Itt is számoljuk a metszéspontokat, öt csoportot különböztetünk meg: piros, sötétkék, barna, zöld és világoskék. Ezek száma, a megadott sorrendben, adja a tízezresek, ezresek ... számát. Az ábra alapján írhatjuk :

$324 \cdot 235 = 6 \cdot 10^4 + 13 \cdot 10^3 + 29 \cdot 10^2 + 22 \cdot 10 + 20 = 7_1 6_3 1_2 4_2 0 = 76140$.

Észrevehető, hogy ez a módszer alapjában megegyezik a „*Függőlegesen és átlósan*” módszerrel. A vonalak metszéspontjainak száma egy csoportban két számjegy szorzatát jelentik. Ha vesszük szerre: $6 = 3 \cdot 2$, $13 = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2$, $29 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5$,

$22 = 2 \cdot 5 + 4 \cdot 3$ és $20 = 4 \cdot 5$, azaz pontosan a „*Függőlegesen és átlósan*”.

Gyakorlatként végezzük el: a). $14 \cdot 32 \cdot 75$; b). $452 \cdot 364$; c). $383 \cdot 409$.

3.1.9. Négyzetre emelés védikusan.

Az első fejezetben láttuk, hogy speciális esetekben viszonylag hamar kiszámítható egy természetes szám négyzete, fejben. Pontosabban az 5-tel végződő számokról van szó. Ebben a fejezetben próbálunk még több módszert bemutatni, általánosabb esetekre.

3.1.9.1. A „*Yavadunam Tavadunikrtya Varganca Yojayet*” szútra

A megnevezés magyarul annyit jelent, hogy: „*Bármennyi is legyen a különbség, vond ki a számból, és írd a különbség négyzete mellé* ”. Ez a szútra olyan számok esetén alkalmazható, amelyek közel vannak 10 valamelyik hatványához (amit alapnak veszünk). Itt három esetet különböztetünk meg: a szám kisebb vagy nagyobb 10 valamelyik hatványánál vagy közel van 10 egy többszöröséhez. Megvizsgáljuk mindhárom esetet, ötjegyű számokig.

i). Alap alatti számok négyzete

a) 8^2 - itt az alap 10. A különbség $10 - 8 = 2$, és ennek négyzete $2^2 = 4$ - ez lesz az eredmény utolsó számjegye. A különbséget kivonjuk a számból, azaz $8 - 2 = 6$, ez lesz az eredmény első számjegye. Tehát $8^2 = 6/4 = 64$;

b) 97^2 - az alap 100. A különbség $100 - 97 = 3$, $3^2 = 9$. Mivel az alap 100, ha a különbség négyzete nem kétjegyű szám, pótoljuk 0-val, elől. Tehát az utolsó két számjegy 09 és $97 - 3 = 94$ tehát $97^2 = 94/09 = 9409$.

c) 984^2 - az alap 1000. A különbség $1000 - 984 = 16$, $16^2 = 256$, $984 - 16 = 968$, tehát $984^2 = 968/256 = 968256$;

d) 9985^2 - az alap 10000. A különbség $10000-9985=15$, $15^2=225$. Mivel az alap 10000, az utolsó négy számjegy 0225, $9985-15=9970$ tehát $9985^2=9970/0225=99700225$.

Algebrai bizonyítás: Ha $x=10^k$ az alap, és y a különbség, akkor a négyzetre emelendő szám $n=x-y$ lesz. Ismert az $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ képlet. Írhatjuk tovább, hogy $n^2=(x-y)^2=x^2-2xy+y^2=x(x-2y)+y^2=x(x-y-y)+y^2=x(n-y)+y^2$.

Ha $n=987$, írhatjuk: $987^2=(1000-13)^2=1000\cdot(987-13)+13^2=1000\cdot 974+169=$
$=974169$. Használhatjuk az $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ képletet, ahonnan

$$a^2=(a+b)(a-b)+b^2.$$

Ekkor $a=987$ és $b=13$ esetén: $987^2=(987+13)(987-13)+13^2=1000\cdot 974+169=974169$.

ii). Alap feletti számok négyzete

a) 13^2 - az alap 10. A felesleg $13-10=3$, $3^2=9$. Hozzáadjuk a számhoz a felesleget $13+3=16$. Az eredmény $13^2=16/9=169$;

b) 114^2 - az alap 100. A felesleg $114-100=14$, $14^2=196$, $114+14=128$. Az eredmény $114^2=128/_{1}96=129_{1}96=12996$;

c) 1016^2 - az alap 1000. A felesleg $1016-1000=16$, $16^2=256$, $1016+16=1032$. Az eredmény $1016^2=1032/256=1032256$.

Algebrai bizonyítás: Igaz az $a^2=(a+b)(a-b)+b^2$ egyenlőség $\forall a,b\in\mathbb{R}$ esetén. Vehetjük a-nak a négyzetre emelendő számot, b-nek a felesleget.
Ha $a=113$, $b=13$, akkor: $113^2=(113+13)(113-13)+13^2=126\cdot 100+169=12769$.

Másképp: igaz, hogy $(x+y)^2=x(x+y+y)+y^2$ $\forall x,y\in\mathbb{R}$ esetén. Ha $n=x+y$ a négyzetre emelendő szám, x az alap és y a felesleg, akkor $n^2=x(n+y)+y^2$. Számoljuk ugyancsak a 113 négyzetét: $113^2=100\cdot(113+13)+13^2=126\cdot 100+169=12769$. Vagy, például $100015^2==100000\cdot(100015+15)+15^2=100000\cdot 100030+225=10003000225$.

iii). Olyan számok négyzete, amelyek közel vannak 10 egy többszöröséhez

Vegyük a 389 négyzetét: 389^2 - a legközelebbi alap a 400.

- Kiszámoljuk a különbséget $400-389=11$, ennek négyzete $11^2=121$.
- Kivonjuk a számból a különbséget $389-11=378$.
- Mivel $400=4\cdot 100$, $378\cdot 4=1512$.

Az eredmény $389^2=1512/_{1}21=1513_{1}21$. Nézzünk még néhány példát:

a) 684^2 - az alap 700, $700-684=16$. Tehát $684^2=7\cdot(684-16)/16^2=4676/_{2}56=$
$=4678_{2}56=467856$;

b) 412^2 - az alap 400. Ekkor $412^2=4\cdot(412+12)/12^2=1696/_{1}44=169744$;

c) 3019^2 - az alap 3000. Ekkor $3019^2=3\cdot(3019+19)/19^2=9114/361=9114361$.

3.1.9.2. Általános módszer

Emlékezzünk vissza két szám szorzatának a „*Függőlegesen és átlósan*” módszerrel való kiszámítására. Mi történne ha két egyenlő számot kellene összeszoroznunk egymással? Lényegesen leegyszerűsödnének a dolgok. Például a $17\cdot 17$ szorzat esetén alkalmazva a módszert, kapjuk: $\begin{matrix}1 & 7\cdot\\ 1 & 7\end{matrix}=1\cdot 1+1\cdot 7+7\cdot 1+7\cdot 7=1^2+2\cdot 1\cdot 7+7^2$. Látjuk, hogy az $1\cdot 7$ kétszer jelenik meg. Tehát négy szorzat helyett hármat kell kiszámolni. Az eredmény

$$17\cdot 17=17^2=1^2/2\cdot 1\cdot 7/7^2=1/_{1}4/_{4}9=2_{1}8_{4}9=289.$$

Az 1^2, $2\cdot 1\cdot 7$ és 7^2 számokat ***duplex*** - eknek nevezzük, D- vel jelöljük. Így $D(1)=1^2$, $D(17)=2\cdot 1\cdot 7$ és $D(7)=7^2$, és $17^2=D(1)/D(17)/D(7)=289$. Ha n egy kétjegyű szám, felírható az $n=\overline{ab}=10a+b$ alakban, tehát $n^2=10^2\cdot a^2+10\cdot 2ab+b^2$, vagyis

$$n^2=10^2\cdot D(a)+10\cdot D(\overline{ab})+D(b).$$

Írjuk fel egy szám *duplex* - ét, általánosan:

$n=a$: $D(a)=a^2$, például $D(7)=49$,

$n=\overline{ab}$: $D(\overline{ab})=2ab$, például $D(73)=2\cdot 7\cdot 3=42$,

$n=\overline{abc}$: $D(\overline{abc})=b^2+2ac$, például $D(732)=3^2+2\cdot 7\cdot 2=37$,

$n=\overline{abcd}$: $D(\overline{abcd})=2(ad+bc)$, például $D(7324)=2\cdot(7\cdot 4+3\cdot 2)=68$.

Akkor írhatjuk, hogy:

$\overline{abc}^2=D(a)/D(\overline{ab})/D(\overline{abc})/D(\overline{bc})/D(c)$ illetve

$$\overline{abcd} = D(a)/D(\overline{ab})/D(\overline{abc})/D(\overline{abcd})/D(\overline{bcd})/D(\overline{cd})/D(d).$$

A következőkben ki fogjuk számolni néhány természetes szám négyzetét, duplexek segítségével.

a) 126^2; $D(1)=1$, $D(12)=2\cdot1\cdot2=4$, $D(126)=2^2+2\cdot1\cdot6=16$, $D(26)=2\cdot2\cdot6=24$, $D(6)=36$. Tehát $126^2 = 1/4/_1 6/_2 4/_3 6 = 15_1 8_2 76 = 15876$. Fejben számolva, „egybeolvasztjuk” a duplexeket, négy lépésben:

$$\underset{I.}{1/4=14} \to \underset{II.}{14/_1 6 = 15_1 6} \to \underbrace{156/_2 4}_{III.} = 1584 \to \underbrace{1584/_3 6}_{IV.} = 15876).$$

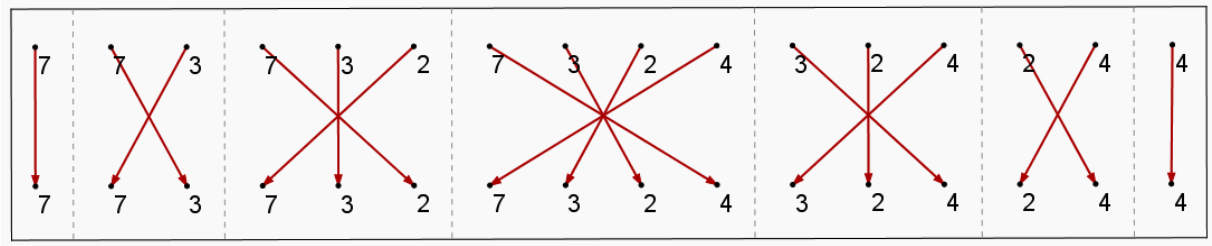
b) 347^2; $D(3)=9$, $D(34)=24$, $D(347)=16+42=58$, $D(47)=56$, $D(7)=49$.

Írhatjuk, hogy $347^2 = 9/_2 4/_5 8/_5 6/_4 9 = 12_3 0_6 4_6 09 = 120409$.

(Fejben: $\underset{I.}{9/_2 4 = 114} \to \underbrace{114/_5 8}_{II.} = 1198 \to \underbrace{1198/_5 6}_{III.} = 12036 \to \underbrace{12036/_4 9}_{IV.} = 120409$).

c) 7324^2; $D(7)=49$, $D(73)=42$, $D(732)=37$, $D(7324)=68$, $D(324)=28$, $D(24)=16$, $D(4)=16$. Tehát $7324^2 = 49/_4 2/_3 7/_6 8/_2 8/_1 6/_1 6 = 53640976$.

Nézzük meg a 7324^2 négyzetre emelést grafikusan is:



3.1.9-1 ábra

Három- vagy többjegyű számok esetén, a számjegyeket csoportosítva, csökkenthetjük a műveletek számát – egy háromjegyű szám négyzetét kiszámíthatjuk úgy, mint egy kétjegyűét és így tovább. Számoljuk ki így is a fenti négyzeteket:

d) 126^2; - a 126-ot két csoportra osztjuk úgy, mint $12/6$, így számolunk duplexeket (a csoportokat számjegyként kezeljük). $D(12)=12^2=144$, $D(126)=2\cdot12\cdot6=144$ és $D(6)=6^2=36$. Írhatjuk, hogy $126^2 = 144/_{14} 4/_3 6 = 158_{14} 7_3 6 = 15876$. (Felbonthattuk volna így is $1/26$. Ekkor $126^2 = 1/5_2/676 = \overline{15(2+6)76} = 15876$).

e) 347^2; $D(34)=34^2=1156$, $D(347)=2\cdot 34\cdot 7=476$ és $D(7)=7^2=49$. Tehát $347^2=1156/_{47}6/_{4}9=1204_{48}0_{4}9=120409$.

f) 1216^2; $D(12)=144$, $D(1216)=2\cdot 12\cdot 16=384$, $D(16)=256$. Tehát $1216^2=144/_{3}84/_{2}56=147_{3}86_{2}56=1478656$. Azért ehhez fűzzünk egy kis magyarázatot is: $1216^2=\left(12\cdot 10^2+16\right)^2==144\cdot 10^4+384\cdot 10^2+256=\underbrace{(144+3)}_{147}\cdot 10^4+\underbrace{(84+2)}_{86}\cdot 10^2+56$, így már egybeolvaszthatunk, tehát $1216^2=147/86/56=1478656$.

3.1.10. Négyzetgyökvonás védikusan

A négyzetgyökvonás a négyzetre emelés fordított művelete. Ez azt sugallja, hogy el lehetne végezni úgy, hogy mindent visszafele csinálunk a négyzetre emeléshez képest. Először is vegyük észre, hogy egy egyjegyű szám négyzete egy vagy kétjegyű, egy kétjegyű számé három vagy négyjegyű és így tovább. Tehát, ha egy hétjegyű számból kell négyzetgyököt vonni és a szám teljes négyzet, akkor az eredmény számjegyeinek száma $\left\lfloor \frac{7+1}{2} \right\rfloor=4$, ($\sqrt{256}=16$, $\sqrt{17956}=134$ stb.). Lássuk, hogyan működik a védikus módszer.

Számítsuk ki a $\sqrt{1156}$-ot. Az eredmény kétjegyű lesz, általánosan $\overline{ab}$. Tehát keressük azt az $\overline{ab}$ számot amelyre $\overline{ab}^2=1156$. Tudjuk, hogy $D(a)=a^2$, $D\left(\overline{ab}\right)=2ab$ és $D(b)=b^2$. Felosztjuk a gyök alatti számot kétjegyű csoportokra, hátulról előre, így: $11'56$. Mivel az első csoport 11, az eredmény első számjegye 3 lesz, mert az első duplex $D(a)=a^2$, és $a=2$ túl kevés, $a=4$ túl sok. Kivonjuk a 11-ből az első duplexet, azaz $11-9=2$, az eredményt a következő számjegy elé írjuk, kapjuk a 25-öt. A következő duplex a $D\left(\overline{ab}\right)=2ab=6b$. Innen látszik, hogy $b=4$ ($25:6=4$, maradék 1). A maradékot az utolsó számjegy elé írjuk, kapjuk a 16-ot. Az utolsó duplex a $D(b)=b^2$ tehát $b^2=16\Rightarrow b=4$, ahogy az előbb is kaptuk. Ez azt jelenti, hogy az 1156 teljes négyzet és $\sqrt{1156}=34$. Egy kis gyakorlással, papíron, ceruzával a kézben, egy sorban elvégezhető a négyzetgyökvonás.

Eljárhattunk volna másképp is: elég lett volna kiszámolni az első számjegyet, a másodikat ki lehet „találni”. Vegyük csak a $\sqrt{11'56}$-ot. Az eredmény kétjegyű szám és az első számjegye 3. Mennyi lehet a második számjegy? Mivel a 1156 szám 6-ra végződik, két eset

lehetséges: 4 vagy 6. $36^2 = 1156$ nem igaz, mert $3+6=9$, $9^2 = 81$, a számjegyek összege $8+1=9$, míg az 1156 számjegyeinek összege $1+1+5+6 \to 13 \to 4$. A helyes megoldás a 34 lesz. Ez a módszer három vagy négyjegyű teljes négyzetek esetén működik. (Itt vizsgáltuk a számok 9-cel való osztási maradékát).

Számoljuk ki egy hatjegyű szám négyzetgyökét, például a $\sqrt{61'30'89}$-et. Az eredmény háromjegyű lesz, vagyis $\overline{abc}$ alakú. A számjegyeket itt is a duplexek segítségével fogjuk kiszámolni. Az első számjegy $a = 7 \Rightarrow a^2 = 49$, $61-49=12$. A második számjegyet a második duplex segítségével számoljuk ki: $D\left(\overline{ab}\right) = 2ab \underset{a=7}{=} 14b$, az ennek megfelelő szám az 123 $123:14=8$, maradék 11. Tehát $b=8$. A harmadik duplex $D\left(\overline{abc}\right) = b^2 + 2ac \overset{a=7}{\underset{b=8}{=}} 14c + 64$, az ennek megfelelő szám 110, $110-64=46$, $46:14=3$, maradék 4, tehát $c=3$. $D\left(\overline{bc}\right) = 2bc \overset{b=8}{\underset{c=3}{=}} 48$, ennek megfelel a 48, $48-48=0$ és $D(c) = c^2 \underset{c=3}{=} 9$, $9-9=0$, tehát a 613089 teljes négyzet és $\sqrt{613089} = 783$.

A $\sqrt{28'90'13'76}$ esetén is a fentihez hasonlóan járunk el. Az eredmény négyjegyű, tehát 7 duplexünk lesz, az első négy segítségével meghatározzuk a számjegyeket, az utolsó három igazolja, hogy valóban teljes négyzet (ha teljes négyzet). Legyen az eredmény $\overline{abcd}$ alakú. Akkor $a=5$, $28-5^2=3$. $D\left(\overline{ab}\right) = 2ab \underset{a=5}{=} 10b$, ennek megfelel a 39, $39:10=3$, maradék 9, tehát $b=3$. $D\left(\overline{abc}\right) = b^2 + 2ac \overset{a=5}{\underset{b=3}{=}} 10c + 9$, ennek megfelel a 90, $90-9=81$, $81:10=8$, maradék 1, tehát $\underline{c=8}$. $\underline{D\left(\overline{abcd}\right) = 2ad + 2bc = 10d + 48}$, ennek megfelel a 11, $\underline{11-48=-37}$ - ha a különbség negatív, csökkentjük eggyel az utolsó meghatározott számjegyet, kiszámoljuk újra a duplexet és kivonjuk 111-ből. Tehát akkor $c=7$ és a negyedik duplex $D\left(\overline{abcd}\right) = 10d + 42$, $111-42=69$, $10d$-nek megfelel a 69, $69:10=6$, maradék 9. Megvan az utolsó számjegy is, $d=6$. Nézzük az utolsó három duplexet: $D\left(\overline{bcd}\right) = c^2 + 2bd = 49+36=85$, $93-85=8$. $D\left(\overline{cd}\right) = 2cd = 84$, $87-84=3$. $D(d) = 36$, $36-36=0$, tehát $\sqrt{28901376} = 5376$.

A következő eljárás hasonlít az előbbihez, az osztáskor az eredmény első számjegyének a kétszeresével osztunk. Számoljuk ki a $\sqrt{18'98'34'49}$ értékét. Az első számjegy 4, leírjuk. $18-4^2=2$, $29:8=3$, maradék 5, tehát a második számjegy 3. $D(3)=9$, $58-9=49$, $49:8=6$, maradék 1 - a duplex kétjegyű ($D(36)=36$) és a maradék kisebb, mint a duplex első számjegye. Tehát a harmadik számjegy $6-1=5$ lesz és a maradék 9, részeredmény $4/35$. $D(35)=30$, $93-30=63$, $63:8=7$, maradék 7, tehát az utolsó számjegy 7, részeredmény $4/357$. $D(357)=67$, $74-67=7$, $7:8=0$, maradék 7, részeredmény $4/357,0$. $D(3570)=70$, $74-70=4$, $4:8=0$, maradék 4, részeredmény $4/357,00$. $D(35700)=49$, $49-49=0$, $0:8=0$, tehát a végeredmény $\sqrt{18983449}=4357,000=4357$.

Végül következzen egy gyökvonás, amelynek eredménye nem természetes szám, azaz nem teljes négyzet van a gyök alatt. Vegyük a $\sqrt{34'26'85}$ számot. Az első számjegy 5, $D(5)=25$, $34-25=9$, $92:10=9$, maradék 2 - a 9 duplexének első számjegye nagyobb mint 2, tehát a második számjegy $9-1=8$ lesz, és a maradék 12, részeredmény $5/8$. $D(8)=64$, $126-64=62$, $62:10=6$, maradék 2 - mivel a duplex első számjegye ismét nagyobb, mint kettő, az utolsó számjegy 5 („maradéknak” 12-t veszünk), részeredmény $5/85$. Maradt a gyök alatti szám utolsó három számjegye – ezeket felhasználva folytatjuk az eljárást, kitéve a tizedes vesszőt a részeredményünk végére. $D(85)=80$, $128-80=48$, $48:10=4$, maradék 8 - kevés lesz, tehát az első tizedes számjegy 3, részeredmény $5/85,3$. $D(853)=73$, $185-73=112$, $112:10=9$, „maradék” 22, tehát a részeredmény $\sqrt{342685}=585,39...$ Ha tovább szeretnénk folytatni, pótoljuk a gyök alatti számot nullákkal. $\sqrt{342685,0}=5/85,39$ - a „maradék” 22 volt. $D(8539)=174$, $220-174=46$, $46:10=4$, maradék 6 kevés lesz, tehát a következő számjegy 3 és így tovább... Írhatjuk $\sqrt{342685}=585,393...$

Gyakorlatként számítsuk ki: a). $\sqrt{2496}$; b). $\sqrt{127449}$; c). $\sqrt{10614564}$; d). $\sqrt{169534}$.

3.1.11. Köbre emelés védikusan

Számítsuk ki a 102^3 értékét. Tudjuk, hogy $102^3 = 102 \cdot 102 \cdot 102 = 102^2 \cdot 102$. A 102^2-t ki tudjuk számolni, viszonylag hamar, de ezt még meg kell szorozni 103-mal – mindez elvégezhető védikusan (is), természetesen.

Próbáljuk másképp: Ismert a következő képlet $(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$.

$$10\color{red}{2}^3 = (100+\color{red}{2})^3 = 100^3 + 3 \cdot 100^2 \cdot \color{red}{2} + 3 \cdot 100 \cdot \color{red}{2}^2 + \color{red}{2}^3 = 10^6 + 3 \cdot \color{red}{2} \cdot 10^4 + 3 \cdot \color{red}{2}^2 \cdot 10^2 + \color{red}{2}^3 =$$
$$= (100 + 3 \cdot 2) \cdot 10^4 + 6 \cdot 2 \cdot 10^2 + 8 = 106/12/08 = 1061208.$$

Ezt így hosszas lenne mindig leírni, ezért nézzük a szabályt: az eredmény első három számjegye 106 (a 100-nál $3 \cdot 2$-vel több), a következő két számjegyet a $3 \cdot 2^2$ eredménye adja, tehát 12 lesz, az utolsó két számjegy a többlet köbe lesz, azaz $2^3 = 8$ - mivel két számjegy kell, nullával pótolunk. Tehát $102^3 = (100 + 2 \cdot 3)/3 \cdot 2^2/2^3 = 106/12/08 = 1061208$. Általánosan:

$$\overline{\underbrace{100...0}_{n \text{ db } 0}a}^{\,3} = \left(\underbrace{1\,0...0}_{n+1 \text{ db } 0} + 3a\right) \Big/ \underbrace{3a^2}_{n \text{ sz.j.}} \Big/ \underbrace{a^3}_{n \text{ sz.j.}}.$$

Nézzünk még néhány példát:

a) $10016^3 = (10000 + 3 \cdot 16)/3 \cdot 16^2/16^3 = 10048/0768/4096 = 1004807684096$

b) $1009^3 = (1000 + 3 \cdot 9)/3 \cdot 9^2/9^3 = 1027/243/729 = 1027243729$.

3.1.11.1. A „*Yavadunam*” – szútra

A fenti módszerhez hasonló: 100, 1000, 10000-hez közeli számok köbei számolhatók ki a segítségével. Két eset különíthető el: a szám kisebb, avagy nagyobb, mint a 10 egy hatványa.

i). A szám nagyobb, mint 10 egy hatványa (104^3):

A számításokat három lépésben végezzük el. Első lépésben hozzáadjuk a számhoz a fölösleg kétszeresét, azaz $104 + 2 \cdot 4 = 112$, ez lesz az eredmény első része. Ezután az új fölösleget $(112 - 100 = 12\text{-t})$– megszorozzuk a régi fölösleggel, azaz $12 \cdot 4 = 48$-cal, ez lesz az eredmény középső része. Végül köbre emeljük a fölösleget: $4^3 = 64$, ez lesz az eredmény utolsó része. Írhatjuk tehát, hogy $104^3 = 112/48/64 = 1124864$.

Nézzük, ezzel a módszerrel, az 1007^3-t: az első rész $1007+2\cdot 7=1021$, a második rész $21\cdot 7=147$, a harmadik rész $7^3=343$, az eredmény $1007^3=1021/147/343=1021147343$.

ii).A szám kisebb, mint 10 **egy hatványa (**94^3**):**

A számítások az a).-hoz hasonlóak. Az alap 100 lesz. Először is a különbség -6, a kétszerese $2\cdot(-6)=-12$, ezt hozzáadjuk a számhoz $94-12=82$, ez az eredmény első része. Ezután összeszorozzuk az új különbséget az eredeti különbséggel $(-18)\cdot(-6)=108$. Végül köbre emeljük a -6 különbséget $(-6)^3=-216$. Az eredmény $94^3=82/_{1}08/-_{2}16=830584$.

Nézzünk még két példát:

a) $997^3=\underbrace{(997-2\cdot 3)}_{991}\Big/(-9)\cdot(-3)/(-3)^3=991/027/-027=991026973;$

b) $9984^3=(9984-2\cdot 16)/(-48)\cdot(-16)/(-16)^3=9952/0768/-4096=995207675904$.

Ez a módszer akkor alkalmazható nagyon könnyen, mikor a köbre emelendő szám elég közel van 10 egy hatványához. A kérdés az, hogy mi történik általános esetben? A következő módszerrel könnyen, azaz nagyrészt fejben köbre emelhetünk kétjegyű számokat. A szútra neve „*Anurupyena*”.

3.1.11.2. Az „*Anurupyena*” – szútra

Írjuk fel az $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ rövidített számítási képletet egy kicsit másképp:

$$(a+b)^3=\begin{array}{cccc} a^3 & +a^2b & +ab^2 & +b^3 \\ & +2a^2b & +2ab^2 & \end{array}.$$

Vegyük észre, hogy $a^2b=\frac{b}{a}\cdot a^3$, $ab^2=\frac{b}{a}\cdot a^2b$ és $b^3=\frac{b}{a}\cdot ab^2$. Ugyancsak észrevehető, hogy a köbre emelés végeredménye $\overline{ab}^3=a^3/3a^2b/3ab^2/b^3$ lesz.

Nézzük a 49^3 -t: $a=4$, $b=9$, tehát $\frac{b}{a}=\frac{9}{4}$.

Akkor $a^3=64$, $a^2b=\frac{9}{4}\cdot 64=144$, $ab^2=\frac{9}{4}\cdot 144=324$, $b^3=\frac{9}{4}\cdot 324=729$. Írhatjuk, hogy:

$$49^3=\begin{array}{cccc} 64 & +144 & +324 & +729 \\ & +288 & +648 & \end{array}=64/_{43}2/_{97}2/_{72}9=117_{53}6_{104}4_{72}9=117649.$$

Nézzünk még néhány példát:

a) $34^3 \rightarrow 3^3 = 27$, $\frac{4}{3} \cdot 27 = 36$, $\frac{4}{3} \cdot 36 = 48$, $\frac{4}{3} \cdot 48 = 64$, tehát írhatjuk:

$$34^3 = \begin{matrix} 27 & +36 & +48 & +64 \\ & +72 & +96 & \end{matrix} = 27/_{10}8/_{14}4/_{6}4 = 39_{12}3_{15}0_{6}4 = 39304.$$

b) $18^3 \rightarrow 1^3 = 1$, $8 \cdot 1 = 8$, $8 \cdot 8 = 64$, $8 \cdot 64 = 512$, tehát írhatjuk:

$$18^3 = \begin{matrix} 1 & +8 & +64 & +512 \\ & +16 & +128 & \end{matrix} = 1/_{2}4/_{19}2/_{51}2 = 5_{4}8_{24}3_{51}2 = 5832.$$

c) $53^3 \rightarrow 5^3 = 125$, $\frac{3}{5} \cdot 125 = 75$, $\frac{3}{5} \cdot 75 = 45$, $\frac{3}{5} \cdot 45 = 27$, tehát írhatjuk:

$$53^3 = \begin{matrix} 125 & +75 & +45 & +27 \\ & +150 & +90 & \end{matrix} = 125/_{22}5/_{13}5/_{2}7 = 148_{23}8_{13}7_{2}7 = 148877.$$

Gyakorlatként végezzük el: a). 47^3; b). 86^3; c). 73^3 ; d). 94^3.

3.1.12. Köbgyökvonás

A köbgyökvonás a köbre emelés fordított művelete. Ezt fogjuk használni, teljes köbök harmadrendű gyökének kiszámítására. Először is nézzük a számjegyek köbeit és ezek utolsó számjegyét:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729
$u\left(n^3\right)$	1	8	7	4	5	6	3	2	9

3.1.12-1 táblázat

Látjuk, hogy a legnagyobb háromjegyű teljes köb 729. Nézzük a 4913-at – ha teljes köb, akkor egy kétjegyű szám harmadik hatványa. Osszuk fel a számot hármas csoportokra, hátulról. $\sqrt[3]{4'913}$ - az eredmény kétjegyű szám. Mivel az 1 a legkisebb teljes köb, amely a legközelebb van a 4- hez, az eredmény első számjegye 1. Mivel 3-ra végződik, ha az eredmény természetes szám, az utolsó számjegye 7 (a táblázat alapján). Tehát, ha minden igaz $\sqrt[3]{4913} = 17$. Próba: $17^3 = \begin{matrix} 1 & +7 & +49 & +343 \\ & +14 & +98 & \end{matrix} = 1/_{2}1/_{14}7/_{34}3 = 4_{3}9_{18}13 = 4913.$

A $\sqrt[3]{34'012'224}$ esetén látjuk, hogy az eredmény háromjegyű szám, az első számjegy 3, az utolsó 4, tehát $a = 3$ és $c = 4$. A kérdés az, hogy mennyi a középső számjegy? Ennek

meghatározása érdekében kiszámoljuk általánosan egy háromjegyű szám harmadik hatványát.

$$\overline{abc}^3=(100a+10b+c)^3=(100a+10b+c)^2\cdot(100a+10b+c)=10^6\cdot a^3+3\cdot 10^5\cdot a^2b+$$
$$+3\cdot 10^4\cdot(a^2c+ab^2)+10^3\cdot(b^3+6abc)+3\cdot 10^2\cdot(b^2c+ac^2)+3\cdot 10bc^2+c^3.$$

Látjuk, hogy a tízesek helyére a $3bc^2$ kerül. A b meghatározása érdekében először elvégezzük az $\overline{abc}^3-c^3=34012224-64=34012160$ kivonást, elhagyjuk a nullást, és írhatjuk, hogy $u(3bc^2)=6\Leftrightarrow u(48b)=6\Leftrightarrow b=2$, tehát $\overline{abc}=324$, azaz $\sqrt[3]{34012224}=324$.

Nézzünk még néhány példát:

a) $\sqrt[3]{182'284'263}=5\underline{b}7$, $182284263-343=182283920$, $u(3\cdot 49b)=2\Leftrightarrow b=6$, tehát $\sqrt[3]{182284263}=567$;

b) $\sqrt[3]{605'495'736}=8\underline{b}6$, $605495736-216=605495520$, $u(3\cdot 36b)=2\Leftrightarrow b=4$ vagy $b=9$ Ilyenkor nézzük a számok 9-cel való osztási maradékait: $605495736\to 45\to 9$, $846\to 18\to 9\Rightarrow(846)^3\to 9$, $896\to 23\to 5\Rightarrow 896^3\to 5^3=125\to 8$, tehát $b=4$ a helyes. Írhatjuk, hogy $\sqrt[3]{605495736}=846$;

c) $\sqrt[3]{838'561'807}=9\underline{b}3$, $838561807-27=838561780$, $u(3\cdot 9b)=8\Leftrightarrow b=4$, tehát $\sqrt[3]{838561807}=943$.

Gyakorlatok: a). $\sqrt[3]{59319}$; b). $\sqrt[3]{78953589}$; c). $\sqrt[3]{924010424}$.

3.2. Mátrixok, determinánsok

Líceumban, a XI. osztályban találkozunk először, általánosan, a ***determináns*** fogalmával. Itt a lineáris egyenletrendszerek megoldásakor, ha behelyettesítéssel vagy kiküszöböléssel oldjuk meg a rendszert észrevehető, hogy az eredményeknél ugyanazzal az értékkel osztottunk.

Nézzünk egy példát:

$\begin{cases} 2x-1\cdot y=4 \\ 3x+2y=13 \end{cases}$. Kapjuk, hogy $x=\dfrac{4\cdot 2-13\cdot(-1)}{2\cdot 2-3\cdot(-1)}=3$ és $y=\dfrac{13\cdot 2-4\cdot 3}{2\cdot 2-3\cdot(-1)}=2$.

$\Delta=2\cdot 2-3\cdot(-1)=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ - a rendszer determinánsa, $\Delta_x=4\cdot 2-13\cdot(-1)=\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 13 & 2 \end{vmatrix}$,

$\Delta_y=13\cdot 2-4\cdot 3=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{vmatrix}$ és $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}, y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$. Ezt a megoldási módszert *Cramer* szabálynak és a $\Delta, \Delta_x, \Delta_y$ értékeket ***másodrendű determinánsok***nak nevezzük.

Egy másodrendű determináns és értéke, általánosan: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}$ -

összeszoroztuk átlósan az elemeket és kivontuk egymásból. Harmad- és magasabb rendű determinánsokat három- és magasabb rendű lineáris egyenletrendszerekből kapunk. Vegyünk általánosan egy háromismeretlenes lineáris rendszert:

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 & (1) \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 & (2) \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 & (3) \end{cases}.$$

Elvégezve az $a_{23}\cdot(1)-a_{13}\cdot(2)$ és $a_{33}\cdot(1)-a_{13}\cdot(3)$ kivonásokat, kapjuk a

$\begin{cases} (a_{23}\cdot a_{11}-a_{13}\cdot a_{21})x+(a_{23}\cdot a_{12}-a_{13}\cdot a_{22})y=a_{23}\cdot b_1-a_{13}b_2 \\ (a_{33}\cdot a_{11}-a_{13}\cdot a_{31})x+(a_{33}\cdot a_{12}-a_{13}\cdot a_{32})y=a_{33}\cdot b_1-a_{13}b_2 \end{cases}$ rendszert, ezt megoldjuk a fent

említett Cramer-szabállyal $(\Delta\neq 0)$:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{(a_{23}\cdot b_1-a_{13}b_2)\cdot(a_{33}\cdot a_{12}-a_{13}\cdot a_{32})-(a_{33}\cdot b_1-a_{13}b_2)\cdot(a_{23}\cdot a_{12}-a_{13}\cdot a_{22})}{(a_{23}\cdot a_{11}-a_{13}\cdot a_{21})\cdot(a_{33}\cdot a_{12}-a_{13}\cdot a_{32})-(a_{33}\cdot a_{11}-a_{13}\cdot a_{31})\cdot(a_{23}\cdot a_{12}-a_{13}\cdot a_{22})} \text{ és}$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{(a_{23}\cdot a_{11}-a_{13}\cdot a_{21})\cdot(a_{33}\cdot b_1-a_{13}b_2)-(a_{33}\cdot a_{11}-a_{13}\cdot a_{31})\cdot(a_{23}\cdot b_1-a_{13}b_2)}{(a_{23}\cdot a_{11}-a_{13}\cdot a_{21})\cdot(a_{33}\cdot a_{12}-a_{13}\cdot a_{32})-(a_{33}\cdot a_{11}-a_{13}\cdot a_{31})\cdot(a_{23}\cdot a_{12}-a_{13}\cdot a_{22})}.$$

A zárójelek felbontása után kapjuk hogy

$$\Delta=a_{11}\cdot(a_{22}\cdot a_{33}-a_{32}\cdot a_{23})-a_{12}\cdot(a_{21}\cdot a_{33}-a_{31}\cdot a_{23})+a_{13}\cdot(a_{21}\cdot a_{32}-a_{31}\cdot a_{22})=$$

$=a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ - ez egy harmadrendű determináns amit

másodrendű determinánsok segítségével számoltunk ki. Írhatjuk, tehát, hogy

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Látjuk, hogy mindkét rendszer esetében a determináns elemei az ismeretlenek együtthatói. Könnyen belátható, hogy: $\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ és $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$. Egy kis számolással szintén

könnyen igazolható, hogy $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta}$, ahol $\Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

Számoljuk ki egy adott harmadrendű determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}}_{=-24} - 3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}}_{=-16} + 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}_{=8} = -24 + 48 + 16 = 40.$$

Azt mondjuk, hogy kifejtettük a determinánst az első sora szerint. Az első sorban három elem van: $1, 2, 3$. Minden elemhez tartozik egy úgynevezett ***aldeterminán*s** (minor), amit az adott elem sorában és oszlopában levő elemek elhagyásával nyerünk. Egy elem minorjának rendje eggyel kisebb az adott determináns rendjénél. Minden elemet megszorzunk a minorjával, és ellátjuk a megfelelő előjellel-e szorzatok összege adja az eredeti determináns értékét. A megfelelő előjelet a $(-1)^{i+j}$ adja, ahol i - az elem sorának, míg j - az elem oszlopának száma („+”, ha $i+j$ páros, „-”, ha $i+j$ páratlan). Vegyük észre, hogy ha egy másik sort vagy oszlopot választunk, és aszerint fejtjük ki a determinánst, az eredmény nem változik.

Írjuk fel a determinánst a következőképpen (a determinánsok alatt /mellett az aldeterminánsok szerepelnek, és a megfelelő előjelek):

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc} 8 & -16 & -24 \end{array} \end{array} = 1 \cdot (-24) - 3 \cdot (-16) + 2 \cdot 8 = 40; \quad \begin{array}{c|ccc|c} + & 1 & 3 & 2 & 5 \\ - & 2 & 1 & 4 & -23 \\ + & 2 & 5 & -4 & -24 \end{array} = 1 \cdot (-24) - 2 \cdot (-22) + 2 \cdot 10 = 40$$

Látjuk, hogy a „*Függőlegesen és átlósan*” szútrát alkalmaztuk, az eredmény fejben nagyon könnyen kiszámolható (akárcsak a háromszög-szabály esetén, amiről itt nem beszéltünk). A következőkben megnézzük, hogyan lehet kiszámolni egy negyedrendű determinánst.

3.2.1. Negyedrendű determinánsok – függőlegesen és átlósan

A negyedrendű determináns kiszámítási képlete, a másod- és harmadrendűéhez hasonlóan, a négyismeretlenes lineáris rendszer megoldásában szerepel, mint nevező. Míg a harmadrendű determinánsok esetén, amint tudjuk, ismertek a *Sarrus* és a *háromszög-szabály* is, negyedrendűnél általában a rend csökkentése segítségével dolgozunk, valahogy így:

$$\begin{array}{cccc} + & - & + & - \\ \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot d_{11} - a_{12}\cdot d_{12} + a_{13}\cdot d_{13} - a_{14}\cdot d_{14},$$

d_{ij} - az a_{ij} -hez tartozó

$$\begin{array}{cccc} d_{14} & d_{13} & d_{12} & d_{11} \end{array}$$

aldeterminánsok,

$$d_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},\ d_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

és így tovább. Nézzünk egy példát:

$$D = \begin{array}{c} + \\ - \\ + \\ - \end{array}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & -5 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}\begin{array}{c} d_{41} \\ d_{31} \\ d_{21} \\ d_{11} \end{array} = d_{11} + d_{31} - 2d_{41} = \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 3 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}}_{=138} + \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}}_{=19} - 2\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix}}_{98} =$$

$$= 138 + 19 - 2\cdot 98 = -39.$$

Mivel mi a fejszámolást részesítjük előnyben, ez a módszer nem biztos, hogy a megfelelő ehhez.

Nézzünk egy másik módszert. Osszuk fel a determinánst két részre, a felső és az alsó két sora szerint: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & -5 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$. Mindkét csoportban kombináljuk az oszlopokat az összes

lehetséges módon, és másodrendű determinánsokat alakítunk ki, mindkét csoportban $C_4^2 = 6$ determinánst.

A pirosak: $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -4$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2$, $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -11$, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 14$.

A kékek: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6$, $\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -11$, $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 14$, $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$, $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12$, $\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 29$.

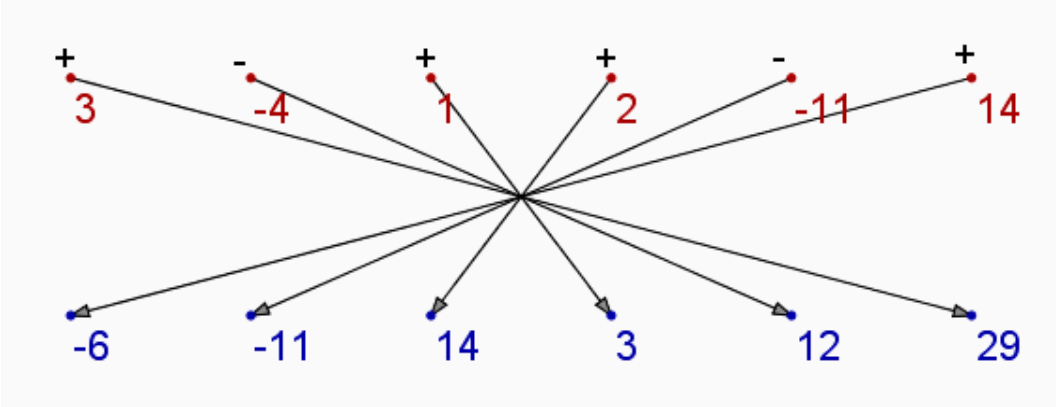
Az eredményeket felírjuk a determináns fölé és alá, és használjuk a „*Függőlegesen és átlósan*” –t:

$$\begin{array}{cccccc} + & - & + & + & - & + \\ 3 & -4 & 1 & 2 & -11 & 14 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & -5 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 29 - (-4)\cdot 12 + 1\cdot 3 + 2\cdot 14 - (-11)\cdot(-11) + 14\cdot(-6) = -39$$

$$\begin{array}{cccccc} -6 & -11 & 14 & 3 & 12 & 29 \end{array}$$

A fenti negyedrendű determináns kiszámítása, grafikusan szemléltetve:



3.2.1-1 ábra

Tehát összeszoroztuk a másodrendű determinánsokat: pirosakat a kékekkel - elsőt az utolsóval, másodikat az utolsó előttivel és így tovább, majd az eredményeket (a megfelelő előjellel ellátva) összeadtuk egymással.

3.2.2. A piramis szabály

Ha a másodrendű determinánsok értékeit háromszög formájában írjuk a negyedrendű determináns fölé és alá, a módszer egyszerűbben megjegyezhető és alkalmazható. Ne feledjük, hogy többet szeretnénk fejben számolni és kevesebbet írni.

A piramis szabály:

$$\begin{array}{cccc} + & & 1 & \\ - & -4 & & -11 \\ + & 3 & 2 & 14 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & -5 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix},$$

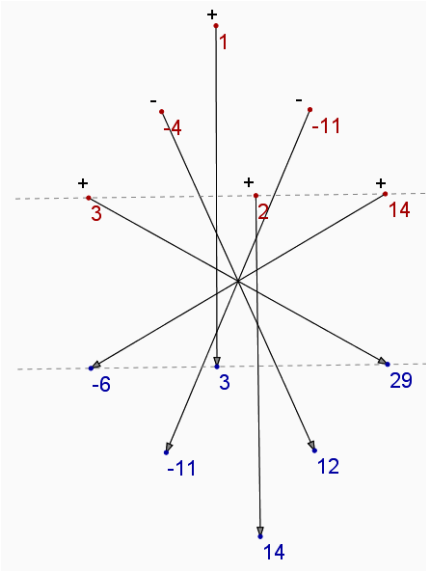
$$\begin{array}{cccc} -6 & 3 & 29 & \\ & -11 & 12 & \\ & & 14 & \end{array}$$

Ez az úgynevezett „*piramis*” – szabály. A háromszög alakból látszik, hogy melyik oszlop-párokból alkottunk determinánsokat. Az előjelek: az első és a harmadik sor plusz, a középső sor minusz.

$$D = 3\cdot 29 + 14\cdot(-6) - (-4)\cdot 12 - (-11)\cdot(-11) + 1\cdot 3 + 2\cdot 14 = -39$$

Természetesen, lehet másképp is csökkenteni a determináns rendjét, például sorok vagy oszlopok összeadásával és kivonásával. Van, mikor az a módszer vezet hamarabb célhoz. Ezt a módszert azért mutattuk be itt, mert kevésbé ismert/használt az iskolában és elég gyorsan ki lehet számolni az eredményt „mentálisan”.

A piramis szabály grafikus szemléltetése:



3.2.2-1 ábra

A módszer helyességét itt nem fogjuk igazolni.

3.2.3. Determináns számítás pivotálással

A pivotálás ismert a matematikusok körében de az iskolában nem (nagyon) tanítják a gyerekeknek. A módszer a determináns rendjének csökkentésére szolgál. A lényeg az, hogy kiválasztunk egy nullától különböző elemet, ez lesz az úgynevezett **pivot elem**. Harmadrendű determináns esetén minden elemet, ami nincs a pivot sorában vagy oszlopában, kicserélünk egy másodrendű determinánsra, és szorozzuk a determinánst a pivot elem inverzével. Nézzünk egy példát: $D=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 0 & 5^*\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}$. Ha a determináns tartalmazza az 1 vagy a -1 valamelyikét, érdemes pivotnak választani (mert az eredményt 1-gyel kell osztani). Mi most más elemet választunk, mondjuk az 5-öt. Négy elem nincs az 5 sorában/oszlopában, tehát négy elemet fogunk „átírni”.

Írhatjuk, hogy $D=\frac{1}{5}\cdot\begin{Vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-2 & 3\\ 0 & 5\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}4 & 5\\ 2 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 5\\ -1 & 2\end{vmatrix}\end{Vmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{vmatrix}-7 & -10\\ -2 & 5\end{vmatrix}=\frac{1}{5}\cdot(-35-20)=-11$. Választhatunk pivot elemnek egy nem nulla aldeterminánst is, például a $\begin{vmatrix}1 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}=8$-at. Akkor az eleme(ke)t eggyel nagyobb rendű determinánssal kellene kicserélni, azaz egy harmadrendűvel, ami pontosan a D, és a kicserélni való elem az $a_{33}=2$. Lehet viszont a pivotnak másodrendű aldeterminánst választani egy negyedrendű determináns esetén, így a rend kettővel csökken.

$D_1=\begin{vmatrix}1 & 0 & 3 & 5\\ -2 & 3 & 7 & -4\\ 6 & -3 & 0 & 2\\ -2 & 1 & -4 & 3\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 3\end{vmatrix}=3\neq 0$ - ezt választjuk pivot elemnek. A jobb alsó sarokban levő kékkel jelölt elemeket fogjuk kicserélni harmadrendű determinánsokra.

$$D_1=\frac{1}{3}\cdot\begin{Vmatrix}\begin{vmatrix}1^* & 0 & 3\\ -2 & 3 & 7\\ 6 & -3 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1^* & 0 & 5\\ -2 & 3 & -4\\ 6 & -3 & 2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1^* & 0 & 3\\ -2 & 3 & 7\\ -2 & 1 & -4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1^* & 0 & 5\\ -2 & 3 & -4\\ -2 & 1 & 3\end{vmatrix}\end{Vmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\begin{Vmatrix}\begin{vmatrix}3 & 13\\ -3 & -18\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3 & 6\\ -3 & -28\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}3 & 13\\ 1 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3 & 6\\ 1 & 13\end{vmatrix}\end{Vmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\begin{vmatrix}-15 & -66\\ -7 & 33\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}-5 & -22\\ -7 & 33\end{vmatrix}=11\cdot\begin{vmatrix}-5 & -2\\ -7 & 3\end{vmatrix}=-11\cdot 29=-319\,.$$

Egyszerre kettővel csökkenteni a determináns rendjét nem ajánlott. Sokkal több számolást igényel, mintha egyenként csökkentenénk azaz, ha egy elemet választanánk pivotnak - mondjuk az $a_{11}=1$-et. Ebben az esetben egyből egy harmadendű determinánst kapunk, amit nem lesz nehéz kiszámolni, bármely eddig ismert módszerrel.

$$D_1=\begin{vmatrix}1^* & 0 & 3 & 5\\ -2 & 3 & 7 & -4\\ 6 & -3 & 0 & 2\\ -2 & 1 & -4 & 3\end{vmatrix}=\begin{Vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & 7\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 5\\ -2 & -4\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 0\\ 6 & -3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 3\\ 6 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 5\\ 6 & 2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & -4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 5\\ -2 & 3\end{vmatrix}\end{Vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 13 & 6\\ -3 & -18 & -28\\ 1^* & 2 & 13\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix}\begin{vmatrix}3 & 13\\ 1 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3 & 6\\ 1 & 13\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-3 & -18\\ 1 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-3 & -28\\ 1 & 13\end{vmatrix}\end{Vmatrix}=\begin{vmatrix}-7 & 33\\ 12 & -11\end{vmatrix}=11\cdot\begin{vmatrix}-7 & 3\\ 12 & -1\end{vmatrix}=11\cdot(-29)=-319\,.$$

Ebben az esetben kiszámolhattuk volna a harmadrendű determinánst „klasszikusan” is (*Sarrus*, *háromszög* stb.).

3.2.4. Egyenletrendszerek megoldása

Ha a fejezet elején beszéltünk a lineáris egyenletrendszerekről, nézzünk két egyenletrendszert, amelyeket ismeretlenek kiküszöbölésével fogunk megoldani.

a). $\begin{cases}3x-2y+3z=8\\ 2x+3y-2z=2\\ 4x-5y+4z=6\end{cases}$; b). $\begin{cases}2x+1y-1z+3t=-5 & (1)\\ 1x-3y+2z+1t=-1 & (2)\\ 1x-1y-1z-2t=0 & (3)\\ 3x+1y-3z-3t=2 & (4)\end{cases}$.

Megoldás: a). Kiküszöböljük az x-et az első-második és az első-harmadik egyenletekből:

$$\begin{cases}3x-2y+3z=8\,\Big|\cdot(-2)\\ 2x+3y-2z=2\,\Big|\cdot 3\end{cases}\Big|(+)\Rightarrow\big((-2)\cdot(-2)+3\cdot 3\big)y+\big((-2)\cdot 3+3\cdot(-2)\big)z=8\cdot(-2)+2\cdot 3,\text{ azaz}$$

$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot y + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \cdot z = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ (1). és $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \cdot y + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \cdot z = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$ (2).

$(1) \wedge (2)$: $\begin{cases} 13y - 12z = -10 \\ -7y = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12z = 13y + 10 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 3 \\ y = 2 \end{cases}$, behelyettesítve az első egyenletbe kapjuk, hogy $x = 1$. A megoldáshalmaz $M = \{(1,2,3)\}$.

Általánosan, az $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$ rendszer esetén:

Ha az x-et küszöböljük ki: $\begin{cases} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot y + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot z = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \cdot y + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot z = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix} \end{cases}$, az y és z együtthatói fejben könnyen kiszámíthatók, és behelyettesítéssel kapjuk az x-et.

Hasonló módon járunk el, ha az y-t vagy a z-t akarjuk kiküszöbölni. Vagy a kiküszöbölendő ismeretlent az első pozícióba tesszük (tehát az x elé), és végigcsináljuk a fenti lépéseket, vagy figyelembe vesszük az ismeretlenek sorrendjét: x, y, z. Ha az y-t küszöböljük ki, az x elé „-” és a z elé „+” kerül. A magyarázat egyszerű: az y az x-hez képest jobbra van, egy mozdulattal helyet cserélhetnek, míg a z-hez képest balra, tehát nem kell helyet cseréljenek. Ha a z-t szeretnénk kiküszöbölni, úgy az x mint az y elé is „-” jön, mert a z az x-hez és az y-hoz képest egyaránt jobbra van. Mivel ez lényegében oszlopcseréket jelent a determinánsokban tudjuk, hogy ha páratlan számú oszlopcserét végzünk, a determináns előjele megváltozik, páros oszlopcsere esetén az előjel úgy marad. Tehát, ha például az y-t küszöböljük ki, kapjuk:

$$\begin{cases} -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} \cdot x + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot z = \begin{vmatrix} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} \cdot x + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot z = \begin{vmatrix} a_{12} & b_1 \\ a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \end{cases}.$$

Alkalmazva a mi egyenletrendszerünkre, kapjuk

$\begin{cases} -13x - 5z = -28 \\ 7x + 7z = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8x - 5 \cdot (x + z) = -28 \\ x + z = 4 \end{cases}$, tehát $-8x - 5 \cdot 4 = -28 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow z = 3$,

behelyettesítve az eredeti rendszer első egyenletébe kapjuk, hogy $y=2$.

b). Itt érdemes lesz egyszerre két ismeretlent kiküszöbölni, mondjuk az x-et és az y-t. Először használjuk az (1), (2) és (3), majd az (1), (2) és (4) egyenleteket. Írhatjuk ($\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$):

$$\begin{cases} 2x+1y-1z+3t=-5 \\ 1x-3y+2z+1t=-1 \\ 1x-1y-1z-2t=0 \end{cases}, \text{ kapjuk } \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}_{=11} \cdot z + \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}}_{=23} \cdot t = \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}_{=-13} \quad (*),$$

$$\begin{cases} 2x+1y-1z+3t=-5 \\ 1x-3y+2z+1t=-1 \\ 3x+1y-3z-3t=2 \end{cases}, \text{ kapjuk } \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}}_{=13} \cdot z + \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}}_{=52} \cdot t = \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{=-65} \quad (**).$$

$(*) \wedge (**)$: $\begin{cases} 11z+23t=-13 \\ 13z+52t=-65 \end{cases}$, ennek megoldása $z=3$ és $t=-2$. Behelyettesítve a (2) és (3)

egyenletekbe, kapjuk: $\begin{cases} x-3y+2\cdot 3-2=-1 \\ x-y-3-2\cdot(-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y=-5 \\ x-y=-1 \end{cases}$, melynek megoldása $x=1$ és $y=2$. A egyenletrendszer megoldáshalmaza $M=\{(1,2,3,-2)\}$.

Láttuk, hogy a fenti módszer a pivotálást használja. Az a).-nál pivotnak először az $a_{11}=3$-at, majd az $a_{12}=-2$- t, míg a b). -nél az $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$ determinánst vettük. Válasszuk pivotnak az $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$ determinánst. Küszöböljük ki, tehát az y-t és a t -t.

$$\begin{cases} 2x+1y-1z+3t=-5 & (1) \\ 1x-3y+2z+1t=-1 & (2) \\ 1x-1y-1z-2t=0 & (3) \\ 3x+1y-3z-3t=2 & (4) \end{cases}$$

, kiküszöbölve az y-t és t-t az (1), (2), (3) illetve az (1), (2), (4) rendszerekből kapjuk: $\begin{cases} 23x-19z=-34 \\ 52x-26z=-26 \end{cases} \Big| :26 \Leftrightarrow \begin{cases} 23x-19z=-34 \\ 2x-z=-1 \end{cases}$, megoldás $x=1, z=3$.

Behelyettesítve a (3) és (4) egyenletekbe kapjuk

$\begin{cases} y+2t=-2 \\ y-3t=8 \end{cases}$ - megoldás $y=2, z=-2$, tehát a rendszer megoldása $M=\{(1,2,3,-2)\}$.

Általánosan: ($\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$): $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}t=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}t=b_3 \\ a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}t=b_4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d_{11}z+d_{12}t=d_1 \\ d_{21}z+d_{22}t=d_2 \end{cases}$, ahol

$$d_{11}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ d_{12}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix},\ d_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},\ d_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix},$$

$d_{22}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$, $d_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{41} & a_{42} & b_4 \end{vmatrix}$. Megoldjuk a rendszert z,t-ben, a megoldást behelyettesítjük az eredeti rendszer két egyenletébe, innen kapjuk az x, y értékét.

Ha $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=0$, más pivotot keresünk, és aszerint küszöböljük ki az ismeretleneket.

Gyakorlatként az a).-beli rendszert meg lehet oldani a z kiküszöbölésével, míg a b).-beli rendszert az x és a t kiküszöbölésével.

3.3. Polinomok faktorizálása

Az elkövetkezőkben egész együtthatós, egy- és többváltozós polinomokat fogunk első fokú, egész együtthatós tényezőkre bontani. A szorzótényezőkre való bontással már az általános iskolában találkoznak a gyerekek, például a disztributivitásnál (V.o), vagy az algebrai kifejezéseknél (VII. osztály). A szorzótényezős alakra nagy szükség van, a IX. osztálytól egészen a XII.-ig. Például: a függvény előjelének megállapításánál/tárgyalásánál, függvény vagy egyenlet maximális értelmezési tartományának megállapításánál, egyenletek megoldásánál (irracionális, logaritmusos), a $\frac{0}{0}$ határozatlan esetnél (racionális függvényekre) és még folytathatnánk.

A következő módszerek megértése minimális matematikai tudást igényel (alapműveletek) az utolsó kivételével, ahol kell tudni a polinomok formális deriválását. Nem teljes megoldási módszerekről van szó-azokat az eseteket tárgyaljuk, néhány példa segítségével, amikor a polinomok felbonthatók első fokú, egész együtthatós polinomok szorzatára.

3.3.1. II. Fokú polinomok faktorizálása

Induljunk el fordítva – vegyük két első fokú kifejezés szorzatát, majd próbáljuk meg az eredményt „visszabontani" szorzótényezőkre.

Például $(x+3)(x+5)=x^2+5x+3x+15=x^2+8x+15$. Látjuk, hogy $8x=5x+3x$, így $x^2+5x+3x+15=x(x+5)+3(x+5)=(x+3)(x+5)$. A középső tagot kell felbontani két tag összegére úgy, hogy közös tényezők kiemelésével (x és 3), a zárójelekben közös tényezőt kapjunk ($x+5$). A kérdés: hogyan járjunk el?

Általánosan véve kapjuk, hogy $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)+ab$. Tehát a középső tag úgy bontódik fel összegre, hogy az együtthatók szorzata a polinom szabadtagját adja. Például $x^2+13x+42=x^2+6x+7x+42=x(x+6)+7(x+6)=(x+7)(x+6)$, mert $6+7=13$ és $6\cdot 7=42$. Vagy $x^2-14x+48=(x-6)(x-8)$, mert $-6-8=-14$ és $(-6)\cdot(-8)=48$. Érdekesebb a felbontás, ha az x^2 együtthatója 1 -től különböző egész szám. Ugyancsak visszafele szorozva írhatjuk $(ax+b)(cx+d)=acx^2+adx+bcx+bd$ - vegyük észre, hogy $\frac{ad}{ac}=\frac{bd}{bc}$.

Bontsuk fel a $6x^2+17x+12$-t: mivel $6\cdot 12=72$, $72=8\cdot 9$ és $8+9=17$; $8x+12=4\cdot(2x+3)$, tehát az egyik tényező $2x+3$, a másik $\frac{6x^2}{2x}+\frac{12}{3}=3x+4$.

Írhatjuk $6x^2+17x+12=(2x+3)\cdot(3x+4)$. Nézzünk még két példát:

a) $15x^2+11x-14=(3x-2)(5x+7)$ mert $15\cdot(-14)=-210=21\cdot(-10)$ és $21-10=11$.

$21x-14=7(3x-2)$, az egyik tényező $(3x-2)$, a másik tényező $\frac{15x^2}{3x}+\frac{-14}{-2}=5x+7$.

b) $3x^2+19x+20=(x+5)(3x+4)$ mert $3\cdot 20=60=15\cdot 4$ és $15+4=19$.

$15x+20=5(3x+4)$, az egyik tényező $3x+4$, a másik tényező $\frac{3x^2}{3x}+\frac{20}{4}=x+5$.

3.3.2. III. fokú polinomok faktorizálása – a „*Gunitasamuchyah*”- szútra

Ismertnek tekintjük a következő tulajdonságokat a $p=ax^3+bx^2+cx+d$ polinom esetén:

- Ha $a+b+c+d=0$, a felbontásban szerepel az $x-1$
- Ha $a+c=b+d$, a felbontásban szerepel az $x+1$.

Nézzünk két példát:

a) $x^3+11x^2+31x+21$. Mivel $1+31=11+21$, a felbontásban fog szerepelni az $x+1$, tehát írhatjuk, hogy $x^3+11x^2+31x+21=(x+1)(x^2+_x+21)$. Használjuk azt a tulajdonságot, hogy egy polinom felbontásában a tényezők együtthatói összegének szorzata egyenlő a polinom együtthatóinak összegével – ez a *Gunitasamuchyah*-szútra. Itt $1+11+31+21=64$ az $x+1$ együtthatóinak összege, $1+1=2$, $64:2=32$, tehát a zárójelben levő polinom együtthatóinak összege 32. Innen látszik, hogy az x együtthatója $32-1-21=10$ lesz. $(x+1)\left(x^2+\underset{=3+7}{10}\,x+\underset{=3\cdot 7}{21}\right)=(x+1)(x+3)(x+7)$.

b) $x^3-2x^2-11x+12$: mivel $1-2-11+12=0$, a felbontásban szerepel az $x+1$, tehát $x^3-2x^2-11x+12=(x-1)(x^2+ux-12)$. A jobboldalon meg lehet határozni az x együtthatóját, az $-ux-12x=-(u+12)x$, tehát $u+12=11\Rightarrow u=-1$.

Írhatjuk, hogy $x^3-2x^2-11x+12=(x-1)(x^2-x-12)=(x-1)(x+3)(x-4)$. Általános esetben használhatjuk az $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+c+b)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$ azonosságot. Faktorizáljuk az $x^3+8x^2+19x+12$ polinomot: $abc=12$, $a+b+c=8$, az $a=1, b=3, c=4$ talál. Ellenőrizzük: $ab+ac+bc=3+4+12=19$ talál, tehát $x^3+8x^2+19x+12==(x+1)(x+3)(x+4)$. (Kezelhettük volna sajátos esetként is, mivel $1+19=8+12$). A következőkben megvizsgálunk még néhány példát:

c) $f=x^3+12x^2+44x+48$; $2+4+6=12$, $2\cdot 4\cdot 6=48$, ellenőrizzük $2\cdot 4+2\cdot 6+4\cdot 6=44$ talál, tehát $x^3+12x^2+44x+48=(x+2)(x+4)(x+6)$. Vagy pedig a 48 osztói $D_{48}=\{1,2,3,4,6,8,12,16,24,48\}$, $x+1$ nem szerepelhet a felbontásban, mivel $1+44\neq 12+48$, amik találhatnak $x+2, x+4, x+6$.

d) $f = x^3 - 6x^2 - x + 30$; Legyen a felbontás általánosan $(x+a)(x+b)(x+c)$. Mivel a polinom együtthatóinak összege 24, írhatjuk $(1+a)(1+b)(1+c) = 24$, $a+b+c = -6$, tehát az a,b,c nem mind pozitív. Látjuk, hogy $abc = 30 > 0$, tehát az a,b,c közül kettő negatív, egy pozitív. $D_{30} = \{\underline{1}, 2, 3, 5, \underline{6}, \underline{10}, \underline{15}, \underline{30}\}$ - az aláhúzott számok nem kerülnek számításba, mert az $1+a$, $1+b$ és $1+c$ osztói a 24-nek. Maradt a $2,3$ és az 5. Könnyen észrevehető, hogy a keresett számok a 2 -3 és -5, tehát $x^3 - 6x^2 - x + 30 = (x+2)(x-3)(x-5)$.

3.3.3. A faktorizálás és a deriválás kapcsolata

Ismertnek tekintjük az $x^n = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$; $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$, $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$, $n \in \mathbb{N}^*$ és az $(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)' = f_1' \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n + f_1 \cdot f_2' \cdot \ldots \cdot f_n + \ldots + f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n'$ képleteket, ahol a $(\ )'$ a polinomok formális deriváltját jelöli. Nézzük a polinomok faktorizált alakja és a deriváltjai közötti kapcsolatot:

- A polinom fokszáma II.

$$f' = \left[(x+a)(x+b)\right]' = (x+a)'(x+b) + (x+a)(x+b)' = x+b+x+a = \sum (x+a).$$

- A polinom fokszáma III.

$$f' = \left[(x+a)(x+b)(x+c)\right]' = \sum (x+a)(x+b).$$

$$f'' = \left[\sum (x+a)(x+b)\right]' = \sum (x+a) + \sum (x+b) = 2\sum (x+a).$$

- A polinom fokszáma IV.

$$f' = \sum (x+a)(x+b)(x+c),\ f'' = 2\sum (x+a)(x+b),\ f''' = 3\sum (x+a)\ .$$

- A polinom fokszáma V.

$$f' = \sum (x+a)(x+b)(x+c)(x+d),\ \ldots,\ f^{IV} = 4\sum (x+a) \ldots \text{ stb.}$$

Sajnos ezek az összefüggések nem segítenek be a faktorizálásba. De, ha a polinom szorzótényezős alakban van, könnyen deriválhatjuk, anélkül hogy először beszoroznánk.

Ha, viszont, a polinom úgy bontható fel elsőfokú tényezők (binomok) szorzatára, hogy a felbontásban szerepel a binom négyzete, köbe stb., akkor szerencsénk van, faktorizálhatunk deriválás segítségével. Például:

$$\left[(x+a)^2(x+b)\right]' = 2(x+a)(x+b)+(x+a)^2 = (x+a)(3x+a+2b).$$

a) $\left(x^3+9x^2+24x+20\right)' = 3x^2+18x+24 = 3\cdot\left(x^2+6x+8\right) = 3\cdot(x+2)(x+4)$, tehát a felbontásban a négyzeten szerepel az $x+2$ vagy az $x+4$. Az $x+2$ lesz a jó választás, mert a négyzeten a szabad tag 4, ami osztja a 20-at (az $(x+4)^2$ esetén a szabadtag 16, ami nem osztja a 20-at). $3\cdot(x+2)(x+4) = \left(\underset{=a}{x+2}\right)\left(\underset{a+2b}{3x+12}\right) \Rightarrow b=5$, tehát

$x^3+9x^2+24x+20 = = (x+2)^2(x+5)$. Vegyük észre, hogy ha $a=2 \Rightarrow a^2=4$, ahonnan azonnal következik, hogy $b = 20:4 = 5$. Hasonlóan kezelhetők más esetek is.

b) $\left(x^4-4x^3-26x^2+60x+225\right)' = 4x^3-12x^2-52x+60 = 4\left(x^3-3x^2-13x+15\right)$

$\underbrace{x^3-3x^2-13x+15}_{1-3-13+15=0} = (x-1)\left(x^2+\underline{u}x+15\right) = (x-1)\left(x^2-2x+15\right) = (x-1)(x+3)(x-5)$. Tehát a polinom felbontásában a négyzeten szerepel az $x-1$, $x+3$ és $x-5$ közül kettő. Mivel a polinom szabad tagja 225, a tényezők a négyzeten szerepelnek és $3^2\cdot 5^2 = 225$, írhatjuk $x^4-4x^3-26x^2+60x+225 = (x+3)^2(x-5)^2$.

c) $\left(x^4+4x^3-18x^2-108x-135\right)' = 4x^3+12x^2-36x-108 = 4\left(x^3+3x^2-9x-27\right)$

$\left(x^3+3x^2-9x-27\right)' = 3x^2+6x-9 = 3\left(x^2+2x-3\right) = 3(x+3)(x-1)$. Így az egyik szorzótényező a harmadik hatványon az $x+3$ vagy az $x-1$ lesz. Ha az $x-1$ lenne, akkor az elsőrendű deriváltban is szorzótényező lenne, de az együtthatók összege $-32 \neq 0$, tehát nem lesz jó. Írhatjuk, hogy $x^4+4x^3-18x^2-108x-135 = (x+3)^3\cdot(x-5)$, mert $(-5)\cdot 3^3 = -135$.

d) $\left(x^5+7x^4-6x^3-162x^2-459x-405\right)' = 5x^4+28x^3-18x^2-324x-459$,

$\left(5x^4+28x^3-18x^2-324x-459\right)' = 20x^3+84x^2-36x-324$,

$\left(20x^3+84x^2-36x-324\right)' = 60x^2+168x-36 = 12\left(5x^2+\underset{=15x-x}{14x}-3\right) = 12(x+3)(5x-1)$.

Látszik, hogy az $(x+3)^4$ fog szerepelni szorzótényezőként, mert az $(5x-1)^4 = 5^4x^4+\ldots$

Írhatjuk, hogy $x^5+7x^4-6x^3-162x^2-459x-405 = (x+3)^4(x-5)$, mivel $3^4\cdot(-5) = -405$.

Maradjon gyakorlatnak a következő két polinom faktorizálása, deriváltak segítségével:

e). $x^5-5x^4+40x^2-80x+48$; f). $x^4+x^3-9x^2+11x-4$.

3.3.4. Többváltozós polinomok faktorizálása – a „*Lhopana - Stapana*” - szútra

Értelmezés: Többváltozós polinomon egy véges sok tagot tartalmazó formális összeget értünk, amelynek tagjai $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$, ahol az $x_1,x_2,...,x_n$ szimbólumok jelölik a változókat, a pedig egy valós szám (a mi esetünkben egész szám lesz).

Az $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$ fokszáma $k_1+k_2+...+k_n$, egy többváltozós polinom fokszáma a tagok fokszámának maximuma lesz. Egy többváltozós polinomot homogénnek nevezünk, ha minden tagjának fokszáma ugyanaz.

Például az $f=3x^2-2xy+z^2-y$ egy háromváltozós, másodfokú polinom és $g=3x^2+xy+2xz$ háromváltozós, másodfokú homogén polinom. A következőkben másodfokú, többváltozós, homogén és nem homogén polinomokat fogunk tényezőkre bontani.

Bontsuk tényezők szorzatára az $f=2x^2-12y^2-5z^2+2xy-9xz+23yz$ polinomot. Első ránézésre nincs semmi épkézláb megoldási ötletünk – hogyan kombináljuk a tagokat, hogyan emeljünk ki közös tényezőt, hogyan bontsunk fel tagokat összegekre stb. Itt jön segítségünkre a „*Lopana - Sthapana*” – szútra, ami magyarul annyit jelent, hogy „*Alternatív megszüntetés és megtartás*”. A lényege a következő:

- Először „eltüntetjük” a z változót, azaz $z=0$-t veszünk. Faktorizáljuk a megmaradt kétváltozós polinomot (x,y-ban);
- Utána szintén nullázzuk az y-t ($y=0$), és faktorizáljuk a megmaradt kétváltozós polinomot (x,z-ben);
- Végül vesszük a két felbontást, és kitöltjük a nullázással kapott réseket.

Ha $z=0$: $2x^2-12y^2+2xy=2\left(x^2+xy-6y^2\right)=2\left(x^2+3xy-2xy-6y^2\right)=2(x+3y)(x-2y)$.

Ha $y=0$: $2x^2-9xz-5z^2=2x^2-10xz+xz-5z^2=(x-5z)(2x+z)$.

Vegyük észre, hogy $2(x+3y)(x-2y)$ lehet $(2x+6y)(x-2y)$ vagy $(x+3y)(2x-4y)$.

Megnézzük, hogy melyik fog találni. Ha a $(2x+6y)(x-2y)$ és $(x-5z)(2x+z)$ felbontásokat vesszük, egybeolvasztva a $(2x+6y+z)(x-2y-5z)$ felbontást kapjuk. Ha

beszorozzuk a zárójeleket, yz együtthatójának 23 jön ki, tehát nem jól választottunk. Ha a $(x+3y)(2x-4y)$ és $(x-5z)(2x+z)$ felbontásokat vesszük, a $(x+3y-5z)(2-4y+z)$ felbontást kapjuk, ami helyes.

Nézzünk még egy példát: $f=3x^2-15y^2-28z^2+4xy-17xz+47yz$.

$z=0$: $3x^2+4xy-15y^2=3x^2-9xy+5xy-15y^2=(x+3y)(3x-5y)$,

$y=0$: $3x^2-17xz-28z^2=3x^2-21xz+4xz-28z^2=(x-7z)(3x+4z)$. A két felbontásból következik, hogy $f=3x^2-15y^2-28z^2+4xy-17xz+47yz=(x+3y-7z)(3x-5y+4z)$.

Mi történik, ha a polinom négyváltozós? Ha egy változót nullázunk le, marad még három és tovább használható a fenti módszert. De, hogy időt és energiát spóroljunk, egyszerre két változót fogunk lenullázni, majd a végeredmenyeket szintén egybeolvasztjuk.

Bontsuk tényezők szorzatára az

$f=2x^2-3y^2-2z^2+12w^2-5xy+3xz+5yz+11wx-5wy+2wz$ polinomot. Nullázni fogjuk a z és t, majd az y és t, végül az y és z változókat. Kapjuk

$2x^2-5xy-3y^2=(x-3y)(2x+y)$, $2x^2+3xz-2z^2=(x+2z)(2x-z)$ és

$2x^2+11xw+12w^2=(x+4w)(2x+3w)$. A három felbontásból jól látszik, hogy a polinom faktorizált alakja $f=(x-3y+2z+4w)(2x+y-z+3w)$.

Idáig homogén többváltozós polinomokkal dolgoztunk. A módszer működik nem homogén polinomok esetén is, mi két- és háromváltozós polinomokkal fogunk foglalkozni.

a). Az f kétváltozós polinom: $f=2x^2+5xy-8x-12y^2+23y-10$.

$y=0$: $2x^2-8x-10=2(x^2-4x-5)=2(x+1)(x-5)$

$x=0$: $-12y^2+23y-10=(-3y+2)(4y-5)$.

A $2(x+1)(x-5)$ felbontásban, ha a második zárójelet szoroznánk be 2-vel, a -10 szabadtag nem találna egyik zárójelbe sem, a $(-3y+2)(4y-5)$ felbontásban. Írhatjuk tehát, hogy $2(x+1)(x-5)=(2x+2)(x-5)$ és $f=(2x-3y+2)(x+4y-5)$.

b). A polinom háromváltozós: $f = 2x^2 - 4y^2 - 6z^2 + 7xy - xz + 14yz + 14x + 11y + 7z + 20$.

$y = z = 0$: $2x^2 + 14x + 20 = 2\left(x^2 + 7x + 10\right) = 2\left(x+2\right)\left(x+5\right)$

$x = z = 0$: $-4y^2 + 11y + 20 = -\left(y-4\right)\left(4y+5\right) = \left(-y+4\right)\left(4y+5\right)$

$x = y = 0$: $-6z^2 + 7z + 20 = -\left(6z^2 - 7z - 20\right) = -\left(3z+4\right)\left(2z-5\right) = \left(3z+4\right)\left(-2z+5\right)$. A három felbontás alapján írhatjuk $f = \left(2x - y + 3z + 4\right)(x + 4y - 2z + 5)$.

Gyakorlatként faktorizáljuk a következő négy polinomot:

i). $f = 3x^2 + 15y^2 + 2z^2 - 14xy + 7xz - 13yz$ (*M*: $\left(3x - 5y + z\right)(x - 3y + 2z)$)

ii). $f = 2x^2 - 21y^2 - xy - 9x + 51y - 18$ (*M*: $\left(2x - 7y + 3\right)\left(x + 3y - 6\right)$)

iii). $f = 2x^2 + 15y^2 + 3z^2 + 13xy - 7xz - 14yz + 9x + 17y - 7z + 4$,

(M: $\left(2x + 3y - z + 1\right)\left(x + 5y - 3z + 4\right)$)

iv). $f = 4x^2 + 12y^2 - 5z^2 - 2w^2 - 19xy + 19xz - 11yz - 2wx - 5wy + 11wz$,

(*M*: $\left(4x - 3y - z + 2w\right)\left(x - 4y + 5z - w\right)$).

Amint láttuk, a „*Lopana - Sthapana*” nagyon hatékony faktorizálási módszer többváltozós polinomok esetén. Alkalmazni lehet a legnagyobb közös osztó meghatározására, analitikus geometriában (kúpszeleteknél).

3.4. Egyenletek megoldása – a „*Purana – Apurnabhayam*” - szútra

Már az V. osztályban elkezdődik az egyenletek tanítása, tanulmányozása. Az úgymond „szöveges feladatokat” sokszor egyszerűbb egyenletek segítségével megoldani (persze, ez gyerekenként változik). A kiszámítandó mennyiséget elnevezzük x-el , „felírjuk” és megoldjuk az egyenletet.

Vegyük például a „*tanulók és padok*” - feladat egy változatát (a matematika fórumokon sűrűn előfordul ez a típus): „Ha egy osztályteremben a tanulókat kettesével ültetjük, 8 tanuló állva marad. Ha, viszont, hármasával ültetjük őket, 3 pad marad üresen. Hány tanuló és hány pad van a teremben?„ Ha x-el jelöljük a padok számát, felírható a $2x + 8 = 3\left(x - 3\right)$ egyenlet, amelynek megoldása $x = 17$. Tehát 17 pad van és $2 \cdot 17 + 8 = 42$ tanuló.

3.4.1. Másodfokú egyenletek megoldása

A gondok akkor kezdődnek, amikor az egyenletben az ismeretlen fokszáma egynél nagyobb, tehát az egyenlet másodfokú, harmadfokú, negyedfokú stb. Ha, mondjuk, a feladat azt kéri, hogy határozzuk meg egy $256m^2$ területű, négyzet alakú telek oldalának hosszát, egyszerűen jelöljük x-el az oldal hosszát és felírjuk az $x^2 = 256 \Leftrightarrow x^2 = 16^2$ egyenletet, tehát a keresett mérték $16m$.

De, ha a feladat azt kéri, hogy határozzuk meg egy téglalap hosszúságát, ha tudjuk, hogy a szélessége $4cm$-el nagyobb, mint a hosszúsága és a területe $96cm^2$, bonyolódnak a dolgok. Jelöljük x-el a téglalap hosszúságát, akkor írhatjuk, hogy $x(x+4) = 96$. Az első gondolat, hogy vizsgáljuk: nem találunk két természetes számot, amelyek különbsége 4 és szorzatuk 96? Találunk: $8 \cdot 12 = 96$, tehát a kért hosszúság $8cm$. Ha ezt nem vesszük észre, beszorozzuk a zárójelet, így kapjuk, hogy $x^2 + 4x = 96$. Látjuk, hogy mindkét oldalhoz hozzáadva 4-et, a baloldalon teljes négyzetet kapunk és írhatjuk $x^2 + 4x + 4 = 100 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 10^2$, tehát $x + 2 = 10$, azaz $x = 8$. Kiegészítettük a bal oldalt egy teljes négyzetre, így az egyenlet első fokúra redukálható lett. Ez volt a „*Purana – Apurnabhayam*” – módszer, ami magyarul „*Kiegészítéssel vagy anélkül*” – t jelent. Általános megoldási képletet szolgáltathatunk másodfokú egyenletekre, így határozzák meg általánosan a másodfokú egyenlet megoldásait IX. osztályban. A módszer a következő:

Legyen az $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ a másodfokú egyenlet általános alakja.

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx = -c \,\big|\, : a \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$. A baloldalt kiegészítjük egy teljes négyzetre $x^2 + \frac{b}{a}x = x^2 + 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{=1} \cdot x \cdot \frac{b}{a} + \underbrace{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{=0} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$. Írhatjuk

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a} \,\Big|\, + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Ha $b^2 - 4ac \geq 0$, $x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ és ez a másodfokú egyenlet megoldási képlete (feltéve, hogy vannak valós megoldásai).

Oldjuk meg a $2x^2 - x - 3 = 0$ egyenletet a „*Purana – Apurnabhayam*” módszerrel:

$$2x^2 - x = 3 \Big| :2 \Leftrightarrow x^2 - \underbrace{\frac{x}{2}}_{2\cdot x\cdot\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2\cdot x\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{3}{2} + \frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$, tehát

$x - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ vagy $x - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}$, vagyis $x = \frac{3}{2}$ vagy $x = -1$. Megoldáshalmaz $M = \left\{-1, \frac{3}{2}\right\}$.

A fenti módszer alkalmazható magasabb fokú (III., IV.) egyenletek esetén is.

3.4.2. Harmadfokú egyenletek megoldása

Harmadfokú egyenletek esetén, a másodfokúhoz hasonlóan, teljes köbre egészítünk ki, használva az $(u \pm v)^3 = u^3 \pm 3u^2v + 3uv^2 \pm v^3$, $\forall u, v \in \mathbb{R}$ képletet. Nézzünk néhány egyenletet.

a) $x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 = x - 30$. Ki lehet találni, mi hiányzik, hogy a baloldal teljes köb legyen. $x^3 - 6x^2 = x^3 - 3x^2\cdot 2 + \underbrace{3x\cdot 2^2 - 2^3 - 3x\cdot 2^2 + 2^3}_{=0} = (x-2)^3 - 12x + 8$, tehát

$$x^3 - 6x^2 = x - 30 \Big| + (12x - 8) \Leftrightarrow (x-2)^3 = \underbrace{13x - 38}_{=13(x-2)-12} \Leftrightarrow (x-2)^3 - 13(x-2) + 12 = 0.$$

Jelöljük $x - 2 = y$, így írhatjuk: $y^3 - 13y + 12 = 0$. A baloldal könnyen felbontható szorzatra:

$$y^3 - 13y + 12 = \underbrace{y^3 - y}_{=y(y-1)(y+1)} - 12y + 12 = y(y-1)(y+1) - 12(y-1) = (y-1)(y^2 + y - 12).$$

Az $(y-1)(y^2 + y - 12) = 0$ egyenlet megoldásai $y = 1$ vagy 3 vagy -4 (a 3 és a -4 az $y^2 + y - 12 = 0$ egyenlet megoldásai), tehát $x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3$ vagy $x - 2 = 3 \Rightarrow x = 5$ vagy $x - 2 = -4 \Rightarrow x = -2$, megoldáshalmaz $M = \{-2, 3, 5\}$.

b) $$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0 \Leftrightarrow \overbrace{x^3 + \underbrace{6x^2}_{3x^2\cdot 2}}^{(x+2)^3 - 3x\cdot 2^2 - 2^3} = -11x - 6 \Big| + (12x + 8) \Leftrightarrow (x+2)^3 = x + 2 \overset{x+2=y}{\Leftrightarrow} y^3 = y.$$

$y^3 - y = 0 \Leftrightarrow y(y-1)(y+1) = 0$, tehát $y = 0$ vagy $y = 1$ vagy $y = -1$, azaz $x = -2$, vagy -1 vagy -3, megoldáshalmaz $M = \{-3, -2, -1\}$.

c) $$x^3 - 9x^2 + 6x + 56 = 0 \Leftrightarrow x^3 - \underbrace{9x^2}_{3x^2\cdot 3} = -6x - 56 \Big| + (27x - 27) \Leftrightarrow (x-3)^3 = \underbrace{21x - 83}_{=21(x-3)-20},$$

$$x - 3 = y:\ y^3 - 21y + 20 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{y^3 - y}_{=y(y-1)(y+1)} - 20y + 20 = 0 \Leftrightarrow (y-1)\underbrace{(y^2 + y - 20)}_{=(y+5)(y-4)} = 0,$$

a megoldások $y \in \{-5,1,4\} \Leftrightarrow x-3 \in \{-5,1,4\}$, tehát $x \in \{-2,4,7\}$.

Láttuk, hogy ha az x^2 együtthatója hárommal osztható szám, olyan egyenletet kapunk y-ban, amely nem tartalmaz másodfokú tagot, így nem nehéz a megoldás (faktorizálással).

Lássuk, mi történik, ha x^2 együtthatója nem osztható hárommal:

d) $x^3 + \underline{7x^2} + 2x - 40 = 0$. Mivel $(x+2)^3 = x^3 + \underline{6x^2} + 12x + 8$ és

$(x+3)^3 = x^3 + \underline{9x^2} + 27x + 27$, kiegészíthetünk $x+2$ vagy $x+3$ köbére:

$x^3 + 7x^2 + 2x - 40 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 = -x^2 - 2x + 40 \Big| + (12x+8) \Leftrightarrow (x+2)^3 = -x^2 + 10x + 48$.

$-x^2 + 10x + 48 = \underbrace{-x^2 - 4x - 4}_{-(x+2)^2} + \underbrace{14x + 28}_{=14(x+2)} + 24$, tehát az egyenlet az

$(x+2)^3 + (x+2)^2 - 14(x+2) - 24 \overset{x+2=y}{\Leftrightarrow} y^3 + y^2 - 14y - 24 = 0$ alakban írható fel. Sokat nem nyertünk ezzel az átalakítással. Alkalmazva a III. fokú polinomok faktorizálásánál alkalmazott valamelyik módszert, kapjuk $y \in \{-3,-2,4\} \Rightarrow x \in \{-5,-4,2\}$.

Meg tudnánk oldani az egyenletet helyettesítéssel úgy, hogy ne legyen másodfokú tényezőnk az y-os egyenletben. Például írhatnánk, hogy $7x^2 = 3x^2 \cdot \frac{7}{3}$ és így törtekkel (is) dolgozunk tovább. De vannak szerencsés esetek (amint fentebb láttuk), amikor az átalakítás után nyert egyenlet egyszerűen megoldható, adunk erre még egy példát:

e) $x^3 + 8x^2 + 17x + 10 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 9x^2 = x^2 - 17x - 10 \Big| + (27x+27) \Leftrightarrow (x+3)^3 = x^2 + 10x + 17$.

$x^2 + 10x + 17 = (x+3)^2 + 4(x+3) - 4$. Ha $x+3 = y$: $\underbrace{y^3 - y^2}_{=y^2(y-1)} \underbrace{-4y + 4}_{=-4(y-1)} = 0$, azaz

$(y-1)(y^2-4) = 0$, így $y \in \{-2,1,2\} \Rightarrow x \in \{-5,-2,-1\}$.

3.4.3. Negyedfokú egyenletek megoldása

Alkalmazni fogjuk az $(u \pm v)^4 = u^4 \pm 4u^3v + 6u^2v^2 \pm 4uv^3 + v^4$, $u, v \in \mathbb{R}$ képletet és sajátos esetben az $(x \pm 1)^4 = x^4 \pm 4x^3 + 6x^2 \pm 4x + 1$, $(x \pm 2)^4 = x^4 \pm 8x^3 + 24x^2 \pm 32x + 16$ $(x+3)^4 = x^4 \pm 12x^3 + 54x^2 \pm 108x + 81$, $(x \pm 4)^4 = x^4 \pm 16x^3 + 96x^2 \pm 256x + 256$ képleteket, negyedfokú egyenleteket megoldására.

a) $x^4+16x^3+86x^2+176x+105=0 \Leftrightarrow x^4+16x^3=-86x^2-176x-105\Big|+\left(96x^2+256x+256\right) \Leftrightarrow$

$\left(x+4\right)^4=\underbrace{10x^2+80x+151}_{=10(x+4)^2-9} \overset{x+4=y}{\Leftrightarrow} y^4-10y^2+9=0 \Leftrightarrow \left(y^2-1\right)\left(y^2-9\right)=0$. Kapjuk:

$y\in\{-3,-1,1,3\}$ tehát $x\in\{-7,-5,-3,-1\}$.

b) $x^4-12x^3+49x^2-78x+40=0 \Leftrightarrow x^4-12x^3=-49x^2+78x-40\Big|+\left(54x^2-108x+81\right) \Leftrightarrow$

$\left(x-3\right)^4=\underbrace{5x^2-30x+41}_{=5(x-3)^2-4} \overset{x-3=y}{\Leftrightarrow} y^4-5y^2+4=0 \Leftrightarrow \left(y^2-1\right)\left(y^2-4\right)=0$. Kapjuk:

$y\in\{-2,-1,1,2\} \Rightarrow \quad x\in\{1,2,4,5\}$.

c) $x^4+4x^3-x^2-16x-12=0\Big|+\left(6x^2+4x+1\right) \Leftrightarrow \left(x+1\right)^4=7x^2+20x+13$.

$7x^2+20x+13=7\left(x+1\right)^2+6\left(x+1\right)$, $x+1=y$. Írhatjuk

$y^4-7y^2-6y=0 \Leftrightarrow y\left(y^3-7y-6\right)=0$.

$y^3-7y-6=y^3-y-6y-6=\left(y+1\right)\left(y^2-y-6\right)=\left(y+1\right)\left(y+2\right)\left(y-3\right)$, tehát

$y\in\{-2,-1,0,3\}$ és $x\in\{-3,-2,-1,2\}$.

Láthattuk, hogy a negyedfokú egyenletnél sem könnyíti meg mindig a dolgunkat a „*Purana – Apurnabhayam*”. Az átalakítás után eltűnik a harmadfokú tag (ha az eredeti egyenletben a harmadfokú tag együtthatója négy többszöröse) de nem biztos, hogy tovább könnyen boldogulunk. Sőt, lehet, hogy átalakítás nélkül könnyebb megoldani az egyenletet.

d). $x^4-4x^3-21x^2+36x+108=0\Big|+\left(6x^2-4x+1\right) \Leftrightarrow \left(x-1\right)^4=27x^2-40x-107$.

$27x^2-40x-107=27\left(x-1\right)^2+14\left(x-1\right)-120$, $x-1=y$, tehát helyettesítéssel írhatjuk, hogy

$y^4-27y^2-14y+120=0$. Észrevehetők a következő felbontási lehetőségek:

$\underbrace{y^4-16y^2}_{y^2(y-4)(y+4)}\underbrace{-11y^2-44y}_{-11y(y+4)}+\underbrace{30y+120}_{30(y+4)}=\left(y+4\right)\left(y^3-4y^2-11y+30\right)$,

$y^3-4y^2-11y+30=\underbrace{y^3-2y^2}_{y^2(y-2)}\underbrace{-2y^2+4y}_{-2y(y-2)}\underbrace{-15y+30}_{-15(y-2)}=\left(y-2\right)\left(y^2-2y-15\right)$,

$y^2-2y-15=\left(y-5\right)\left(y+3\right)$, tehát $y^4-27y^2-14y+120=\left(y+4\right)\left(y-2\right)\left(y-5\right)\left(y+3\right)$.

Az egyenlet megoldásai $y\in\{-4,-3,2,5\} \Rightarrow x\in\{-3,-2,3,6\}$. A megoldás egy kicsit

„erőltetett” volt. Próbáljuk megoldani átalakítás nélkül az egyenletet:

$D_{36}=\{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$. Írhatjuk

$$x^4-4x^3-21x^2+36x+108=\underbrace{x^4-3x^3}_{x^3(x-3)}\underbrace{-x^3+3x^2}_{-x^2(x-3)}\underbrace{-24x^2+72x}_{-24x(x-3)}\underbrace{-36x+108}_{-36(x-3)}=$$

$$=(x-3)\left(x^3-x^2-24x-36\right)=(x-3)\left(x^3+2x^2-3x^2-6x-18x-36\right)=$$

$$=(x-3)(x+2)\underbrace{\left(x^2-3x-18\right)}_{=(x-6)(x+3)}=(x-3)(x+2)(x-6)(x+3).$$

Levonható a következtetés, hogy a „*Purana – Apurnabhayam*” nem mindig vezet (könnyen) célhoz, ezért nem mindig ajánlott a használata.

Végezetül nézzük meg a negyedfokú egyenletek egy speciális formáját és egy módszert ezek megoldására.

3.4.4. A „*Vyasti Samasti*” - szútra

Legyen általánosan az $(x+a)^4+(x+b)^4=c$, $a,b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}^*$, $x\in\mathbb{C}$ negyedfokú egyenlet.

Ebben az esetben a „***Vyasti Samasti***” - szútra alkalmazható. Legyen $u=x+\frac{a+b}{2}$, az $x+a$ és az $x+b$ binomok számtani közepe.

Az egyenlet az $\left(u+\frac{a-b}{2}\right)^4+\left(u-\frac{a-b}{2}\right)^4=c$ alakban írható, a zárójelek felbontása után a $2u^4+3(a-b)^2\cdot u^2+\frac{(a-b)^4}{8}-c=0$ bikvadratikus egyenlethez jutunk, ami megoldható.

Nézzük az $(x+8)^4+(x+10)^4=1552$ egyenletet. Jelöljük $u=\frac{x+8+x+10}{2}=x+9$, tehát $x+8=u-1$ és $x+10=u+1$. Írhatjuk:

$(u-1)^4+(u+1)^4=1552 \Leftrightarrow 2u^4+12u^2+2=1552\,\big|:2 \Leftrightarrow u^4+6u^2-775=0$. Így kapjuk, hogy $u\in\left\{-5,5,-i\sqrt{31},i\sqrt{31}\right\}$, tehát a megoldások

$x+9\in\left\{-5,5,-i\sqrt{3},i\sqrt{3}\right\}\Rightarrow x\in\left\{-14,-4,-9-i\sqrt{31},-9+i\sqrt{31}\right\}$.

Gyakorlatként oldjuk meg a következő negyedfokú egyenletet: $(x+3)^4+(x+5)^4=3026$.

4.Fejezet: Tapasztalatok, következtetések

Az *Eurydice* jelentésben is olvashattuk, hogy a matematikai kompetenciát az oktatásügyi miniszterek az önmegvalósításhoz és a munkaerő piacon való elhelyezkedéshez szükséges kulcskompetenciaként jelölték meg. Sajnos, országunkban a matematikában nehézségekkel küzdők aránya 45% felett van. Ezt mi, tanárok is tapasztalhatjuk a mindennapi oktatás során. Az sem vigasztal, hogy nemcsak Románia van ebben a helyzetben. Amint olvashattuk, a gyenge teljesítménynek több oka is van, többek között a tanulók motiváltságának csökkenése - ez a csökkenés az elemitől egészen a középiskola befejezéséig tart.

Dolgozatomban megpróbáltam bemutatni egy, a Romániában használatostól eltérő matematikai modellt, a védikus matematikai rendszert. A védikus rendszer erős oldala a következetesség. Például, négyzetre emelés elvégzése után egyszerűen megfordítjuk a műveletek sorrendjét, és a négyzetből négyzetgyököt vonunk. A számítási módszerek könnyen megérthetők és megjegyezhetők, a számítások nagyrészt fejben is elvégezhetők. Tehát rugalmas, mentális módszerekről van szó, a tanulók saját megoldási módszereket fedezhetnek fel, nincsenek egy megadott sémára korlátozva. Ez (jobban) felkelti a tanulók érdeklődését a matematika iránt, és még jó kedvre is buzdíthatja őket. Ide talál Rényi Alfréd egy gondolata: „*Ha rossz kedvem van, matematizálok, hogy jó kedvem legyen. Ha jó kedvem van, matematizálok, hogy megmaradjon a jó kedvem*”.

A gyerekek szeretik a trükköket, mert megkönnyíthetik a munkájuk elvégzését. Nagyon hatékony ezek alkalmazása a matematikában, már a kezdetek kezdetén. De fontos alkalmazni a trükköket a középiskolában is, ahol már, amint fentebb is említődött, egyre kevesebben maradnak aktívak a harc mezején. A dolgozatomban egy pár ilyen trükköt szerettem volna bemutatni, amelyek alkalmazása javíthatná sok tanuló gyenge teljesítményét, és erősíthetné ezek motiváltságát is a matematika tanulására. Több diákom volt már, aki majdnem a semmiről kezdte matematikából a IX. osztályban, és nagy jeggyel érettségizett (matematikából is). Einstein is úgy mondta volt, hogy „*Ne bánkódj, ha gondjaid vannak a matematikával, biztosíthatlak, az enyémek sokkal nagyobbak*”. Neki pedig sikerült leküzdeni a gondok egy nagy részét. De nem csak a tanulók, az oktatók hozzáállásán is múlik a siker. Ehhez kötődik egy gyengébben felkészült, de optimista és találékony diák esete az egyetemen: Az egyetemen folynak a szigorlatok. A professzor így szól az egyik gyengén felkészült ifjúhoz: - Látja, kérem, Nagy Sándor már ennyi idős korában meghódította a világot. - Igen, csakhogy neki Arisztotelész volt a tanára...

Irodalomjegyzék

[1] Bhaktivedanta Academy, Vedic Mathematics - Laghu, The Bhaktivedanta Academy, 2006.

[2] Noblitt, Dr.Bethany, Blaire Richter, "Using Vedic Mathematics to Make Sense of the Finger Algorithm," *Journal of Mathematics & Culture,* September 2013.

[3] K. R.Williams, Vedic Math Genius, Inspiration Books, 2003.

[4] S. S. V. Pratishtan, "http://vedamu.org/mathematics/course.asp," 1 6 2005. [Online].

[5] K. R.Williams, Fun with Figures - Brilliant Metal Maths Shortcuts That Will Amaze Everyone, Inspiration Book, 1998.

[6] K. R.Williams, Vedic Math Genius, Inspiration Books, 2003.

[7] S. Aurobindo, The Secret of the Veda, Sri Aurobindo Ashram Trust, 1998.

[8] R. Targ, Puterea fără limite a minții, Lifestyle, 2011.

[9] "http://www.vedicmaths.org/introduction," [Online]. [2015, június].

[10] "http://europa.eu/rapid/press-release_IP-11-1358_en.htm," [Online]. [2015, június].

[11] "http://www.tattva.hu/index.php?inc=article&id=103," [Online]. [2015, június].

[12] "Maths answer to the Global Maths Crisis," *The Thelegraph,* 21 01 2015.

[13] K. R. Williams, Manualul profesorului - nivel elementar, Inspiration Books, 2009.

[14] K. Srivastava, "Factorization of quadratics and cubics by vedic mathematics," *Vani - Journal of Department of Applied Science and Humanities,* 2012.

[15] D. S.K.Kapoor, "Vedic Mathematics," *Online International Journal of Vedic Mathematics,* May 2015.

[16] B. a. Raihani, "Decimal Form of a Fraction," *Online International Journal of Vedic Mathematics,* October, 2014.

[17] D. W. Dr.Narinder Puri, "Vedic Mathematics - The Cosmic Software for the Cosmic Calculator," *National Council of Teachers of Mathematics Annual Conf., Chicago,* 1988.

[18] D.K.R.Babajee, "A Method for Finding the Square of any Number," *Online International*

Journal of Vedic Mathematics, June 2012.

[19] R. Chandra, "Squaring Made Easy," *Online International Journal of Vedic Mathematics,* May 2015.

[20] S. B. K. Bharati, Vedic Mathematics, Delhi: Motilal Banarsidass, 1981.

[21] Basavaraj.B, "Comparison of Vedic Multipliers With Conventional Hierarchical Array of Multipliers," *IJERT,* vol. 2, 2013.

[22] A.P.Nicholas, Kenneth R.Williams, Vertically and Crosswise, Inspiration Books, 2010.

[23] "http://www.singaporemath.com/," [Online]. [2015, június].

[24] "http://www.dnaindia.com," [Online]. http://www.dnaindia.com/india/report-new-education-policy-centre-sets-ball-rolling-2066826. [2015, június].

[25] "http://www.ndtv.com," [Online]. http://www.ndtv.com/india-news/union-minister-smriti-irani-holds-talks-with-rss-bodies-on-education-policy-782848 . [2015, június].

DECLARAŢIE DE AUTENTICITATE PE PROPRIE RĂSPUNDERE

Subsemnatul **Oláh Csaba**, înscris la examenul pentru obţinerea Gradului didactic I, seria 2014-2016, specializarea **Matematică**, prin prezenta, certific că lucrarea metodico-ştiinţifică cu titlul ***Aplicarea metodelor vedice în predarea matematicii la clasele liceale***, conducător ştiinţific **conferențiar dr. András Szilárd**, este rezultatul propriilor mele activităţi de investigare teoretică şi aplicativă şi prezintă rezultatele personale obţinute în activitatea mea didactică.

În realizarea lucrării am studiat doar surse bibliografice consemnate în lista bibliografică, iar preluările din diferitele surse, inclusiv din alte lucrări personale, au fost citate în lucrare.

Prezenta lucrare nu a mai fost utilizată în alte contexte evaluative – examene sau concursuri.

Data: _____ Semnătura:

_____