Universitatea Babeş-Bolyai Cluj-Napoca
Facultatea de Matematică şi Informatică
Specializarea Matematică-Didactică

Lucrare de diplomă

Algebră lineară - abordare prin principii IBL

Conducător ştiinţific
Dr. András Szilárd
lector universitar

Absolvent
Szilágyi Judit

Iunie 2010

Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar
Matematika-Didaktika Szak

Lineáris algebra probléma-és kiváncsiság alapú megközelítésben

Szakdolgozat

Témavezető
Dr. András Szilárd
egyetemi adjunktus

Végzős hallgató
Szilágyi Judit

2010 Június

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Az utóbbi évtizedben több olyan nemzetközi felmérés született, amely a matematika és a tudományok oktatásának hatékonyságát vizsgálta a fenntartható gazdasági és társadalmi fejlödés szempontjából. A legátfogóbbak a 2004-es Gago-jelentés (Europe needs more scientists) és a 2007-es Rocard-jelentés (Science Education Now: A renewed pedagogy for the future of Europe). Mindkét jelentés végső ajánlásai között szerepel a matematika és a tudományok oktatásában alkalmazott pedagógiai módszerek megújítása, pontosabban a kíváncsiság vezérelt oktatás (Inquiry Based Learning) széles körű alkalmazása. Többek között a jelentések hatására döntéshozói szinten is tudatosultak azok az égető problémák, amelyekkel a matematikát és a tudományokat oktatók szembesülnek; így az Európai Bizottság is több ilyen irányú projektet támogat.

2007 és 2010 közt a BBTE matematika fakultása és a Báthory István Líceum matematika tanszéke közösen vett részt a DQME2 multikulturális projektben, ebben az évben a BBTE egy újabb jelentős projekt, a Primas projekt résztvevője lett. A két projektben való aktív részvétel ráirányította figyelmem arra, hogy nagy szükséges van újszerű (de régi elveken alapuló) tananyagok létrehozására.Dolgozatom tulajdonképpen kísérlet:a Lineáris algebra fejezet fogalmait probálom meg a kiváncsiság vezérelt oktatás elveit szem előtt tartva bevezetni.

Köszönettel tartozom azért, hogy ez a dolgozat megszülethetett dr.Soós Anna docensnek, akivel együtt dolgoztunk a DQME2 projektben és aki arra ösztönzött, hogy didaktikai tanulmányaimat elmélyítsem, Nagy Örsnek, akivel szintén sokat dolgoztunk DQME2-es anyagokon,sok beszélgetést folytattunk a tanításról, aki támogatóm volt a technika ördögével folytatott küzdelmemben, és nem utolsó sorban dr.András Szilárd adjunktusnak, akivel szintén együtt dolgoztunk a DQME2 projektben, együtt dolgozunk a Primas projektben is, itt szerzett tapasztalatainkról már született közös cikkünk, és aki mindvégig támogatott megjegyzéseivel, építő kritikájával, segítő észrevételeivel és azzal a nagy érdeklődéssel, amivel mindig is a tanítás kérdései fele fordult.

1. fejezet

A matematika tanítás problémái európai és hazai jelentések tükrében

Az utóbbi évtizedben egy igen aggasztó jelenséggel kell szembenéznünk. A technika századában egyre kevesebb fiatal mutat érdeklődést a matematikai és természettudományos pályák iránt. Míg az egyetemet végzettek száma növekvőben van Európában és a mi országunkban is, addig a matematika és természettudományos szakokat választók száma csökken, sőt a bármilyen tudományos karriert befutni vágyók száma is csökkenőben van. Részletesen elemzi ezt a helyzet több erre a célra kinevezett európai szak bizottság.

A 2004 áprilisában Brüsszelben bemutatott Gago-jelentés szerint ekkor az EU-ban 5,7 kutató jutott 1000 főre, a tagságra váró országokban pedig átlagosan 2,6 kutató. Ehhez képest a gazdasági és technológiai fejlődés fenntartása legalább egy 8 kutatós átlagot igényel, ami azt jelenti, hogy Európának félmillióval több kutatásban dolgozó emberre van szüksége. Különösen rossz a helyzet a természettudományok, ezek közt főként a fizika és a matematika terén. Ezeken a területeken bizonyos európai országokban nemcsak a kutatók de a tanítók száma sem elegendő. Más országokban még elegendő, de a közeljövőben már nem. A Gago-jelentésben megjelenő MAPS- (Mapping Physics Students in Europe) tanulmány szerint 1997 és 2002 közt 17 százalékkal csökkent Európában a fizikában diplomázottak száma. A jelentés számos okot vizsgál és javaslatokat tesz a helyzet javítása érdekében. A tanításról, mint a jelenséget befolyásoló egyik fontos tényezőről a következőket állapítja meg: Az iskolában zajló matematikai és természettudományos oktatás egy "saját világban" zajlik, amely nem tud a tudományos területeken zajló fejlődéssel lépést tartani. A diákok túl absztraktnak érzékelik, mert alapgondolatokat próbál átadni megfelelő kísérletező, megfigyelő, értelmező háttér nélkül. Abban az állapotban van, hogy túlnyomóan tényszerű, ezáltal nem eléggé figyelem és érdeklődés felkeltő. A diákok többsége irrelevánsnak és nehéznek tartja.

A 2007-es Rocard- jelentés: Science Education Now megerősíti az előző jelentés megállapításait, sőt a helyzet súlyosbodásáról beszél. Ebben a jelentésben az egyik legfontosabb javaslat a kíváncsiság-vezérelt oktatás előtérbe helyezése. Kíváncsiság-vezérelt tanuláson a jelentés szerzői azt a folyamatot értik, amely problémák feltárására, kísérletek elemzésére, alternatívák megtalálására, kis kutatások megtervezésére, sejtések megfogalmazására, információ-gyűjtésre, modell alkotásra, koherens érvek megfogalmazására irányul (Lim, Davis, Bell 2004). A matematikát tanítók közössége problémaközpontú tanításnak nevezi azt a módszert, amelyben a tanítás egy megoldandó problémával kezdődik és ennek megoldásához kell olyan tudásra szert tenni, amely lehetővé teszi annak megoldását. A kíváncsiság-vezérelt oktatás problémaközpontú megközelítés, de több annál, méghozzá a kísérletezésnek tulajdonított fontosság által.

A román tanügyi rendszer állapotát tárgyaló 2007-es Miclea-jelentés is kitér számos a fenti jelentésekben említett problémára. Románia a tudományos publikációk lakossághoz viszonyított száma szerint 11-szer kisebb teljesítményt mutat az EU-s átlagnál, ötször kisebbet Magyarországhoz és kétszer kisebbet Bulgáriához képest. Románia innovációs együtthatója 2006-ban kétszer kisebb volt Bulgáriáénál, háromszor Magyarországénál és ötször az EU átlagnál és a legnagyobb csökkenő tendenciát mutatja az összes felmért ország közt. A Miclea-jelentés is ennek egyik okát a tanügyi rendszer jelenlegi állapotában látja és annak radikális átalakítását javasolja. Sok más fontos megoldandó probléma mellett kiemelt fontosságot tulajdonít a kompetencia-alapú oktatásnak. A jelentés szerint a jelenlegi curriculum túlterhelt és irreleváns a munkapiac szempontjából. Az információátadás teljesen előtérben van a problémamegoldást segítő kompetenciák fejlesztésével szemben. Nem lehet tudni, milyen tudást várunk el egy érettségizett fiataltól. Mindez látóhatár nélküli oktatáshoz és semmit nem mutató belső felméréshez vezetett. A diákok pedig egyre kevésbé értékelnek egy olyan iskolarendszert, amely elzárkózik a tudás termelésének és szállításának jelenlegi módozataitól.

Mindez a különböző európai felmérésekből is látszik. A 2003-as Pisa-felméréseken és TIMSS-felméréseken Románia a vizsgált 42 ország közt a 34.-ik helyet foglalta el, a nemzetközi átlagtól minden felmért kompetenciában lemaradt.

Mindez azt mutatja, hogy a matematika és természettudományos oktatás világszerte nem túl jó helyzete nálunk még rosszabb képet mutat. Ilyen körülmények közt valóban minden matematikát tanító tanárnak el kell gondolkoznia, hogy mik azok a módozatok, amellyel ezt a tendenciát csökkenteni lehetne. Nagyon sok olyan tényező van, ami a társadalom és főként a politikum döntésein múlik. Természetesen valamilyen egységes, jól alátámasztott fellépéssel talán valamilyen mértékben ezt is lehet befolyásolni, de ez nem képezi jelen dolgozat vizsgálatának tárgyát. Amit megtehetünk és meg is kell tenni az tanítási gyakorlatunk átalakítása olyan módon, hogy valóban partnerei lehessünk tanítványainknak a tanulás folyamatában és megváltozott életkörülményeikből adódó gondjaikra valamilyen életképes megoldást próbáljunk találni. Olyan problémákkal szembesülünk a tanítás során, mint:

- az egyre erősödő hiányos szövegértés,
- az absztrakciós képesség egyre nagyobb hiánya,
- a nyelvezet elszegényedése és ezáltal az érzelmi és értelmi élet szegényedése,
- a sok forrásból jövő állandó ingerlésnek való kitettség miatt pedig jóval magasabb ingerküszöb.

Ezeknek a gyerekeknek erősebb impulzusokra van szükségük, ahhoz, hogy érdeklődésüket felkeltve aktív résztvevőivé váljanak a tanulásnak. Ahhoz, hogy ezt elérjük változatossá kell tenni a módszereinket,és azokat a módszereket kell előtérbe helyezni, amelyek kötelezővé teszik a diák aktív részvételét a tanórán. El kell érnünk, hogy a diák cselekvő módon reagáljon az őt érő kihívásokra. Ez különben az utóbbi időben sokat hangoztatott kompetencia szó értelmezése is: az egyén belső késztetése, hogy cselekvéssel válaszoljon egy adott helyzet kihívására, tehát nem azonos sem a tudással, sem a képességgel, magában foglalja ezeket, de nem azonos velük (Blomhoj és Jensen, 2003).

A Rocard-jelentésben kiemelt kíváncsiságorientált oktatás olyan módszer, amelyet érdemes lenne rendszeresen használni a tanítási folyamatban. Ez nagymértékben fejlesztheti a kompetenciákat a puszta ismerettel szemben. Ennek gyökerei a probléma központú tanítással azonosak. Ha megvizsgáljuk Eric Wittmann elképzelését a probléma megoldás képességének fejlesztésére vonatkozóan, azt tapasztaljuk, hogy szinte teljes mértékben megegyezik a Rocard-jelentésben foglaltakkal.

Erich Ch. Wittmann a problémamegoldási képességek fejlesztésének tíz feltételét tartja alapvetően fontosnak :

1. Ismeretszerzés felfedeztető tanítás és tanulás révén.
2. A tanulók ösztönzése a divergens gondolkozásra (többféle megfogalmazás; több irányból történő megközelítése ugyanannak a problémának; a matematika különböző területeinek összekapcsolása, a módszerek ötvözése; stb.).
3. Automatizált gondolatmenetek kizárólagos alkalmazásának háttérbe szorítása.
4. Nyitott problémák vizsgálata (nincs direkt kérdés, többféle kérdésfeltevés lehetséges, apró kutatási lehetőségek stb.).
5. Ösztönözni kell arra a tanulókat, hogy maguk is vessenek föl problémákat.
6. Egy olyan ”nyelv” kialakítása, amely lehetővé teszi a tanulók számára, hogy gondolataikat ki tudják fejezni.
7. Intuitív indoklások, sejtések ösztönzése. (Egy kicsi, de önálló lépés többet ér, mint egy bemutatott gondolatmenet ”lefényképezése”.)
8. Heurisztikus stratégiák tanulása.
9. Konstruktív magatartás kialakítása a hibákkal szemben.
10. Diszkussziók, reflexiók, argumentációk ösztönzése.

Egyébként magának a problémának a mibenlétét is érdemes megvizsgálnunk.

Pólya György szerint: ”Problémánk van, tehát azt jelenti, hogy olyan megfelelő tennivalót keresünk tudatosan, amely alkalmas valamilyen világosan megfogalmazott,de közvetlenül meg nem közelíthető cél elérésére. Problémát megoldani a megfelelő tennivaló megtalálását jelenti...a legjellemzőbb emberi tevékenység a problémamegoldás, a célratörő gondolkodás, eszközök keresése valamely kitűzött cél eléréséhez.”

Alan H. Schoenfeld a probléma fogalmának értelmezésekor a ”problémaság” kritériumát nem a feladat, a kérdés bonyolultságában keresi: ”Az a nehézség a probléma fogalmának értelmezésében, hogy maga a problémamegoldás folyamata nagyon függ a problémamegoldó személyétől. Azok a feladatok, amelyek megoldása komoly erőfeszítést kíván bizonyos tanulóktól, mások számára lehetnek egyszerű rutinfeladatok, sőt egy matematikus számára ismeretei alapján trivialitások. Ennélfogva az, hogy egy feladat probléma-e, nem magának a feladatnak a lényegi sajátossága, sokkal inkább az egyén és a feladat közötti kapcsolat jellemzője.”

A Pólya-féle értelmezés nagyon rávilágít arra, hogy a problémamegoldás képessége és a kompetenciák megléte teljesen egy tőről fakad, Schoenfeld értelmezése pedig rávilágít arra, hogy a problémaszituáció egyénenként különbözik. Biztos probléma szituációt jelentenek mindenki számára a tanítás során azok a helyzetek, amikor olyan feladatot kell ellátnunk, amely megoldására nem elegendőek a már meglevő eszközeink és újabbakat kell találnunk. Egy új fogalom vagy eszköz ilyenszerű bevezetése (ahol az lehetséges) biztosan élményszerűbb a tanuló számára, mint a puszta közlés.

A problémaközpontú matematikai oktatásban azonnal felmerül az alkalmazás és modellezés problémája. Az utóbbi másfél évszázad örökös kérdése volt, hogy tiszta matematikát tanítsanak-e vagy alkalmazáscentrikusat, s ha igen, milyen mértékben. A mérleg nyelve hol erre, hol arra dőlt el, amikor valamely irány túlsúlyba került. Az utóbbi évtizedekben kutatások is folytak, több európai országban is ilyen irányban (Dánia, Hollandia, Németország, Svédország) és egyre inkább szükségesnek tartják a modellezési tevékenységek jelenlétét a matematikatanításban. Ezt nyilvánvalóvá teszi annak szükségessége, hogy a matematikát is integráljuk az élet más területein kifejtett tevékenységekkel. Hogyan valósul ez meg az alkalmazás és modellezés által? Mindkettő a matematikának a külvilággal való kapcsolatát teremti meg. A modellezés a külvilág-matematika irányú kapcsolatot képviseli. Mikor modellezünk a külvilágban állunk és a matematika birodalmában keresünk a :"Hol találhatok valamilyen matematikai eszközt, ami segítsen megoldani ezt a problémát?" kérdésre választ. Az alkalmazás a matematika -külvilág irányú kapcsolatot képviseli. Most a matematika birodalmában állunk és a külvilágban keressük a :"Hol használhatom a matematika világán kívül ezt az eszközt?" kérdésre a választ.

A matematika didaktikusok körében elég nagy konszenzus alakult ki abban, hogy a modellezés nagyon fontos a matematikatanításban. Két felfogás is létezik, vannak akik magáért a tanításért tartják fontosnak, ebben a felfogásban a modellezés eszközként jelenik meg, amely megkönnyítheti és támogathatja a matematikának, mint tantárgynak a tanítását. A másik felfogás azt vallja, hogy a matematikát úgy kell tanítani, hogy olyan kompetenciákat fejlesszünk, amelyek a matematika alkalmazásában és a modellalkotásban segítenek. Az általános iskolában ez a dualitás természetes, hiszen mindkét aspektus nagyon fontos, úgy kell egybeágyazni őket, hogy közben még csak ki sem ejtjük a modell szót. Meg kell teremteni a gyerek számára a matematika világa és a saját világa közti összeköttetést, meg kell tanítani használni a matematikát változatos kontextusokban és helyzetekben, rá kell ébreszteni, hogy mindenhol találkozik vele.

Az "alkalmazás és modellezés a matematika tanulásáért" elképzelés abból indul ki, hogy:

a) bizonyítani kell a diáknak, hogy a matematikát az emberek sok okból és célból valóban használják, így egy gazdagabb képet alkotnak a matematika természetéről és szerepéről

b) motivációt nyújt a diáknak, hogy matematikát tanuljon, mivel segít különböző attitűdök és elképzelések formába öntésében.

A másik elképzelés szerint:

a) a matematikai tanítás és tanulás egyik célja, hogy a diákokat felszerelje azzal a képességgel, hogy a matematikát önmaga határain túl alkalmazza.

b) a matematika önmaga határain túli alkalmazása mindig matematikai modellek és modellezésen keresztül történik.

Időről időre megjelenik különböző iskolarendszerekben (és nálunk még ma is él) az az elképzelés, hogy ha valaki helyes és hatékony módon tanult "tiszta matematikát", akkor képes lesz alkalmazni a matematikát más területeken és más kontextusokban további erre irányuló tanítás nélkül. Ezzel szemben az utóbbi idők kutatásai azt mutatták ki, hogy nincs automatikus transzfer a tiszta matematikai tudás és azon képesség közt,hogy ezt az egyén alkalmazni tudja olyan helyzetekben, amelyek még nem teljesen matematizáltak. Ezért, ha szeretnénk, hogy diákjaink alkalmazási és modellezési kompetenciákkal rendelkezzenek, mint a matematikai műveltségük egyik kimenetele, az alkalmazás és modellezés expliciten kell szerepeljen a matematikatanítás programjában. Ennek megvalósításához viszont a tanárnak képesnek kell lennie változatos tanítási környezetek létrehozására, olyan helyzeteket és tevékenységeket kell kitalálnia, ami támogatja az alkalmazási és modellezési kompetenciák megjelenését különböző nevelési helyzetekben más matematikai kompetenciákkal párhuzamosan. Ebben a tanár azonban különböző problémákba ütközik: időbeosztási gondok (mennyit tanítsunk ezekből időben?), a tartalmak megtervezése (mit, milyen modelleket?), a tevékenységek és felhasznált anyagok kiválasztása, a megfelelő egyensúly megteremtése az alkalmazás és a többi, fontos elméleti és más típusú matematikai tevékenység között. Ahogy a diák nem képes bonyolultabb helyzetekben alkalmazni a matematikát, illetve megalkotni és kielemezni matematikai modelleket az elméleti matematikai ismereteinek automatikus következményeként, ugyanúgy a tanárt sem teszi képessé elméleti matematikusi vagy hagyományos matematikatanári képzése arra, hogy megfelelő környezeteket, helyzeteket illetve tevékenységeket hozzon létre az alkalmazásra és modellezésre. Ehhez be kell ezt iktatni a tanári képzésbe illetve a továbbképzések fontos részévé kell váljon ezen tanári képességek fejlesztése. Ugyanakkor fontos más országok már meglevő tapasztalatainak kielemzése és átvétele.

Természetesen a kompetencia-alapú, a kíváncsiságvezérelt tanításnak és tanulásnak is megvannak a maga korlátai, alkalmazhatósági határai, és ezek majd hosszasabb alkalmazás és vizsgálatok után derülnek ki (például a kompetenciák mérésének egyik problémája, hogy ugyanazok a kompetenciák különböző embereknél nem egyidőben alakulnak ki,de az hogy nem alakult ki a felmérés időpontjára, nem azt jelenti feltétlenül, hogy később sem válik operacionálissá). Kérdés az is, hogy bizonyos dolgok, mint a heurisztikus eljárások, a heurisztikus problémamegoldó képesség milyen mértékben taníthatóak. Például a heurisztika taníthatóságát illetően Kosztolányi József arra a következtetésre jut 2000-ben ebben a témában írt Phd-dolgozatában, hogy az csak bizonyos mértékben tanítható, de nagyon hasznos ezzel foglalkozni, mert bizonyos fejlődés elérhető megfelelő stratégiák jól feltett kérdésekkel irányított tanítása által.És természetesen az, hogy ez csak bizonyos mértékig tanítható nem ok arra, hogy ne tegyük azt.

Ami biztos, és szintén felmérések bizonyítják, a legfontosabb, hogy kik és hogyan alkalmazzák ezeket a módszereket, azaz a lelkes, úgy szakmai, mint didaktikai szempontból jól felkészült,jó képességű és empátiával rendelkező tanárt nem lehet semmivel helyettesíteni, és minden módszeren túl az ő személyes hozzáállása az, ami az egész tanítási folyamatot a legnagyobb mértékben meghatározza.

Ugyanakkor a legkreatívabb és jó felkészültséggel rendelkező nevelőnek, tanítónak is szüksége van segítségre és együttműködésre az új(régi) irányzatok megismerésére, az alkalmazáshoz szükséges erőfeszítések megtermékenyítésére. Ezért válnak egyre szükségesebbeké a jól átgondolt, kivitelezett továbbképzések, illetve különböző hazai illetve nemzetközi projektekben való részvételek és kooperációk (a bevezetés további részében le fogom írni egy ilyen nemzetközi projektben való részvételünk tapasztalatait).

Egy másik igen fontos probléma a tankönyvek illetve segédanyagok kérdése. Ami a Romániában forgalomban levő tankönyveket illeti,az a gond velük, hogy még mindig jobban hasonlítanak feladat anyaggal kiegészített egyetemi jegyzetekre, tétel, bizonyítás, példa stílusban való felvezetés jellemzi őket, s ha némely könyv el is tér valamennyire ettől a stílustól (amennyire ez egyáltalán lehetséges ahhoz, hogy megfeleljen az elbirálási kritériumoknak), mivel nincsenek tanári kézikönyvek,a máshoz szokott tanárok nem igazán tudják használni ezeket,így inkább választják az általuk megszokott tankönyveket. Egy más felfogásban szerkesztett, a kiváncsiságvezérelt oktatást támogató tankönyv koncepcióra lenne szükség. Természetesen ehhez igen nagy többletmunkára van szükség a szerzők részéről és egy nagyobb stabilitásra a tanügyben, mondjuk minimálisan arra, hogy a tanterv nem változik évente vagy kétévente, mint azt az utóbbi időben már megszoktuk.

Dolgozatomban a Lineáris algebra fejezetet próbálom meg a problémaközpontú tanítás elveinek megfelelően kidolgozni, úgy, hogy az a kiváncsiság vezérelt tanulást támogassa,sokszor az alkalmazás felöl kiindulva és a megfelelő modell gyártásával bevezetve az új fogalmakat. Úgy próbálok építkezni, hogy a probléma megelőzze az elméletet, hogy a tanuló láthassa, hogy honnan és miért bukkanak elő a fogalmak, tulajdonságok és miért lesznek hasznosak a talált matematikai eszközök, mindeközben pedig a modell alkotásról is némi képet szerezhet (akár ki nem mondott formában is).

Egy tapasztalat margójára

2007 és 2010 közt a kolozsvári BBTE és a Báthory István Líceum a DQME2 (Developing Qouality in Mathematics Education) európai multikulturális projekt résztvevője volt. A projekt különösen a matematikai modellezéssel foglalkozott,és a három év alatt együttműködések alakultak ki bizonyos projektek egyidőben történő lefuttatására. Mi Svédországgal és Dániával együtt az Astma-projekten dolgoztunk, ez a három év legkomplexebb matematikai és modellezési apparátusát igénylő projektnek bizonyult, a komolyabb modellezési háttérrel rendelkező Dánián és Svédországon kívül csak Románia és Magyarország vállalkozott a részvételre és a magyarországi résztvevők feladták egy adott ponton .

A modellezésre váró probléma a következő volt:

Az asztmában szenvedő emberek jelentős hányadát teofilinnel kezelik. A teofilin vagy más nevén a dimetilxantin a metilxantinok csoportjába tartozó alkaloid drog (akárcsak a koffein és a teobromin), amely előfordul például a zöld teában is. A teofilin több gyógyszer komponense (akár koffeinnel kombinálva is), a legtöbbet légzészavarok kezelésére ajánlják. Az adagolás leggyakoribb módja az, hogy T óránként (T rögzített) a beteg egy D mg-nyi dózist kap. Egy páciens vérébe 60 mg teofilint fecskendeztek be és ezután kétóránként mérték a teofilinnek a vérbeli koncentrációját. A kapott adatok alapján állították össze a következő táblázatot:

Feladatunk az volt, hogy szerkesszünk matematikai modellt a felszívódásra és a modell valamint a mérési eredmények alapján válaszoljunk a következő kérdésekre:

1. Hogyan változik a teofilin koncentrációja az idő függvényében?
2. Hogyan kell rögzíteni a D és T értékeket, ha azt szeretnénk, hogy néhány injekció után a teofilin koncentrációja $5mg/l$ és $15mg/l$ közt legyen?

3. Hogyan kell rögzíteni a D és T értékeket ahhoz, hogy a teofilin koncentrációja már az adagolás kezdetét? $5mg/l$ és $15mg/l$ közt legyen, ha egy kezdeti S dózissal kezdünk és utána T óránként D dózist adagolunk?
4. Milyen más tényezőket kell figyelembe venni?

Alkossunk modelleket a következő esetekre:

I. időegységenként a vérben levő teofilin rögzített százalékát használja el a szervezet.

II. időegységenként a vér rögzített százaléka kerül a májba, a vérből, illetve a májból az ott lévő teofilin illetve százaléka szívódik fel és a májban levő teofilin százaléka kerül vissza a vérkeringésbe.

III. időegységenként a vérben levő teofilin rögzített százalékát használja el a szervezet és ugyanakkor az adagolás miatt időegységenként rögzített p mennyiségű teofilin érkezik a vérbe (pl.pasztilla vagy ragtapaszos adagolás esetén).

IV. időegységenként a vér rögzített százaléka kerül a májba, a vérből, illetve a májból az ott lévő teofilin illetve százaléka szívódik fel és a májban levő teofilin százaléka kerül vissza a vérkeringésbe, ugyanakkor az adagolás miatt időegységenként rögzített p mennyiségű teofilin érkezik a vérbe (pl.pasztilla vagy ragtapaszos adagolás esetén).

Ahhoz, hogy a feltett kérdésekre válaszoljanak, a diákoktól elvártuk, hogy az adott modelleket a megadott adatokhoz igazítsák regresszióanalízist használva, majd kifejlesszék (numerikus kísérletekkel és/vagy formális számításokkal) a kért gyógyszerezési sémákat. Mivel nagyon komplex problémával álltunk szemben nemcsak középiskolás diákokat, hanem elsőves egyetemi hallgatókat is bevontunk a munkacsoportokba. Mielőtt a tulajdonképpeni modellezési probléma megoldására irányuló tevékenységeket elkezdtük, néhány olyan aktivitást kellett szerveznünk, amellyel a megfelelő hátteret biztosítottuk.:

- a középiskolás diákok számára alapvető matematikai analízisbeli fogalmakat (deriváltak, differenciálegyenletek),regresszió analízist (paraméter esztimáció, görbeillesztés),ugyanakkor speciális szoftverek használatát (Excel, görbeillesztés) tanítottuk.

- az egyetemi hallgatók számára csak regresszió analízisben és szoftverkezelésben tartottunk foglalkozásokat.

Ez 10 foglalkozást jelentett a középiskolás diákok számára és 4 foglalkozást az egyetemi hallgatók számára. Mindez hagyományos iskolai környezetben zajlott. A tulajdonképpeni modellezési tevékenység lebonyolítására négy csoportot hoztunk létre, mindegyik csoportnak az egyik megadott modellel kellett dolgoznia. A csoportok 3-4 egyetemi hallgatóból és 2-3 középiskolás diákból álltak. Minden csoportnak volt saját számítógépe, amelyen Excelben végezhette a számításokat, egy videoprojektora az eredmények szóbeli bemutatására. Az előkészítő tevékenységek során minden diák megismerkedett a modellekkel (az azokat leíró differenciálegyenletekkel és azok megoldásaival), de nem ismerték a kérdéseket, amikre majd válaszolniuk kell. A tevékenységet három órásra terveztük, de csak öt és fél óra alatt készültek el és zajlottak le a bemutatók. Ezalatt az idő alatt bármilyen precízen megfogalmazott technikai kérdést megválaszoltunk, de nem befolyásoltuk a csapatokat a számításaik megtervezésében és kivitelezésében (megpróbáltuk betartani a Tong által leírt szabályokat). A tevékenység azzal zárult, hogy minden csapat a saját Excel-táblázata alapján egy bemutatót tartott.

Nagyon tanulságos volt számunkra az egyes csapatok hozzáállása és az a mód, ahogyan a problémát kezelték.

Az első modellel dolgozók jól válaszolták meg az egyes kérdést (az Excel görbeillesztési programját használták a megoldáshoz). A gyógyszer adagolási sémájuk egy része is helyes volt, de helytelen sémákat is adtak. Az általuk megadott táblázat nem tartalmazta rögzített T esetén a maximális és minimális adagokat, de helyes T értékek esetén az általuk megadott gyógyszeradag a megfelelő minimális és maximális adagok közt helyezkedett el. A kiszámításra irányuló analitikus meghatározást egy ponton feladták és numerikus kísérletezéshez folyamodtak. Így sikerült adott T és D értékekre kiszámolni a koncentrációt kT-re és több olyan értéket kaptak, amelyre az adagolás helyes volt, de nem vették észre a T megengedett felső értékét, így helytelen sémákat is alkottak. A csoport tagjai már félórás ötletgyűjtés után nekifogtak a számításoknak. A három órán át tartó munka alatt egyetlen kérdésük sem volt. A prezentációjuk teljesen világos volt, de sajnos nem tartalmazta a jelenség néhány kulcselemét (a hosszútávú viselkedés periodicitását, a kezdőadag szükséges voltát és annak hatását). A tevékenység során számukra a legnagyobb gondot az jelentette, hogy nem tudták a numerikus technikákat a formális kalkulussal ötvözni, így az eredményekhez csak numerikus módszerekkel próbáltak eljutni.

A második csoport feladata attól volt nehéz, hogy rá kellett volna jönniük, hogy a meglevő adatok nem elégségesek ahhoz, hogy helyes és ellenőrizhető választ adjanak a feltett kérdésekre. Nem jöttek rá arra, hogy a specifikációk és adatok alapján ez a modell nem működtethető. Az egyedüli támpont amivel a megadott adagolást ellenőrizhették volna az elméleti háttér egy mélyebb megértését igényelte. A csapat erre nem jött rá, túl furcsa és váratlan volt számukra az, hogy a specifikációkat (modellt) kell változtatni, ahhoz, hogy a kérdésekre helyes, ellenőrizhető válaszokat adhassanak, holott a matematikai modell mélyebb megértése ezt lehetővé tette volna. Mindez azt mutatja, hogy nem jutottak el e tevékenységük egy metakognitiv szintjére.

A harmadik munkacsoport volt a legsikeresebb. Ők ötvözték a numerikus módszereket az analízis módszereivel. A legnagyobb lehetséges T értéket is megtalálták és numerikus kísérletekkel a minimális és maximális adagokat is. Ez a csoport több kérdést is feltett a tevékenység során. Ahányszor többértelműségekkel találkoztak vagy bizonyos aspektusokban nem volt konszenzus a csoport tagjai közt, kérdéseket fogalmaztak meg az ötleteikkel, problémájukkal kapcsolatban és tanácsot kértek. Úgy gondolom sikerességük ebből a nagyon hatékony munka és együttműködési stílusból származott.

A negyedik csoport úgy időben, mint a válaszok tekintetében a leggyengébbnek bizonyult, annak ellenére, hogy a megoldás koncepciója talán az ő esetükben volt a legjobb, de nem tudták azt kivitelezni és nem fordultak segítségért a hibáik egy részét is észrevették, de nem tudták azt kijavítani.

A tevékenységsorozat sok érdekes tanulsággal zárult számunkra:

1. Mivel diákjaink nem járatosak ilyen megközelítésekben (valós probléma+modellezés+statisztikai adatok+számítógép orientált megtervezés), gyakran képleteket próbáltak alkotni olyan esetekben is, amikor ez nem volt lehetséges. Ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy bizonyos matematikai fogalmakat (pl. függvény, inverz függvény,egyenlet,egy feladat eredménye) újra kell vizsgálnunk és esetleg úgy kiterjesztenünk, hogy ez használható és hasznos legyen ilyen helyzetekben.

   A számítógépek használata a matematikaórák egy részén szükséges és elkerülhetetlen.

A romániai curriculum magába kellene foglalja a modellezést és a számítógépes szimulációt is.

2. A csapatmunka sokat segített a résztvevőknek abban, hogy sok járhatatlan utat elkerültek a megoldás felfedezése közben. A diákok véleménye az volt, hogy biztosan nem mindegyikük tudta volna önállóan, egyedül ugyanazt az eredményt produkálni. Ez megerősíti McCartney (1990) a modellezésre szánt idő növelésének szükségességéről írt cikkének azt a megállapítását, hogy az ilyen tevékenységek nem hatékonyak a diákok felmérésében.
3. A modellezési tevékenység előkészítésekor rájöttünk milyen nehéz olyan tanárokat találni, akik ilyen jellegű tevékenységekben hajlandóak együttműködni. Ez az élmény meggyőzött arról, hogy a tanárképzésben szükség van modellezési és számítógép által támogatott matematika előadásokra, és a tanártovábbképzésben is ezek a témák fontos szerephez kell jussanak.
4. A legfontosabb tanulság az volt, hogy nagyon aggasztó az, hogy egy komplexebb modellezési tevékenység során sok helyzetben a diák vagy tanár nem rendelkezik olyan kritériumokkal, amellyel validálhatná a modellt vagy a számításokat, ami igen komoly következményekkel járhat (képzeljünk el egy rossz gyógyszer adagolási sémát a valós életben.).Éppen ezért ilyen modelekkel csak akkor szabad foglalkozni, ha van elegendő időnk a teljes letárgyalásukra és kijavításukra (mint pl. a kettes csoport feladata esetében), ellenkező esetben csak komoly félreértelmezésekhez vezet. Mivel iskolai keretek közt az idő nagyon szűk (Nagy, 2007),nagyon jól meg kell gondolni milyen modellezési feladatokkal foglalkozunk, de mindenképp úgy kell csinálni, hogy az alkalmazási korlátokat azért a diák láthassa.

A projektben való részvétel különösen felkeltette az érdeklődésemet az iránt, hogy mit lehetne és kellene tenni ezen helyzet javítása érdekében. Dolgozatom tárgyának kiválasztása is ennek következménye.

2. fejezet

A lineáris algebra elemei

2.1. Mátrixok

2.1.1. A mátrix fogalma

A mindennapi életben találkozunk olyan mennyiségekkel, amelyek nem fejezhetők ki egy szám segítségével. Néha szükségünk van egy számsorozatra vagy egy számtáblázatra ezek kifejezéséhez. Hasonló táblázatokkal már az előző osztályokban is találkoztunk. Például a családi költségvetés elkészítése egyszerűbb, ha az értékeket egy táblázatba foglaljuk:

Hónap	Közköltség	Élelem	Ruházat	Egyéb
November	250	700	500	850
December	400	1000	800	1100

Hasonlóan, ha az A, B, C és D városok közti távolságokat szeretnénk felírni vasúton és közúton, a legkényelmesebb a következő táblázatokat használni (a vasúti távolságok az átló alatt, a közúti távolságok az átló fölött vannak):

	A	B	C	D
A	0	120	200	155
B	100	0	80	110
C	190	90	0	160
D	150	100	150	0

A fentieket, ha tudjuk melyik mennyiség mit jelent,az alábbi alakban is írhatjuk egyszerűsített táblázatokként:

$$\begin{pmatrix} 250 & 700 & 500 & 850 \\ 400 & 1000 & 800 & 1100 \end{pmatrix}$$

illetve

$$\begin{pmatrix} 0 & 120 & 200 & 155 \\ 100 & 0 & 80 & 110 \\ 190 & 90 & 0 & 160 \\ 150 & 100 & 150 & 0 \end{pmatrix}$$

Az ilyen típusú táblázatokkal gyakran találkozhatunk. A matematikában ezeket mátrixoknak nevezték el.

2.1.1. Értelmezés. *$m \times n$ -es mátrixnak nevezünk egy n oszlopból és m sorból álló*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

táblázatot.

Az a_{ij} számokat az A mátrix elemeinek nevezzük.

2.1.1. Megjegyzés.

1. *A mátrixok leírására az*

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$$

jelölést is használjuk, ami azt jelenti, hogy a mátrix i-edik sorának j-edik oszlopában az a_{ij} elem áll.

2. *$\mathcal{M}_{m,n}(X)$-el jelöljük azon $m \times n$-es mátrixok halmazát,amelyeknek minden eleme az X halmazból való. Például a valós elemű,m sort és n oszlopot tartalmazó mátrixok halmazát $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$-el jelöljük.*

3. *Ha $m = n$, akkor a mátrixot négyzetes mátrixnak nevezzük. A komplex elemű,$n \times n$-es mátrixok halmazát például $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$-vel jelöljük.*

4. *Ha $m = 1$, akkor a mátrix egyetlen sorból áll. Az ilyen mátrixot sormátrixnak nevezzük. Az egész elemű n oszlopból álló sormátrixok halmazát például $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{Z})$-vel jelöljük.*

5. *Ha $n = 1$, akkor a mátrix egyetlen oszlopból áll és oszlopmátrixnak nevezzük. A racionális elemű m sorból álló oszlopmátrixok halmazát például $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{Q})$-val jelöljük.*

6. *A sormátrixok, illetve oszlopmátrixok tulajdonképpen X^n-beli vektorok.*

7. *Egy $\mathcal{M}_{m,n}(X)$-beli mátrix felfogható egy $f : \{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\} \to \mathbb{R}$ függvényként is.*

Természetesen a mátrixfogalom akkor lesz igazán hasznos számunkra, ha ezekkel a táblázatokkal nemcsak leírni tudok bizonyos mennyiségeket könnyen átlátható formában (hiszen már ez önmagában is segítség), hanem ezek közt bizonyos összefüggéseket tudok teremteni, amelyek hozzásegítenek egyébként nehezen kezelhető problémák gyors és könnyű megoldásához.

Ezért a következőkben vizsgáljunk néhány olyan problémát, amely mátrixok segítségével kezelhető és keressünk olyan eszközöket, amelyek a problémák minél könnyebb és átláthatóbb vizsgálatát illetve megoldását lehetővé teszik.

2.1.2. Mátrix szorzása számmal

Háziasszonyok gyakran szembesülnek az alábbihoz hasonló problémákkal: Két sütemény elkészítéséhez a következő nyersanyagokra van szükségünk: az elsőhöz szükséges cukor, liszt, tojás, eper, vaj, a másodikhoz pedig cukor, liszt, tojás, csokoládé,vaj. Azt, hogy melyik kellékből mennyire van szükség a következő táblázatban foglaltuk össze:

·	cukor	liszt	tojás	eper	csokoládé	vaj
S_1	150g	120g	8 db.	300g	0	100g
S_2	120g	80g	6 db.	0	200g	150g

A táblázatot a következő mátrixként is felfoghatjuk:

$$\begin{pmatrix} 150 & 120 & 8 & 300 & 0 & 100 \\ 120 & 80 & 6 & 0 & 200 & 150 \end{pmatrix}$$

Ha csak féladagot akarunk sütni mindkét süteményből, akkor nyilván minden kellékből a fentiek felét kell beletenni, ha viszont valami nagy családi esemény alkalmából egyszerre három adaggal is készítenénk mindegyikből, akkor minden kellék háromszorosára lesz szükségünk. Ha az ehhez szükséges mennyiségeket újabb táblázatokba foglaljuk, a féladaghoz szükséges mennyiségek táblázata:

·	cukor	liszt	tojás	eper	csokoládé	vaj
S_1	75g	60g	4 db.	150g	0	50g
S_2	60g	40g	3 db.	0	100g	75g

A három adaghoz szükséges kellékek :

·	cukor	liszt	tojás	eper	csokoládé	vaj
S_1	450g	360g	24 db.	900g	0	300g
S_2	360g	240g	18 db.	0	600g	450g

a táblázatokhoz rendelt mátrixok pedig:

$$\begin{pmatrix} 75 & 60 & 4 & 150 & 0 & 50 \\ 60 & 40 & 3 & 0 & 100 & 75 \end{pmatrix}$$

illetve

$$\begin{pmatrix} 450 & 360 & 24 & 900 & 0 & 300 \\ 360 & 240 & 18 & 0 & 600 & 450 \end{pmatrix}$$

A két utolsó mátrixot úgy kapjuk az eredeti kellék mátrixból, hogy első esetben minden elemét $0,5$-tel, a második esetben minden elemét 3-mal szorozzuk.

A továbbiakban ha egy mátrix minden elemét ugyanazzal a számmal szorozzuk, azt mondjuk, hogy a mátrixot szorozzuk az adott számmal. Ezáltal tulajdonképpen egy műveletet értelmeztünk: egy mátrixnak valós (komplex, stb.) számmal való szorzását.

2.1.2. Értelmezés. *Ha* $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*, és* $\alpha \in \mathbb{C}$*, az* $\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ *mátrixot az A mátrix α-val való szorzatának nevezzük.*

Például:

1. $4 \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 & 20 & 9 & 0 \\ 6 & 2 & -8 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 12 & 80 & 36 & 0 \\ 24 & 8 & -32 & 0 & -20 \end{pmatrix}$

2. $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -0 & 3 & 4\sqrt{2} \\ -2i & -8 & 0,5 \\ 7 & 4+2i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0 & 1,5 & 2\sqrt{2} \\ -i & -4 & 0,25 \\ 3,5 & 2+i & 0,5 \end{pmatrix}$

2.1.3. Mátrixok összeadása

Ha zsúfolt, vendégekkel teli hetünk lesz és kétszer is sütni szeretnénk, egyszer két, másodszor pedig három adagot, de a kellékekt egyszerre szeretnénk bevásárolni, nyilván minden kellékből ötször annyit kell vennünk, mint az egy adaghoz szükséges táblázatban található értékek. Ezt kétféleképpen is kiszámíthatjuk: úgy, hogy az $X = 2A$ mátrix megfelelő elemeti összeadjuk az $Y = 3A$ mátrix elemeivel vagy úgy, hogy az A mátrix megfelelő elemeit öttel szorozzuk.

$$X+Y = 2A+3A =$$

$$= \begin{pmatrix} 300 & 240 & 16 & 600 & 0 & 200 \\ 1240 & 160 & 12 & 0 & 400 & 300 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 450 & 360 & 24 & 900 & 0 & 300 \\ 360 & 240 & 18 & 0 & 600 & 450 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 750 & 600 & 40 & 1500 & 0 & 500 \\ 600 & 400 & 30 & 0 & 1000 & 750 \end{pmatrix} = 5A$$

A továbbiakban, ha két ugyanolyan típusú mátrix megfelelő elemeit összeadjuk egymással, azt mondjuk, hogy a két mátrixot összeadtuk. Ezzel az ugyanolyan típusú mátrixok halmazában egy újabb műveletet értelmeztünk: a mátrixok összeadását.

2.1.3. Értelmezés. *Ha* $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), A = (a_{i,j})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ *és* $B = (b_{i,j})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ *akkor*

$$A + B = (c_{i,j})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}},\ \textit{ahol}\ c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}\ \forall i = \overline{1,m},\ \forall j = \overline{1,n}$$

Példák:

1. $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ i & 2 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -5 \\ -3+i & 2 \\ 0 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 7 & 8 & -9 \\ 3i & \sqrt{3} & 0,(3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -9 \\ 3i & \sqrt{3} & 0,(3) \end{pmatrix}$

Vizsgáljuk meg a mátrix összeadás tulajdonságait

Tekintsük a következő helyzetet:

1. Az X és Y mátrixban található kellékeket nem egyszerre szeretnénk megvásárolni. Ugyanannyit vásárolunk-e, ha egyszer az X, aztán az Y-ban leírt mennyiségeket vesszük meg, mint ha előbb az Y azután az X-ben leírt kellékeket vásároljuk?

   Az első esetben: $X + Y = \begin{pmatrix} 750 & 600 & 40 & 1500 & 0 & 500 \\ 600 & 400 & 30 & 0 & 1000 & 750 \end{pmatrix} = 5A$

   A második esetben: $Y + X =$

   $$= \begin{pmatrix} 450 & 360 & 24 & 900 & 0 & 300 \\ 360 & 240 & 18 & 0 & 600 & 450 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 300 & 240 & 16 & 600 & 0 & 200 \\ 1240 & 160 & 12 & 0 & 400 & 300 \end{pmatrix} =$$

   $$= \begin{pmatrix} 750 & 600 & 40 & 1500 & 0 & 500 \\ 600 & 400 & 30 & 0 & 1000 & 750 \end{pmatrix}$$

   A feltett kérdésre a válasz nyilvánvalóan igen, sőt, ha tetszőleges X és Y mátrixokat tekintünk, akkor is

   $$X + Y = (x_{ij} + y_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = (y_{ij} + x_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = Y + X$$

   mivel a komplex számok összeadása kommutatív, így látható, hogy a mátrix összeadás kommutatív művelet.

2. Ha a héten háromszor is sütünk: két, három illetve négy adagot (az ezekhez való kellékeket az X,Y és Z mátrixokkal írjuk le), ugyanannyit vásárolunk-e, ha egyszer az X azután pedig egyszerre az Y és Z-ben leírt mennyiségeket vásároljuk meg, mintha először az X és Y mátrixokban leírt mennyiségeket, azután pedig a Z-ben leírt kellékeket vásároljuk meg?

   Az első esetben: $X + (Y + Z) =$

   $$= \begin{pmatrix} 300 & 240 & 16 & 600 & 0 & 200 \\ 240 & 160 & 12 & 0 & 400 & 300 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1050 & 840 & 56 & 2100 & 0 & 700 \\ 840 & 560 & 42 & 0 & 1400 & 1050 \end{pmatrix} =$$

   $$= \begin{pmatrix} 1350 & 1080 & 72 & 2700 & 0 & 900 \\ 1080 & 720 & 54 & 0 & 1800 & 1350 \end{pmatrix}$$

   A második esetben: $(X + Y) + Z =$

   $$= \begin{pmatrix} 750 & 600 & 40 & 1500 & 0 & 500 \\ 600 & 400 & 30 & 0 & 1000 & 750 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 600 & 480 & 32 & 1200 & 0 & 400 \\ 480 & 320 & 24 & 0 & 800 & 600 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1350 & 1080 & 72 & 2700 & 0 & 900 \\ 1080 & 720 & 54 & 0 & 1800 & 1350 \end{pmatrix}$$

Akárcsak a kommutativitás esetében, a feltett kérdésre a válasz nemcsak ebben a sajátos esetben igaz, hanem tetszőleges X,Y,Z azonos típusú mátrixok esetében:

$$X + (Y + Z) = (x_{ij} + (y_{ij} + z_{ij}))_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = ((x_{ij} + y_{ij}) + z_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = (X + Y) + Z,$$

mivel a komplex számok összeadása asszociatív, tehát a mátrixok összeadása asszociatív művelet.

3. Ugyanakkor nyilvánvalóan $X + O_{m,n} = (x_{ij} + 0)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = (x_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = X$, ahol $O_{m,n}$ a nullmátrix.

4. Ha $A' = (-a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ akkor $A + A' = (a_{ij} + (-a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = O_{m,n}$

   Az A' mátrixot az A ellentettjének nevezzük és $-A$-val jelöljük.

5. Ha a héten kétszer sütünk három-három adagot a tortából nyilván ugyanannyi kellékre van szükségünk, mintha háromszor sütünk két-két adagot illetve mint ha egyszer sütünk hat adagot.

Valóban $2{\cdot}(3A) = 2{\cdot}\begin{pmatrix} 450 & 360 & 24 & 900 & 0 & 300 \\ 360 & 240 & 18 & 0 & 600 & 450 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 900 & 720 & 48 & 1800 & 0 & 600 \\ 720 & 480 & 36 & 0 & 1200 & 900 \end{pmatrix}$$

$$3{\cdot}(2A) = 3{\cdot}\begin{pmatrix} 300 & 240 & 16 & 600 & 0 & 200 \\ 240 & 160 & 12 & 0 & 400 & 300 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 900 & 720 & 48 & 1800 & 0 & 600 \\ 720 & 480 & 36 & 0 & 1200 & 900 \end{pmatrix}$$

$$6A = \begin{pmatrix} 900 & 720 & 48 & 1800 & 0 & 600 \\ 720 & 480 & 36 & 0 & 1200 & 900 \end{pmatrix}$$

A tulajdonság tetszőleges α, β számok és tetszőleges A mátrix esetén is igaz

$$\alpha(\beta A) = \alpha(\beta a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = (\alpha(\beta a_{ij}))_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = ((\alpha\beta) a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = (\alpha\beta)A$$

$$\beta(\alpha A) = \beta(\alpha a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = (\beta(\alpha a_{ij}))_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = ((\beta\alpha) a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = (\beta\alpha)A$$

6. Ha a héten kétszer sütünk: egyszer két, egyszer három adagot, ugyanannyi kellékre van szükségünk, mintha egyszer sütnénk öt adagot.

   $2A + 3A =$

$$= \begin{pmatrix} 300 & 240 & 16 & 600 & 0 & 200 \\ 1240 & 160 & 12 & 0 & 400 & 300 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 450 & 360 & 24 & 900 & 0 & 300 \\ 360 & 240 & 18 & 0 & 600 & 450 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 750 & 600 & 40 & 1500 & 0 & 500 \\ 600 & 400 & 30 & 0 & 1000 & 750 \end{pmatrix} = 5A$$

   Tetszőleges α, β számok és tetszőleges A mátrix esetén is

$$\alpha A + \beta A = (\alpha a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} + (\beta a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = (\alpha a_{ij} + \beta a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = ((\alpha+\beta) a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = (\alpha+\beta)A$$

7. Ha tíz héten át minden kedden és minden csütörtökön sütünk két illetve három adagot a tortákból, ugyanannyi kellékre van szükségünk, mintha tíz hétig sütnénk heti két adagot, majd újabb 10 hétig heti három adagot. Valóban ha X illetve Y-al jelöljük a 2 illetve 3 adaghoz szükséges kellékeket

$$10(X+Y) = 10(2A+3A) = 10 \cdot \begin{pmatrix} 750 & 600 & 40 & 1500 & 0 & 500 \\ 600 & 400 & 30 & 0 & 1000 & 750 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7500 & 6000 & 400 & 15000 & 0 & 5000 \\ 6000 & 4000 & 300 & 0 & 10000 & 7500 \end{pmatrix}$$

   és

$$10X + 10Y = \begin{pmatrix} 3000 & 2400 & 160 & 6000 & 0 & 2000 \\ 12400 & 1600 & 120 & 0 & 4000 & 3000 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 4500 & 3600 & 240 & 9000 & 0 & 3000 \\ 3600 & 2400 & 180 & 0 & 6000 & 4500 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7500 & 6000 & 400 & 15000 & 0 & 5000 \\ 6000 & 4000 & 300 & 0 & 10000 & 7500 \end{pmatrix}$$

   Tetszőleges α, β számok esetén és tetszőleges A mátrixra is

$$\alpha(A+B) = [\alpha(a_{ij} + b_{ij})]_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = (\alpha a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} + (\alpha b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = \alpha A + \alpha B$$

2.1.4. Mátrixok szorzása

Amikor a tortához szükséges termékeket bevásároljuk, az ár szempontjából nem mindegy, hogy hol tesszük ezt meg. Két különböző boltban az árak a következőek:

- az A boltban 1 kg cukor 3 lej, 1 kg liszt $2,5$ lej, 1 tojás $0,3$ lej, 1 kg eper 7 lej, 1 kg csokoládé 20 lej, 1 vaj $4,5$ lej
- a B boltban 1 kg cukor $2,8$ lej, 1 kg liszt 3 lej, 1 tojás $0,4$ lej, 1 kg eper 6 lej, 1 kg csokoládé 25 lej, 1 vaj $4,2$ lej

A fenti adatokat a következő táblázatban foglalhatjuk össze:

	Cukor	Liszt	Tojás	Eper	Csokoládé	Vaj
Az A boltban az ár (lej/kg vagy db)	3	$2,5$	$0,3$	7	20	$4,5$
A B boltban az ár (lej/kg vagy db)	$2,8$	3	$0,4$	6	25	$4,2$

Ahhoz, hogy eldönthessük, hogy melyik boltban érdemesebb vásárolni, kiszámítjuk az első torta illetve a második torta hozzávalóinak árát az A illetve B boltokban.

- Az első torta kellékeinek ára az A boltban:
  $$p_{11} = 0,15 \cdot 3 + 0,12 \cdot 2,5 + 8 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 7 + 0,5 \cdot 4,5 = 7,5$$
- Az első torta kellékeinek ára a B boltban:
  $$p_{12} = 0,15 \cdot 2,8 + 0,12 \cdot 3 + 8 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 6 + 0,5 \cdot 4,2 = 8,03$$
- A második torta kellékeinek ára az A boltban:
  $$p_{21} = 0,12 \cdot 3 + 0,08 \cdot 2,5 + 6 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 20 + 0,75 \cdot 4,5 = 9,75$$
- A második torta kellékeinek ára az B boltban:
  $$p_{22} = 0,12 \cdot 2,8 + 0,08 \cdot 3 + 6 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 25 + 0,75 \cdot 4,2 = 11,126$$

Látható, hogy mindkét torta olcsóbb lesz, ha az A boltban vásárolunk. Vizsgáljuk meg, hogyan is számoltuk ki ezeket az árakat.

A kellékek mátrixa a következő $A = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,12 & 8 & 0,3 & 0 & 0,5 \\ 0,12 & 0,08 & 6 & 0 & 0,2 & 0,75 \end{pmatrix}$.

Az árak mátrixa a következő $B = \begin{pmatrix} 3 & 2,8 \\ 2,5 & 3 \\ 0,3 & 0,4 \\ 7 & 6 \\ 20 & 25 \\ 4,5 & 4,2 \end{pmatrix}$.

Megfigyelhetjük, hogy a p_{11}-et úgy kapjuk, hogy az A mátrix első sorának elemeit megszorozzuk a B mátrix első oszlopának megfelelő elemeivel (a sor első elemét az oszlop első elemével stb.). A p_{12}-t hasonlóan képezzük, úgy, hogy az első sor elemeit a második oszlop elemeivel szorozzuk. Ezeket a műveleteket nyilván csak akkor tudjuk ilyen módon elvégezni, ha az A oszlopainak száma megegyezik a B sorainak számával. A kapott p értékeket egy újabb mátrixszal írhatjuk le: $p = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$. Ez a mátrix lesz az A és B mátrixok szorzata.

2.1.4. Értelmezés. *Az* $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ *és* $B = (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ *mátrixok szorzata az* $A \cdot B = (c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$*, ahol* $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

Példák:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 5 \cdot 4 & 2 \cdot (-2) + 5 \cdot 9 \\ -1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 & -1 \cdot (-2) + 3 \cdot (-9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 43 \\ 11 & -25 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-4) + (-2) \cdot 0 \\ 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + (-4) \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) + (-4) \cdot 0 \\ 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-4) + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ -17 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -9 & 4 \\ -4 & 0 & -8 \\ 2 & -15 & 4 \end{pmatrix}$

Vizsgáljuk meg a mátrixok szorzásának tulajdonságait:

1. Ha elvégezzük a $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ illetve az $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ szorzásokat, azonnal láthatjuk, hogy az első esetben az eredmény $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ a második esetben pedig $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, tehát a mátrixok szorzása nem kommutatív művelet.

   Nem négyzetes mátrixok esetén az $A \cdot B$ és $B \cdot A$ műveletek csak akkor elvégezhetőek, ha $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ és $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ és ekkor $A \cdot B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ és $B \cdot A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, tehát nyilvánvalóan $A \cdot B \neq B \cdot A$.

2. Ha 10 adag tortára való kelléket vásárolunk bármelyik boltból ugyanannyit fizetünk, mint ha 10-szer egymásután vásárolnánk egy adagra valót ugyanazokból a boltokból,

illetve akkor is ugyanannyit fizetnénk, ha egy adagra való kelléket vásárolnánk tízszeres áron.

$$(10A)B = \begin{pmatrix} 1,5 & 1,2 & 80 & 3 & 0 & 5 \\ 1,2 & 0,8 & 60 & 0 & 2 & 7,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2,8 \\ 2,5 & 3 \\ 0,3 & 0,4 \\ 7 & 6 \\ 20 & 25 \\ 4,5 & 4,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 & 80,3 \\ 97,35 & 111,26 \end{pmatrix}$$

$$10(AB) = 10 \begin{pmatrix} 7,5 & 8,03 \\ 9,735 & 11,126 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 & 80,3 \\ 97,35 & 111,26 \end{pmatrix}$$

$$A(10B) = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,12 & 8 & 0,3 & 0 & 0,5 \\ 0,12 & 0,08 & 6 & 0 & 0,2 & 0,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 & 28 \\ 25 & 30 \\ 3 & 4 \\ 70 & 60 \\ 200 & 250 \\ 45 & 42 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 75 & 80,3 \\ 97,35 & 111,26 \end{pmatrix}$$

A tulajdonság tetszőleges α számra és tetszőleges A, B mátrixokra igaz, ha $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ és $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$: $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$

Valóban

- $(\alpha A)B = (\alpha a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} (b_{jk})_{\substack{j=\overline{1,n} \\ k=\overline{1,p}}} = (c_{ik})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ k=\overline{1,p}}}$ és $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} (\alpha a_{ij}) b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} \alpha a_{ij} b_{jk}$
- $\alpha(AB) = (\alpha d_{ik})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ k=\overline{1,p}}}$, ahol $d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \;\Rightarrow\; \alpha d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \alpha a_{ij} b_{jk}$
- $A(\alpha B) = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} (\alpha b_{jk})_{\substack{j=\overline{1,n} \\ k=\overline{1,p}}} = (e_{ik})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ k=\overline{1,p}}}$,

  ahol $e_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\alpha b_{jk}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha a_{ij} b_{jk}$

3. Ha egy illetve három adag tortára való kelléket akarunk megvásárolni bármelyik boltból, ez ugyanannyiba kerül, ha egyszerre vásároljuk meg őket, mint ha rendre vennénk meg a kellékeket, előbb az egy adag, utána a három adagra valót ugyanabból a boltból. Ha A illetve C-vel jelöljük a kellékek mátrixát, B-vel az árakét, akkor:

$$(A+C)B = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,48 & 32 & 1,2 & 0 & 2 \\ 0,48 & 0,32 & 24 & 0 & 0,8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2,8 \\ 2,5 & 3 \\ 0,3 & 0,4 \\ 7 & 6 \\ 20 & 25 \\ 4,5 & 4,2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 30 & 32,12 \\ 38,94 & 44,504 \end{pmatrix}$$

$$AB + CB = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,12 & 8 & 0,3 & 0 & 0,5 \\ 0,12 & 0,08 & 6 & 0 & 0,2 & 0,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2,8 \\ 2,5 & 3 \\ 0,3 & 0,4 \\ 7 & 6 \\ 20 & 25 \\ 4,5 & 4,2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0,45 & 0,36 & 24 & 0,9 & 0 & 1,5 \\ 0,36 & 0,24 & 6 & 0 & 0,6 & 2,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2,8 \\ 2,5 & 3 \\ 0,3 & 0,4 \\ 7 & 6 \\ 20 & 25 \\ 4,5 & 4,2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7,5 & 8,03 \\ 9,735 & 11,126 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 22,5 & 24,09 \\ 29,205 & 33,378 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 30 & 32,12 \\ 38,94 & 44,504 \end{pmatrix}$$

A tulajdonság tetszőleges $A, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}),\ B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ mátrixokra fennáll, azaz $(A + C)B = AB + CB$

Valóban $(A + C)B = (a_{ij} + c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} (b_{jk})_{\substack{j=\overline{1,n} \\ k=\overline{1,p}}} = (d_{ik})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ k=\overline{1,p}}}$

$$\text{ahol } d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + c_{ij}) b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} b_{jk} + c_{ij} b_{jk})$$

Ugyanakkor $AB + CB = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} (b_{jk})_{\substack{j=\overline{1,n} \\ k=\overline{1,p}}} + (c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} (b_{jk})_{\substack{j=\overline{1,n} \\ k=\overline{1,p}}} =$

$$= (e_{ik})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ k=\overline{1,p}}} + (f_{ik})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ k=\overline{1,p}}} = (e_{ik} + f_{ik})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ k=\overline{1,p}}}$$

$$\text{ahol } e_{ik} + f_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} + c_{ij} b_{jk}$$

Hasonlóan igazolható, hogy $A(C + B) = AC + AB$, ha $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ és $B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$,tehát a mátrixok szorzása disztributív az összeadásra nézve.

4. Vizsgáljuk meg, hogy a mátrixok szorzása asszociatív művelet-e.

   Ha az elmúlt hónapban egy-egy adag tortát sütöttünk az egyik boltból vásárolt kellékekből, illetve a másik boltból vásárolt kellékekből is, ennek költségeit kétféleképpen számíthatjuk ki.

   Ha A-val jelöljük a kellékek mátrixát, B-vel az árak mátrixát és C-vel a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mátrixot, az összköltségek mátrixát kiszámíthatjuk a következő módokon:

a) $(AB)C = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} + p_{12} \\ p_{21} + p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15,53 \\ 20,861 \end{pmatrix}$
ahol az AB mátrix első sorában levő elemek az első illetve a második torta kellékeinek árát tartalmazzák.

b) $$A(BC) = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,12 & 8 & 0,3 & 0 & 0,5 \\ 0,12 & 0,08 & 6 & 0 & 0,2 & 0,75 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 3 & 2,8 \\ 2,5 & 3 \\ 0,3 & 0,4 \\ 7 & 6 \\ 20 & 25 \\ 4,5 & 4,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,15 & 0,12 & 8 & 0,3 & 0 & 0,5 \\ 0,12 & 0,08 & 6 & 0 & 0,2 & 0,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5,8 \\ 5,5 \\ 0,7 \\ 13 \\ 45 \\ 8,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15,53 \\ 20,861 \end{pmatrix}$$

Itt a BC mátrix elemei a megfelelő kellékek egységárai a két boltban összesen, így az $A(BC)$ szorzat szintén az összköltség mátrixát adja.

A tulajdonság tetszőleges $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ mátrixok esetén igaz: $(AB)C = A(BC)$

Tehát a mátrix szorzás asszociatív művelet.

Ha $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, akkor $AB = D \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{C})$ úgy, hogy $d_{ik} = \sum\limits_{l=1}^{n} a_{il} b_{lk}$.

Ekkor $(AB)C = DC = E \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{C})$, $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{p} d_{ik} c_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{p} \left(\sum\limits_{l=1}^{n} a_{ik} b_{lk} \right) c_{kj} =$

$= \sum\limits_{k=1}^{p} \sum\limits_{l=1}^{n} a_{il} b_{lk} c_{kj}$

Ugyanakkor $BC = T \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{C})$, ahol $f_{lj} = \sum\limits_{k=1}^{p} b_{lk} c_{kj}$

$A(BC) = AF = G \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{C})$, ahol $g_{ij} = \sum\limits_{l=1}^{n} a_{il} f_{lj} = \sum\limits_{l=1}^{n} a_{il} \sum\limits_{k=1}^{p} b_{lk} c_{kj} =$

$= \sum\limits_{l=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{p} a_{il} b_{lk} c_{kj}$

Az $(AB)C = A(BC)$ egyenlőség igazolásához, már csak azt kell belátnunk, hogy $\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij}$ $\forall x_{ij} \in \mathbb{C}$ esetén, azaz azt, hogy egy $\sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ji}$ összegben az összegezési sorrend felcserélhető.

2.1.1. Lemma. *Ha* $x_{ij} \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1,m}$ *és* $j = \overline{1,n}$, *akkor* $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$

Bizonyítás: Legyen $X = (x_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$

A $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ az i-edik sorban szereplő elemek összege így a $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ összeg az X mátrix sorösszegeinek összege, ami nem más mint a mátrix összes elemének összege. Hasonlóan a $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$ a j-edik oszlopban szereplő elemek összege és az $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$ összeg az X mátrix oszlopösszegeinek összege ami szintén a mátrix összes elemének összege. Tehát a két összeg egymással egyenlő.

□

5. Ha tekintjük az $n \times n$-es négyzetes mátrixok $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ halmazát, keressünk ebben a halmazban egy olyan I_n mátrixot, amelyre $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$, $\forall A \in \mathcal{M}_n\mathbb{C}$ esetén.

   Ez azt jelenti, hogy

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & ... & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & ... & e_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ e_{n1} & e_{n2} & ... & e_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

   és

$$\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & ... & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & ... & e_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ e_{n1} & e_{n2} & ... & e_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

   $\forall a_{ij} \in \mathbb{C}$ esetén, azaz

$$\begin{cases} a_{11}e_{11} + a_{12}e_{21} + ... + a_{1n}e_{n1} & = & a_{11} \\ a_{11}e_{12} + a_{12}e_{22} + ... + a_{1n}e_{n2} & = & a_{12} \\ a_{11}e_{13} + a_{12}e_{23} + ... + a_{1n}e_{n3} & = & a_{13} \\ ... & & \\ a_{n1}e_{1n} + a_{n2}e_{2n} + ... + a_{nn}e_{nn} & = & a_{nn} \end{cases}$$

   Látszik, hogy minden egyenlőség teljesül, ha

   - $e_{ii} = 1,\ \forall i = \overline{1,n}$
   - $e_{ij} = 0,\ \forall i \neq j,\ i,j = \overline{1,n}$

$$\text{Tehát az } I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

$$\text{ahol } \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{, ha} \quad i = j \\ 0 & \text{, ha} \quad i \neq j \end{cases}$$

mátrix esetén igaz, hogy $AI_n = I_nA = A,\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

2.1.5. Értelmezés. *Az* $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *mátrixot egységmátrixnak nevezzük.*

6. Végezzük el az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

illetve a $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

szorzásokat. Észrevesszük, hogy a szorzat mátrixok I_2-vel egyenlőek a 2×2-es mátrixok szorzása esetén és I_3-al a 3×3-as mátrixok esetében. Tehát léteznek olyan mátrixok, amelyek szorzata a szorzótényezők sorrendjétől függetlenül az egységmátrixot eredményezik. Ezek a mátrixok egymás inverzei.

2.1.6. Értelmezés. *Az* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *mátrixot invertálhatónak nevezzük, ha létezik olyan* $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *mátrix, amelyre* $AA' = A'A = I_n$. *Az* A' *mátrixot az* A *mátrix inverzének nevezzük és* A^{-1}*-el jelöljük.*

Vizsgáljuk meg, hogy a mátrix inverze, ha létezik egyértelműen meghatározott-e. Ennek érdekében tekintsünk egy A invertálható mátrixot. Lehet-e ennek két egymástól különböző A' és A'' inverze?

Mivel A' és A'' inverzei az A-nak: $AA' = A'A = I_n$ és $AA'' = A''A = I_n$. Akkor $A'' = A''I_n = A''(AA') = (A''A)A' = I_nA' = A'$. Tehát ha A' és A'' inverzei az A mátrixnak, akkor egymással egyenlőek. Ezért, ha A invertálható, az inverze egyértelműen meghatározott.

2.1.7. Értelmezés. *Ha* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *értelmezhetjük az* A *mátrix hatványait induktív módon:* $A^0 = I_n,\ A^1 = A$ *és* $A^{n+1} = A^nA,\ \forall n \geq 1$ *esetén.*

Tehát $A^2 = AA,\ A^3 = A^2A = (AA)A = AAA,\ A^4 = A^3A = (AAA)A = AAAA$ és általában $A^n = \underbrace{AA...A}_{n \text{ darab}}$

A szorzás asszociativitása alapján nyilvánvalóak a következő tulajdonságok:

- $A^m A^p = A^{m+p},\ \forall m, p \in \mathbb{N},\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
- $(A^m)^p = A^{mp},\ \forall m, p \in \mathbb{N},\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
- $(\lambda A)^m = \lambda^m A^m,\ \forall \in \mathbb{N}^*,\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$

Összefoglalva a fejezetben bizonyított tulajdonságokat:

2.1.1. Tétel. *A mátrixokkal végzett műveletek tulajdonságai:*

1. $A + B = B + A,$ $\qquad \forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$
2. $(A + B) + C = A + (B + C),$ $\qquad \forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$
3. $A + O_{m,n} = O_{m,n} + A = A,$ $\qquad \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$
4. $A + (-A) = (-A) + A = O_{m,n},$ $\qquad \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$
5. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A,$ $\qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$
6. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B,$ $\qquad \forall \alpha \in \mathbb{C},\ \forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$
7. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta B,$ $\qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$
8. $1 \cdot A = A,$ $\qquad \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$
9. $(-1) \cdot A = -A,$ $\qquad \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$
10. $0 \cdot A = O_{m,n},$ $\qquad \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$
11. $\alpha \cdot O_{m,n} = O_{m,n},$ $\qquad \forall \alpha \in \mathbb{C}$
12. $A \cdot O_{n,p} = O_{m,p};\ O_{p,m} A = O_{p,n},$ $\qquad \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$
13. $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B),$ $\qquad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), \forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$
14. $A(BC) = (AB)C,$ $\qquad \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}),$
    $\forall C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$
15. $A(B + C) = AB + AC,$ $\qquad \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}),\ \forall B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$
16. $(B + C)A = BA + CA,$ $\qquad \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}),\ \forall B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$
17. $AI_n = I_n A = A,$ $\qquad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
18. $A^m A^p = A^{m+p},$ $\qquad \forall m, p \in \mathbb{N},\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
19. $(A^m)^p = A^{mp},$ $\qquad \forall m, p \in \mathbb{N},\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
20. $(\lambda A)^m = \lambda^m A^m,$ $\qquad \forall m \in \mathbb{N}^*,\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$

2.1.2. Megjegyzés. *Mivel a mátrixokkal végzett műveletek a szorzás kommutativitásától eltekintve ugyanazokkal a tulajdonságokkal rendelkeznek, mint a valós számokkal végzett műveletek, ha két mátrix szorzata felcserélhető, akkor igazak a komplex számok esetén fennálló rövidített számítási képletek.*

2.1.2. Tétel. *Ha* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *és* $AB = BA$, *akkor*

- $A^k - B^k = (A - B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + ... + AB^{k-2} + B^{k-1})$
- $A^{2k+1} + B^{2k+1} = (A + B)(A^{2k} - A^{2k-1}B + ... - AB^{2k-1} + B^{2k})$
- $(A + B)^k = A^k + C_k^1 A^{k-1}B + C_k^2 A^{k-2}B^2 + ... + C_k^{k-1} AB^{k-1} + B^k$

bármely $k \in \mathbb{N},\ k \geq 1$ *esetén.*

Tekintsünk néhány olyan probléma szituációt, amely mátrixműveletekre vezet.

- **[1.] alkalmazás**

  Három víztisztító állomás három forrásból kapja a vizet: a K kútból, a T tóból és az F folyóból. Ha A_1, A_2, A_3 a három állomást jelöli, és a források által szolgáltatott vízmennyiségek eloszlása:

  - K: $\frac{1}{3}$ az A_1-nek, $\frac{1}{3}$ az A_2-nek, $\frac{1}{3}$ az A_3-nak
  - T: $\frac{1}{2}$ az A_1-nek, $\frac{1}{4}$ az A_2-nek, $\frac{1}{4}$ az A_3-nak
  - F: 0 az A_1-nek, $\frac{1}{2}$ az A_2-nek, $\frac{1}{2}$ az A_3-nak

  számítsuk ki a három állomás által kapott vízmennyiséget, ha x,y illetve z a három (K, T, F) vízforrás által szolgáltatott mennyiség.

  Megoldás:

  Az első állomás hozama $h_1 = x\frac{1}{3} + y\frac{1}{2} + z \cdot 0$.

  Az második állomás hozama $h_2 = x\frac{1}{3} + y\frac{1}{4} + z\frac{1}{2}$.

  Az harmadik állomás hozama $h_3 = x\frac{1}{3} + y\frac{1}{4} + z\frac{1}{4}$, mivel minden állomás ugyanannyiad részt szolgáltat a második állomásnak, mint a harmadiknak.

  Ha az adatokat mátrixokban ábrázoljuk a következőképpen: egy X mátrix első oszlopába az első forrás (K) eloszlási arányait, a második oszlopába a második forrás (T) eloszlási arányait, az utolsó oszlopba a harmadik forrás (F) eloszlási arányait, úgy, hogy egy sorban szereplő arányok azonos állomásnak feleljenek meg.

  Az X mátrix: $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

v-vel jelöljük a $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ oszlopmátrixot, melynek elemei a források hozamai.

h-val jelöljük a $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$ oszlopmátrixot, melynek elemei az állomások hozamai.

Ekkor $h = Xv$, mivel

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\frac{1}{3} + y\frac{1}{2} + z \cdot 0 \\ x\frac{1}{3} + y\frac{1}{4} + z\frac{1}{2} \\ x\frac{1}{3} + y\frac{1}{4} + z\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Xv$$

2.1.3. Megjegyzés. *Az X mátrixot a problémához rendelt átmeneti mátrixnak nevezzük. Ha egy mátrix elemei nem negatívak és minden oszlopában az elemek összege 1, akkor ezt stochasztikus mátrixnak nevezzük.* □

- [2.] **alkalmazás** (munkaerő modell)

Egy társadalomban egy munkaképes egyén egy adott t időpillanatban a következő három állapot valamelyikében lehet:

- s_1 -a saját szakterületén dolgozik
- s_2 -más szakterületen dolgozik
- s_3 -nem dolgozik

Jelöljük p_{ij}-vel azon egyének részarányát, akik a $[t, t+\Delta t]$ időintervallum alatt az s_i állapotból az s_j állapotba kerülnek és $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$-el a három állapotban levő egyének számát a $t + n\Delta t$ időpillanatban.

a) Határozzuk meg az x_n, y_n, z_n számokat az x_0, y_0, z_0 és a $P = (p_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$ mátrix függvényében.

b) Ha $P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$,határozzuk meg egy egyensúlyi állapot adatait (egy olyan helyzetet, amelyben a három állapotban levő egyének száma állandó).

c) Igazoljuk, hogy ha $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ az egyének száma az egyensúlyi állapotban, akkor $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$, $\lim_{n\to\infty} y_n = \overline{y}$ és $\lim_{n\to\infty} z_n = \overline{z}$

Megoldás:

a) A $t+(n+1)\Delta t$ időpillanatban az s_i állapotban levők az s_1, s_2 és s_3 állapotból származnak, méghozzá $p_{1i}x_n$ az s_1-ből, $p_{2i}x_n$ az s_2-ből és $p_{3i}x_n$ az s_3-ból.
A következő rekurziós összefüggéseket írhatjuk fel:

$$\begin{cases} x_{n+1} &= p_{11}x_n + p_{21}y_n + p_{31}z_n \\ y_{n+1} &= p_{12}x_n + p_{22}y_n + p_{32}z_n \\ z_{n+1} &= p_{13}x_n + p_{23}y_n + p_{33}z_n \end{cases}$$

ami mátrix egyenlőség alakjában: $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, ahol
$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$, P^t pedig a P mátrix transzponáltja, amit úgy kapunk a P mátrixból, hogy a sorait felcseréljük az oszlopaival.
Ebből az egyenlőségből

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = (P^t)^2 \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \\ z_{n-2} \end{pmatrix} = \ldots = (P^t)^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad \forall n \geq 1$$

Tehát a társadalmi struktúra alakulása egy mátrix hatványának kiszámításával modellezhető.

b) Ha $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix}$ egy egyensúlyállapot, akkor $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix}$, tehát

$$\begin{cases} \overline{x} &= 0,7\overline{x} + 0,1\overline{y} + 0,1\overline{z} \\ \overline{y} &= 0,2\overline{x} + 0,6\overline{y} + 0,1\overline{z} \\ \overline{z} &= 0,1\overline{x} + 0,3\overline{y} + 0,8\overline{z} \end{cases}$$

ugyanakkor $\overline{x}+\overline{y}+\overline{z} = N$, ahol N a populáció összlétszáma.
A rendszer megoldásai: $\overline{x} = 0,25N$, $\overline{y} = 0,25N$ és $\overline{z} = 0,5N$.
Tehát az az állapot, amelyben a populáció negyede saját szakterületén, negyede más szakterületen dolgozik és fele nem dolgozik, az adott mátrixnak megfelelő egyensúlyi állapot.

c) Tudjuk, hogy $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} (P^t)^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. A P^t mátrix hatványait számolva, egymás utáni négyzetre emelésekkel azt kapjuk, hogy $(P^t)^32 =$ $\begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 \end{pmatrix}$ Ez a **b)** pont alapján pont az egyensúlyi állapot beálltát jelenti, tehát ettől az indextől kezdve az $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$, $(z_n)_{n\geq 1}$ állandók.

$\square$

- [3.] **alkalmazás** (biomatematikai modell)

  A modell leírása érdekében igazoljuk, hogy bármely $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mátrix esetén igaz az $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = O_2$ egyenlőség.

  Valóban $A^2 = AA = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix}$ és így

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (a+d)a & (a+d)b \\ (a+d)c & (a+d)d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$$

2.1.4. Megjegyzés. *Ha* $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$*, akkor a főátlón levő elemek* $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ *összegét a mátrix nyomának nevezzük és* $Tr\,A$*-val jelöljük. Az* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *mátrixhoz rendelt* $ad-bc$ *szám az* A *mátrix determinánsa és* $\det A$*-val jelöljük. Így a fenti összefüggés a következő alakban is írható:*

$$A^2 - (\,Tr\,A) + |\det A| I_2 = O_2$$

A tétel segítségével bármely $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mátrix hatványai kiszámíthatóak.
Mivel $A^2 = (a+d)A^{n+1} - (ad-bc)A^n$, $\forall n \geq 1$ esetén $A^{n+2} = (a+d)A^{n+1} - (ad-bc)A^n$.
Tehát, ha $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, $\forall n \geq 1$ esetén, akkor

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} & b_{n+2} \\ c_{n+2} & d_{n+2} \end{pmatrix} = (a+d) \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} - (ad-bc) \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

Így az $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, $(c_n)_{n\geq 1}$, $(d_n)_{n\geq 1}$ sorozatok ugyanazt az

$$x_{n+2} = (a+d)x_{n+1} - (ad-bc)x_n$$

rekurziót teljesítik, csak a kezdőértékek mások, így a mátrix elemeinek meghatározása egy másodrendű lineáris rekurzió megoldására vezethető vissza.

Tekintsünk két állatfajt, melyek egyedei kölcsönösen vadásszák egymást (például a hiénák és oroszlánok az afrikai szaharában). Ha x_n és y_n jelöli a két faj egyedeinek számát n év után, akkor modellezzük a következő két jelenséget:

a) Az új egyedek születése és más egyedek eltűnése a faj összlétszámának p százalékos változásához vezet, p lehet negatív is, ha az elhalálozási arány nagyobb a születési aránynál. Vizsgáljuk azt a helyzetet, amikor ez az arány 10% a hiénák esetében és −10% az oroszlánok esetében.

b) Az egyik faj a zsákmányokkal egyensen arányos számú egyedet öl meg a másik fajból. Legyen ez az arány 15% az oroszlánok által megölt hiénák esetében és 10% a hiénák által megölt oroszlánok esetében.

A faj egyedszámának alakulását a következő rekurzióval írhatjuk le:

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 1,1x_n - 0,15y_n \\ y_{n+1} &= 0,9y_n - 0,2x_n \end{cases}$$

Ezek az egyenlőségek mátrix egyenlőség alakjában:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & -0,15 \\ -0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Innen $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \end{pmatrix} = ... = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, tehát az egyedek számának változása a két fajban az $f(n) = A^n$ függvénytől függ, ahol $A = \begin{pmatrix} 1,1 & -0,15 \\ -0,2 & 0,9 \end{pmatrix}$.

Legyen $x_0 = 100$ a hiénák kezdeti száma és $y_0 = 200$ az oroszlánoké. Ahhoz, hogy az egyedek számának változását vizsgáljuk, ki kell számolnunk az A^n mátrixot. Mivel $\operatorname{Tr} A = 2$, $\det A = 0,96$, a karakterisztikus egyenlet $r^2 - 2r + 0,96 = 0$, melynek gyökei $r_1 = 0,8$ és $r_2 = 13$, tehát $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ és

$$\begin{aligned} a_n &= r_1(0,8)^n + r_2(1,2)^n \\ b_n &= r_3(0,8)^n + r_4(1,2)^n \\ c_n &= r_5(0,8)^n + r_6(1,2)^n \\ d_n &= r_7(0,8)^n + r_8(1,2)^n \end{aligned}$$

Ha a kezdeti feltételekből kiszámítjuk az $r_1, r_2, ... , r_8$ állandókat, akkor azt kapjuk, hogy

$$A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{(0,8)^n + 3(1,2)^n}{4} & \dfrac{3[(0,8)^n - (1,2)^n]}{8} \\ \dfrac{(0,8)^n - (1,2)^n}{2} & \dfrac{3[(0,8)^n + (1,2)^n]}{4} \end{pmatrix}$$

Tehát

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{(0,8)^n + 3(1,2)^n}{4} x_0 + \frac{3[(0,8)^n - (1,2)^n]}{8} y_0 = \\ &= \frac{1}{8}(0,8)^n(2x_0 + 3y_0) + \frac{1}{8}(1,2)^n(2x_0 - y_0) = 100(0,8)^n \\ y_n &= \frac{(0,8)^n - (1,2)^n}{2} x_0 + \frac{3(0,8)^n + (1,2)^n}{4} y_0 = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}(0,8)^n(2x_0 + 3y_0) - \frac{1}{4}(1,2)^n(2x_0 - y_0) = 200(0,8)^n$$

Látható, hogy mindkét faj kihalóban van, mert számuk mértani haladványban csökken.

A fenti modelleket áttekintve láthatjuk, hogy különböző jelenségek matematikai modellje mátrixokat és azokkal végzett műveleteket feltételez.

2.2. Lineáris egyenletrendszerek

2.2.1. Lineáris egyenletrendszerekhez vezető problémák

Tekintsük az előző fejezetben már letárgyalt biomatematikai modellt. Azt szeretnénk megvizsgálni, hogy tíz évvel ezelőtt mi volt az egyedek száma az egyes állatfajtákban, ha jelenleg a hiénák száma $x_0 = 100$ és az oroszlánok száma $y_0 = 200$.

Ennek érdekében előbb azt vizsgáljuk meg, mi volt az egyedszám egy évvel ezelőtt. Ha x_{-1}, y_{-1}-gyel jelöljük az akkor élő hiénák, illetve oroszlánok számát, az

$$\begin{cases} 1,1x_{-1} - 0,15y_{-1} & = & 100 \\ 0,9y_{-1} - 0,2x_{-1} & = & 200 \end{cases}$$

egyenletrendszert kapjuk, melyben az ismeretlenek az x_{-1} és y_{-1}.
Mátrix egyenlet formájában:

$$\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & -0,15 \\ -0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{-1} \\ y_{-1} \end{pmatrix}, \quad \text{azaz}$$

$$\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{-1} \\ y_{-1} \end{pmatrix}, \quad \text{ahol} \quad A = \begin{pmatrix} 1,1 & -0,15 \\ -0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \text{ az átmeneti mátrix}$$

Ha az A olyan mátrix, amelynek van A^{-1} inverz mátrixa, akkor a fenti egyenlőséget beszorozzuk balról A^{-1}-el és azt kapjuk, hogy $A^{-1}\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{-1} \\ y_{-1} \end{pmatrix}$.
Ha még egy évvel visszamegyünk azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} x_{-1} \\ y_{-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{-2} \\ y_{-2} \end{pmatrix} \text{ ahonnan}$$

$$\begin{pmatrix} x_{-2} \\ y_{-2} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_{-1} \\ y_{-1} \end{pmatrix} = A^{-1}A^{-1} \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = A^{-2} \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Hasonlóan

$$\begin{pmatrix} x_{-10} \\ y_{-10} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_{-9} \\ y_{-9} \end{pmatrix} = (A^{-1})^2 \begin{pmatrix} x_{-8} \\ y_{-8} \end{pmatrix} = \dots = (A^{-1})^{10} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

2.2.1. Megjegyzés. *Könnyen belátható, hogy* $(A^{-1})^m = (A^m)^{-1}$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *invertálható mátrix és* $\forall m \in \mathbb{N}$ *esetén.*

Valóban $A^m(A^m)^{-1} = (A^m)^{-1}A^m = I_n$ (értelmezés szerint).

Ugyanakkor $(A^{-1})^m A^m = \underbrace{A^{-1}A^{-1}...A^{-1}}_{m \text{ db}}\underbrace{A...A}_{m \text{ db}} = \underbrace{A^{-1}A^{-1}...A^{-1}}_{m-1 \text{ db}}\underbrace{A...A}_{m-1 \text{ db}} = ... = A^{-1}A = I_n$

Hasonlóan $A^m(A^{-1})^m = I_n$

A fentiek alapján $\begin{pmatrix} x_{-10} \\ y_{-10} \end{pmatrix} = (A^{-1})^{10} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

Tehát egy mátrix inverze és annak hatványai bizonyos egyenletrenszerek megoldásában nagy szerepet játszanak.

2.2.1. Értelmezés. *Ha $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ invertálható mátrix értelmezzük az A mátrix negatív hatványait: $A^{-n} = (A^{-1})^n = (A^n)^{-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén.*

Vizsgáljuk most meg, hogy adott A mátrix mellett lehetséges-e egy strukturálisan stabil egyensúly, azaz olyan állapot, amelyben a hiénák és az oroszlánok számának λ aránya állandó, nem változik egyik évről a másikra.

A strukturális stabilitás feltétele adott $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén az $u_{n+1} = \lambda u_n$ egyenlőség teljesülése, ahol $u_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ és $u_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$. Ha $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ egy strukturálisan stabil állapotot jelölő vektor, akkor a $\lambda u = Au$ mátrix egyenlethez jutunk. Tehát a strukturális stabilitás csak olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén lehetséges, amelyre létezik olyan u, amelyre fennáll a $\lambda u = Au$ egyenlőség. Ezeket a λ értékeket az A mátrix sajátértékeinek, az u vektorokat pedig az A mátrix sajátvektorainak nevezzük.

Vizsgáljuk meg milyen összefüggés áll fenn az A mátrix sajátértékei és a mátrix elemei közt!

A λ sajátértékek azok az értékek, amelyekre az $\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x & + & a_{12}y & = & 0 \\ a_{21}x & + & a_{12}y & = & 0 \end{cases}$ egyenletrendszernek van nullától különböző (x, y) megoldása (ez a sajátvektor).

Mivel $(x, y) \neq (0, 0)$, legalább az egyik érték nem nulla. Feltételezzük, hogy $y \neq 0$. Ekkor a második egyenletből: $\lambda = a_{22} + \dfrac{a_{21}x}{y}$. Ezt behelyettesítve az első egyenletbe az $(a_{11} - a_{22} - a_{21}\dfrac{x}{y})x + a_{12}y = 0$ egyenlőséget kapjuk, ami az $a_{21}\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + (a_{22} - a_{11})\dfrac{x}{y} - a_{12} = 0$ egyenlettel egyenértékű.

Ennek gyökei:

$$\left(\frac{x}{y}\right)_1 = \frac{a_{11} - a_{22} + \sqrt{\Delta}}{2a_{21}} \quad \text{és} \quad \left(\frac{x}{y}\right)_2 = \frac{a_{11} - a_{22} - \sqrt{\Delta}}{2a_{21}}$$

ahol $\Delta = (a_{22} + a_{11})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = (\operatorname{Tr} A)^2 - 4 \det A$ és innen a sajátértékek:

$$\lambda_1 = a22 + \frac{a_{11} - a_{22} + \sqrt{\Delta}}{2a_{21}} = \frac{a_{11} + a_{22} + \sqrt{\Delta}}{2a_{21}} \quad \text{és} \quad \lambda_2 = \frac{a_{11} + a_{22} - \sqrt{\Delta}}{2a_{21}}$$

Ebből következik, hogy

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} = \operatorname{Tr} A \quad \text{és} \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{(a_{11} + a_{22})^2 - \Delta}{4} = \det A.$$

Tehát egy tetszőleges $A \in \mathcal{M}2(\mathbb{C})$ mátrix λ_1 és λ_2 sajátértékeire igazak a

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & \operatorname{Tr} A \\ \lambda_1 & \cdot & \lambda_2 & = & \det A \end{array}\right. \text{összefüggések.}$$

2.2.2. Megjegyzés. *Ez azt jelenti, hogy λ_1 és λ_2 az $x^2 - Tr\,Ax + \det A = 0$ egyenlet gyökei.*

A $\lambda u = Au$ mátrix egyenlőséget felírva $(A - \lambda I_n)u = O_2$ alakban az $\left\{\begin{array}{ccccc} (a_{11} - \lambda)x & + & a_{12}y & = & 0 \\ a_{21}x & + & a_{12}y & = & 0 \end{array}\right.$ lineáris, homogén egyenletrendszert kapjuk.
Hasonló fogalmakhoz vezet, ha a munkaerőpiac modellel kapcsolatosan teszünk fel hasonló kérdéseket. Mindezen kérdések a sajátértékek, sajátvektorok fogalmára vezetnek, illetve bizonyos homogén vagy nem homogén lineáris egyenletrendszerek megoldását teszik szükségessé.

2.2.2. Lineáris egyenletrendszerek megoldása elemi transzformációkkal

Az előző fejezet munkaerő, illetve biomatematikai modelljében láttuk, hogy a munkaerő piac stabilitásának feltételét a

$$\left\{\begin{array}{rcl} -0,3\overline{x} + 0,1\overline{y} + 0,1\overline{z} & = & 0 \\ -0,3\overline{x} + 0,1\overline{y} + 0,1\overline{z} & = & 0 \\ -0,3\overline{x} + 0,1\overline{y} + 0,1\overline{z} & = & 0 \end{array}\right.$$

egyenletrendszer megoldása adta, a hiénák és az oroszlánok strukturálisan stabil számát pedig a

$$\left\{\begin{array}{rcl} (1,1 - \lambda)x - 0,15y & = & 0 \\ -0,2x + (0,9 - \lambda)y & = & 0 \end{array}\right.$$

egyenletrendszer megoldása, a megfelelő λ értékek meghatározása után.
Sok más gyakorlati feladat vezet lineáris egyenletrendszerekhez. Ezért szükségünk lesz olyan módszerre, amely alkalmas ezek megoldására az ismeretlenek és egyenletek számától függetlenül.

2.2.2. Értelmezés. *Lineáris egyenletrendszernek nevezünk egy olyan egyenletrendszert, amely $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ alakú egyenleteket tartalmaz, ahol x_i, $i = \overline{1,n}$ az ismeretlenek és $a_i \in \mathbb{C}$ valamint $b \in \mathbb{C}$ rögzített számok.*

Egy egyenletrendszert úgy oldunk meg, hogy az egyenleteket úgy alakítjuk, hogy velük egyenértékű egyszerűbb egyenleteket kapjunk.A legfontosabb kérdés, hogy egy egyenletrendszer megoldása közben mik azok a műveletek, amelyek az eredeti rendszerrel ekvivalens rendszerhez vezetnek.

1. Az egyenletrendszer bármely egyenletét szorozhatjuk vagy oszthatjuk egy 0-tól különböző számmal.

2. Bármely két egyenletet felcserélhetjük egymással.

3. Az egyik egyenletet megszorozhatjuk egy számmal és hozzáadhatjuk egy másikhoz.

Ha most az $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n & = & b_m \end{cases}$ egyenletrendszerhez hozzárendeljük az ismeretlenek együtthatóinak

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

mátrixát, melyet a továbbiakban az egyenletrendszer bővített mátrixának nevezünk,(csak az ismeretlenek együtthatóiból álló mátrixot pedig az egyenletrendszer mátrixának), az egyenletrendszer megoldása közben ezen ekvivalens átalakításokat végzünk, amelyek közben a rendszer mátrixa is változik, de egy, az eredeti rendszerrel ekvivalens rendszer mátrixává alakul.

2.2.3. Értelmezés. *Ha adott egy mátrix, elemi sortranszformáción azokat a sorokkal végzett transzformációkat értjük, amelyek az eredeti mátrixhoz rendelhető lineáris egyenletrendszerrel ekvivalens egyenletrendszerhez tartozó mátrixszá alakítják az eredeti mátrixot. Az elemi sortranszformációk a következők:*

a) egy mátrix valamely sorát szorozzuk vagy osztjuk egy 0-tól különböző számmal.

b) egy mátrix két sorát (oszlopát) felcseréljük.

c) egy mátrix egyik sorának λ-szorosát hozzáadjuk másik sorhoz.

A továbbiakban két mátrixot hasonlónak nevezünk,ha az egyik megkapható a másikból elemi sortranszformációk segítségével. Ezt $A \sim B$ szimbólummal jelöljük.

2.2.3. Megjegyzés. *Ha B megkapható A-ból elemi transzformációk segítségével, akkor A is megkapható B-ből elemi transzformációk segítségével, mivel ezek a transzformációk megfordíthatóak.*

1. Vizsgáljuk meg, hogy mit jelentenek a

$$\begin{cases} 3x & - & 2y & + & z & = & 2 \\ x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ x & - & 6y & + & 3z & = & 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer esetén a bővített mátrixra alkalmazott elemi sortranszformációk. A következőkben párhuzamosan kezeljük ezeket a változtatásokat(az egyenleteken illetve a mátrixon végzett transzformációkat):

$$\begin{cases} 3x & - & 2y & + & z & = & 2 & \mid : 3 \\ x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ x & - & 6y & + & 3z & = & 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{S_1 : 3}{\sim}$$

$$\begin{cases} x & - & \frac{2}{3}y & + & \frac{1}{3}z & = & \frac{2}{3} \\ x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ x & - & 6y & + & 3z & = & 0 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{\begin{array}{c} S_2 - S_1 \to S_2 \\ S_3 - S_1 \to S_2 \end{array}}$$

$$\begin{cases} x & - & \frac{2}{3}y & + & \frac{1}{3}z & = & \frac{2}{3} \\ & & \frac{8}{3}y & - & \frac{4}{3}z & = & 1 & \mid : \frac{8}{3} \\ & - & \frac{16}{3}y & + & \frac{8}{3}z & = & -\frac{2}{3} \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{16}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \underset{\sim}{\begin{array}{c} S_2 - S_1 \to S_2 \\ S_3 - S_1 \to S_2 \end{array}}$$

$$\begin{cases} x & - & \frac{2}{3}y & + & \frac{1}{3}z & = & \frac{2}{3} \\ & & y & - & \frac{1}{2}z & = & \frac{1}{8} \\ & - & \frac{16}{3}y & + & \frac{8}{3}z & = & -\frac{2}{3} \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{16}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \underset{\sim}{\begin{array}{c} S_2 - S_1 \to S_2 \\ S_3 - S_1 \to S_2 \end{array}}$$

A második egyenletet $\frac{2}{3}$–dal majd $\frac{16}{3}$–dal szorozzuk és hozzáadjuk az elsőhöz, illetve a harmadikhoz.

$$\begin{cases} x & & & = & \frac{3}{4} \\ & y & - \frac{1}{2}z & = & \frac{1}{8} \\ & & 0 & = & 0 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Mivel az utolsó egyenlet $\forall z$-re igaz , ezért $z = \lambda$, $x = \frac{3}{4}$ és $x = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\lambda$. Tehát a rendszernek végtelen sok megoldása van.

2. Az $\begin{cases} x - y - z = 2 \\ x + 2y - 3z = 4 \\ 3x + 3y - 7z = 0 \end{cases}$ egyenletrendszer esetén már csak a mátrixon végzett sortranszformációkat írjuk le.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -7 & 0 \end{array}\right) \underset{S_3 - 3S_1 \to S_3}{\overset{S_2 - S_1 \to S_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & -4 & -6 \end{array}\right) \underset{S_3 - 2S_2 \to S_3}{\overset{S_2 : 3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right)$$

Látható, hogy nincs szükség további másolásra, mert az utolsó sornak a

$$0x + 0y + 0z = -10$$

egyenlet felel meg, tehát az egyenlet összeférhetetlen.

3. Az $\begin{cases} x - y - z = 2 \\ x + y - 2z = 4 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$ egyenletrendszer esetén az elemi transzformációkat elvégezve a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{S_3 - 2S_1 \to S_3}{\overset{S_2 - S_1 \to S_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right) \underset{S_3 - S_2 \to S_3}{\overset{S_2 : 2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \end{array}\right)$$

$$\underset{S_1 + S_2 \to S_1}{\overset{S_3 : 4}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} \end{array}\right) \underset{S_1 + \frac{3}{2}S_3 \to S_1}{\overset{S_2 + \frac{1}{2}S_3 \to S_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

mátrixhoz jutunk,amit egyenletrendszer formájában visszaírva: $x = \frac{7}{2}$, $y = 1$, $z = \frac{1}{4}$. Látható, hogy az egyenletrendszerünk abban a pillanatban van megoldva, amikor az eredeti mátrix helyén az egységmátrixot sikerült létrehozni (amikor ez lehetséges).

Mit jelent a mátrix műveletek szintjén ennek az állapotnak a létrehozása, amenynyiben az lehetséges? Hogy jobban látható legyen az előző egyenletrendszerben tekintsünk tetszőleges szabadtagokat:

$$\begin{cases} x - y - z = b_1 \\ x + y - 2z = b_2 \\ 2x + z = b_3 \end{cases}$$

Mátrix műveletként felírva az egyenletrendszert az $AX = B$ egyenletet jelenti, ahol A-val jelöljük az egyenletrendszer mátrixát:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{és } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Az egyenletrendszer megoldása tulajdonképpen az $AX = B$ mátrixegyenlet megoldását jelenti. Rendre elvégezzük a szükséges sortranszformációkat:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & b_1 \\ 1 & 1 & -2 & b_2 \\ 2 & 0 & 1 & b_3 \end{array}\right) \begin{array}{c} S_2 - S_1 \to S_1 \\ \sim \\ S_3 - 2S_1 \to S_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & b_1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 - b_1 + b_2 \\ 0 & 2 & 3 & b_3 - 2b_1 \end{array}\right) \begin{array}{c} S_2 : 2 \\ \sim \\ S_3 - S_2 \to S_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{b_1 + b_2}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -b_1 - b_2 + b_3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} S_3 : 4 \\ \sim \\ S_1 + S_2 \to S_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{b_1 + b_2}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{b_1 + b_2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-b_1 - b_2 + b_3}{4} \end{array}\right) \begin{array}{c} S_2 + \frac{1}{2}S_3 \to S_2 \\ \sim \\ S_1 + \frac{3}{2}S_3 \to S_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8}b_1 + \frac{1}{8}b_1 + \frac{3}{8}b_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{8}b_1 + \frac{3}{8}b_1 + \frac{1}{8}b_3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4}b_1 - \frac{1}{4}b_1 + \frac{1}{4}b_3 \end{array}\right)$$

Egyenlet formájában visszaírva:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{8}b_1 + \frac{1}{8}b_1 + \frac{3}{8}b_3 \\ x = -\frac{5}{8}b_1 + \frac{3}{8}b_1 + \frac{1}{8}b_3 \\ 2 = -\frac{1}{4}b_1 - \frac{1}{4}b_1 + \frac{1}{4}b_3 \end{cases}$$

Azt kellene még megvizsgálnunk, hogy a mátrixra alkalmazott elemi transzformációk leírhatók-e mátrix műveletekkel? Próbáljunk meg minden elemi transzformációhoz hozzárendelni egy mátrixműveletet.

a) Ha az I_n mátrixban az i-edik oszlopot megszorozzuk λ-val:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda \end{pmatrix}$$

akkor ha egy $n \times k$ típusú mátrixot balról szorzunk az így kapott mátrixszal, akkor az ugyanannyi, mintha az i-edik sort szoroznánk λ-val, a többit pedig változatlanul hagynánk. Tehát egy mátrixban egy olyan elemi transzformáció, amely egy sornak egy számmal való szorzásából áll egy fenti tipusú mátrixszal balról való szorzásának felel meg.

Valóban az i-edik oszlopot beszorozva λ-val

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \lambda a_{i3} & ... & \lambda a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

b) Ha az I_n mátrixban felcseréljük az i és j oszlopot $(i \neq j)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 00 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & \\ 0 & 0 & 1 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha egy A mátrixot jobb oldalról szorzunk egy ilyen típusú mátrixszal, akkor ez a szorzás felcseréli az i-edik oszlopot a j-edik oszloppal, ha balról szorozzuk ugyanazzal, akkor felcseréli az i-edik sort a j-edik sorral.

Valóban, felcserélve az i és j oszlopot:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & ... & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & ... & a_{jn} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

c) Ha I_n-ben a főátlót változatlanul hagyjuk és az (i, j) $i \neq j$ helyen a 0 helyére egy λ számot írunk:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & ... & \lambda & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

akkor ha egy mátrixot balról szorzunk az így kapott mátrixszal, akkor ugyanazt kapjuk, mint ha a j-edik sorát szoroznánk be λ-val és hozzáadnánk az i-edik sorához.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & ... & \lambda & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & ... & a_{jn} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} & a_{i2}+\lambda a_{j2} & a_{i3}+\lambda a_{j3} & ... & a_{in}+\lambda a_{jn} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & ... & a_{jn} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Tehát minden elemi transzformáció felfogható sajátos mátrixszal való szorzásként is.

Ha $E_1, E_2, ..., E_q$-val jelöljük azokat a mátrixokat, amelyeket ahhoz a q darab transzformációhoz rendelünk, amellyel az A-ból az I_n-t kapjuk, felírhatjuk, hogy $E_q E_{q-1} ... E_1 A = I_3$ és innen $A^{-1} = E_q E_{q-1} ... E_1$. Tehát valóban, ha az $E_1 \to E_2 \to ... \to E_q$ transzformációkkal A-ból I_3-t kapunk, akkor I_3-ból A^{-1}-t kapunk.

2.2.3. A lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságának vizsgálata

Az előző fejezetben láthattuk, hogy egy lineáris egyenletrendszernek lehet egyetlen, egyértelmű megoldása, ebben az esetben a rendszert kompatibilis, határozott rendszernek nevezzük, lehet végtelen sok megoldása, ebben az esetben a rendszert kompatibilis, határozatlannak nevezzük, de az is előfordulhat, hogy a rendszernek nincs megoldása, az ilyen egyenletrendszert inkompatibilisnak vagy összeférhetetlennek nevezzük.

Különösen fontosak sok gyakorlati helyzetben azok az egyenletrendszerek, amelyek egyértelmű megoldással rendelkeznek. A továbbiakban azt szeretnénk vizsgálni, milyen feltételek mellett lesz egy egyenletrendszer megoldása egyértelmű. Nyilvánvaló például, hogyha egy egyenletrendszerben kevesebb az egyenlet, mint az ismeretlen, akkor egyértelmű megoldása nem lehet az egyenletrendszernek (inkompatibilis természetes lehet ebben az esetben is). Az is nyilvánvaló, hogy n ismeretlen esetén, ahhoz, hogy ezeket egyértelműen meghatározzák, n darab egymástól független összefüggés kell létezzen közöttük. Tisztáznunk kell azt, hogy mit értünk egymástól független egyenleteken. Erre a következő értelmezést adhatjuk:

2.2.4. Értelmezés. *Ha n ismeretlen közt adott k darab $k \geq 1$ összefüggés, akkor ezeket egymástól függetleneknek nevezzük, ha közülük egyikben sem kaphatjuk meg az ismeretlenek együtthatóit a többi egyenlet megfelelő együtthatóinak lineáris kombinációjaként.*

2.2.5. Értelmezés. *Ha valamelyik egyenletben az ismeretlenek együtthatói előállíthatók a több egyenlet együtthatóinak lineáris kombinációjaként, de az illető egyenlet szabadtagja nem ugyanaz a lineáris kombinációja a többi egyenlet szabadtagjainak , akkor azt mondjuk, hogy ez az egyenlet összeférhetetlen a többivel.*

Nyilvánvalóan n darab ismeretlen egyértelmű meghatározásához n darab egymástól független egyenletre van szükségünk. Ezért vizsgáljuk először az olyan egyenletrendszereket, amelyekben n darab ismeretlen közt n darab egymástól független egyenlet teremt összefüggést.

Nagyon fontos kérdés az, hogy milyen algebrai objektum segítségével tudnánk egyszerűen belátni azt, hogy az n egyenlet egymástól független-e, vagy ellentmondóak-e vagy vannak a többitől függő egyenletek. Ha adott egy $n \times n$-es lineáris egyenletrendszer, ehhez egyértelműen hozzárendelhetünk egy $n \times n$-es négyzetes mátrixot (az ismeretlenek együtthatóinak mátrixát) és egy $n \times (n+1)$-es mátrixot az összes együttható mátrixát. Az elsőt az egyenletrendszer mátrixának, a másodikat az egyenletrendszer bővített mátrixának nevezzük. A következő helyzetek állhatnak elő:

1. Minden egyenlet független a többitől.
2. Egy vagy több egyenlet a többi lineáris kombinációjaként állítható elő.
3. Valamelyik egyenletben megadott összefüggés ellentmond a többi összefüggésnek.

Próbáljuk a fenti helyzeteket az egyenletrendszerhez rendelt mátrixok segítségével kielemezni.

1. Az első helyzetben, ha az egyenetrendszer mátrixán elkezdünk elemi sotranszformációkat végezni, soha nem juthatunk abba a helyzetbe, hogy csupa 0 sort kapjunk, hiszen ez azt jelentené, hogy az a sor a többi lineáris kombinációja vagy egy vele felcserélt sor a többi lineáris kombinációja (hiszen minden sortranszformáció vagy csak helycserét jelent vagy valamilyen lineáris kombináció előállítását két sorból). Ez azt jelenti, hogy ebben a helyzetben addig tudjuk végezni az elemi transzformációkat, amíg előállítjuk a rendszer mátrixának inverzét, tehát ebben az esetben a rendszer mátrixa invertálható.

   Hogy jobban leírhassuk ezt és a további két helyzetet is (hiszen láttuk, hogy ezeket a lineárisan független egyenletek megléte határozza meg), vezessük be a következő fogalmat:

Egy mátrix rangja

2.2.6. Értelmezés (Egy mátrix rangja). *Ha adott az $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ mátrix $A = (a_{i,j})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}}}$, tekintsük azt a lineáris, homogén egyenletrendszert, amelynek a mátrixa az A mátrix. Az A mátrix rangjának nevezzük az*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer független egyenleteinek maximális számát. Jelölés: $\operatorname{rang} A$.

2.2.4. Megjegyzés.

1. *Ha $m > n$, akkor $\operatorname{rang} A \leq n$ (mivel n ismeretlen közt legtöbb n egymástól független összefüggés írható fel)*

2. Egy $n \times n$-es rendszer esetén, ha minden egyenlet független a többitől, akkor $rang\, A = rang\, A' = n$ és a rendszernek egyértelmű megoldása van. Fordítva, ha egy $n \times n$-es egyenletrendszer kompatibilis és határozott, ez azt jelenti, hogy a összes egyenlet egymástól független (ha lenne köztük olyan, ami a többi lineáris kombinációja, ezt elhagyhatnánk, mert nem szolgáltat új információt, így az n ismeretlent már n-nél kevesebb összefüggés írná le és így a leírás nem egyértelmű). Tehát egy $n \times n$-es egyenletrendszer pontosan akkor kompatibilis és határozott, ha a rendszer mátrixának rangja is és a bővített mátrix rangja is n.

2. Abban a helyzetben, amikor egy vagy több egyenlet a többi lineáris kombinációjaként állítható elő, ez azt jelenti, hogy elemi sortranszformációkkal ezek helyén csupa nulla sorokat állíthatunk elő. Tehát az ilyen rendszer mátrixa nem invertálható. Ha legtöbb $n - k$ darab független egyenlet van a rendszerben, akkor a rendszer rangja $n - k$. Ugyanakkor, ha a mátrixon elkezdünk sortranszformációkat végrehajtani úgy, hogy háromszög mátrixot hozzunk létre, a legtöbb végrehajtható lépés száma $n - k$ (mivel a lineárisan függő sorok helyén nullákat fogunk kapni). Tehát a mátrix rangja tulajdonképpen a háromszögesítés érdekében végrehajtható maximális lépésszámot jelenti.

   Tehát ebben az esetben $\text{rang}\, A = n - k$, $\text{rang}\, A' = n - k$. A rendszer k-szorosan határozatlan, azaz k darab ismeretlen vehet fel tetszőleges értéket.

3. Ebben az esetben a többinek ellentmondó egyenletben az ismeretlenek együtthatói a többi egyenletben levő együtthatók lineáris kombinációjaként írhatók fel, a szabadtag viszont nem. Ezért az A mátrixban ez a sor a többi lineáris kombinációja, az A'-ben viszont nem. Így $\text{rang}\, A < \text{rang}\, A'$ (legalább eggyel kevesebb). Ugyanakkor, ha $\text{rang}\, A < \text{rang}\, A'$, azt jelenti, hogy van legalább egy sor az A-ban, ami a többi sor lineáris kombinációja, de az A'-ben ez nem igaz. Tehát az ennek a sornak megfelelő egyenlet ellentmond a többinek.

Az eddigieket a következőképpen tudnánk összefoglalni:

2.2.1. Tétel. *A lineáris egyenletrendszer akkor és csakis akkor összeférhető, ha $rang\, A = rang\, A'$. Ha $rang\, A < rang\, A'$, akkor a rendszer inkompatibilis.*

Egy négyzetes mátrix determinánsa

Most vizsgáljuk az $n \times n$-es egyenletrendszereket és keressünk újabb feltételt arra, hogy egy ilyen rendszer határozott legyen. Kezdjük a vizsgálatot 2×2-es egyenletrendszerrel. Induljunk ki egy olyan gyakorlati feladatból, amelyről tudjuk, hogy egyértelmű megoldása van:

A múlt hónapban kétszer vásároltam füzetet és ceruzát ugyananabban a könyvesboltban. Először egy ceruzát és négy füzetet vásároltam 7 lejért, második alkalommal 3 ceruzát és 2 füzetet 6 lejért. Mennyibe került egy-egy füzet, illetve ceruza, ha közben az árak nem változtak?

Ha x-el jelöljök a ceruza, y-al a füzet árát, az

$$\begin{cases} 3x & + & 2y & = & 6 & (2) \\ x & + & 4y & = & 7 & (1) \end{cases}$$

egyenletrendszerrel tudom leírni a fenti helyzetet.

A megoldást a kiküszöbölés módszerével határozzuk meg. Ezért az első egyenletből kifejezzük az x-et: $x = 7 - 4y$ és visszahelyettesítjük a másodikba: $3(7 - 4y) + 2y = 6$, ahonan $10y = 15 \Leftrightarrow y = 1,5$ és $x = 7 - 4 \cdot 1,5 \Leftrightarrow x = 1$.

A rendszernek egyértelmű megoldása van. Tehát egy füzet $1,5$ lejbe, egy ceruza 1 lejbe került a múlt hónapban ebben a könyvesboltban.

2.2.5. Megjegyzés. *Ha például első alkalommal egy füzetet és négy ceruzát, második alkalommal pedig két füzetet és négy ceruzát vásároltam volna, akkor nem lehetett volna egyértelműen megmondani egy füzet és egy ceruza árát, hiszen arra másodszor pont kétszer annyit is fizettem, így ezt az egyenletet kettővel végigosztva az elsőt kapom meg, tehát ez nem szolgáltat újabb információt.*

Tekintsünk most egy tetszőleges 2×2-es lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{cases} a_{11}x & + & a_{12}y & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & = & b_2 \end{cases}$$

Ha az a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} számok mindegyike 0, akkor $b_1 = b_2 = 0$ esetén a megoldáshalmaz $\mathbb{R}^2$ míg $(b_1, b_2) \neq (0, 0)$ esetén üres halmaz. Ha az a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} számok közt van 0-tól különböző, akkor feltételezzük, hogy $a_{11} \neq 0$. (Ellenkező esetben felcseréljük az egyenleteket és/vagy a változókat.)

Így $x = \dfrac{b_1 - a_{12}y}{a_{11}}$, tehát a második egyenlet alapján

$$\frac{(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y}{a_{11}} = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}}$$

Ha $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$, akkor tetszőleges b_1, b_2 esetén

$$y = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \quad \text{és} \quad x = \frac{b_1 - a_{12}y}{a_{11}}$$

Ezért $\quad x = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$, tehát a rendszernek egyetlen megoldása van.

Ha $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$ akkor $a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} = 0$ esetén a megoldások paraméteres alakja:

$$\begin{cases} x & = & \dfrac{b_1 - a_{11}\alpha}{a_{11}} \\ y & = & \alpha \end{cases}$$

míg $a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \neq 0$ esetén a rendszernek nincs megoldása. Láthattuk, hogy a határozottság feltétele az $a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22} \neq 0$ azaz a $\det A \neq 0$, hiszen a rendszer mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ugyanakkor $\det A = 0$ és $a_{11} \neq 0$ feltételek mellett a kompatibilitás feltétele az, hogy az $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ mátrix $a_{11}b_2 - a_{12}b_1$ determinánsa 0 legyen.
Észrevehető, hogy a fenti mátrixot úgy kaptuk, hogy az a_{11}-et nem tartalmazó oszlopot a szabadtagok oszlopával cseréltük fel.
Abban az esetben, amikor $\det A \neq 0$, láttuk, hogy

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\det A} \quad \text{és} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\det A}$$

Tehát a határozottság feltételét és a kompatibilitás feltételét is determinánsok segítségével tudtuk megfogalmazni.

2.2.2. Tétel.

1. *Ha az* $\begin{cases} a_{11}x & + & a_{12}y & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & = & b_2 \end{cases}$ *rendszer mátrixának determinánsa nem nulla, akkor a rendszernek létezik egyértelmű megoldása* $\forall b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ *esetén is ez:*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\det A} \quad \textit{és} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\det A}$$

2. *Ha* $\det A = 0$*, akkor a következő két eset lehetséges*

   a) ha $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ *vagy* $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$*, akkor a rendszernek nincs megoldása (összeférhetetlen).*

   b) ha $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = 0$*, akkor a rendszernek végtelen sok megoldása van.*

2.2.6. Megjegyzés. *Látható, hogy a megoldás során, ha* $\det A \neq 0$ *az* $\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ *egyenlőségből az* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ *egyenlőséghez jutottunk, azaz* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{\det A} & -\frac{a_{12}}{\det A} \\ -\frac{a_{21}}{\det A} & \frac{a_{11}}{\det A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Az előző fejezetben viszont láttuk, hogy elemi sortranszformációkkal az $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$-ből határozott rendszer esetén az $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$-hez jutunk, tehát ebben az esetben

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{\det A} & -\frac{a_{12}}{\det A} \\ -\frac{a_{21}}{\det A} & \frac{a_{11}}{\det A} \end{pmatrix}$$

az A mátrix inverze.
Vizsgáljunk most egy 3×3-as egyenletrendszert.

Oldjuk meg először az $\begin{cases} x & + & y & + & 2z & = & 11 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & -5 \\ 3x & - & 2y & - & 3z & = & -2 \end{cases}$ egyenletrendszert.

Az első egyenletből kifejezzük x-et és behelyettesítjük a második és harmadik egyenletbe.

Így az $\begin{cases} x & + & y & + & 2z & = & 11 \\ & & y & - & 5z & = & -27 \\ & - & y & - & 9z & = & -35 \end{cases}$ egyenletrendszerhez jutunk. A második egyenlet alapján $y = 5z - 27$, tehát a rendszer $\begin{cases} x & + & y & + & 2z & = & 11 \\ & & y & - & 5z & = & -27 \\ & & & - & 34z & = & -17 \end{cases}$ alakban írható fel.

Az utolsó egyenletből $z = 5$, ez alapján a második egyenletből $y = -2$ és végül az első egyenletből $x = 3$.
Természetesen az ismeretlent más sorrendben is kiküszöbölhetjük. Ha első lépésben a második egyenletből fejezzük ki z-t, akkor a következő alakban írhatjuk a rendszert:

$$\begin{cases} z & - & 2x & - & 3y & = & 5 \\ & & 5x & + & 7y & = & 1 \\ & - & 3x & - & 11y & = & 13 \end{cases}$$

A második egyenletből $x = \dfrac{1-7y}{5}$, tehát a rendszer $\begin{cases} z & - & 2x & - & 3y & = & 5 \\ & & 5x & + & 7y & = & 1 \\ & & & - & 34y & = & 68 \end{cases}$ alakban is írható. Világos, hogy legfeljebb $9 \cdot 4 = 36$ különböző módon juthatunk el a megoldáshoz (az első lépésben legtöbb 9 lehetőség van aszerint, hogy melyik változót fejezzük ki és melyik egyenletből, míg a második lépésnél 4 lehetőség). Az előbbi két megoldásban az utolsó sorban a megmaradt ismeretlen együtthatója mindkét esetben -34 volt.
Vajon ez általános jelenség, vagy véletlen egybeesés?
Vizsgáljunk egy tetszőleges

$$\begin{cases} a_{11}x & + & a_{12}y & + & a_{13}z & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & + & a_{23}z & = & b_2 \\ a_{31}x & + & a_{32}y & + & a_{33}z & = & b_3 \end{cases}$$

egyenletrendszert, ahol $a_{i,j} \in \mathbb{C},\ i,j = \overline{1,3}$.
Ha $a_{i,j} = 0,\ \forall i,j = \overline{1,3}$, akkor $(b_1, b_2, b_3) = (0,0,0)$ esetén a megoldás az $\mathbb{R}^3$, míg ellenkező esetben üres halmaz.
Ha létezik 0-tól különböző $a_{i,j},\ i,j = \overline{1,3}$, akkor a rendszer átrendezhető egyenletek és ismeretlenek cseréjével úgy, hogy az első egyenletben az x együtthatója 0-tól különböző legyen.Tehát feltételezhetjük, hogy $a_{11} \neq 0$. Fejezzük ki x-et az első egyenletből és helyettesítsük a többi egyenletbe:

$$x = \frac{b_1 - a_{12}y - a_{13}z}{a_{11}}$$

így az

$$\begin{cases} x + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}y + \dfrac{a_{13}}{a_{11}}z = \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}}y + \dfrac{a_{23}a_{11} - a_{21}a_{13}}{a_{11}}z = \dfrac{b_2a_{11} - a_{21}b_1}{a_{11}} \\ \dfrac{a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}}{a_{11}}y + \dfrac{a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}}{a_{11}}z = \dfrac{b_3a_{11} - a_{31}b_1}{a_{11}} \end{cases}$$

rendszerhez jutunk. Látható, hogy az a_{11}-gyel való osztást elhagyhatjuk. Így a rendszer:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y + (a_{23}a_{11} - a_{21}a_{13})z = b_2a_{11} - a_{21}b_1 \\ a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}y + a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}z = b_3a_{11} - a_{31}b_1 \end{cases}$$

alakú. Az utolsó két egyenlet egy két ismeretlent tartalmazó 2×2-es egyenletrendszer, melynek mátrixa

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{23}a_{11} - a_{21}a_{13} \\ a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \end{pmatrix}$$

Láttuk, hogy ez akkor határozott, ha ennek

$$\Delta = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a_{23}a_{11} - a_{21}a_{13}) - (a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})$$

determinánsa nem nulla. A megfelelő műveleteket elvégezve

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Ez ugyanakkor nem más, mint a z együtthatója, ha az utolsó két egyenletből kiküszöböljük y-t, vagy az y együtthatója, ha ugyanezekből z-t küszöböljük ki. Tehát nem volt véletlen az, hogy az előzőleg megoldott egyenletrendszerben az ismeretlenek együtthatója mindkét alkalommal -34 volt, mivel mindkét alkalommal az első lépésben kifejezett ismeretlen együtthatója a_{11} az 1 volt.
Tehát a 3×3-as rendszer esetében a műveletek elvégzése és a_{11}-el való egyszerűsítés után a $\Delta \cdot x = \Delta_1$ egyenlőséghez jutunk, ahol

$$\Delta_1 = b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3.$$

2.2.7. Értelmezés.

A $\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$ *kifejezést az* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ *mátrix determinánsának nevezzük és* det A*-val jelöljük.*

Jelölés: $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Ezeket az eredményeket ebben a formában elég nehéz megjegyezni, ezért több memorizálási technikát említünk:

1. Sarrus szabály: Írjuk az A mátrix alá az első és a második sort. A főátlóval párhuzamos átlók mentén az elemek szorzatai adják a determináns első három tagját (pozitív előjelűeket), míg a mellékátlóra illeszkedő elemek szorzatai adják az utolsó három tagot (a negatívakat):

$$\begin{array}{|ccc|} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline \end{array} \quad = \quad \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$
$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

2. Háromszögszabály: A mellékelt ábrák mutatják a pozitív, illetve a negatív előjelű szorzatokat:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

A $\Delta \cdot x = \Delta_1$ összefüggésben a $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ tehát ha $\Delta \neq 0$, akkor $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$.

Hasonlóan, más kiküszöböléssel igazolható, hogy $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$ és $z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$, ahol

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \text{ és } \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Tehát a 2×2-es rendszerekhez hasonlóan itt is megfogalmazhatjuk a következő tételt:

2.2.3. Tétel. *Az* $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$ *rendszerre érvényesek a következő állítások:*

1. *Ha* $\det A \neq 0$, *akkor a rendszernek egyértelmű megoldása van és ezt az* $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$ *és* $z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$ *képletek szolgáltatják, ahol* $\Delta = \det A$ *a rendszer mátrixának determinánsa,* Δ_1, Δ_2 *és* Δ_3 *pedig úgy kapható meg ebből a determinánsból, hogy az* x, y *illetve* z *együtthatóit helyettesítjük a szabadtagokkal.*

2. Ha $\det A = 0$*, akkor* $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) \neq (0,0,0)$ *esetén a rendszernek nincs megoldása, tehát inkompatibilis.*

3. Ha $\det A = 0$ *és* $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) = (0,0,0)$*, akkor a rendszernek végtelen sok megoldása van, tehát rendszerünk határozatlan.*

Visszatérve egy 3×3-as mátrix determinánsára:

$$\Delta = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}),$$

ahol a zárójelben levő kifejezések mind 2×2-es determinánsok, jelöljük az a_{1i} elemmel szorzott kifejezést δ_{1i}-vel.

$$\text{Ha } A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{\begin{matrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{matrix}} \\ a_{31} & & \end{pmatrix} \text{ akkor } \delta_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}.$$

$$\text{Ha } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ akkor } \delta_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}.$$

$$\text{Ha } A = \begin{pmatrix} a_{11} \; a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ \boxed{\begin{matrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{23} \\ a_{33} \end{matrix} \end{pmatrix} \text{ akkor } \delta_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}.$$

Látható, hogy a δ_{1i} determinánst úgy kaptuk, hogy elhagytuk az a_{1i} sorában és oszlopában levő elemeket és δ_{1i} a megmaradt elemekből alkotott 2×2-es determináns.

2.2.8. Értelmezés. *Az i-edik sor és j-edik oszlop elhagyásával kapott determinánst az a_{ij}-hez tartozó aldeterminánsnak nevezzük és d_{ij}-vel jelöljük. Ennek alapján*

$$\det A = \sum_{i=1}^{3} a_{1i}(-1)^{i+1} d_{1i}$$

Ha most $\det A$-t úgy számítjuk ki, hogy a második sor elemeit emeljük ki, azt kapjuk, hogy $\det A = -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})$ azaz

$$\det A = \sum_{i=1}^{3} a_{i2}(-1)^{i+2} d_{2i} \text{ és hasonlóan } \det A = \sum_{i=1}^{3} a_{i3}(-1)^{i+3} d_{3i}$$

2.2.9. Értelmezés. *A $(-1)^{i+j} d_{ij}$ kifejezést az a_{ij} elem algebrai komplementumának nevezzük és D_{ij}-vel jelöljük.*

A fentiek alapján kijelenthetjük a következő tételt:

2.2.4. Tétel. *Ha $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, akkor* $\det A = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} D_{ij}, \; \forall i \in 1,2,3$

2.2.7. Megjegyzés. *Ha a determinánst a fenti módon számítjuk ki, azt mondjuk, hogy az i-edik sora szerint fejtjük ki.*

Láttuk, hogy 2×2-es, illetve 3×3-as rendszerek esetén a kompatibilitás, illetve határozottság 2×2-es, illetve 3×3 determinánsoktól függ. Kellene találnunk egy olyan fogalmat, ami $n \times n$-es mátrixra leírja ugyanezt.
Vizsgáljunk meg egy $n \times n$-es egyenletrendszert:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ ... & & ... & & ... & & ... & & ... \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & ... & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Ha $a_{ij} = 0$, $i,j = \overline{1,n}$, akkor $(b_1, b_2, ..., b_n) = (0, 0, ..., 0)$ esetén a megoldás $\mathbb{R}^n$, míg ellenkező esetben üres halmaz. Ha létezik 0-tól különböző a_{ij}, akkor a rendszer átrendezhető egyenletek és ismeretlenek cseréjével úgy, hogy az első egyenletben x_1 együtthatója 0-tól különböző legyen.
Tehát feltételezhetjük, hogy $a_{11} \neq 0$, kifejezzük x_1-et az első egyenletből és a többibe visszahelyettesítjük: $x_1 = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ ... \ - a_{1n}x_n}{a_{11}}$ így az x_1-el való szorzások után az:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}x_2 & + & ... & + & (a_{11}a_{2n} - a_{21}a_{1n})x_n & = & b_2a_{11} - b_{12}a_{21} \\ & & ... & & ... & & ... & & ... \\ & & (a_{11}a_{n2} - a_{n1}a_{12})x_2 & + & ... & + & (a_{11}a_{nn} - a_{n1}a_{1n})x_n & = & b_na_{11} - b_1a_{n1} \end{cases}$$

egyenletrendszert kapjuk. Az x_2, ... ,x_n ismeretlenek meghatározása érdekében egy $(n-1) \times (n-1)$-es egyenletrendszert kell megoldani, amely akkor és csakis akkor határozott, ha az eredeti rendszer is határozott volt. Tehát az $n \times n$-es rendszerre feltett kérdés visszavezethető egy $(n-1) \times (n-1)$-es rendszerre feltett kérdésre. Próbáljuk akkor az $n \times n$-es mátrixhoz rendelt determináns fogalmat is ehhez hasonlóan körülírni, azaz egy $n \times n$-es determinánst $(n-1) \times (n-1)$-es determinánsok segítségével kifejezni.
Mivel a 3×3-as determinánst kifejezhettük 2×2-es determinánsokkal egy sor szerinti kifejtéssel, meg kell próbálnunk egy $n \times n$-es determinánst úgy értelmezni, hogy az egyenlő valamely sora szerinti kifejtésével, ezzel $n-1$-es rendű determinánsokra vezettük vissza és így mivel 2×2-es, illetve 3×3-as determinánsokat tudunk számolni, induktívan értelmezhetjük az $n \times n$-es determinánsokat.
Ehhez más csak azt kell belátnunk, hogy a különböző sorok szerinti kifejtés ugyanazt az értéket adja, azaz, hogy $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}D_{1j} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}D_{ij}, \ \ \forall i = \overline{1,n}$.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}D_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{i+j}d'_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \sum_{k=1,\ k\neq j}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}d''_{ik} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1,\ k\neq j}^{n} a_{1j}(-1)^{i+j}a_{ik}(-1)^{i+k}d''_{ik} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1,\ j\neq k}^{n} a_{1j}(-1)^{i+j}a_{ik}(-1)^{i+k}d''_{ik} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k} \sum_{j=1,\ j\neq k}^{n} a_{1j}(-1)^{i+j} d_{ik}^{''}$$

De $d_k^{''}$ egy $(n-2)\times(n-2)$-es determináns és úgy is felfogható, mint az eredeti determinánsól az i-edik sora és k-adik oszlop elhagyásával nyert determinánsban az a_{1j}-hez tartozó aldetermináns. Tehát

$$\sum_{j=1,\ j\neq k}^{n} a_{1j}(-1)^{i+j} d_{ik}^{''} = d_{ik}, \text{ ahol}$$

d_{ik} az a_{ik}-hoz tartozó aldetermináns az $n\times n$-es determinánsban. Így

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}D_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k} d_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}D_{ik}$$

Tehát bármely sor szerint is fejtenénk ki, ugyanazt az értéket kapjuk, ezért értelmezhetjük induktívan az $n\times n$-es determinánst a következőképpen:

2.2.10. Értelmezés. *Ha $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, az A mátrix determinánsának nevezzük a $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}D_{ij}$ kifejezést $i \in 1,2,3$, ahol D_{ij} az a_{ij} elem algebrai komplementuma.*

Visszatérve az egyenletrendszer határozottságának vizsgálatára, láttuk, hogy az $n\times n$-es rendszert,melynek determinánsa nem nulla, visszavezettük egy $(n-1)\times(n-1)$-esre,amelynek a determinánsa nem nulla. Ezt tovább folytatva egy olyan 2×2-es rendszerhez jutunk, amelynek determinánsa nem nulla. A 2×2-es rendszer pedig pontosan akkor határozott, ha determinánsa nem nulla. Igy, mivel a rendszer determinánsa nem nulla, a benne szereplő két ismeretlen egyértelműen meghatározott és így visszafele haladva minden ismeretlen egyértelműen meghatározott.
Ha $\det A \neq 0$, akkor nincs egyértelmű megoldás.

Tehát $n\times n$-es rendszer esetén is, az pontosan akkor kompatibilis határozott, ha $\det A \neq 0$, ahol A a rendszer mátrixa.

Ez azt jelenti, hogy az $Ax = b$ egyenletben elemi sortranszformációkat végezve eljutunk egy $x = A^{-1}b$ helyzetbe, tehát ebben az esetben az A mátrixnak van inverz. Fordítva, ha az A mátrixnak van inverze, akkor $Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$, tehát az egyenletrendszernek van egyértelmű megoldása, ami csak akkor állhat fenn, ha $\det A \neq 0$.
A fentiek alapján:

2.2.11. Értelmezés. *Egy A mátrix akkor és csakis akkor invertálható, ha* $\det A \neq 0$.

Az előző alfejezetben láttuk, hogy a következő állítások egyenértékűek:

2.2.5. Tétel. *Ha A egy $n\times n$-es mátrix, akkor az*

1. *az $Ax = b$ egyenletrendszer kompatibilis határozott*
2. *az A mátrix ranja n*

3. az A mátrix determinánsa nem nulla

állítások egyenértékűek.

Valóban, mivel a 2-es és 1-es állítások egymással egyenértékűek és a 3-as és 1-es állítások egyenértékűek, ezért a 2-es és 3-as állítások is egyenértékűek.
Tehát $\operatorname{rang} A = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$.
Az előző fejezetben láttuk, hogy egy $m \times n$-es egyenletrendszer akkor kompatibilis határozatlan, ha az egymástól lineárisan független egyenletek maximális $n-k$ száma kisebb az ismeretlenek n számánál és $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A' = n-k$. Ebben az esetben k darab ismeretlent paraméternek tekintünk: $x_{n-k+1} = \lambda_1$, $x_{n-k+2} = \lambda_2$, ... ,$x_n = \lambda_k$ és az

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_{n-k} & = & c_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_{n-k} & = & c_2 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ a_{n-k}x_1 & + & a_{n-k}x_2 & + & \dots & + & a_{n-k}x_{n-k} & = & c_{n-k} \end{cases}$$

egyenletrendszerhez (esetleg egyenletek és ismeretlenek felcserélésével) jutunk, melyben minden egyenlet független a másiktól, ezért $\operatorname{rang} A_{n-k} = n-k \Leftrightarrow \det A_{n-k} \neq 0$ és ez a rendszer határozott, azaz az x_1, x_2, ... ,x_{n-k} ismeretlenek egyértelműen kifejezhetők a λ_1, λ_2, ... ,λ_k függvényében. Ha ezt a rendszert Cramer-rendszerként megoldjuk, megkapjuk az eredeti rendszer megoldását.
A rendszer k-szorosan határozatlan, megoldása k darab paramétertől függ. Mivel ez egy határozott rendszer (az $A_{n-k}x = c$ rendszer) következik, hogy $\det A_{n-k} \neq 0$, tehát az eredeti rendszer A mátrixának van nullától különböző $n-k$-ad rendű aldeterminánsa. Ha az ennél nagyobb rendű aldeterminánsait vizsgáljuk A-nak, ezek mind 0-val kell egyenlőek legyenek. Valóban ha lenne $n-k+i$-ed rendű ($i \in \mathbb{N}^*$) nullától különböző aldetermináns, akkor az ennek megfelelő rendszer kompatibilis határozott lenne, így a rendszerben lenne $n-k+i$ darab egymástól független egyenlet, ami azt jelentené, hogy $\operatorname{rang} A \geq n-k+i$, ami ellentmondás. Tehát kijelenthetjük a következő tételt:

2.2.6. Tétel. *Az $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ mátrix rangja: $\operatorname{rang} A = k$, akkor és csakis akkor, ha a mátrixnak van nullától különböző k-ad rendű aldeterminánsa és az összes k-nál nagyobb rendű aldeterminánsa nullával egyenlő.*

Tehát egy mátrix rangját determinánsok segítségével is megállapíthatjuk.
Szintén az előző fejezetben láttuk, hogy egy $m \times n$-es egyenletrendszer akkor és csakis akkor inkompatibilis, ha $\operatorname{rang} A < \operatorname{rang} A'$. Feltételezzük, hogy $\operatorname{rang} A = k$, ami azt jelenti, hogy A'-nek kell tartalmaznia olyan $(k+1)$-es rendű aldeterminánst, ami nem nulla, míg az A-nak nincs ilyen aldeterminánsa. Tehát ez az aldetermináns feltétlenül kell olyan elemeket tartalmazzon, amelyek nem A-ból valók. Tehát az egyik oszlop a szabadtagok közül kerül ki. Ha d_k az a $k-ad$ rendű aldeterminánsa A-nak, ami nem nulla, akkor a rendszer abban az esetben lesz inkompatibilis, ha az A'-nek van olyan d_{k+1} aldeterminánsa, amely nem nulla. Ezt megállapítandó a d_k determinánst kiegészítjük $(k+1)$-ed rendűvé az összes lehetséges módon úgy, hogy a szabadtagok megfelelő elemeivel és a mátrix fennmaradt sorainak megfelelő elemeivel szegélyezzük. A d_k determinánst fődeterminánsnak nevezzük, az $(n-k)$ darab szegélyezett determinánst karakterisztikus determinánsoknak.

2.2.7. Tétel. *A rendszer akkor és csakis akkor kompatibilis, ha az összes karakterisztikus determinánsa nulla. Ha van nullától különböző karakterisztikus determináns, akkor a rendszer inkompatibilis.*

Látható, hogy a rendszerek kompatibilitásának vizsgálata determinánsok kiszámolásán át fog történni. Ezért nagyon fontos, hogy determinánsokat minél egyszerűbben és gyorsabban tudjuk számolni. Az is látható, hogy külön fontosságú annak megállapítása, hogy egy determináns nullától különböző-e vagy sem. Ezért jó volna feltérképezni a determinánsok azon tulajdonságait, amelyek megkönnyítik a számolást, illetve azokat a tulajdonságokat, amelyek egy determináns nulla voltára engednek következtetni.
Vizsgáljuk meg a tulajdonságokat 3×3-as determinánsok esetében. Szeretnénk tudni, hogy az elemi transzformációk hogyan módosítják a rendszer mátrixának determinánsát. Ezért a következő kérdésekre keressük a választ. Hogyan változik az $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ mátrix determinánsa, ha

a) felcserélünk két sort

b) beszorzunk egy sort egy számmal

c) hozzáadjuk egy sorhoz egy másik sor α-szorosát.

a) Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ mátrixot.

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

Ha az első sort felcseréljük a másodikkal

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{32}a_{23} + a_{31}a_{22}a_{31} - \\ &\quad - a_{21}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{32}a_{21} - a_{33}a_{22}a_{11} = \\ &= -\det A \end{aligned}$$

Ha az első sort a harmadikkal cseréljük fel

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a_{31}a_{22}a_{13} + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{32}a_{23} - \\ &\quad - a_{11}a_{22}a_{33} - a_{23}a_{12}a_{31} - a_{13}a_{32}a_{21} = \\ &= -\det A \end{aligned}$$

A második és harmadik sor felcserélése a következőképpen végrehajtható: kicseréljük az első sort a másodikkal, azután az első sort a harmadikkal végezetül pedig az első sort a másodikkal, azaz

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \to$$

$$\to \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \det A_3$$

Mivel minden csere alkalmával a determináns előjele megváltozik ezért $\det A_3 = (-1)^3 \det A = -\det A$
Tehát két sor felcserélésével a determinánsnak csak az előjele változik meg.

2.2.1. Következmény. *Ha egy determináns két sora azonos, akkor a determináns értéke nulla.*

Valóban, ha felcseréljük a két egymással egyenlő sort a determináns előjele megváltozik. Másrészt mivel két azonos mennyiséget cseréltünk fel egymással, a determináns ugyanaz marad. Tehát $\det A = -\det A$, ahonnan $\det A = 0$.

b) A determinánsban szereplő hat szorzat tényezői olyanok, hogy minden sorból és oszlopból pontosan egy kerül mindegyik tényezőbe. Így ha egy sor minden elemét szorozzuk α-val, akkor a determináns is szorzódik α-val.

Tehát, ha egy mátrix valamely sorának elemeit szorozzuk egy számmal, az így kapott determináns az eredetinek α-szorosa lesz.

2.2.2. Következmény. *Ha egy determináns két sora arányos, akkor a determináns értéke nulla.*

Valóban, ha A az a mátrix, amelynek két sora arányos az $a_{i_1 j} = \alpha a_{i_2 j},\ j = \overline{1,3}$ egyenlőségek alapján $\det A_1 = \alpha \det A$, ahol A_1-et az A-ból úgy kapjuk, hogy az i_2-edik sort szoroztuk α-val. Ugyanakkor mivel az A_1-nek az i_1-edik és i_2-edik sora azonos $\det A_1 = 0$. Tehát $\alpha \det A = 0$ egyenlőségből $\det A = 0$

c) A kérdés megválaszolása érdekében vizsgáljuk meg mivel lesz egyenlő két olyan mátrix determinánsának összege, amelyek egy sorban különböznek csak egymástól.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = x_1 D_{11} + y_1 D_{12} + z_1 D_{13} + x_2 D_{11} + y_2 D_{12} + z_2 D_{13} =$$

$$= (x_1 + x_2) D_{11} + (y_1 + y_2) D_{12} + (z_1 + z_2) D_{13} = \begin{vmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 & z_1 + z_2 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

A determinánst úgy számoltuk, hog kifejtettük az első sor szerint. Mivel a többi sor elemei ugyanazok a két determinánsban, a megfelelő elemek algebrai komplementumai azonosak lesznek.

2.2.3. Következmény. *Ha egy determináns valamely sorához hozzáadjuk egy másik sor α-szorosát, akkor a determináns értéke nem változik meg.*

Valóban

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \alpha a_{21} & a_{12} + \alpha a_{22} & a_{13} + \alpha a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$= \det A + 0$ (a második determináns nullával egyenlő, mivel két sora arányos.)
A fenti két tulajdonságot csak az első sor esetén bizonyítottuk, hiszen más sorok esetén csak felcseréljük majd visszacseréljük azokat, így kétszeres előjelváltással az eredetihez jutunk vissza.

2.2.8. Megjegyzés. *Észrevehető, hogy a háromszögszabályban szereplő két ábra szimmetrikus a főátlóra nézve, ezért ha az elemeket a főátlóra nézve tükrözzük, a determináns értéke nem változik, azaz egy mátrix determinánsa egyenlő transzponáltjának a determinánsával:*

$$\det A = \det A' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2.2.9. Megjegyzés. *A 3×3 determinánsok tulajdonságai $n \times n$-es determinánsokra is érvényesek, hiszen mindig kifejthetjük olyan sor szerint, amit nem változtatunk és így mindig az eggyel kisebb rendű determinánsok megfelelő tulajdonságára vezetődik vissza a bizonyítandó tulajdonság.*

Egy mátrix inverzének kiszámítása

Az előző fejezetben láttuk, hogy egy mátrix inverzét, ha van, ki lehet számítani elemi sortranszformációkkal. Most azt szeretnénk vizsgálni, hogy determinánsok segítségével hogyan számítható ki A^{-1} (amnennyiben $\det A \neq 0$, mivel azt már láthattuk az előzőekben, hogy A akkor és csak akkor invertálható, ha $\det A \neq 0$).
Ennek érdekében számítsuk ki a következő szorzatokat:

1. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_{ij}$

2. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_{kj}$

Az egyes összeg az pont a determináns i-edik sora szerinti kifejtés, tehát

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} = \det A.$$

A kettes összeg nullával egyenlő, mivel D_{kj} úgy is felfogható, mint az A_{ki} mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának algebrai komplementuma, ahol az A_{ki} mátrixot úgy kaptuk, hogy A-ban a k-adik sor helyére az i-edik sort írtuk. Így $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_{kj} = \det A_{ki} = 0$, mivel A_{ki} két sora azonos.

2.2.10. Megjegyzés. *Mivel* $\det B = \det^* B$ *bármely B mátrix esetén, a tulajdonság oszlopok esetén is igaz.*

A fenti tulajdonságok alapján:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & ... & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & ... & D_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ D_{n1} & D_{n2} & ... & D_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A & 0 & ... & 0 \\ 0 & \det A & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \det A \end{pmatrix} = \det A I_n$$

és

$$\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & ... & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & ... & D_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ D_{n1} & D_{n2} & ... & D_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A & 0 & ... & 0 \\ 0 & \det A & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \det A \end{pmatrix} = \det A I_n$$

Ha $B = \dfrac{1}{\det A} A^*$, ahol $A^* = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & ... & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & ... & D_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ D_{n1} & D_{n2} & ... & D_{nn} \end{pmatrix}$ az A adjungált mátrixa, amit úgy kapunk, hogy az A transzponáltjának minden elemét helyettesítjük az algebrai komplementumával, akkor $AB = BA = I_3$, ami azt jelenti, hogy $B = A^{-1}$.
Tehát

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$$

Soroljuk fel tehát a determinánsok bizonyított tulajdonságait:

2.2.8. Tétel. *Ha $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, akkor:*

1. $\det A = \det A^t$.
2. *Ha A két sorát (vagy oszlopát) felcseréljük, akkor a determinánsnak csak az előjele változik meg.*
3. *Ha A egy sorában (vagy oszlopában) α-val szorozzuk az elemeket az így kapott mátrix determinánsa az eredeti determinánsa α-szorosa.*
4. *Ha A-nak van két azonos vagy arányos sora (vagy oszlopa) akkor a determináns nulla.*
5. *Ha A és B csak egy sorban (vagy oszlopban) különböznek egymástól, akkor* $\det A + \det B = \det C$*, ahol C-t úgy kapjuk A-ból, hogy a B-vel megegyező sorokat (oszlopokat) leírjuk és a B-től különböző sor (oszlop) elemeihez hozzáadjuk a B megfelelő elemeit.*
6. *Ha A egy sorában (oszlopában) hozzáadjuk egy másik sor (oszlop) α-szorosát, akkor a determináns nem változik.*
7. *Ha A egy sora (oszlopa) a többi sor (oszlop) lineáris kombinációja, akkor a determináns nulla.*
8. $AA^* = A^*A = (\det A)I_n$

A fenti tulajdonságok alapján $n \times n$-es rendszerek esetében is megszerkeszthetjük A inverzét és kijelenthetjük a Cramer-szabályt.

Ha az $n \times n$-es rendszert $Ax = b$ alakban írjuk, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $x, b \in \mathbb{R}^n$ és $\det A \neq 0$, akkor beszorozzuk A^{-1}-nel balról az egyenletet és azt kapjuk, hogy

$$x = A^{-1}b \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_{11}}{\Delta} & \frac{\Delta_{21}}{\Delta} & \cdots & \frac{\Delta_{n1}}{\Delta} \\ \frac{\Delta_{12}}{\Delta} & \frac{\Delta_{22}}{\Delta} & \cdots & \frac{\Delta_{n2}}{\Delta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\Delta_{1n}}{\Delta} & \frac{\Delta_{2n}}{\Delta} & \cdots & \frac{\Delta_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

és innen $x_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} b_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i \Delta_{ij}}{\Delta}$.

A számlálóban szereplő összeg éppen a Δ_j determináns kifejtése, ahol Δ_j-t úgy kapjuk Δ-ból, hogy a j-edik oszlop helyére a szabadtagokat helyettesítjük.

Ha az $Ax = b$ egyenlőséget csak A^*-gal szorozzuk, akkor a $\Delta x_j = \Delta_j$ összefüggésekhez jutunk ($j = \overline{1, n}$), tehát a tárgyalás is ezek szerint végezhető el. Ha ugyanis $\Delta = 0$, akkor a kompatibilitási feltétel $\Delta_j = 0$, $j = \overline{1, n}$ és ha ezek a feltételek teljesülnek, akkor végtelen sok megoldása van az egyenletrendszernek.

Kijelenthetjük a letárgyaltak alapján következő tételt:

2.2.9. Tétel. *Ha* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

a) Ha $\det A \neq 0$, *akkor* $\exists A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$

b) Az $Ax = b$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $x, b \in \mathbb{R}^n$ *egyenletrenszer megoldásai* $\det A \neq 0$ *esetén* $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$, *ahol* $\Delta = \det A$ *és* Δ_j*-t úgy kapjuk, hogy* Δ j*-edik oszlopának elemit a szabadtagokkal* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$*-el helyettesítjük.*

c) Ha $\det A = 0$ *és létezik olyan* $j = \overline{1, n}$, *amelyre* $\Delta_j \neq 0$, *akkor a rendszer inkompatibilis, míg ha* $\Delta = \Delta_j = 0$, $\forall j = \overline{1, n}$, *akkor a tárgyalás visszavezetődik egy kisebb rendszer tárgyalására.*

2.2.4. Összefoglalás

Összefoglalva tehát a fejezetben tárgyaltakat, egy lineáris egyenletrendszert kétféleképpen tárgyaltunk le: elemi transzformációk, illetve determinánsok segítségével. Egy $n \times n$-es lineáris egyenletrendszer esetében

1. módszer: A rendszer mátrixán és bővített mátrixán elemi transzformációkat hajtunk végre. Ha a rendszer mátrixa invertálható ezt addig tudjuk végezni, amíg a mátrix helyén az egységmátrixot hozzuk létre. Ez azt jelenti, hogy elértük azt az

állapotot, amelyben minden ismeretlent egyértelműen kifejeztünk. Tehát a kompatibilis határozott rendszert megoldottuk.
Ha a rendszer mátrixa nem invertálható, akkor nem tudjuk transzformációkkal azt az állapotot létrehozni, amelyben a mátrix helyén az egységmátrix jelenjen meg. Ebben az esetben egy vagy több tiszta nulla sorunk lesz a mátrixban a transzformációk elvégzése után. Ha a megfelelő sorok valamelyikében a bővített mátrix megfelelő eleme nem nulla, akkor a rendszer inkompatibilis (hiszen $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b_i,\ b_i \neq 0$). Ha minden ilyen sorban (feltételezzük, hogy k darab ilyen sor van) a bővített mátrix megfelelő eleme is nulla, a rendszer megoldható, de határozatlan, méghozzá k-szorosan határozatlan. K darab ismeretlent paraméternek tekintünk és a rendszer meg van oldva.

2. módszer: Kiszámoljuk a rendszer mátrixának determinánsát. Ha $\det A \neq 0$, a rendszer összeférhető, határozott, Cramer-rendszer és $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, $\forall i = \overline{1,n}$.
   Ha $\det A = 0$ kiszámoljuk a legnagyobb rendű nem nulla aldeterminánst (a rendszer fődeterminánsát) és képezzük az összes karakterisztikus determinánst. Ha ezek közt van olyan, ami nem nulla, akkor a bővített mátrix rangja nagyobb a mátrix rangjánál és a rendszer inkompatibilis.
   Ha minden karakterisztikus determináns nulla, akkor $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A'$ és a rendszer kompatiblis, határozatlan. Ekkor $\operatorname{rang} A = r$, akkor $n-k$ darab mellékismeretlenünk lesz, ezek paraméterek, az $(n-k)\times(n-k)$-as határozott rendszert ezen paraméterek függvényében megoldjuk.

2.2.11. Megjegyzés. *Ha az egyenletrendszer több ismeretlent tartalmaz, mint egyenletet, kiegészítjük $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$ típusú egyenletekkel, úgy, hogy $n \times n$-es egyenletrendszerré váljon és ugyanígy tárgyaljuk.*
Ha az egyenletrendszer több egyenletet tartalmaz, mint ismeretlent, minden egyenletet kiegészíthetünk $0x_i$ tagokkal, amíg $n \times n$-es egyenletrenszert kapunk és így tárgyaljuk.

2.2.12. Megjegyzés. *A fenti tárgyalás természetesen csak akkor érvényes, ha $\mathbb{R}^n$-ben adott rendszerről van szó (vagy $\mathbb{R}^n$-ben), a $\mathbb{Z}^n$-ben megodható egyenletrendszerek esetében a megoldhatóságba különböző más, például oszthatósági problémák is beleszólhatnak. Ennek illusztrálására oldjuk meg a következő feladatot.*

Feladat

Egy szigeten 13 szürke, 15 barna és 17 zöld kaméleon él. Ha két különböző színű kaméleon találkozik, mindketten a harmadik színre változtatják bőrük színét. Lehetséges-e, hogy egy idő múlva minden kaméleon azonos színű legyen? Hát akkor, ha 19 szürke, 13 barna és 20 zöld kaméleon van?
Megoldás:
A matematikai leírásban a problémát két dolog okozza: az első az, hogy háromfajta találkozás van, a második az, hogy ezeknek a találkozásoknak nem ismerjük a sorrendjét. Viszont ha elképzeljük, hogy csak a szürke kaméleonok számát számláljuk, akkor gyakorlatilag az aktuális kaméleonszámból mindig kivonunk egyet, vagy hozzáadunk kettőt. Így

a végeredmény nem függ a műveletek sorrendjétől, csak attól, hogy melyiket hányszor hajtjuk végre. Ez azt jelenti, hogy a különböző típusú találkozások számait és ezek közti összefüggéseket megállapítva egy egyenletrendszerhez jutunk, amelynek megoldhatóságát kell tanulmányoznunk.
Legyen a a barna és zöld, b a szürke és zöld illetve c a barna és szürke kaméleonok találkozásainak száma. A találkozások sorrendjétől függetlenül a végén $13 + 2a + b - c$ szürke, $15 + 2b - a - c$ barna és $17 + 2c - a - b$ zöld színű kaméleon lesz. Ha minden kaméleon azonos színű, akkor az előbbi számok közül kettő 0, a harmadik 45.
Így a következő egyenletrendszereket kellene tanulmányozni:

- $\begin{cases} 13 + 2a - b - c = 0 \\ 15 - a + 2b - c = 0 \\ 17 - a - b + 2c = 45 \end{cases}$

- $\begin{cases} 13 + 2a - b - c = 0 \\ 15 - a + 2b - c = 45 \\ 17 - a - b + 2c = 0 \end{cases}$

- $\begin{cases} 13 + 2a - b - c = 45 \\ 15 - a + 2b - c = 0 \\ 17 - a - b + 2c = 0 \end{cases}$

Mindhárom rendszer mátrixának determinánsa:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Ődeterminánsnak választhatjuk a $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ determinánst, tehát $\operatorname{rang} A = 2$.
Az egyetlen karakterisztikus determináns:

- $d_{kar_1} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -13 \\ -1 & 2 & -15 \\ -1 & -1 & 28 \end{vmatrix}$

- $d_{kar_2} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -13 \\ -1 & 2 & 30 \\ -1 & -1 & -17 \end{vmatrix}$

- $d_{kar_3} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -13 \\ -1 & 2 & -15 \\ -1 & -1 & -17 \end{vmatrix}$

a három rendszer esetén és mindegyik nulla. Tehát a bővített mátrix rangja minden esetben egyenlő a mátrix rangjával, a rendszer kompatibilis és határozatlan a valós számok körében. Az első rendszer megoldásait a

$$\begin{cases} 2a - b = \lambda - 13 \\ -a + 2b = \lambda - 15 \end{cases}$$

rendszer megoldásai adják. Mivel λ-nak is és b-nek is egésznek kellene lennie (hiszen ők találkozás számokat jelölnek) a rendszernek nincs megoldása.
Tehát innen látszik, hogy az egyenletrendszerek esetében letárgyalt kompatibilitási tulajdonságok $\mathbb{R}$-beli együtthatókkal, $\mathbb{R}$-ben megoldandó egyenletekre vonatkoznak csak.

2.2.13. Megjegyzés. *Ha a rendszerek felírása után azonnal valamely rendszer bármely két egyenletét kivonjuk egymásból, akkor ellentmondáshoz jutunk, mert egy* 3*-mal osztható szám* 2 *vagy* 4 *kellene legyen. Tehát nem lehetséges, hogy a kaméleonok azonos színűek legyenek.*

2.2.14. Megjegyzés. *Ez azt mutatja, hogy két különböző (rögzített) színhez tartozó kaméleonok számának különbsége invariáns a* 3*-mal való osztás maradékára nézve.*

A második esetben a

$$\begin{cases} 19 & - & 2a & - & b & - & c & = & 0 \\ 13 & - & a & + & 2b & - & c & = & 0 \\ 20 & - & a & - & b & + & 2c & = & 52 \end{cases}$$

egyenletrendszerhez és két társához jutunk. Ugyanúgy végigoldva, mint az előbb az $a = \lambda - 2$, $c = \lambda + 15$, $b = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ megoldásokhoz jutunk. Tehát az $a = 0$, $b = 2$, $c = 17$ esetén például elérjük a kívánt állapotot. Ebben az esetben tehát elérhető, hogy csak egyszínű kaméleonok éljenek a szigeten. $\square$

Irodalomjegyzék

[1] Sz. András, Ö. Nagy: : *Kíváncsiság vezérelt matematika oktatás*, Új utak és módok az oktatásban, 2010.

[2] Sz. András, J. Szilágyi: *Modelling drug adminisration regimes for asthma: a Romanian experience*, Teaching Mathematics and its Applications, 2010.

[3] Nagy József: *Competence based criterium oriented pedagogy*, Mozaik Kiadó, Szeged, 2007.

[4] Sz. András, H. Csapó, V. Balázs, J. Szilágyi: *Matematika-kísérleti tankönyv a XI. osztály számára*, Státus, Csíkszereda, 2002.

[5] P. Galbraith, W. Blum: *Modelling and applications in mathematics education*, the 14th ICMI study.

[6] J. M. Gago, J. Ziman, P. Cero and others : *Increasing human resources for science and technology in Europe*,UE report, 2004.

[7] M. Rocard, P. Csermely, D. Jorde, H. Walberg-Henriksson, V. Hemmo: *Science Education Now: A renewed pedagogy for the future of Europe*,UE report, 1981.

[8] *Romania Educatiei,Romania cercetarii*, raportul comisiei prezidentiale, 2007.

[9] *Teaching Mathematics in seven countries*, Results from the TIMSS 1999 Video Study,NCES,2003.

[10] J. L. Dorier, A. Sierpinska: *Research into the teaching and learning of linear algebra*, ICMI study, 275-282, Kluwer Academic Publishers,2001.