UNIVERSITATEA "BABEŞ-BOLYAI", CLUJ-NAPOCA

DEPARTAMENTUL PENTRU PREGĂTIREA PERSONALULUI DIDACTIC
FACULTATEA DE MATEMATICĂ

LUCRARE METODICO-ŞTIINŢIFICĂ PENTRU OBŢINEREA GRADULUI DIDACTIC I

COORDONATOR ŞTIINŢIFIC:

LECT. DR. ANDRÁS SZILÁRD

CANDIDAT:

ÖRDÖG ZOLTÁN- JÓZSEF

Gimn. „Florea Bogdan" Reghin

SERIA

2010-2012

UNIVERSITATEA “BABEŞ-BOLYAI”, CLUJ-NAPOCA

DEPARTAMENTUL PENTRU PREGĂTIREA PERSONALULUI DIDACTIC

LUCRARE METODICO-ŞTIINŢIFICĂ PENTRU OBŢINEREA

GRADULUI DIDACTIC I

DEZVOLTAREA NOȚIUNILOR DE TEORIA MULȚIMILOR ÎN CICLUL GIMNAZIAL PRIN METODA DESCOPERIRII

COORDONATOR ŞTIINŢIFIC:

LECT. DR. ANDRÁS SZILÁRD

CANDIDAT:

ÖRDÖG ZOLTÁN- JÓZSEF

Gimn. „Florea Bogdan” Reghin

SERIA

2010-2012

BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM - KOLOZSVÁR

DIDAKTIKAI TOVÁBBKÉPZŐ INTÉZET

ELSŐ FOKOZATI TUDOMÁNYOS – MÓDSZERTANI DOLGOZAT

HALMAZELMÉLETI FOGALMAK KIALAKÍTÁSA ÁLTALÁNOS ISKOLÁBAN KÍVÁNCSISÁGVEZÉRELT MÓDSZEREKKEL

SZAKIRÁNYÍTÓ:

Lekt. Dr. ANDRÁS SZILÁRD

KÉSZÍTETTE:

ÖRDÖG ZOLTÁN- JÓZSEF

„Florea Bogdan" Gimnázium

SZÁSZRÉGEN

2010-2012

CUPRINS

CAPITOLUL I: Introducere…………………………………………………........8

1.1. Motivarea alegerii temei ………………………………….……….……..8

1.2. Locul şi rolul matematicii ………………………………………………...9

CAPITOLUL II: Importanța operaționalizării. Obiective pe termen lung...........11

2.1. Formarea motivării, colaborarea cu elevul……………………..………….11

2.2. Importanța operaționalizării..12

2.3. Obiective pe termen lung...15

CAPITOLUL III: Predarea numerelor întregi cu ajutorul modelelor matematice...17

3.1.Modelul discurilor.. 17

3.2. Adunarea numerelor întregi...20

3.3. Scăderearea numerelor întregi..23

3.4. Înmulțirea numerelor întregi..26

3.5. Împărțirea numerelor întregi..33

CAPITOLUL IV: Cercetarea……………………………………..……….……40

4.1.Motivarea cercetării…………………………………………………….40

4.2. Obiectivele cercetării…………………………………………….……40

4.3. Ipotezele cercetării……………………………………………….………….41

4.4. Desfăşurarea experimentului didactic..41

4.4.1. Testul de anul trecut cu grupul de control..................................42

4.4.2. Testul de anul acesta cu grupul experimental.............................46

4.4.3. Comparația dintre cele două teste...48

4.4.4. Compararea mediilor între grupe..49

CAPITOLUL V: Concluzii, propuneri...52

Bibliografie..55

Anexe...56

TARTALOMJEGYZÉK

I. FEJEZET: Bevezetés..8

1.1. A témaválasztás indoklása...8

1.2. A matematika helye és szerepe 9

II. FEJEZET: Az operacionalizálás fontossága. Hosszú távú célkitűzések. 11

2.1. A motiváció kialakítása, a diák közreműködése..................................11

2.2. Az operacionalizálás fontossága...12

2.3. Hosszútávú célkitűzések...15

III. FEJEZET: Az egész számok tanítása matematikai modellek segítségével.....17

3.1. A korongos modell...17

3.2. A egész számok összeadása...20

3.3. A egész számok kivonása...23

3.4. A egész számok szorzása..26

3.5. A egész számok osztása..33

IV. FEJEZET: A KUTATÁS MÓDSZERTANA..40

4.1. A kutatás indoklása..40

4.2 A kutatás célkitűzései..40

4.3. Hipotézisek...41

4.4. A kutatás lebonyolítása...41

4.4.1. Tavalyi VI-ik osztály felmérése (kontroll csoport)..............................42

4.4.2. Idéni VI-ik osztály felmérése (kísérleti csoport)..................................46

4.4.3.Tavalyi és idéni teszt összehasonlítása..48

4.4.4. A két populáció átlaga kétmintás t próbával.......................................49

V. FEJEZET: Következtetések, javaslatok...52

Irodalomjegyzék...55

Mellékletek..56

I. FEJEZET

Bevezetés

„ A természet nagy könyvében csak az tud olvasni, aki ismeri azt a nyelvet, amelyen e könyv írva van, és az a nyelv: a matematika.” (Galileo Galilei)

1.1 A témaválasztás indoklása

Korunk tudományos fejlődése a gondolkodás nevelését minden eddigi történelmi kornál erőteljesebben igényli és kiemelkedő társadalmi feladattá teszi. A tudományos fejlődés üteme annyira meggyorsult, hogy feltehetően egy nemzedék életében bekövetkezhet a szakmai ismeretek és munkaformák elavulása, így az újraképzés vagy átképzés szükségessé válik. Éppen ezért az oktatás és nevelés a sokoldalú és általános képzést kell hogy előtérbe helyezze, olyan embereket kell hogy neveljünk, akik képesek lesznek lépést tartani ezzel a fejlődéssel.

Mint matematika tanárok, diákjainkat a matematikai logika gondolkodásmódjára kell ráállítani, fel kell készíteni őket, hogy önállóan tudjanak alkotni, olyan feladatokat is tudjanak megoldani, ami új számukra.

Mindezek a dolgok, csak akkor valósíthatóak meg ésszerűen, ha nem a részletismeretek mechanikus elsajátításával időzünk el, hanem a lényeglátást, az önálló problémamegoldást helyezzük előtérbe.

A matematika mindinkább behatol a tudomány minden ágába, amely lehetővé teszi a különböző ismeretek matematikai fomában való megfogalmazását. A matematikai ismeretek, gimnáziumban való kialakulásában fontos helyet foglal el a számfogalom kialakítása és a műveletek helyes elsajátítása. A számoknál fontosabb, alapvetőbb, mindent átható fogalma a matematikának, a halmazok fogalma.

Ha a matematikát a matematikai gondolkodás irányából nézzük és nem az ismeretanyag irányából, akkor a logika az, ami a matematikát áthatja. A halmazok és a logika nagyon szoros kapcsolatban vannak egymással, a halmazokon át a logikai gondolatokat megfoghatóvá és hozzáférhetővé tehetjük a diákjaink számára.

Dolgozatomban, egy logikus, egyszerű, ugyanakkor hatékony matematikai modellt, a korongos matematikai modellt használom az egész számokkal végzett műveletek tulajdonságainak elsajátítására és megértésére.

Az általános iskolában tanított matematika egyik alapvető célkitűzése a természetes, egész és racionális számokkal végzett műveletek tulajdonságainak elsajátítása.

Miért lenne szükség egy ilyen modellre? Az igazság az, hogy az összeadás, a kivonás, a szorzás illetve osztás, a tananyagban mint megtanítandó algoritmus, szabály jelenik meg. Ennek természetesen megvan az előnye is, mert aki gyorsan megérti, átlátja és kevés gyakorlással elsajátítja a szükséges technikákat, az esetleg foglalkozhat fontosabb dolgokkal. Viszont a tapasztalat azt mutatja, hogy ezt az előnyt az esetek nagy részében sajnos nem sikerül kiaknázni.

A hátrány az lenne, hogy a legtöbb diáknak a matematikáról hamis képe alakulhat ki, hisz nem értheti, hogy a matematika nem csak a végeredményt jelenti: a kész szabályt, a tételeket, a fogalmakat, hanem a matematikai tevékenységet is magába foglalja, amelynek végeredményeként a késztermékek megjelennek.

Egy másik fontos dolog a korongos modell használatában, az egész számokkal végzett műveletek tulajdonságainak elsajátítására az, hogy nem csak a dolgok technikai oldalára koncentrálunk, így nem űzzük számon a gondolatiságot. A műveletek elvégzése, a rövidített számítási képletek betanulása, a különböző szabályok bemagolása nem garantálja a gondolkozási mechanizmusok fejlődését. Koncentrálnunk kell a gondolkodási mechanizmusok fejlesztésére.

Dolgozatomban nemcsak azt mutatom be, hogy az egész számokkal végzett algoritmusok hogyan működnek és mire jók, hanem azt is, hogy miért működnek úgy, ahogyan működnek. Ha ezt sikerül megtenni a matematika óráinkon, akkor a diákjaink nemcsak tudni fogják azt amit tanítunk, hanem érteni is fogják azt.

1.2. A matematika helye és szerepe

A mai társadalom embere bármilyen területen tevékenykedjen szüksége van egy bizonyos matematikai műveltségre. Az utóbbi évtizedben nagyon sok változás történt a matematikai oktatás területén. A jelenlegi tendenciák különösen nagy fontosságot tulajdonítanak a matematikai gondolkodás és a kreativitás fejlesztésére. A diákoknak nagyobb megnyílvánulási szabadság van megengedve, önkibontakozási lehetőség van megadva, biztosítván így a tanulási motiváció kialakulását és fejlesztését.

Korunk egyik legjellemzőbb vonása a tudomány és technika hihetetlenül gyors fejlődése. Ebben a felfele ívelő folyamatban a matematika igen jelentős helyet foglal el, ugyanis valamennyi tudományágnak és a technikának nélkülözhetetlen segédeszköze. Természetes tehát, hogy az iskolai matematika oktatást a fejlődés tartalmának és ütemének megfelelően világviszonylatban is korszerűsíteni kellett. A matematika sokrétű felhasználása szükségessé teszi megkülönböztetett matematikai gondolkodásmód kialakítását is. Ez nem azt jelenti, hogy az emberi gondolkodást leszűkítjük valamilyen sajátos területre, s hogy tagadjuk a humán tudományok jelentőségét. Ellenkezőleg: a matematikai gondolkodás az emberi gondolkodásnak csak az egyik arculata, és ennek gazdagítása, fejlesztése más területekre is termékeny módon kihat. Ugyanakkor a matematikai gondolkodás szorosan összefonódik a logikus gondolkodással, egymás nélkül elképzelhetetlenek. Már az óvodában és az elemi osztályokban a logikus gondolkodásnak olyan alapvető struktúráit kell tanulóinkban kialakítanunk, amelyek hatékonyan segítik majd őket a továbbtanulásban, a társadalomba való beilleszkedést is beleértve. Ez egyben a matematika tanítás-tanulás formatív szerepének helyes értemezését és valóraváltását is jelenti. A matematika az összes tudományok közül a legnagyob pontossággal használja a fogalmakat. A kisgyermek már az óvodában, majd az iskolában egész sor fogalommal találkozik. Ezeket, életkori sajátosságainak megfelelően, szemléletes úton, cselekvések végzésével ismeri meg (halmaz, elem, természetes szám, összeadás, kivonás, összehasonlítás stb.).

A matematikát nem csak szakértők tanulják, hanem bármilyen személy alapintelligencia szintjének kialakításához hozzajárul. A matematikát nem azért tanuljuk és tanítjuk, mert kell, hanem azért, mert majd később fel tudjuk használni a gyakorlatban.

Minden országban, minden társadalomban döntő kérdés kéne legyen, hogy mire nevel, mit tanít az iskola. Ebből az is következik, hogy az oktatás tartalmát, formáját, követelményeit, céljait a társadalom elvárásai határozzák meg. A tanárok bizonyos tantervi kínálatokból választhatnak, melyek számukra, az iskola és a tanulók számára a legmegfelelőbb, s ezeket adaptálhatják a helyi körülményekre.

Azonban bármilyen társadalmi rendszerben, akármilyen követelményeknek megfelelően is tanítunk, ha ezt nem céltudatosan, célorientáltan végezzük, nagy valószínűséggel eredménytelen lesz a tanítás. A matematikatanításban talán még a többi tárgynál is erősebben kell érvényesülni a céltudatosságnak.

II. Fejezet

Az operacionalizálás fontossága. Hosszútávú célkitűzések

2.1. A motiváció kialakítása, a diák közreműködése

Objektív pedagógiai törvényszerűség, hogy senkit sem lehet semmire megtanítani saját aktív közreműködése nélkül. Ez a közreműködés különböző mértékű lehet. Ha az órán folyó közös munkában minden tanuló intenzíven bekapcsolódik, akkor azt szoktuk mondani, hogy az osztály aktív. Az egyes tanulókat tanulmányi munkájuk intenzitásának foka szerint szokták minősíteni aktívnak vagy passzívnak, pedig ez nem ennyire egyszerű dolog. Lehet egy tanuló aktív akkor is, ha munkáját csupán külső indítékok – pl. büntetéstől, rossz érdemjegytől való félelem – hatására végzi nagy igyekezettel. Valódi aktivitásról akkor beszélhetünk tehát, ha a külső késztetések mellett belső indítékok is jelentős szerepet játszanak tevékenységében. Olyan belső hajtóerők, motívumok aktivizálják, mint például egy adott tantárgy iránti érdeklődés. Ha ez működik, ha ezt sikerült a tanárnak a gyerekben felkelteni, akkor beszélhetünk valójában motivációról, valóban aktív gyerekről vagy osztályról. Ha a tanulói tevékenység motivált, akkor már nincs szükség állandó ösztökélésre, a tanuló enélkül is igyekszik minél tökéletesebben teljesíteni feladatát. Így tevékenysége nem csupán a tanár vagy mások akaratából, hanem számottevő mértékben a saját akaratából is végzett, belsőleg motivált tevékenység lesz.

A tanári munkának talán ez a legnehezebb része. Nagyon nagy kihívás számára a diákok pozitív motivációjának kialakítása, mert erre nincs szabály, nincs egységes eljárás, nincs minden tanuló esetében alkalmazható módszer. Minden gyerek egy külön világ, s minden külön kis világhoz a tanárnak meg kell találnia a kulcsot annak érdekében, hogy ez a világ megnyíljon, hogy oda a tanár beléphessen, hogy elfogadtassa magát és tantárgyát, hogy aztán a továbbiakban a gyerek a tanítás - tanulás folyamatában partnere legyen a tanárnak, az oktatásnak pedig aktív alanya legyen és ne passzív tárgya.

A tanulásnak lehetnek „külső" és „belső" indítékai. Minél nagyobb szerepet játszanak a belső indítékok, motívumok, tehát minél motiváltabb a gyerek, annál nagyobb az aktivitása, önállósága a tanulásban, és ennek következtében eredményesebb a tanulás. Szeretném megjegyezni, hogy a tanulást meg kell különböztetni az emlékezetbe véséstől, hisz nagy tévedés volna a tanulás egész folyamatát az emlékezés kategóriájába utalni.

A didaktika szempontjából csak azok a felfogások fogadhatók el, amelyek a tanulás fogalmát tágabban, teljesebben értelmezik. Különösen igaz ez a mai, új szempontú oktatáselmélet irányelveit figyelembe véve. Ezek alapján a gyerekkel nem terméketlen információhalmazt kell elsajátíttatni, hanem képességeket kell a tanárnak kifejleszteni a tanulóban. Olyan képességeket, amelyek birtokában a gyerek a gyakorlatban alkalmazni tudja majd a megtanultakat.

Az anyag teljes megértéséhez speciális, manuális tevékenységek szükségesek. Ezeket a gyerekekkel gyakoroltatni kell, s az ilyen jellegű gyakorlatok kitalálásához tanári kreativitás szükségeltetik, így lesz az óra érdekes, izgalmas, a diák pedig érdekelt, motivált, végső soron pedig nyertes. Olyan speciális tevékenységekre, gondolkodási műveletek egész sorára gondolok itt, mint: vizualizálás, összehasonlítás, analízis, szintézis, általánosítás, absztrakció, konkretizálás, stb.- vagyis olyan műveletekre, amelyek segítségével az ismeretanyag tartalmába egyre mélyebben behatolhatnak a diákok, és a benne lévő összefüggéseket a tanár is mind sokoldalúbban tárhatja fel.

2.2. Az operacionalizálás fontossága

A számelmélettel való foglalkozás kiválóan alkalmas arra, hogy felkeltse a tanulók matematika iránti érdeklődését, bemutassa a matematika szépségeit, titkait, kutatásra ösztönözze a tehetséges tanulókat. A tanulók számára érthető és szellemi erőfeszítést igénylő feladatok megoldása során fejlődik a problémalátó és problémamegoldó képesség, számolási készség, kreativitás (problémaérzékenység, ötletgazdagság, eredetiség, rugalmasság).

Az iskola felszereltsége, a tanulók szintje, a tanárok felkészültsége megszabja, hogy melyik osztályban lehet és milyen szinten csoportmunkát alkalmazni, hol van lehetőség és szükség egyéni foglalkoztatásra, hol képes a tanuló önálló munkára és hol tud csak tanári segítséggel továbbhaladni.

A műveletesített/operacionalizált követelmény kifejezésnek két jelentése van:

- Általános jelentés: valamely követelményt műveletekre, tevékenységekre, megfigyelhető megnyilvánulásokra írunk át;
- technikai, amely azt jelenti, hogy a követelményt mérhető és megfigyelhető viselkedésformaként fogalmazzuk meg.

A kétféle értelmezés között az az alapvető különbség, hogy a technikai értelem feltételezi az értékelési kritérium megjelölését is, amely pontosítja, hogy milyen szintű elvárást támasztunk a gyermek teljesítményével szemben. A műveleti követelmények konkrétak, és sajátos tanulási helyzetekben valósíthatók meg. A specifikus és az általános követelmények alapján dolgozhatóak ki úgy, hogy a pedagógus alkalmazza a megfelelő műveletesítési, konkretizálási technikákat. Az általános és specifikus követelményektől eltérően, amelyek adottak, s amelyeket a pedagógus tervezéskor, a tanítás irányításakor és értékelésekor vonatkoztatási rendszerként alkalmaz, a műveletesített követelményeket a műveletesítési technikák alkalmazásával minden tanórára, illetve minden tanulási tevékenységre ki kell dolgozni a tanítás/tanulási tartalmainak megfelelően.

Tág értelemben a műveletesítés valamely általános és elvont fogalomnak vagy kijelentésnek a konkrét mutatóit és jellemzőit azonosítja, pontosítja. Minden esetben alkalmazzuk, amikor az elvont felől közelítünk a konkréthoz. A műveletesítés ugyanakkor azoknak a *kritériumoknak és mutatóknak* a meghatározására is vonatkozik, amelyek segítségével valamely tevékenységet vagy viselkedést konkrétizálunk, műveletekké írjuk át.

A műveletesítés pedagógiai értelemben valamely követelmény mutatóinak és kritériumainak a meghatározása, amelyeknek alapján a követelmény műveletként írható le. Valamely követelmény műveleti jellegét úgy biztosíthatjuk, illetve úgy dönthetjük el, ha két kritériumot szem előtt tartunk: *performancia/teljesítmény* (a viselkedésbeli kritérium) és *intellektuális képesség* (a kompetencia kritériuma). Mivel a tanulás valamely tartalma adott, a műveletesítéssel azt a mutatót kell meghatározni, pontosítani, amelynek segítségével megragadható és értékelhető, hogy a tanuló fejlődött-e, személyiségstruktúrájában létrejött-e valamilyen változás az adott tanulási szakasz végén. A legkonkrétabb mutatója a tanulási teljesítménynek a viselkedéslélektani (behaviorista) szemlélet szerint maga a viselkedés, azaz a tanuló látható megnyilvánulása.

A műveleti követelmény tehát azt a végeredményt vagy viselkedést írja le, amelyet egy adott tanulási szakaszt követően elvárunk a tanulótól. Éppen ezért a műveleti követelményeket záró, szakaszvégi követelményeknek is nevezzük. Csak abban az esetben lehet megtervezni a tartalmakat, s főként a tanítási szituációkat, illetve az elvárásokat, ha az adott tanulási szakasz végén elvárható viselkedést egyértelműen és expliciten meghatározzuk, s ezt követően választjuk ki a legmegfelelőbb tanítási eljárásokat, tervezzük meg a tanulási szituációkat. A gyermektől elvárt viselkedést úgy kell megragadnunk, hogy az megfigyelhető és különböző értékelési eszközök felhasználásával mérhető is legyen.

A specifikus követelményekhez hasonlóan az operacionalizált követelményeknek is **két dimenzió**ja van:

- **tartalmi** (információk, ismeretek stb.), azaz a tanítás tárgya;
- **formai vagy műveleti**, amely a tanuló tanulási tevékenységére vonatkozik. A tanulási tevékenységre vonatkozó utasításnak tartalmaznia kell azt, hogy a tanulónak/gyermeknek milyen tevékenységet kell végeznie, mit kell tennie az adott tartalommal (memorizálja a meghatározást, alkalmazzon egy algoritmust stb.)

Valamely követelmény tartalma nem azt jelenti, hogy megismételjük a leckében/feladatban lévő gondolatokat, ismereteket, hanem arra a logikai műveletre és/vagy mentális képességre vonatkozik, amellyel az adott ismeret elsajátítható.

A követelményben nem az információt, ismeretet, gondolatot, megoldandó problémát nevezzük meg, hanem azt a logikai műveletet és vagy mentális képességet, amelyet működtetni/aktiválni kell, s amely meghatározza, hogy a gyermeknek mit kell tennie az adott tartalommal. Valamely követelmény formai oldala, megformáltsága a következő pedagógiai normák betartását feltételezi:

- A követelmény nem a pedagógus tevékenységét írja le, hanem azt a változást, amelyet elvárunk a tanítás következményeként. Az előzetes tanulói tudáshoz viszonyított változásnak a tanulói tudásban, annak rendszerében, struktúrájában kell megnyilvánulnia.
- A követelménynek műveletesítettnek kell lennie, olyan *tevékenységeket megnevező igéket* kell tartalmaznia, amelyek egyértelműen leírják, mit kell tennie a tanulónak: megkülönböztet, azonosít, megold, összehasonlít, felsorol stb.
- Minden konkrét követelmény egyetlen műveletet céloz meg, ennek köszönhetően mérhető és értékelhető a megoldás/megvalósítás szintje;
- A követelménynek rövidnek kell lennie azért, hogy könnyebben azonosíthassuk az adott művelet sajátos tartalmát;
- A követelményeknek logikailag meg kell felelniük a tartalom és a tanulási szituációk logikai struktúrájának.

2.3. Hosszútávú célkitűzések

A hagyományos matematikaoktatással szembeni kritikák leggyakrabban a matematikaoktatás módszertanát és céljait (céltalanságát) támadják. A 20. század második felében meginduló matematikaoktatási reformmozgalmak közös törekvése, hogy az iskolai matematikaoktatás a gondolkodás fejlesztésére, az értelem kiművelésére koncentráljon, valamint az életben hasznosítható tudást közvetítsen. Ezek a törekvések azt is jelentik egyben, hogy a korábban szinte kizárólag tartalmi reformok helyett a figyelem a matematikaoktatási folyamatok, a tanulók felé irányul. Romberg szerint a tantárgyi változások egyik motorja az üzleti élet lehet. Azaz egy késleltetett visszacsatolás által a közoktatásnak rá kell döbbennie arra, hogy napjaink munkaerőpiacán az elemzõk, problémalátók, megoldók iránt nagy a kereslet, ezen képességeknek nagy a piaci értéke, tehát az oktatásban egyre nagyobb hangsúlyt érdemes fektetni az ilyen jellegű képességek kiművelésére. Számos ország matematika oktatása jelentős változásokon ment át az elmúlt 50 évben.

A számos országban elterjedt irányzat a matematikát zárt, deduktív rendszerként, a matematikai struktúrákat szem előtt tartva, a szaknyelv és a szimbólumok használatát hangsúlyozva, az absztrakt, felsőbb matematikának az általános és a középiskolába való levitelével tanította. Kritikája az az egységes tapasztalat, hogy az axiomatikus felépítésnek nincs létjogosultsága a középiskolában, csak a lokális logikai rendezésnek.

Hollandiából indult ki a „Realisztikus matematika” mint oktatási irányzat, melyben a „realisztikus” jelző nem szükségszerűen jelent valóságból vett jelenségeket, objektumokat, hanem a tanuló szempontjából abban az értelemben reális, realisztikus, hogy „elképzelhető, jelentéssel bíró” a számára. A fent már idézett Pólya György nevéhez kötődik a problémaorientált, felvető matematikaoktatás, mely a nyolcvanas években leginkább az USA-ban terjedt el. De például Norvégiában is a középiskola utolsó három évében „problémaalkotás, modellalkotás” fejezetek szerepelnek a tankönyvekben, ahol a modellalkotás elnevezés a gyakorlati jellegű problémákra utal. Angliában a 10 és 11-ik osztályokban egy tisztán matematikai probléma mellett egy alkalmazási problémát is önállóan fel kell dolgozniuk a diákoknak, a valós szituáció problémafelvetéseiből, problémamegoldásaiból esszét írnak.

A matematikaoktatás céljai és feladatai közül leginkább a megszerzett matematikatudás „világi”, iskolán kívüli használhatóságát, valamint az önálló gondolkodás, problémalátás fejlesztését, a problémamegoldói stratégiák elsajátításának fontosságát kell hogy hangsúlyozza.

Tanárként pontosan tudatában kell lennünk annak, hogy az általunk választott módszerek milyen másodlagos információt közvetítenek az elsődleges tárgyi tartalmon túl. Hosszú távon ugyanis ezek a másodlagos információk nagy mértékben hozzájárulnak a gondolkodási mechanizmusok fejlődéséhez, a véleményalkotáshoz.

A kíváncsiságvezérelt oktatás egyik alapvető trükkje, hogy valamilyen konkrét tevékenység során olyan, kezdetben másodlagosnak minősíthető jelenségek váljanak láthatóvá, amelyek további kérdések, motivációk forrását alkotják. Olyan ez, mint a turázás, nemcsak a végcél a fontos, gyakran menet közben fedezzük fel a szép helyeket.

III. FEJEZET

Az egész számok tanítása matematikai modellek segítségével

„A matematika a tudományok királynője és a matematika királynője a számelmélet.”

(Carl Friedrich Gauss)

3.1. A korongos modell

Az informális eljárásoktól a formális matematikához vezető úton alapvető szerepet játszanak a modellek. A modell szerepét betöltheti egy szituáció, szemléltetés, egy meghatározott írásmód. Ahhoz, hogy a modellek valóban az oktatás serkentői, ösztönzői legyenek, két fontos tulajdonsággal kell rendelkezniük:

- Olyan kontextusban kell gyökerezniük, amelyek elképzelhetők, ismerősek a tanulók számára.
- A modelleknek rugalmasnak kell lenniük abból a célból, hogy absztraktabb szinten is felhasználhatók legyenek.

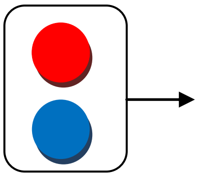
Az általános iskolában tanított matematika egyik alapvető célkitűzése a számokkal végzett műveletek tulajdonságainak az elsajátítása, a műveletek elvégzésére vonatkozó algoritmusok begyakorlása és a számolási készség funkcionálisan integrált szintre való fejlesztése. Ebben a fejezetben az egész számoknak az alapműveletekre vonatkozó algoritmusukat próbáljuk újra felfedezni, konkrét tárgyi tevékenységekre építve, alkalmazva a korongos modellt.

A következőkben az egész számokkal végzett műveletek megértésére a kétszínű : piros és kék korongokat fogjuk használni.

Az alábbi táblázatban a piros és kék korongnak megfeleltetjük az +1 és -1 számértékeket:

Számérték	+1	-1
Szimbólum		

A szimbólumokkal való reprezentációt használva értelmezzük a következőt: egy piros és egy kék korong együtt nullát eredményez:



0 (nulla)

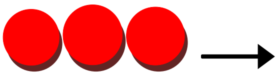
Például mondhatjuk a diákoknak, hogy egy piros korong 1 lej vagyont jelöl, illetve a kék korong 1 lej adósságot jelöl, így a piros és kék korongot együttvéve eltörlődik az adósság a vagyonnal. Más példákat is lehet mondani :

- éjszakai hőmérséklet: -5 °C;
- tartozom a barátomnak 10 lejjel (-10 lej);
- az Isten széke tengerszint feletti magassága 1380 m (+1380);
- a Fekete-tenger legmélyebb pontja 2210 m-rel van a tengerszint alatt (-2210 m).

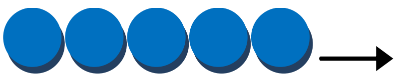
Alapfeladatként gyakorolhatjuk a pozitív és negatív egész számok reprezentációját a piros és kék korongocskák segítségével. A korongocskák segítségével rakassunk ki különböző egész számokat. Ennek a gyakorlatnak az a fő célja, hogy a diákok érzékeljék az egész számok ábrázolási lehetőségeit, lássák be, hogy a piros korongok a pozitív számok és a kék korongok a negatív számok.

Például:

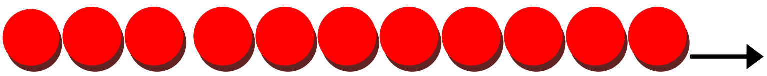
Feladat. Ábrázoljuk a korongok segítségével a **+3, -5, +11, -8** egész számokat .



+3



-5



+11

-8

Az osztályban segédeszközként minden diák már idejében elkészített, kivágott színes kartonlapocskákat használt, aminek a segítségével előbb kirakosgatták a padon a számokat, majd színes ceruzával a füzetbe rajzolgatták. A táblánál pedig, hasonlóan színes krétát használva rajzoltuk fel a számokat, illetve nagyon hasznos volt a mágneses korongocskák használata mágneses táblán. A korongokkal való reprezentációt használva értelmezhetjük az összeadást, a kivonást, a szorzást és az osztást.

A célunk az, hogy a tárgyi műveletek szintjéről eljussunk a hatékony algoritmusokig, szabályokig. Először mindenféle szabály nélkül végezzük el az alapműveleteket a korongocskák segítségével, ezek után kövessük lépésről lépésre végig számokkal is, majd megpróbáljuk általános esetben is használható algoritmust megfogalmazni, amely csak a számjegyekkel való reprezentációt használja. Gyakorlatilag az egész számokkal végzett műveletek tulajdonságait próbáljuk megérteni és nem csak betanulni, elfogadni megértés nélkül az adott szabályt.

Az osztályban érdemes csoportmunkában megszervezni a feladatok megoldását. A gyermeklétszámtól függően 3 vagy 4 csoportra osztva az osztályt minden csoport különböző műveleteket kap, majd **mozaik módszerrel** megosztjuk a tapasztalatokat.

Az eredeti **mozaik módszer** *Spencer Kagan*: *Kooperatív tanulás* című könyvében olvasható. Egy kicsit leegyszerűsítve a módszert, általános iskolásoknak, így néz ki:

Az osztályt 4 fős csoportokra osztjuk. A csoportokon belül mindenki más feladatlapot kap: A, B, C, D. Első lépésként mind a 4 fő a saját tananyagát tanulja meg lapjáról, illetve jegyzeteli ki füzetébe. Megoldja az ő feladatait.

Második lépésben egymásnak megtanítják a saját témájukat. Ez a következőket jelenti:

- a tanuló saját szavaival elmagyarázza a feladatát a társainak,
- leíratja velük egy mondatban a lényeget,
- feladja társainak mintapéldáit, és le is ellenőrzi a többiek megoldásait.

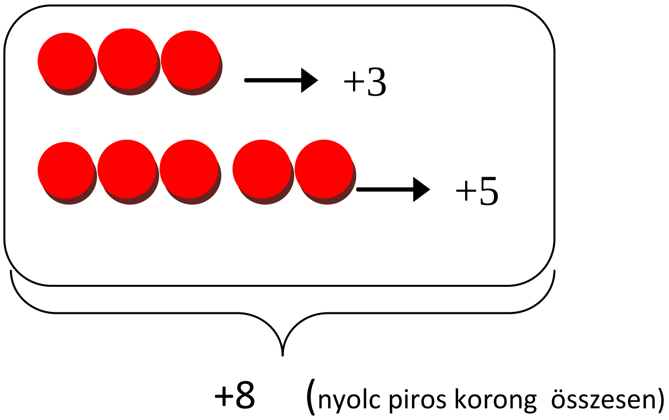
Harmadik lépésként tesztet írnak a gyerekek az adott tananyagból. Először csak csoporttesztet – azaz a 4 tanuló együtt tölti ki a lapot, majd külön egyénileg is. A tanulóknak meg kell tapasztalniuk, hogy oda kell figyelni egymásra, meg kell érteni azt, amit a másik tanuló magyaráz. A teszt értékelésében is érdemes fokozatosságot tartani: a hibátlanul megoldó csoport minden tagja egy-egy piros pontot kap.

3.2. Az egész számok összeadása

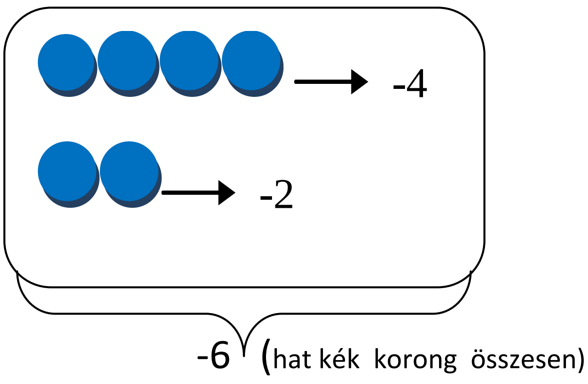
Az egész számok összeadásánál két esetet különböztetünk meg: az azonos előjelű egész számok illetve a különböző előjelű egész számok összeadását. Mindkét esetnek megvan a saját algoritmusa, szabálya amit alkalmazunk az elvégzésükre. A következő feladatok elvégzése után megprobáljuk megfogalmazni az általanos szabályt.

1. **Feladat**. Végezzük el a következő összeadásokat a szimbólumokkal való reprezentáció alapján, a rajzok mellé pedig számjegyekkel fejezzük ki.

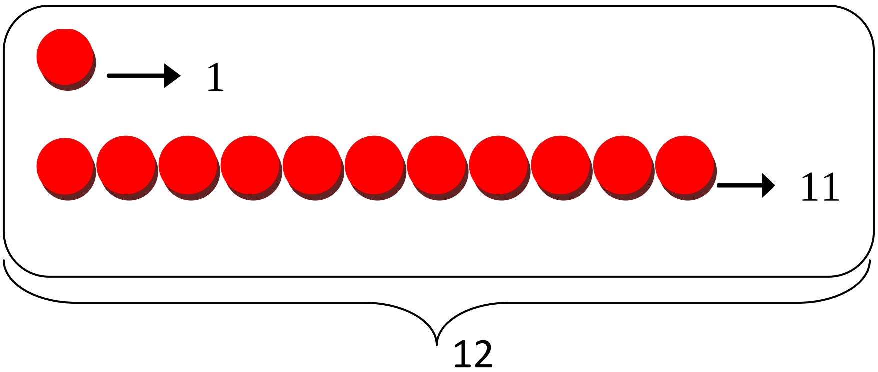
$a)\quad (+3)+(+5)=+8$



$b)\quad (-4)+(-2)=-6$



$c)\ \ 1+11=12$



A pozitív egész számok esetében nem feltétlenül kell az első szám előjelét feltűntetni, mivel a pozitív egész számok gyakorlatilag a természetes számok. Ha a számok nincsenek zárójelben, akkor csak a művelet marad a számok közt amit elvégzünk, a számokat pedig pozitívaknak vesszük.

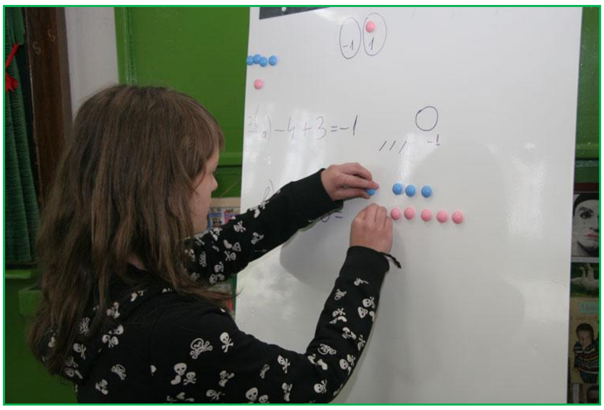
Például:

$$\begin{gathered} +4+3=4+3 \\ +7=7 \end{gathered}$$, mindkét oldal $7-et$ eredményez

Megjegyzés. Fontos letisztázni a diákokkal a műveletek és a számok előjele közti különbözőséget, az előjelek gyakorlatilag a (+) piros és a (-) kék színeket jelentik, a művelet pedig amit el kell végezni.

(-3)+(-2)= -5

előjel művelet

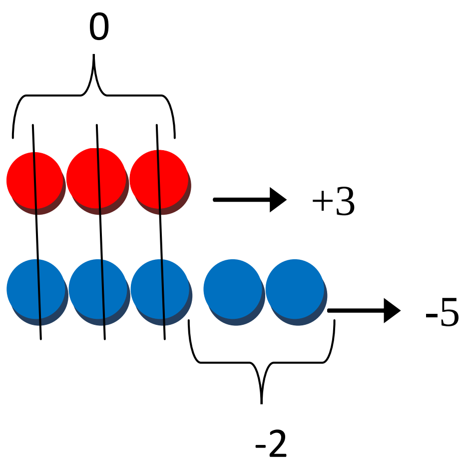


A feladatok szimbólumokkal illetve számokkal való elvégzése után, megállapíthatjuk, hogy az azonos előjelű egész számok összeadásánál mindig összeadjuk a számokat és az összeg előjele megegyezik az összeadandók előjelével.

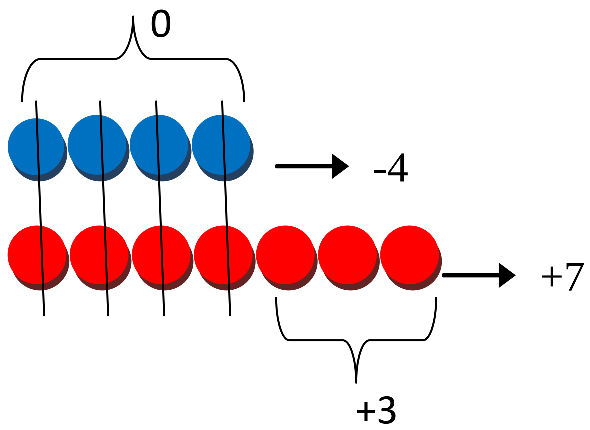
A különböző előjelű egész számok összeadását a következő feladatokkal szemléltetjük:

2. Feladat. Végezzük el a következő összeadásokat a szimbólumokkal való reprezentáció alapján, a rajzok mellé pedig számjegyekkel fejezzük ki.

a) $(+3)+(-5)=-2$

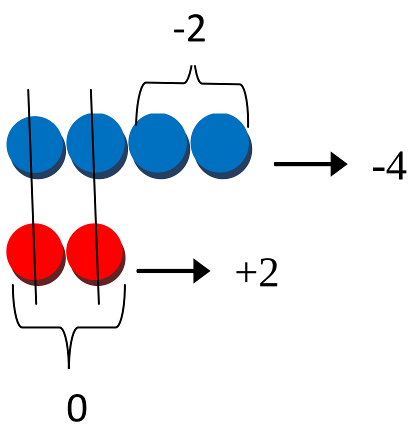


b) $(-4)+(+7)=+3$

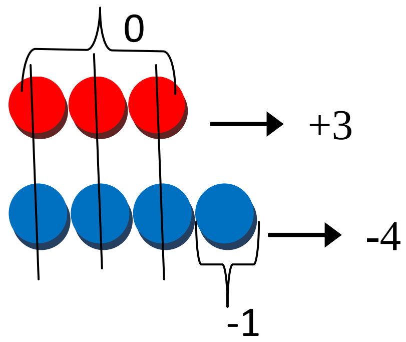


A fenti két példában az egész számokat az előjelükkel együtt zárójelben vettük a tisztábban való rálátás érdekében, viszont a következő példákban elhagyjuk parciálisan vagy teljesen a zárójeleket.

c) $-4+2=-2$



$d)\quad 3+(-4)=-1$



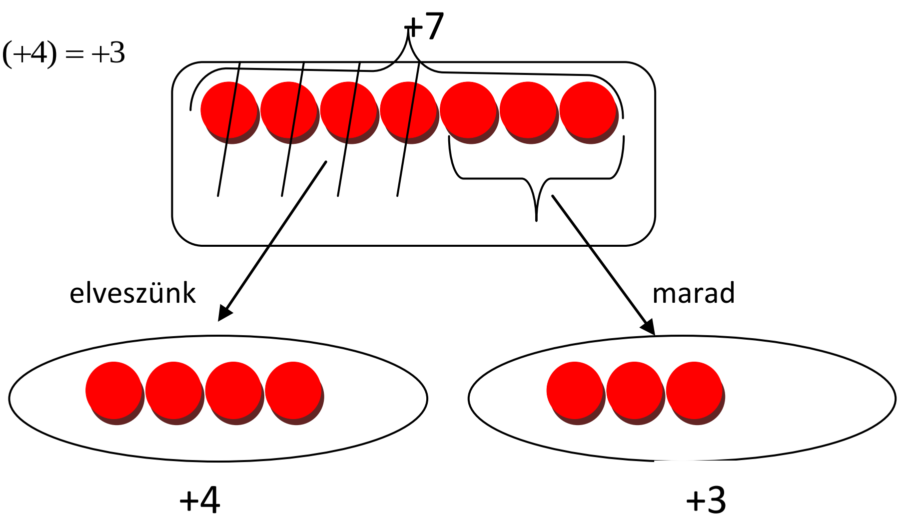
A korongokkal végzett műveletek során, tisztán láthatjuk és kimondhatjuk, hogy a korongok száma, a szám abszolút értékével egyenlő. A feladatok szimbólumokkal illetve számokkal való elvégzése után, megállapíthatjuk, hogy a különböző előjelű egész számok összeadásánal mindig kivonást végzünk, a nagyobb abszolút értékű szám abszolút értékéből kivonjuk a kisebb abszolút értékű szám abszolút értékét és az előjel a nagyobb abszolút értékű szám előjele marad.

3.3. Az egész számok kivonása

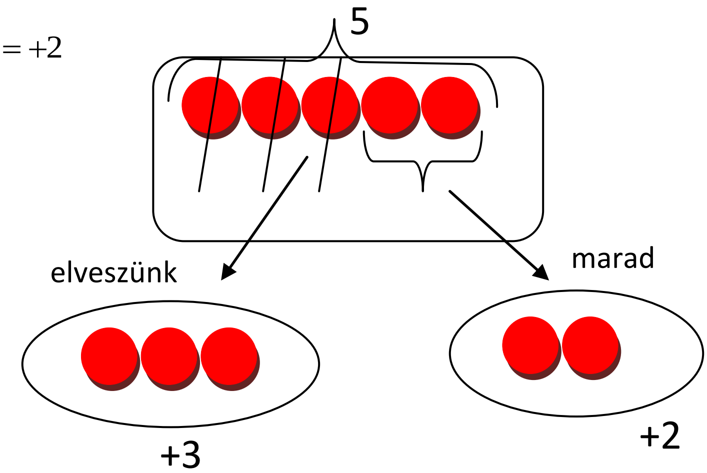
Az egész számok összeadásánál láthattuk hogy eléggé egyszerűen ki tudtuk rakosgatni a korongok segítségével a különböző összeadásokat, amiből tisztán következtethető volt az algoritmus amiszerint dolgozunk. A kivonásnál egy kicsit megváltozik a helyzet abból a szempontból, hogy hogyan magyarázzuk, szemléltetjük azt, amikor egy kisebb egész számból ki kell vonni egy nagyobbat, illetve amikor egy pozitív egész számból ki kell vonni egy negatív egész számot.

1. **Feladat.** Végezzük el a következő kivonásokat a szimbólumokkal való reprezentáció alapján, a rajzok mellé pedig számokkal fejezzük ki.

$a)\quad (+7)-(+4)=+3$

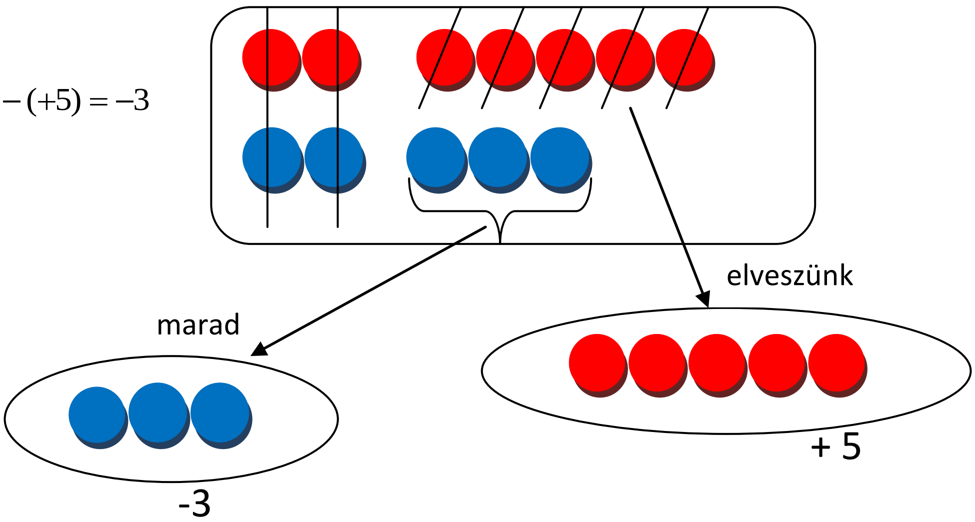


b) $5-(+3)=+2$



Megjegyzés. Fontos, hogy először a korongokkal végezzük a műveleteket és az eredményt a konkrét reprezentációból olvassuk le. A fenti példákban nagyobb számból vontunk ki kisebbet, a következő példákban kisebből vonunk ki nagyobbat.

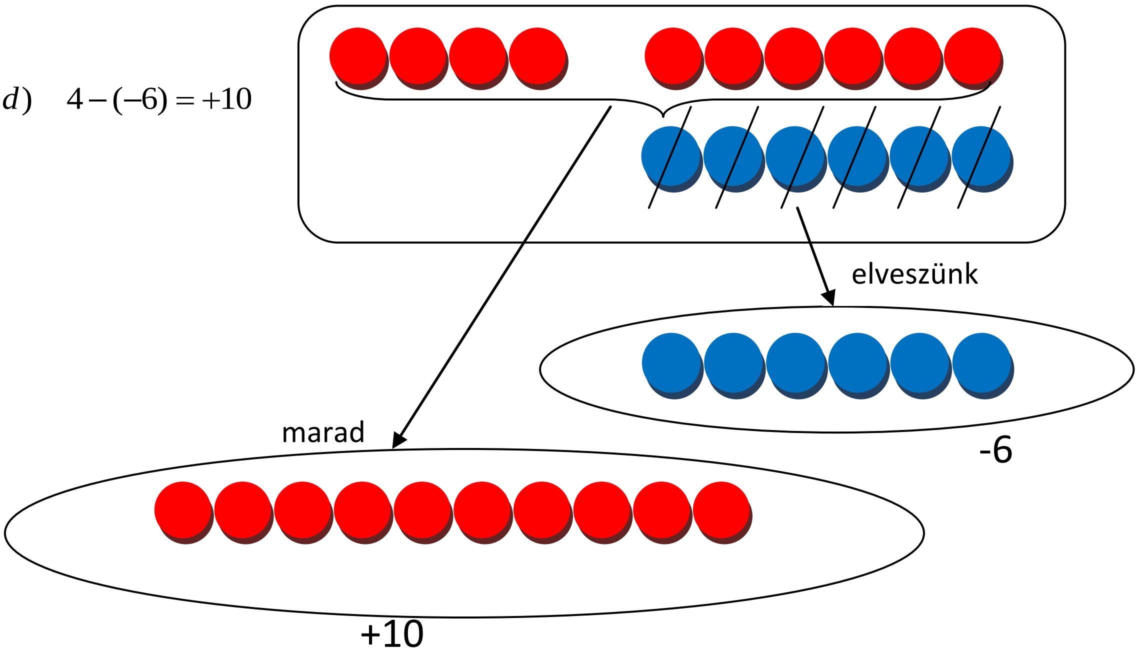
c) $(+2)-(+5)=-3$



A fenti példában két piros korongból ki kellett vonni az öt piros korongot, mivel nincs elég piros korong ezért hozzátesszük az 5 piros korongot hogy tudjuk kivonni. Azonban az öt piros korongot kizárólag csak az öt kék koronggal tehetjük oda, mivel az öt piros korong nem létezett, nulla volt, így az öt piros az öt kékkel is nulla. Elvégezve ezt a pótlást most ki lehet vonni a két pirosból az öt pirost, megmaradva a két piros és az öt kék. A megmaradott két piros, az öt kékből kettővel nullát alkot, így megkapjuk a különbséget, pontosabban a három kék korongot. Tehát az eredmény -3.

A következő példában egy pozitív számból kivonunk egy negatív számot. A fenti példához hasonlóan fogunk eljárni, vagyis a piros korongból ki fogjuk vonni a kék korongokat. Ehhez ki fogjuk pótolni annyi kékkel amennyit a feladat kér és a nekik megfelelő piros korongokkal is.

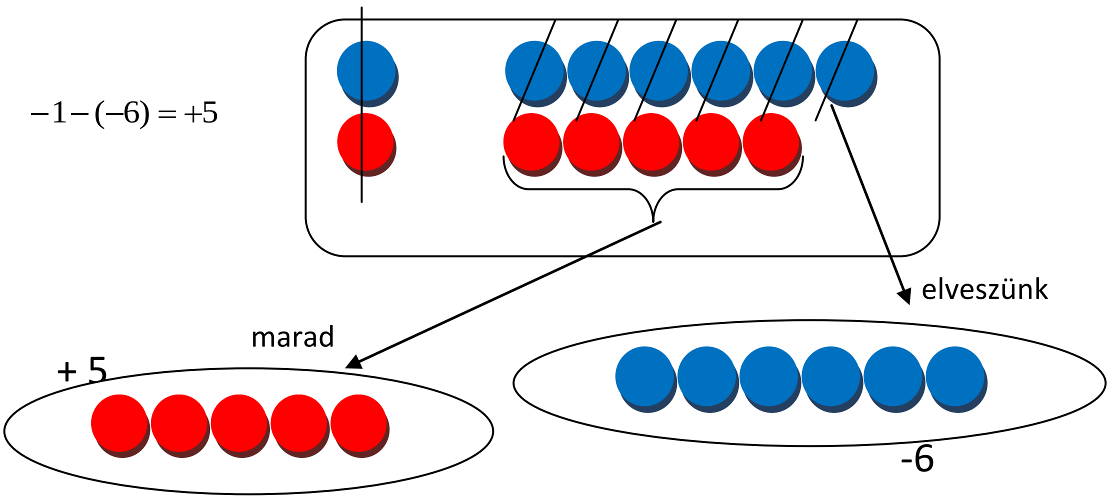
$d)\quad 4-(-6)=+10$



Ennél a gyakorlatnál a különbség összeadássá alakult. Mondhatjuk, hogy egy szám elvétele illetve az ellentettjének a hozzáadása egyenlő eredményhez vezet. Egy szám hozzáadása illetve ellentettjének elvétele ugyanahhoz az eredményhez vezet. Írhatjuk, hogy $4-(-6)=4+6=10$.

A következő példában egy negatív számból kivonunk egy másik negatív számot.

$e)\quad -1-(-6)=+5$



Ennél az esetnél, egy kék korongból el kell vennünk hat kék korongot, ami első ránézésre lehetetlen, de ha kipótoljuk az egy kék korongot hat kék koronggal (és persze a hozzátartozó hat piros koronggal), akkor ki lehet vonni a hat kék korongot az egy kék korong az egyik piros koronggal nullává alakul és így a hat piros korongból marad öt piros korong. Tehát, az eredmény $+5$. Ami gyakorlatilag nem más mint $-1-(-6)=-1+6=+5$.

Az előbbi műveletek elvégzése arra volt jó, hogy megértsük az egész számok összeadásának és kivonásának lépéseit.

Ezt a munkát tevékenységként érdemes végrehajtani és hagyni, hogy a diákok elemezzék lehetőségeiket, esetleg annyi példát adni nekik, amennyi meggyőzi őket, hogy az ismert algoritmus (tulajdonság), amelyet sok esetben a diákok maguk is felfedeznek a tevékenység során, valóban a leghatékonyabb. Ezzel egy általános matematikai elv működését is megmutatjuk, amely szerint minden problémára érdemes a legegyszerűbb és ugyanakkor a legáltalánosabb megoldást adni.

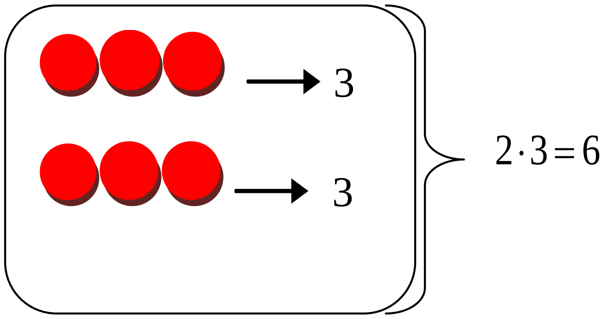
Ez fontos stratégiai tanulságként szolgálhat a diákjaink további tanulására nézve, amely nem lenne látható a kész algoritmusok nyers betanításával.

3.4. Az egész számok szorzása

Az egész számok szorzásánál két esetet különböztetünk meg: az azonos előjelű egész számok illetve a különböző előjelű egész számok szorzását. Mindkét esetnek megvan a saját algoritmusa, szabálya amit alkalmazunk az elvégzésükre. A következő feladatok az egész számok szorzására vonatkozó algoritmus felfedezését célozzák meg.

1.Feladat. Végezzük el a következő szorzásokat a szimbólumokkal való reprezentáció alapján, a rajzok mellé pedig számjegyekkel fejezzük ki.

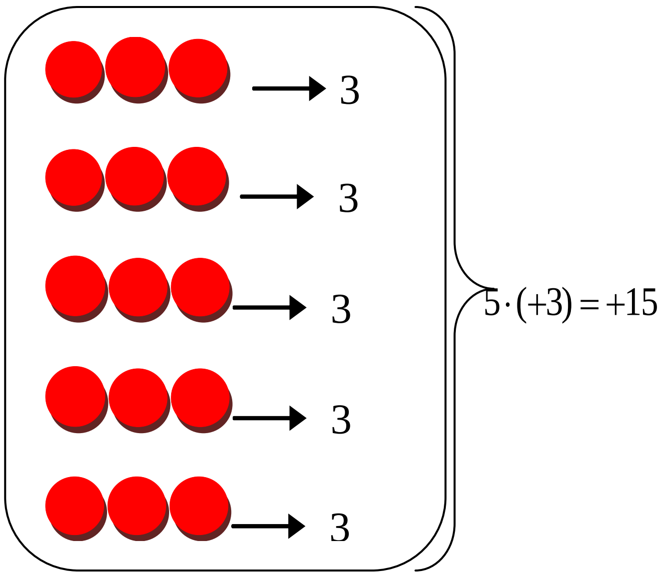
a) $2 \cdot 3 = 6$



A diákok kirakják a 3 piros korongot kétszer, vagyis 6 piros korongunk van. Megérezzük hamar, hogy a szorzás egy ismételt összeadás, $2 \cdot 3 = 3 + 3 = 6$

b) $5 \cdot (+3) = +15$

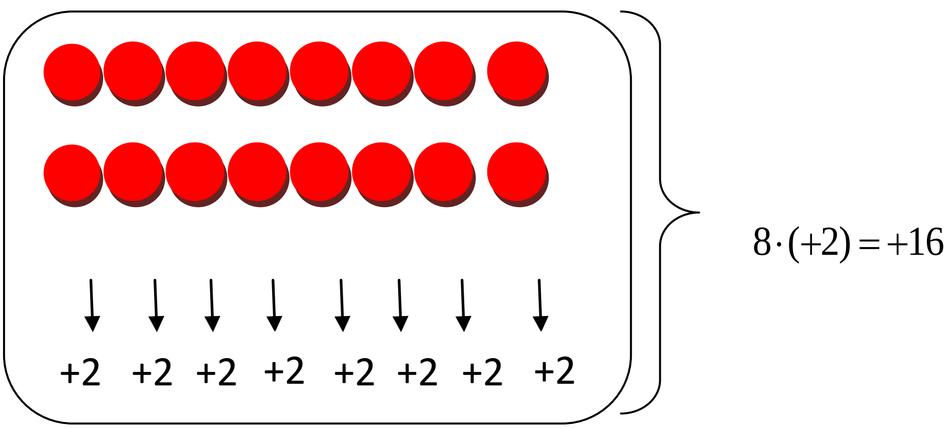
$5 \cdot (+3) = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = +15$



A következő példában a szorzás kommutatívitását használjuk, amiszerint $x \cdot y = y \cdot x$ bármely *x és y* egész szám esetén. Itt gyakorlatilag $(+2) \cdot (+8) = (+8) \cdot (+2)$. Tehát az ábrázolásban minket nem zavar ha a tényezőket felcseréljük.

c) $(+2) \cdot (+8) = +16$

$(+2) \cdot (+8) = (+8) \cdot (+2) = (+2) + (+2) + (+2) + (+2) + (+2) + (+2) + (+2) + (+2) = +16$



A fenti feladatok tisztán megfogalmazzák bennünk, hogy a pozitív egész számok szorzása mindig pozitív eredményhez vezet, vagyis amikor csak piros korongocskákat kell szorozni a szorzat is mindig piros korongocskákkal lesz kirakva.

A korongocskákkal szerzett tapasztalatok megerősítik a szorzás értelmezését. Ennek alapján, a pozitív egész számmal végzett szorzás helyett egyenlő tagú összeadást írhatunk, amelyben a tagokat a szorzandó, a tagok számát pedig a szorzó adja.

A negatív egész számok szorzása, mint azonos előjelű egész számok szorzása, pontosabban az algoritmus megértése egy kicsit eltér a pozitív egész számok szorzásától. Habár az eredmény itt is ugyanaz lesz, éspedig a negatív egész számok szorzása mindig pozitív eredményhez vezet. Miután sikerül jól megértetni a diákokkal ezeket az alapvető tulajdonságokat, akkor majd persze lehet több számmal is dolgozni, sőt művetetsorokat lehet megoldani az osztályban. A következő feladatok két negatív egész szám szorzására vonatkozó algoritmus felfedezését célozzák meg.

2. **Feladat**. Végezzük el a következő szorzásokat a korongocskákkal való reprezentáció alapján, a rajzok mellé pedig számjegyekkel fejezzük ki.

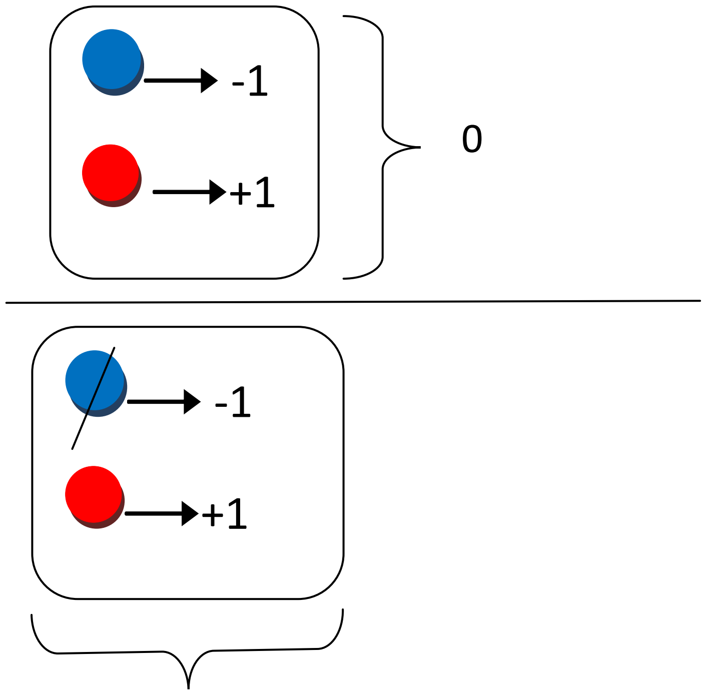
$a)\quad -1\cdot(-1)=+1$

Ezt a szorzást a következőképpen értelmezzük: ki akarunk vonni a semmiből egyszer mínusz egyet, pontosabban egy kék korongocskát. Ahhoz, hogy ki lehessen a semmiből vonni ezt az egy kék színű korongocskát, ezt a “semmit” ábrázoljuk egy kék és egy piros korongocskával, majd ebből ki lehet vonni az egy kék korongot és így megmarad az egy piros korongocska.

Írhatjuk, hogy

$$-1\cdot(-1)=0-1\cdot(-1)=-(-1)=1\cdot(+1)=+1$$

Korongocskákkal kirakosgatva így néz ki:



$$-1\cdot(-1)=0-1\cdot(-1)=-(-1)=1\cdot(+1)=+1$$

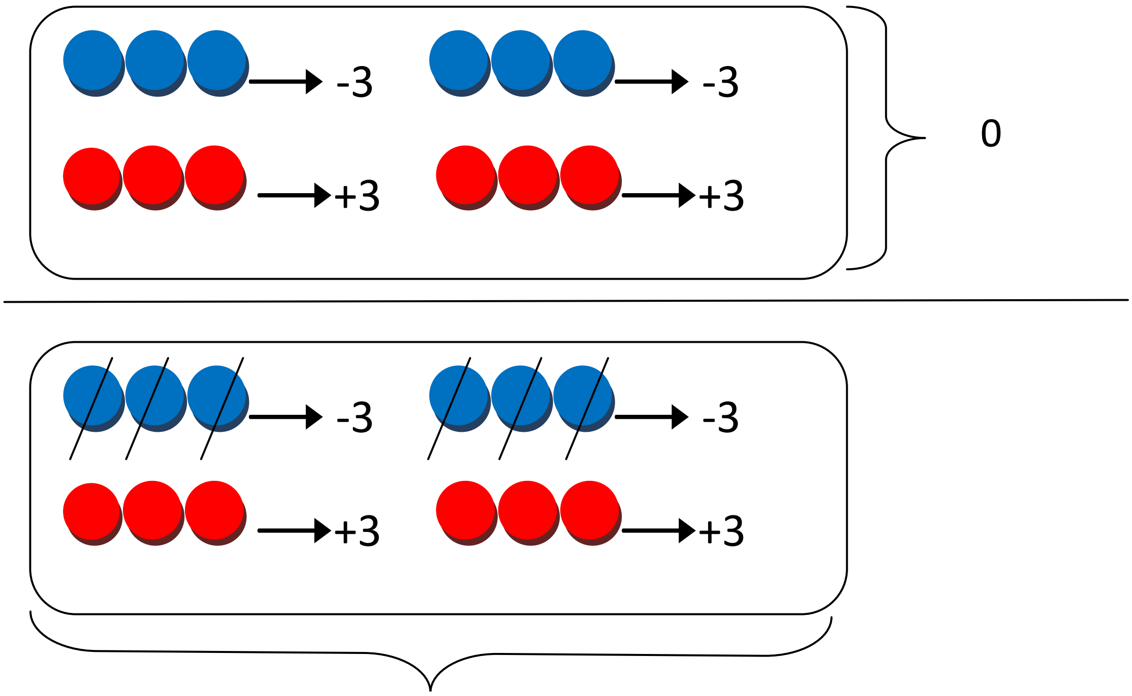
Az olyan műveleteknek az értelmezését, amelyeknek nincs valóságtartalmuk, a szakemberek egy kicsit a saját "ízlésüknek" megfelelően alkotják meg, teljesítve azt az igényt, hogy megmaradjanak az eddig már megszokott tulajdonságok.

$b)$ $\quad -2\cdot(-3)=+6$

Ezt a szorzást a következőképpen értelmezzük: ki akarunk vonni semmiből kétszer mínusz hármat, pontosabban hat kék korongocskát. Ahhoz, hogy ki lehessen a semmiből vonni ezt a kétszer három egyenlő hat, kék színű korongocskát, ezt a “semmit” ábrázoljuk hat kék és hat piros korongocskával, majd ezeből ki lehet vonni a hat kék korongot és így megmarad a kétszer három egyenlő hat piros korongocska.

$$-2\cdot(-3)=0-2\cdot(-3)=2\cdot(+3)=+6$$

Korongocskákkal kirakosgatva így néz ki:



$$-2\cdot(-3)=0-2\cdot(-3)=2\cdot(+3)=+6$$

Mondhatjuk, hogy a negatív számmal való szorzás eredménye ellentettje a szám abszolút értékével való szorzás eredményének.

Példáúl, néhány negatív számnak negatív számmal vett szorzata így is írható

$$(-2)\cdot(-3) = -((-2)\cdot 3) = -(-6) = 6$$

$$(-4)\cdot(-2) = -((-4)\cdot 2) = -(-8) = 8$$

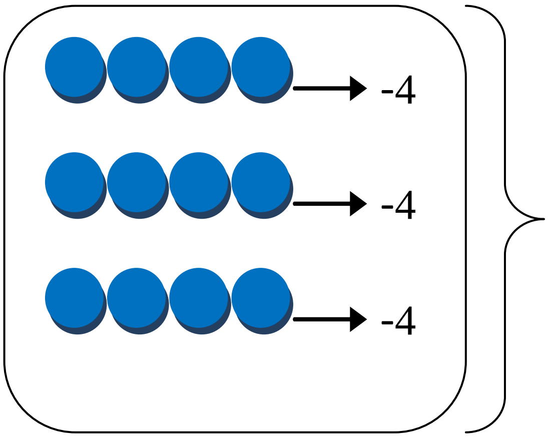
$$(-2)\cdot(-5) = -((-2)\cdot 5) = -(-10) = 10$$

Az egész számok szorzásánál levő két esetből az azonos előjelű egész számok szorzását sikerült megmagyarázni a fenti gyakorlatokban, éspedig azt, hogy az azonos előjelű egész számok szorzata mindig pozitív.

A következőkben a különböző előjelű egész számok szorzásával foglalkozunk, és erre a szorzásra vonatkozó algoritmus felfedezését célozzuk meg.

3. Feladat. Végezzük el a következő szorzásokat a korongocskák segítségével, a rajzok mellé pedig számjegyekkel fejezzük ki.

b) $3\cdot(-4)=-12$



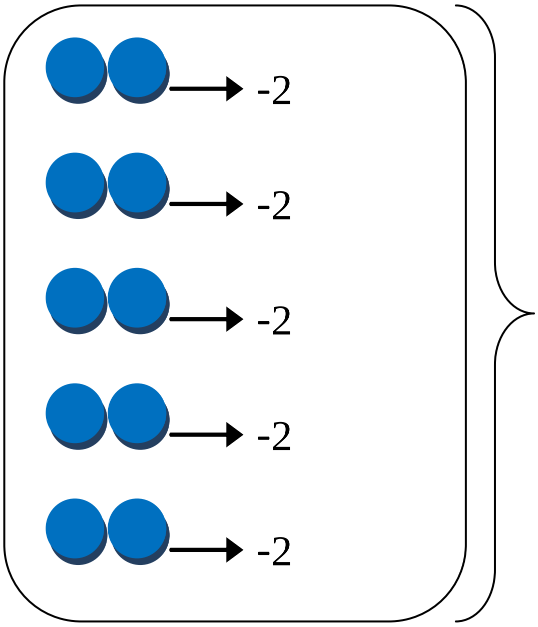
$3\cdot(-4)=-12$

Felhasználva a szorzás disztributívitását az összeadásra nézve $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$, *bármely* a,b,c *egész számok esetén* .

Írhatjuk, hogy

$$3\cdot(-4)=(1+1+1)\cdot(-4)=1\cdot(-4)+1\cdot(-4)+1\cdot(-4)=(-4)+(-4)+(-4)=-12$$

b) $5\cdot(-2)=-10$



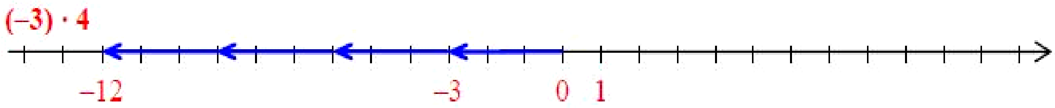
$5\cdot(-2)=-10$

Írhatjuk, hogy

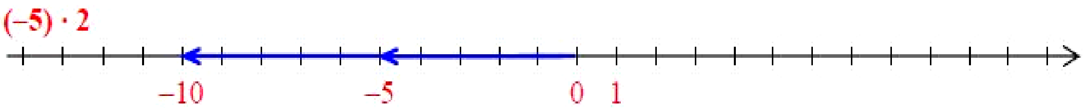
$$5 \cdot (-2) = (-2) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) = -10$$

A következő feladatokat a korongocskák segítsége mellett, a számegyenesen nyilacskák megrajzolásával is szemléltethetjük.

c) $(-3) \cdot 4 = -12$

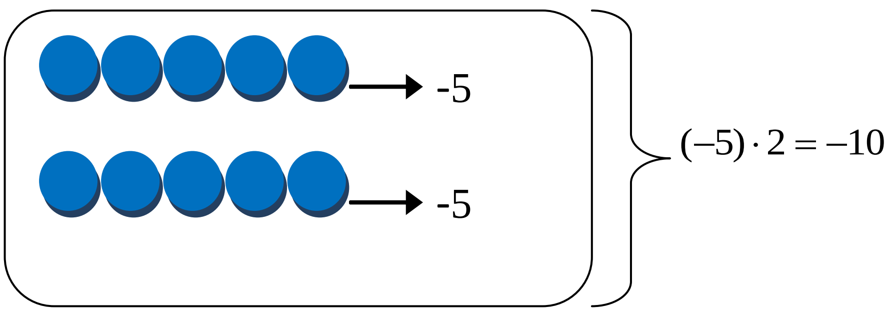


d) $(-5) \cdot 2 = -10$



A *c)* és *d)* feladatoknál a szorzás kommutatívitását használtuk, amiszerint $a \cdot b = b \cdot a$, gyakorlatilag $(-3) \cdot 4 = 4 \cdot (-3)$ és $(-5) \cdot 2 = 2 \cdot (-5)$. Tehát az ábrázolásban minket nem zavar ha a tényezők fel vannak cserélve.

A következő ábrán a *d)* példát szemléltetem a korongocskákkal:



Írhatjuk, hogy

$$(-5) \cdot 2 = (-5) \cdot 1 + (-5) \cdot 1 = (-5) + (-5) = -10$$

Az egész számok szorzásánál levő két esetből a különböző előjelű egész számok szorzását sikerült megmagyarázni a fenti gyakorlatokban, éspedig azt, hogy a különböző előjelű egész számok szorzata mindig negatív.

Ezekután valóban fel lehet vázolni a diákoknak az egész számok szorzására vonatkozó előjeltáblázatot:

$$(+)\cdot(+)=(+)$$
$$(-)\cdot(-)=(+)$$
$$(+)\cdot(-)=(-)$$
$$(-)\cdot(+)=(-)$$

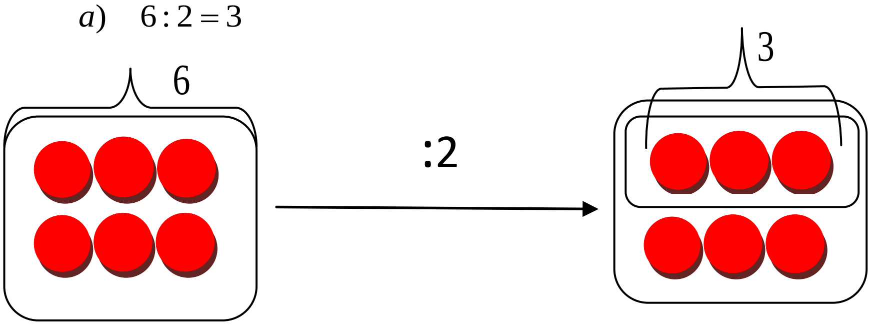
A fő célom az volt az eddigi feladatok szemléltetésével, hogy az egész számok szorzására vonatkozó algoritmusokat, tulajdonságokat nemcsak lediktálom a diákoknak és ők azt bemagolják, hanem ténylegesen megértik. Sőt, esetleg ők maguk fogalmazzák meg az illető tulajdonságot.

3.5. Az egész számok osztása

Az egész számok osztásánál a szorzáshoz hasonlóan, két esetet különböztetünk meg: az azonos előjelű egész számok illetve a különböző előjelű egész számok osztását. Mindkét esetnek megvan a saját algoritmusa, szabálya amit alkalmazunk az elvégzésükre. A következő feladatok az egész számok osztására vonatkozó algoritmus felfedezését célozzák meg.

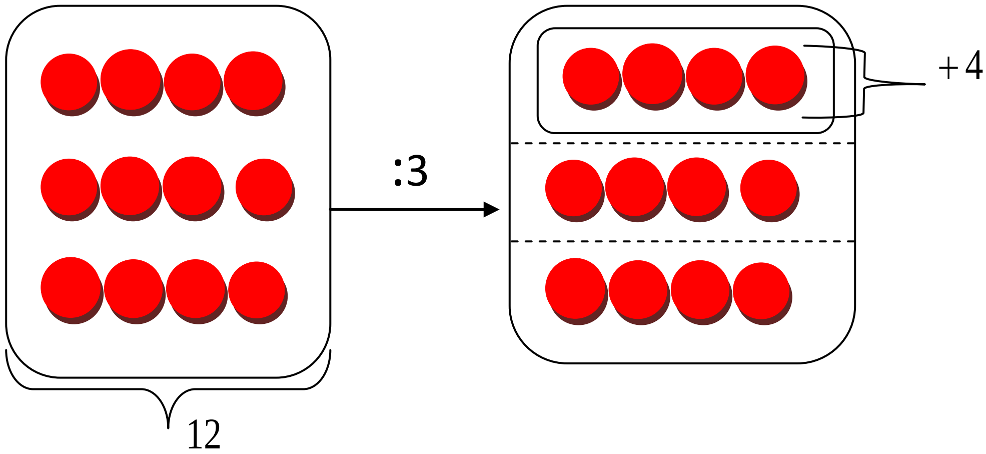
1. **Feladat**. Végezzük el a következő osztásokat a szimbólumokkal való reprezentáció alapján, a rajzok mellé pedig számjegyekkel fejezzük ki.

   a) $6:2=3$

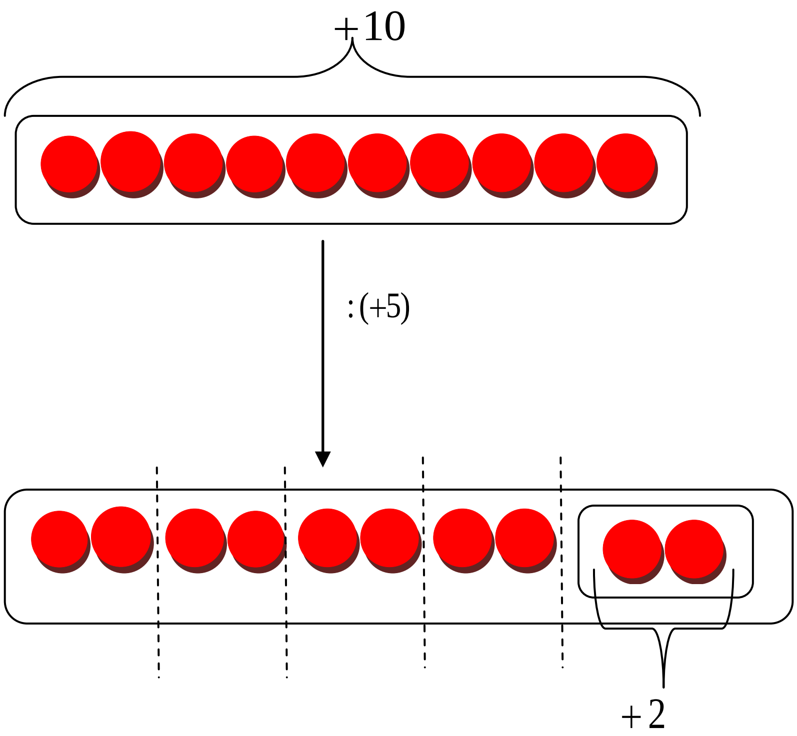


A diákok kirakják a 6 piros korongot, majd ketté osztva a korongokat rögtön észre veszik, hogy 3-3 piros korong marad. Megérezzük hamar, hogy az osztás a szorzás fordított művelete, $2 \cdot 3 = 6$.

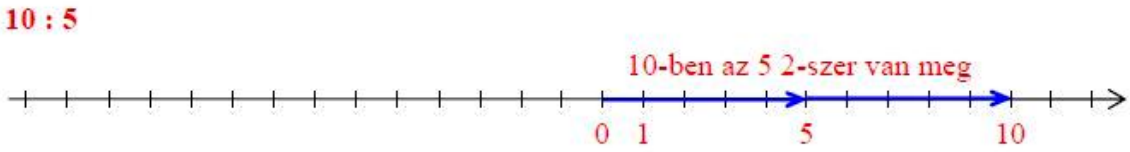
b) $12 : (+3) = +4$



c) $(+10) : (+5) = +2$



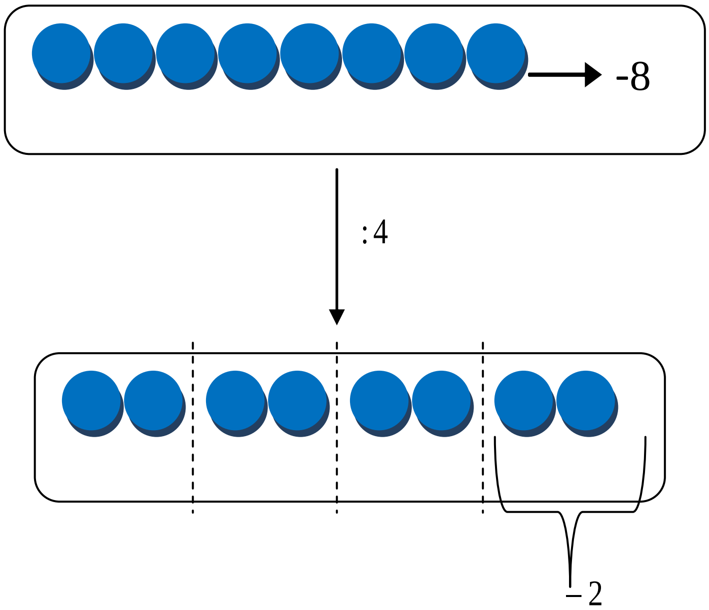
A fenti feladatot a korongocskák segítsége mellett, a számegyenesen nyilacskák megrajzolásával is szemléltethetjük, ezzel is segítvén a diákoknak a jobb elmélyítésben.



A fenti feladatok tisztán megfogalmazzák bennünk, hogy a pozitív egész számok osztása pozitív egész számmal mindig pozitív eredményhez vezet, vagyis amikor csak piros korongocskákat kell osztani a hányados is mindig piros korongocskákkal lesz kirakva.

A következőkben végezzünk el egy pár olyan osztást ahol az osztandó negatív egész szám.

$d)\quad (-8):4=-2$

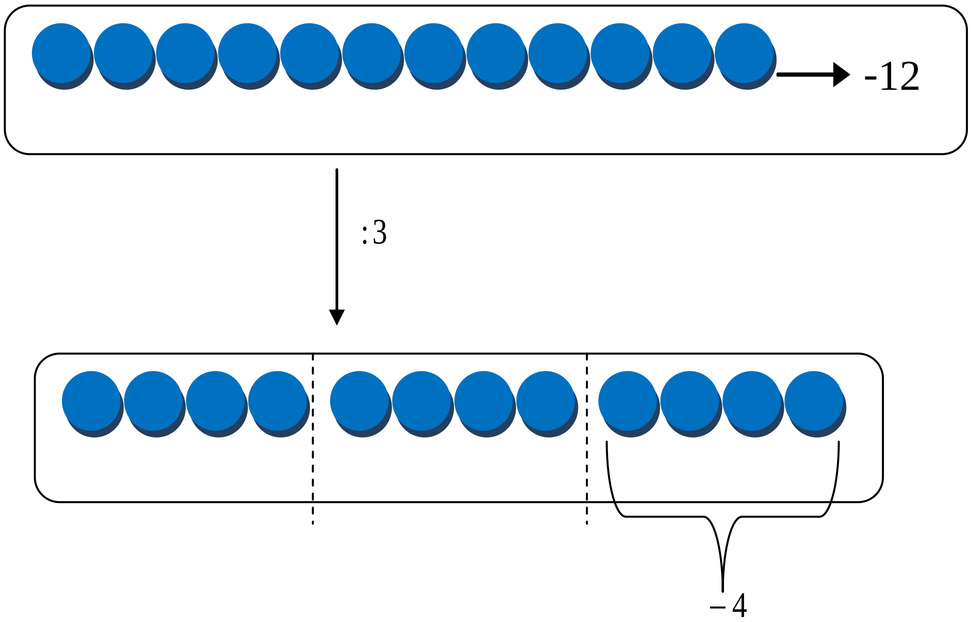


A fenti feladatot a korongocskák segítsége mellett, a számegyenesen nyilacskák megrajzolásával is szemléltethetjük:

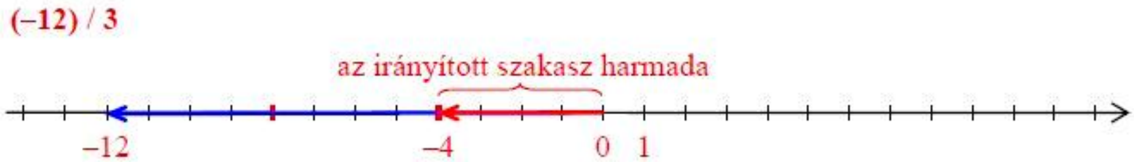
Látható mindkét szemléltetésen, hogy gyakorlatilag a *(-8)*-ban a *4-es* *(-2)*-szer van meg.

A korongos szemléltetésen viszont tisztán látható, hogy 8 darab kék korongocskát 4-felé osztva 2 kék korongocskát kapunk.

e) $(-12):3=-4$



A számegyenesen nyilacskák megrajzolásával pedig:



A fenti példákon tisztán megfogalmazódik, hogy egy negatív egész számot akármilyen pozitív egész szám felé osztunk, a hányados mindig negatív marad.

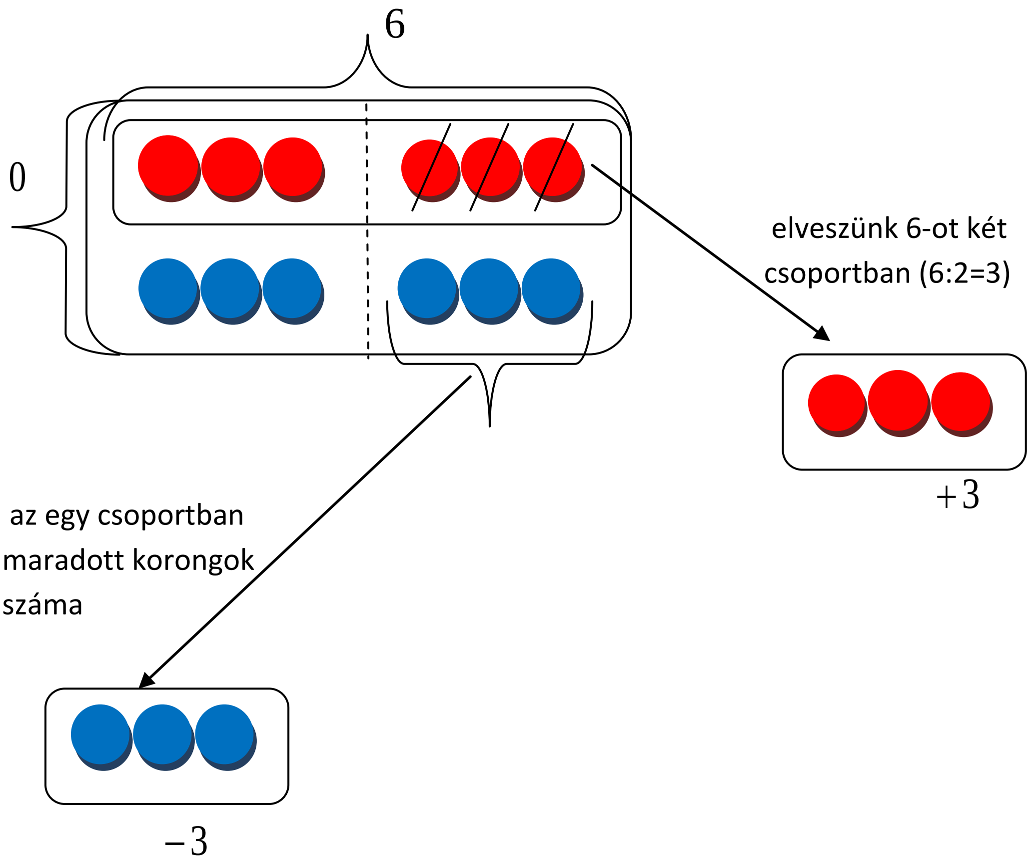
A következőkben végezzünk el egy pár olyan osztást, ahol az osztandó pozitív egész szám és az osztó negatív egész szám.

$f)\quad 6:(-2)=-3.$

A fenti *f)* feladatban mivel az osztó negatív, így a 6-hoz húzott nyíl pozitív irányú, a –2 -be húzott nyíl negatív irányú, emiatt nem tudjuk szemléltetni a számegyenesen. Itt a korongos modell fog segíteni nekünk.

Gyakorlatilag a $6:(-2)$ azt jelenti, hogy 6-ot elveszünk két csoportban és a táblán egy csoportban maradt korongok mutatják az eredményt.

Átalakítva $6:(-2)=-(6:2)=0-(6:2)=0-3=-3$ -*at* kapunk

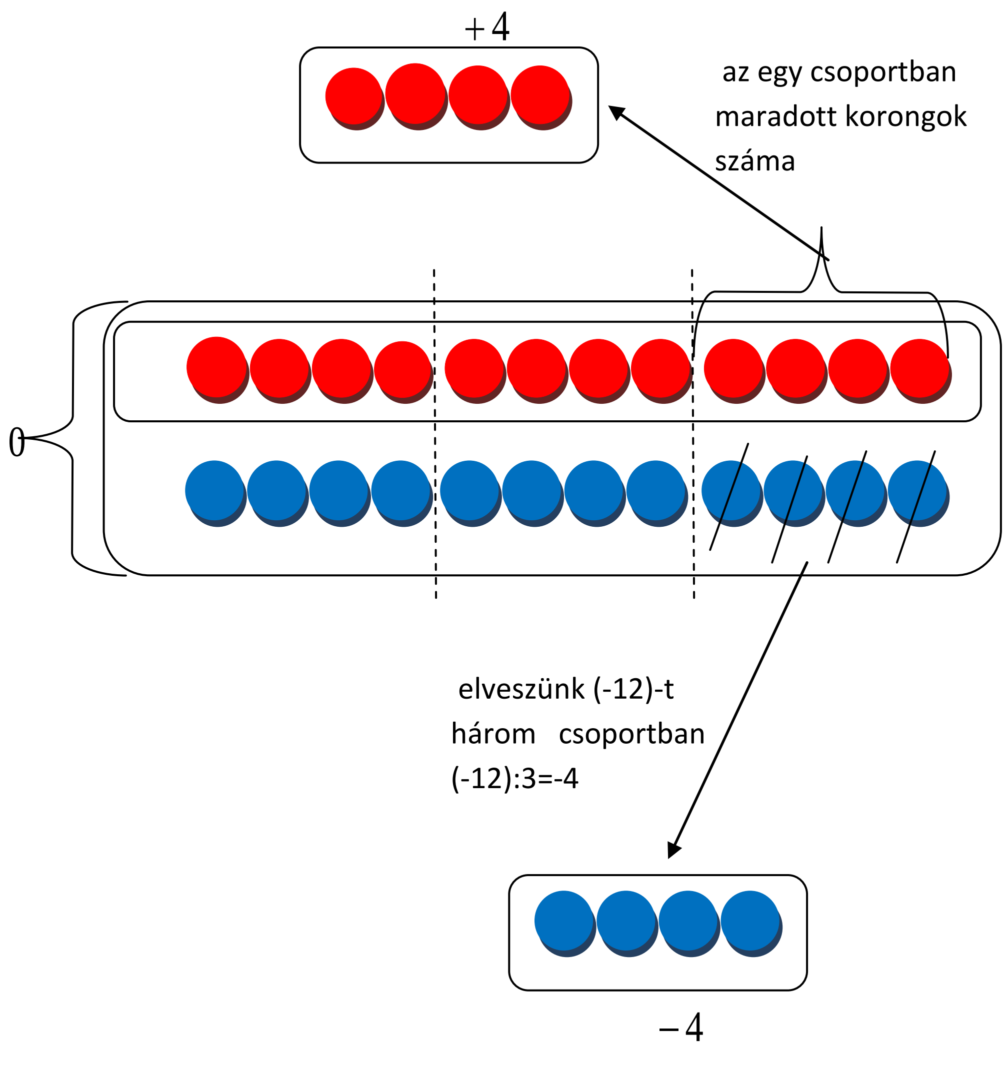


Előbb a $6:(-2)=-(6:2)$ tulajdonságot használtam fel, aminek a segítségével a hatot sikerült elosztani kétfelé, így hármat kaptunk. Innen már a kivonás tulajdonságát használtam, a nullából kivontam a $(6:2)=3$-*at* , a nullát felírtam a hat piros és hat kék korong segítségével, így ki lehetett vonni a $(6:2)=3$ piros korongot, végűl megmaradott a 3 kék korong.

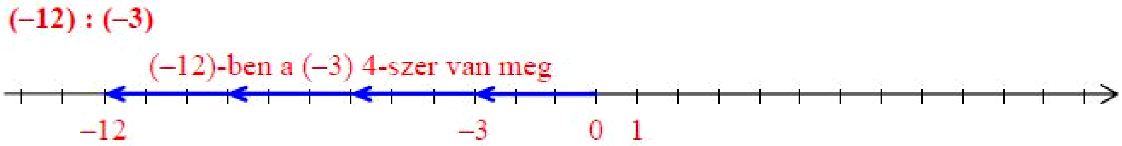
A következő feladatokban az osztandó is és az osztó is negatív egész szám, ennél az esetnél mindkét szemléltetést használni lehet, a számegyenesen a nyilacskákat illetve a korongocskákat.

$g)\quad (-12):(-3)=+4$

$\textit{írhatjuk, hogy}\quad (-12):(-3)=-[(-12):3]=-(-4)=0-(-4)=+4$



A számegyenesen nyilacskák megrajzolásával pedig:



A fenti példákon tisztán következik, hogy ha egy negatív egész számot egy negatív egész szám felé osztunk, a hányados mindig pozitív marad.

Miután mindezeket elmagyaráztuk, csoportosan kidolgoztuk, akkor fel lehet vázolni a diákoknak az egész számok osztására vonatkozó előjeltáblázatot:

$$(+):(+)=(+)$$
$$(-):(-)=(+)$$
$$(+):(-)=(-)$$
$$(-):(+)=(-)$$

IV. FEJEZET

A KUTATÁS MÓDSZERTANA

„Az elemi számelmélet kevés előismeretre épül, módszerei egyszerűek, tárgya közismert és kézzelfogható. Alkalmas arra, hogy a természetes emberi kíváncsiságot ébresztgesse.”
G. H. Hardy

4.1. A kutatás indoklása:

Régóta foglalkoztat az a kérdés, miként lehetne az általam tanított diákok matematikai ismereteit, kíváncsiságát a matematika óra iránt, logikus gondolkodását, a matematikai algoritmusokat, tulajdonságokat minél eredményesebben elmélyíteni. A pedagógiai kutatás keretén belül azt szeretném felmérni, hogy a VI. osztályban mennyire fejleszthető a logikus gondolkodás matematika órán, valamint, hogy összefügg-e az ismeretek fejlesztése a logikus gondolkodás fejlesztésével.

Gyakorlatilag a VI. osztályban tanított egész számok halmazán belül, az egész számokkal végzett műveletek tulajdonságaira tértem ki, éspedig ezen tulajdonságok megmagyarázására, megértésére és nem csak az egyszerű elfogadására, bemagolására, nagy hangsúlyt fektetve a logikus gondolkodás fejlesztésére az ismeretek fejlesztése mellett.

Ezért, összehasonlítom két év eredményét, a tavalyi évet, amikor ugyanis a megmagyarázás nélküli betanulós módszert használtam, illetve az idéni erdményt, amikor kitértem minden tulajdonság megmagyarázására, külön órákat szánva erre. Mindkét évben az egész számok halmazának a fejezete végén, felmértem a diákjaimat és ígyösssze tudtam hasonlítani a két módszert amit alkalmaztam.

Kutatásomat két osztályban végeztem, a VI.B tavalyi osztályban és a VI.B idéni osztályban.

4.2. A kutatás célkitűzései:

Kutatásom során a célom, az alapműveletekre(összeadás, kivonás, szorzás, osztás) vonatkozó algoritmusokat megpróbálni újra felfedezni, megfelelő gyakorlatok és feladatok célirányos alkalmazásával VI. osztályban.

Ennek a célnak megvalósítása érdekében felmértem a tavalyi VI. osztály tanulóinak szerzett ismereteit, amikor még nem alkalmaztam a korongos elméletet a algoritmusok felfedezésében, csak a betanított szabályokat kértem tőlük, illetve az idéni VI. osztály tudásszintjét és összehasonlítottam a gyűjtött eredményeket. Figyelemmel kísértem a tanulók pozitív hozzáállását a matematikai gyakorlatok és feladatok megoldásához és alkotásához, illetve a hozzáállás változását. Az értelmi képességek, a gondolkodás hajlékonyságának változását feladatlapok, önálló munkák segítségével ellenőriztem.

4.3. Hipotézisek:

- Ha a gyakorlatok és feladatok megoldásának és elsajátíttatása, a lehetőségek maximális kihasználása minél több tevékenységre épül, akkor az év végére minőségi változás fog bekövetkezni a tanulók teljesítményében, a logikus gondolkodási mechanizmusok fejlődésében.
- Ha az egész számokkal végzett műveletek tulajdonságainak elsajátításában használjuk a korongos modellt, önálló csoportos munkára szoktatjuk a diákokat több lehetőséget biztosítunk a logikus gondolkodási mechanizmusok fejlesztésére.
- Ha csoportos játékokat, tevékenységeket szervezünk matematika órán, a gyengébb képességű tanulók gyorsabb ütemben fejlődnek.

4.4. A kutatás lebonyolítása:

A kutatást a szászrégeni „Florea Bogdan” Gimnázium két egymásutáni VI.B osztályában végeztem. Összesen 19+12=31 tanulót vizsgáltam két tanév alatt. A diákok 13 évesek, akik közül 17 lány és 14 fiú.

A 2010-2011-es tanévben, ha tapasztalataimról beszélnék azt mondanám, hogy pozitív tanulói hozzáállást tanúsítva, sikeres és élménydús tanévet zárhatok az idén.

A legfontosabb a sikeres haladás terén az, hogy 80 százaléka a tanulóknak el tudta sajátítani a VI. osztályos követelményeket. Ez annak köszönhető, hogy közös munkánk során megpróbáltam a tanulók egyéni haladási ütemét egész évben figyelembe venni.

Az algoritmusokra, tulajdonságokra megpróbáltam rávezetni, felfedeztetni a diákjaimat és nem csak lediktálni, elfogadtatni azt a tulajdonságot. Így egy biztosabb tudást értem el a gyengébb tanulókkal, a jobb képességű tanulókkal pedig megfelelő differenciálással haladtunk előre a tanulásban, az igényeiknek megfelelően. Egész évben sokat gyakoroltunk, dolgoztunk, ami a tanulók előrehaladását, a magabiztosabb hozzáállását eredményezte.

A kutatás során alkalmazott módszerek közül megemlíteném a következőket:

- Feltáró módszerek: célzott megfigyelés, szóbeli kikérdezés, írásbeli felmérő
- Feldolgozó módszerek :
    - minőségi elemzés: önálló munka, csoportmunka, vizualizálás, frontális munka, házi feladatok elemzése, feladatlapok, felmérők
    - statisztikai módszer

A kutatást két lépésben végeztem:

1. VI.B tavalyi teszt (kontroll csoport), ahol a tavalyi VI. osztály felmérését értékelem ki
2. VI.B idéni teszt (kísérleti csoport), ahol az idéni VI. osztály felmérését értékelem ki

4.4.1. Tavalyi VI. osztály felmérése (kontroll csoport)**:**

A tavalyi VI. osztály felmérését hagyományos módon végeztem, az egész számokkal végzett 4 alap művelet elsajátítása után. Az A/1 tesztben (lásd A/1 számú mellékletet) először az egész számok összeadását és kivonását ellenőrizvén a következőket figyeltem meg:

- Tudnak-e a diákok a pozitív egész számokkal összeadni
- Tudnak-e a diákok a negatív egész számokkal összeadni
- Tudnak-e a diákok a pozitív egész számokkal kivonni
- Tudnak-e a diákok a negatív egész számokkal kivonni

Megfigyelési szempontok:

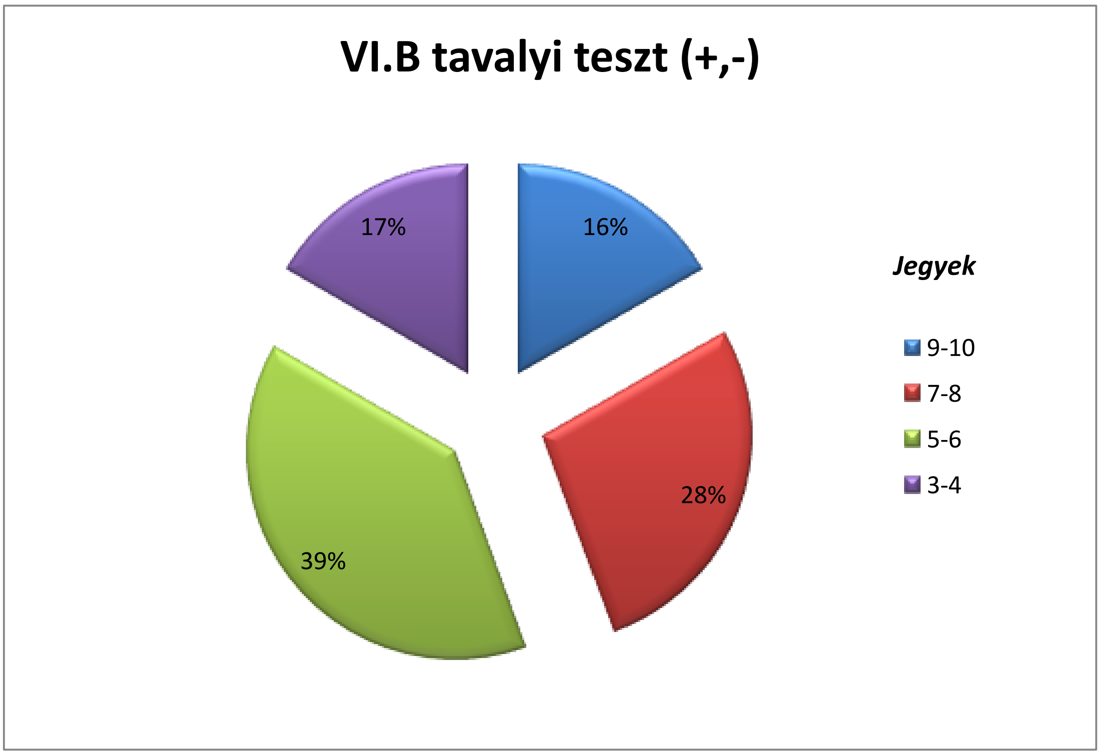
A felmérő 14 gyakorlatból állt, mindegyik 5 pontot érve, így a diák 14 x 5=70 pontot tudott összegyűjteni. Hatodik osztályban személyesen hármastól osztályozok, hivatalból 30 pontot kap a diák. Úgy gondolom, hogy az egyestől való osztályzatba a kisebb diákokat fokozatosan évről évre kell bevezetni. Egy közepes szintű felmérő, amelyben nem a gyakorlatok változatossága volt előtérbe helyezve, hanem inkább az alapműveletek ismerete volt kihangsúlyozva. Mivel a tulajdonságokat a hagyományos módszer alapján a diákok elfogadták, megtanulták, sokan bemagolták, ez oda vezetett, hogy azok a diákok akik jobb képességűek voltak, azoknak sikerült jobb eredményeket elérni. Viszont a gyengébb vagy közepes képességű diákok elég sok gyakorlatot elrontottak, gyengébb eredményeket elérvén.

Az eredmény a következő volt: a diákok 16 %-ka 9-10 között írt, vagyis nagyon ügyesen, helyesen dolgoztak. A diákok 28 %-ka 7-8 között írt, ezeknél a diákoknál apróbb hibák csúsztak be, láthatóan eltévesztették a szabályokat. A diákok 39 %-ka 5-6 között írt, ezeknél a diákoknál már kisebb és nagyobb hibák csúsztak be, elég sok gyakorlatnál. A diákok 17 %-ka 3-4 között írt, gyakorlatilag nem voltak képesek majdnem semmire.

1.Táblázat: A VI.B tavalyi teszt (+,-) eredményei

Minősítés/Jegy	**Százalék**
9-10	16 %
7-8	28 %
5-6	39 %
3-4	17 %

1. Diagram: VI.B tavalyi teszt (+,-) eredményei



A tavalyi VI-ik osztályt útólag felmértem hagyományos módon, az egész számokkal végzett 4 alap művelet (+, - , · , :) elsajátítása után. Az A/3 tesztben (lásd A/3 számú mellékletet) az egész számok összeadását, kivonását, szorzását illetve osztását ellenőrizvén a következőket figyeltem meg:

- Tudnak-e a diákok a pozitív egész számokkal összeadni
- Tudnak-e a diákok a negatív egész számokkal összeadni
- Tudnak-e a diákok a pozitív egész számokkal kivonni
- Tudnak-e a diákok a negatív egész számokkal kivonni
- Tudnak-e a diákok a pozitív egész számokkal szorozni
- Tudnak-e a diákok a negatív egész számokkal szorozni
- Tudnak-e a diákok a pozitív egész számokkal osztani
- Tudnak-e a diákok a negatív egész számokkal osztani
- Tudják-e a műveletek elvégzésének helyes sorrendjét

Megfigyelési szempontok:

A felmérő hasonlóan 14 gyakorlatból állt, mindegyik 5 pontot érve, így a diák 14 x 5=70 pontot tudott összegyűjteni. Egy közepes szintű felmérő, amelyben változatos gyakorlatok voltak előtérbe helyezve.

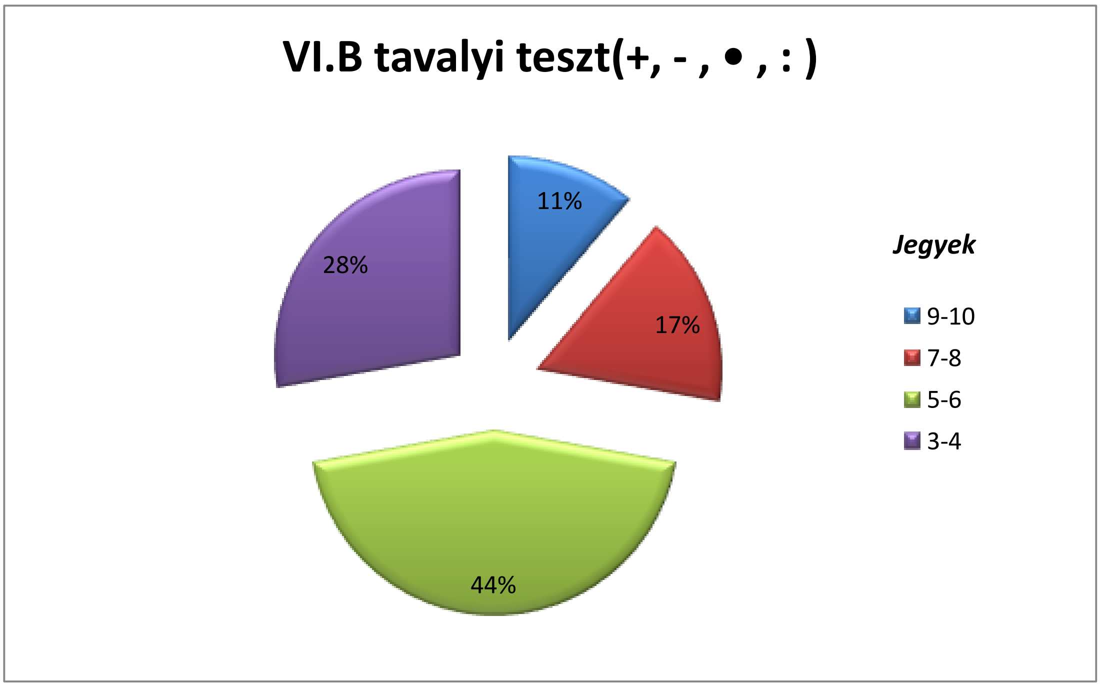
Mivel a tulajdonságokat a hagyományos módszer alapján a diákok elfogadták, megtanulták, ez oda vezetett, hogy azok a diákok akik jobb képességűek voltak az első teszthez hasonlóan, azoknak sikerült jobb eredményeket elérni. Tehát mondhatom, hogy a jó matematika képességekkel rendelkező diákok megtanulták becsületesen a tulajdonságokat, ennek következtében nagyon jó eredményeket értek el. Habár, nem tudom hogyan magyaráznák meg a tulajdonságok közül, bármelyiket is (egész számok összeadására, kivonására, szorzására, osztására nézve), a tulajdonságokat jól tudták alkalmazni. Viszont a gyengébb vagy közepes képességű diákok ennél a tesztnél már nehezebben boldogultak, mint az elsőnél. Ez a dolog annak is köszönhető, hogy gyakorlatilag, ha nem tanulta meg rendesen az egész számok összeadására, kivonására vonatkozó tulajdonságokat, akkor itt már nem tudott kivitelezni más gyakorlatokat sem, ahol ezek a műveletek csak egy részét képezték a feladatnak. Így bizonyára elég sok gyakorlatot elrontottak és gyengébb eredményeket értek el.

Az eredmény a következő volt: a diákok 11 %-ka 9-10 között írt, vagyis nagyon ügyesen, helyesen dolgoztak. A diákok 17 %-ka 7-8 között írt, ezeknél a diákoknál apróbb hibák csúsztak be, láthatóan eltévesztették a szabályokat. A diákok 44 %-ka 5-6 között írt, ezeknél a diákoknál már kisebb és nagyobb hibák csúsztak be, elég sok gyakorlatnál. A diákok 28 %-ka 3-4 között írt, gyakorlatilag nem voltak képesek majdnem semmire. A tapasztalatom azt mondja, hogy a betanult, felhalmozodott szabályok, egy idő után felejtődnek, sőt a közepes-gyenge diákok összetévesztik őket. Tisztán látható, hogy a másdik tesztnél a tavalyi diákok eredményei romlottak, ami azt eredményezte, hogy vissza kell térni az alaptulajdonságokhoz és vagy újra tanulni, vagy talán logikusan megérteni hogy mi is történik abban a tulajdonságban.

1.Táblázat: A VI.B tavalyi teszt (+, - , · , :) eredményei

Minősítés/Jegy	**Százalék**
9-10	11 %
7-8	17 %
5-6	44 %
3-4	28 %

1. Diagram: VI.B tavalyi teszt (+, - , · , :) eredményei



4.4.2. Idéni VI-ik osztály felmérése (kísérleti csoport)**:**

Az idéni VI-ik osztály felmérését a korongos matematikai modell alkalmazása után végeztem, gyakorlatilag a tulajdonságokat közösen az osztállyal sikerült megfogalmazni a csoportos tevékenységeink során. Az egész számokkal végzett 4 alapművelet elsajátítása után, az A/2 tesztben (lásd A/2 számú mellékletet) először az egész számok összeadását és kivonását ellenőrizvén a következőket figyeltem meg:

- Tudnak-e a diákok a pozitív egész számokkal összeadni
- Tudnak-e a diákok a negatív egész számokkal összeadni
- Tudnak-e a diákok a pozitív egész számokkal kivonni
- Tudnak-e a diákok a negatív egész számokkal kivonni

Megfigyelési szempontok:

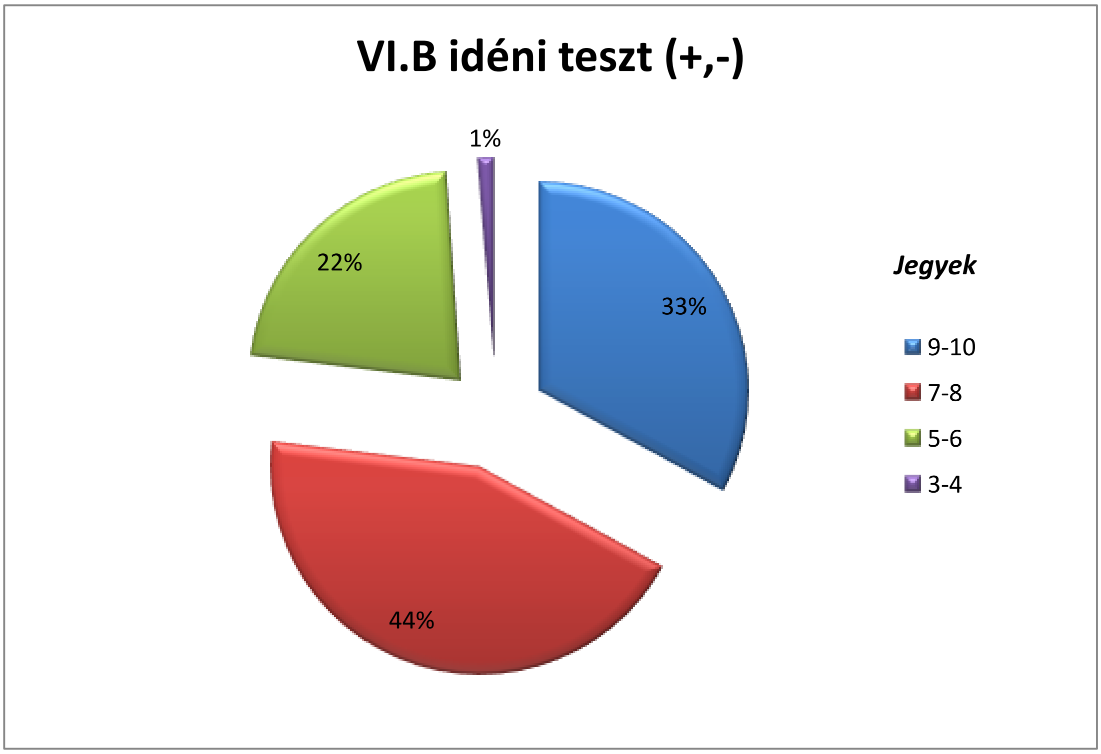
A felmérő hasonlóan a tavalyihoz 14 gyakorlatból állt (majdnem ugyanazok a gyakorlatok), mindegyik 5 pontot érve, így a diák 14 x 5=70 pontot tudott összegyűjteni.. Egy közepes szintű felmérő, amelyben nem a gyakorlatok változatossága volt előtérbe helyezve, hanem inkább az alapműveletek ismerete volt kihangsúlyozva. Mivel a tulajdonságokat a korongos matematikai modell alkalmazásával sajátították el a diákok, illetve a gyakorlatokat le kellett rajzolni a korongocskák segítségével, ez oda vezetett, hogy azok a diákok akik jobb képességűek voltak, azoknak semmi gond nélkül sikerült jó eredményeket elérni most is. Viszont a gyengébb vagy közepes képességű diákoknak is, a korongos kirakásnak köszönhetően sikerült jobb eredményeket elérni, mint a tavalyiaknak.

A pozitív egész számok összeadása nem okozott gondot senkinek, hiszen a piros korongocskákkal kirakosgatták őket, majd összeszámolva megkapták az eredményt, a negatív egész számok összeadása hasonlóan nem volt nehéz mivel csak a piros színről kellett váltani kékre és minden rendben volt. A pozitív egész számok kivonásánál amikor nagyobb számból vonták ki a kisebbet, akadály nélkül kirakosgatták és megkapták a helyes választ, ha viszont kisebb számból vonták ki a nagyobbat akkor kipótolták annyi koronggal, amennyi szükség volt ahhoz, hogy el tudják végezni a kivonást. Ennél az utóbbi esetnél (például az A/2 tesztben az *i)* gyakorlatnál : +8-13=....) egyes diákok úgy jártak el, hogy felrajzoltak 8 piros korongot és még 5 piros korongot 5 kék koronggal együtt, így megvolt a 13 piros korong, amit ki lehetett vonni és akkor megmaradott az 5 kék korong, tehát az eredmény -5 lett. Mások pedig felrajzolták a 8 piros korongot és még 13 piros korongot 13 kék koronggal együtt, ezek után kivonták a 13 piros korongot, a megmaradott 8 piros korongot a 13 kék korongból 8 darabbal kihúzták és így megmaradott az 5 kék korong, vagyis az eredmény így is -5 lett. Érdekes módon voltak egy páran, akik egy másik felrajzolási módot használtak, éspedig megrajzolták a 8 piros korongot majd a 13 kék korongot, a 8 pirosat kihúzták 8 darab kék koronggal a 13 kékből, megmaradva így az 5 kék korong.

1. **Táblázat:** A VI.B idéni teszt (+,-) eredményei

Minősítés/Jegy	**Százalék**
9-10	33 %
7-8	44 %
5-6	22 %
3-4	1 %

1. Diagram: VI.B idéni teszt (+,-) eredményei



Az eredmény a következő volt:

- A diákok 33 %-ka 9-10 között írt, 17 %-al jobb eredmény a tavalyihoz képest, vagyis nagyon ügyesen és helyesen dolgoztak.
- A diákok 44 %-ka 7-8 között írt, 16%-al megnőtt ezen tanulók száma ezeknél a diákoknál apróbb hibák csúsztak be.
- A diákok 22 %-ka 5-6 között írt, 17%-al csökkent ennél a kategoriánál a tanulók száma, ezeknél a diákoknál már kisebb és nagyobb hibák csúsztak be.
- A diákok 1 %-ka 3-4 között írt, gyakolatilag a leggyengébb tanulóknak is sikerült egy jó pár gyakorlatnál helyesen felrajzolni a korongocskákat

Észrevehető milyen érdekes módon értelmezték egyes diákok a korongos modellt, ami lényegében több utat is mutatott a diákoknak a helyes megoldásban. Ezáltal ugyanannál a tesztnél, amit a tavaly írtunk a kontroll osztállyal, sokkal jobb eredményeket értünk el az idéni, kísérlet osztállyal.

Persze még fennáll egy másik kritérium is, amitől teljesen nem tudok eltekinteni, éspedig az, hogy a két osztály két különböző gyerekekből alló csoport, de a tapasztalataim szerint nincs nagy különbség a két osztály tanulmányi szintje között, mondhatni elhanyagolható, ez tesztelhető korábbi jegyeken. Több mint valószínű, hogy ha a tavalyi osztályban is végig vennénk a korongos modellel az egész számokkal végzett műveleteket, akkor ott is érezhető lenne a különbség.

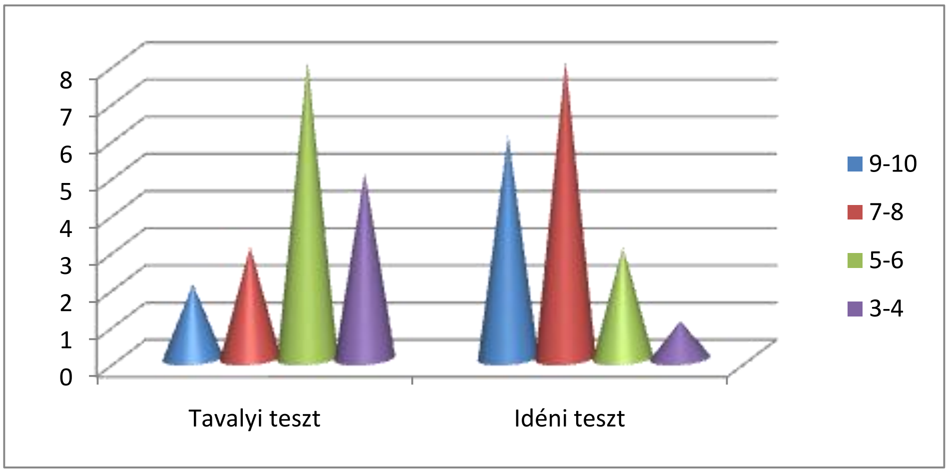
4.4.3. Tavalyi és idéni teszt összehasonlítása:

A kutatás utolsó fázisaként összehasonlítottam a tavalyi és idéni teszteket. A tavalyi teszt eredményeit összehasonlítva az idéni teszt eredményeivel arra a következtetésre jutottam, hogy az alkalmazott módszer, a korongos modell nagy mértékben hozzajárult a diákok fejlesztéséhez.

A kutatás elején felállított hipotézisek igazolódtak a kutatás során. Év végére minőségi változás következett be a tanulók teljesítményében amint látható az alábbi diagramon.

Bebizonyosodott, hogy minél több lehetőséget, munkaformát (önálló munka, differenciált munka, csoportmunka), ha megadjuk azt a lehetőséget, hogy a diákok maguk is felfedezzék, hogy az ismert tulajdonság valóban a lehető leghatékonyabb, illetve minnél jobban elmélyülünk a tulajdonságok megértésében és nem csak a megtanulásában, elfogadásában, annál biztosabb a fejlődés, úgy a tudásszint, mind a logikus gondolkodás terén. Ha a diákok jó eredményeket érnek el, akkor kialakul a pozitív hozzáállás is, ami nagyon fontos, mert segíteni fog később, nagyobb osztályokban, amikor több nehézséggel találkoznak.

12. Ábra: Tavalyi- és idéni teszt összehasonlítása



4.4.4. A két populáció átlaga kétmintás t próbával

A tavalyi és idéni tesztek összehasonlítása után még elvégeztem egy statisztikai tesztet, amelyben egy *kétmintás t próbát* alkalmaztam arra vonatkozóan, hogy a két populáció átlaga ugyanaz-e vagy sem.

A két populáció a mi esetünkben, a kísérleti (idéni) és a kontroll (tavalyi) osztály. A kétmintás t próbának megfelelően megfogalmazzuk a hipotezist. A próba nullhipotézise (H_0), hogy az átlagok megegyeznek a két osztályban:

H_0: $\mu_{kísérleti} = \mu_{kontroll}$, azaz $\mu_{kísérleti} - \mu_{kontroll} = 0$, ahol a $\mu_{kísérleti}, \mu_{kontroll}$ a két populáció átlaga.

A próba alternatív hipotézise (H_a), hogy a két mintában a két átlag statisztikai szempontból nem egyezik meg. A "statisztikai szempontból" kifejezés itt arra utal, hogy az eltérés a két átlag között olyan minimális, hogy pusztán csak a véletlen ingadozásnak tulajdonítható (ekkor a két átlag statisztikai szempontból azonosnak tekinthető), vagy jelentősen nagyobb, mint ami a véletlennel magyarázható (ekkor a két átlag statisztikai szempontból nem tekinthető azonosnak).

H_a: $\mu_{kísérleti} <> \mu_{kontroll}$

A kétmintás *t*-próba próbastatisztikája:

$$t = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{(n-1)s_x^{*2} + (m-1)s_y^{*2}}} \cdot \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$$

ahol

- $\overline{x}$ az kísérleti csoport átlaga
- $\overline{y}$ a kontroll csoport átlaga,
- s_x^* az egyik valószínűségi változó korrigált szórása,
- s_y^* a másik valószínűségi változó korrigált szórása,
- n az egyik minta elemszáma
- m a másik minta elemszáma.

A kétmintás t-próba a két átlagot hasonlítja össze, a kapott mintaátlagok segítségével a sokaság-átlagokra következtetünk.

A nullhipotézis az, hogy a két sokaságnak, amelyekből a mintákat vettük, azonos az átlaga (kontroll = kísérleti), kétoldalas ellenhipotézise pedig az, hogy különbözők az átlagok. Ennek a hipotézisnek a tesztelésére két osztály áll a rendelkezésünkre, az kontroll osztályban 18 tanuló van , a kísérleti osztályban 12 tanuló van.

Az idéni (kísérleti) osztály átlagos eredménye a korongos modellt használva :

$$\bar{x} = (3\cdot 10 + 2\cdot 9 + 2\cdot 8 + 2\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5):12 = 7{,}91$$

A tavalyi (kontroll) osztály átlagos eredménye a hagyományos módszert használva :

$$\bar{y} = (1\cdot 10 + 2\cdot 9 + 3\cdot 8 + 2\cdot 7 + 4\cdot 6 + 4\cdot 5 + 2\cdot 4) : 18 = 6{,}55$$

A minták nagysága n = 12 és m = 18, a korrigált szórások s_x^* és s_y^* a következő képletekkel kiszámítva:

$$s_X^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}}, \qquad s_Y^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \overline{Y})^2}{m-1}}$$

s_x^{*2}= 2,99 illetve s_y^{*2}= 3,20

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n-1)s_x^{*2} + (m-1)s_y^{*2}}} \cdot \sqrt{\frac{nm\cdot(n+m-2)}{n+m}} =$$

$$= \frac{7{,}91 - 6{,}55}{\sqrt{(12-1)\cdot 2{,}99 + (18-1)\cdot 3{,}20}} \cdot \sqrt{\frac{12\cdot 18\cdot(12+18-2)}{12+18}} =$$

$$= 0{,}1456 \cdot 14{,}1985 =$$
$$= 2{,}067 \quad \Rightarrow \; t = 2{,}067$$

A $t_{n+m-2,1-p/2}$ kvantilist meghatározva kapjuk, hogy $n+m-2 = 12+18-2 = 28$ és a p=0,05-nek véve az $1-p/2 = 1-0.05/2 = 0{,}975$ vagyis $t_{28,0.975}$=2.048

$$t \in [-t_{n+m-2,1-p/2}, t_{n+m-2,1-p/2}] = [-t_{28,0.975}, t_{28,0.975}] = [-2.048\,,\,2.048]$$

Mivel a számított érték, *t=2,067* nincs benne a $[-2.048\,,\,2.048]$ intervallumban, a nullhipotezis megbukik 95%-os szinten, vagyis legalább 95% a valószínűsége annak, hogy a két minta átlaga nem egyezik meg. Tehát, érvényesül a próba alternatív hipotézise, amiszerint lényeges különbség van a két módszer közt.

A fenti hipotézisből következik, hogy az idéni (kísérleti) osztállyal elsajátított korongos matematikai modell, jobb eredményekhez vezet mint a tavalyi (kontroll) osztállyal hagyományos úton történő tanulás.

V. FEJEZET

KÖVETKEZTETÉSEK, JAVASLATOK

A kutatásom során arra a következtetésre jutottam, hogy az iskolai tanulást kettős folyamatként értelmezhetjük, amelynek során a gyermek az ismeretek elsajátításán túl az ismeretek alkalmazásához és újabb ismeretek megszerzéséhez szükséges gondolkodási és általában értelmi műveleteket is megtanulja. Már a megértés is számos gondolkodási művelet elvégzését feltételezi, a konkrét tartalom átfordítását elvont szintre, például a tartalom korongocskákkal való kifejezését.

A rajzos gyakorlatok által lehetőséget adunk a gyermekeknek az összefüggések, tulajdonságok önálló felfedezésére. A következőkben az eredményeket az előírt hipotéziseim szemszögéből elemzem:

- *Ha a gyakorlatok és feladatok megoldásának elsajátíttatása, a lehetőségek maximális kihasználása minél több tevékenységre épül, akkor az év végére minőségi változás fog bekövetkezni a tanulók teljesítményében, a logikus gondolkodási mechanizmusok fejlődésében.*

Ez a feltevés bebizonyosodott, mivel az egész számokkal végzett alapműveleteket tevékenységekre építettem, betartván a fokozatosság elvét. Nagyon szívesen dolgoztak a diákok, a piros és kék színű kartonpapírból kivágott korongocskákkal, illetve a mágneses korongocskákkal a fémtáblánál.

- *Ha az egész számokkal végzett műveletek tulajdonságainak elsajátításában használjuk a korongos modellt, önálló csoportos munkára szoktatjuk a diákokat több lehetőséget biztosítunk a logikus gondolkodási mechanizmusok fejlesztésére.*

Ez a feltevés is bebizonyosodott. Önállóan, saját ritmusukban dolgoztak a diákok. Így mindenki a lehetőségeinek megfelelően fejlődött. A gyerek azzal, hogy valamit kíváncsiságból kipróbál, új helyzeteket teremt, az újdonság pedig lenyűgözi, örömet ad és pillanatonként bölcsebbé teszi.

- *Ha csoportos játékokat, tevékenységeket szervezünk matematika órán, a gyengébb képességű tanulók gyorsabb ütemben fejlődnek.*

A csoportos tevékenység keretén belül minden gyerek bekapcsolódik, az ügyesebbek segítenek a gyengébbeknek is, így észrevétlenül elsajátítanak ismereteket. A csoportos munka során mindig voltak olyan tanulók, akik szívesen irányították a csoport tevékenységét. Voltak olyan diákok akik, a csoportos munka alatt tévesen rakosgatták ki a korongokat, ekkor a csoporttársaik rögtön kisegítették. A teszt alatt a diákok 2-3 féle képpen is kirakták a korongok segítségével a feladatot, amit utólag bemutattak egymásnak. A csoportmunka által nagyon jól fejlődik a közösségi szellem is. Egy igazi közösségben a diákok mindig szívesen dolgoznak.

Az eredményesebb matematika oktatás érdekében, a következő módszereket ajánlom:

- Teremtsünk megfelelő érzelmi légkört, válasszuk ki a leghatékonyabb tanítási módszereket.
- Sajátíttassuk el a tanulókkal azokat a gondolkodási műveleteket, amelyekre az adott helyzetek, feladatok megoldásához szükségük van.
- Adjunk a jobb képességű tanulóknak „provokatív” jellegű feladatokat, amelyek megoldásához nem elég a sablon, hanem önálló, produktív gondolkodást feltételeznek, egyéni elképzeléseiket közölhetik, rögzíthetik.
- Kerüljük a túlzott segítségnyújtást, figyeljünk a tanulók eltérő értelmi képességeire, szoktassuk önálló munkára és önellenőrzésre őket.
- Oldjuk fel a gátlásaikat, erősítsük önbizalmukat, a versengést csak elővigyázatosan alkalmazzuk.
- Vegyük figyelembe a tanulók érdeklődését, teherbíró képességét.
- Értékeljük rendszeresen, pozitív módon a tanulók munkáját.
- Fejlődésüket önmagukhoz mérjük, ne hasonlítgassuk össze társaikkal.
- Foglalkozzunk differenciáltan is a tanulókkal. A differenciált oktatás a matematika óra elengedhetetlen feltétele, mivel kettős célt szolgál: felzárkóztatja a gyengébb tanulókat, a jobb képességűeket meg dolgoztatja.

A gondolkodás harmonikus fejlesztése csak akkor lehetséges, ha a tanulók szeretik azt amit végeznek. Meg kell próbálni átalakítani a sokszor száraz, unalmas matematika órákat, érdekes tevékenységekre épülő, a diákokat aktivizáló matematika órákká varázsolni. Könnyebb a matematikát megszerettetni, mint az elveszített önbizalmat, munkakedvet visszaadni.

A hangsúly az algoritmusok mechanikus elsajátításáról áttevődik a logikus gondolkodási mechanizmusok fejlesztésére. Olyan eljárásokkal, kutatási módszerekkel, matematikai modellekkel kell megismerkedjenek a tanulók, amelyekkel a gyakorlat által felvetett problémákat tanulmányozni és megoldani tudják. Ha az általános osztályokban a tanulókkal megszerettetjük a matematikát, akkor az oktatás következő szakaszaiban könnyebben fognak boldogulni nem csak matekből, hanem más matematikától függő tantárgyakból is.

Irodalomjegyzék

1. András Szilárd, Nagy Örs: Kíváncsiság vezérelt matematika oktatás – Státusz Kiadó 2010

2. POSITION PAPER NATIONAL FOCUS GROUP ON TEACHING OF MATHEMATICS - First Edition Mach 2006 Chaitra 1928, PD 5T BS © National Council of Educational Research and Training, 2006 ISBN 81-7450-539-3

3. Ambrus, A.- Vancsó, Ö: Egy gyakorlatorientált matematikaoktatási modell a közoktatásban. KOMA pályázati anyag, 1998

4. Ambrus. A.: Bevezetés a matematikadidaktikába. Eötvös Kiadó Budapest, 1995

5. Dan Potolea, Curs de pedagogie, 1988, pag.151

6. Az oktatási követelmények műveletesítése/operacionalizálása
Forrás: http://peda.topnet.ro/archivum/Peter_Lilla/tantervelmelet_2.pdf.

7. Fodor László : Általános és iskolai pedagógia. Stúdium Kiadó, Kolozsvár, 2000.

8. Horváth György : A tartalmas gondolkodás. Tankönyvkiadó, Bp. 1984.

9. Perlai Rezsőné: A matematikai nevelés módszertana. Nemzeti Tankönyvkiadó, Bp.2007

10. Péterfy Emília, Reményi Sándor, Vofkori László : Módszertani alapfogalmak. E.D.P. Bukarest, 1979.

11. Pólya György: A gondolkodás iskolája , Gondolat. Budapest, 1977.

12. Robert Fisher: Tanítsuk gyermekeinket gondolkodni játékokkal! Műszaki Kiadó, Budapest,2007.

Internetes oldalak:

http://www.simplexportal.ro

http://www.didaktika.ro

http://en.wikipedia.org

http://www.sulinet.hu

MELLÉKLETEK

A. FELMÉRŐK:

1) Tavalyi teszt: Felmérő- egész számok összeadása és kivonása
2) Idéni teszt: Felmérő- egész számok összeadása és kivonása
3) Felmérő- egész számok összeadása, kivonása, szorzása, osztása
4) Ö.S. diák tesztje kijavítva
5) M.H. diák tesztje kijavítva
6) G. E. diák tesztje kijavítva
7) 1. Munkalap
8) 2. Munkalap

B. FÉNYKÉPEK MUNKA KÖZBEN

Felmérő- egész számok összeadása és kivonása - 2010. V. 18

Végezzétek el a következő összeadásokat és kivonásokat az egész számok halmazán!

a) +8+12 =

b) +9+(+6) =

c) 16+(+13) =

d) (+3)+(-11)=

e) (-10)+(-5)=

f) (-9)+(+7) =

g) (-8)+(+12) =

h) +5-2=

i) +8-13=

j) -8-(-10)=

k) -7-3=

l) -15-(+18)=

m) -9-13=

n) -8-(-5)=

Értékelés:

- Minden helyes megoldás 5 pont (14 feladat 70 pont)
- Maximális pontszám 100 pont
- Hivatalból 30 pont

Felmérő- egész számok összeadása és kivonása - 2011. V. 24

Végezzétek el a következő összeadásokat, kivonásokat ábrázolva **a piros és kék korongocskák** segítségével:

1. +4+7 =

2. +9+(+6) =

3. 6+(+3) =

4. (+3)+(-11)=

5. (-7)+(-5)=

6. (-9)+(+7) =

7. (-4)+(+5) =

8. +5-2=

9. +8-13=

10.-8-(-10)=

11.-7-3=

12.-5-(+8)=

13.-9-(+3)=

14.-8-(-5)=

Értékelés:

- Minden helyes megoldás 5 pont (14 feladat 70 pont)
- Maximális pontszám 100 pont
- Hivatalból 30 pont

Felmérő - egész számok összeadása, kivonása, szorzása és osztása - 2011. VI. 2

Végezzétek el a következő műveleteket az egész számok halmazán, ábrázolva **a piros és kék korongocskák** segítségével:

1. -12+(+3) =

2. -9-3 =

3. (+4)+(-7)=

4. 7-10=

5. (-3)·(+4) =

6. (-4)·(-5) =

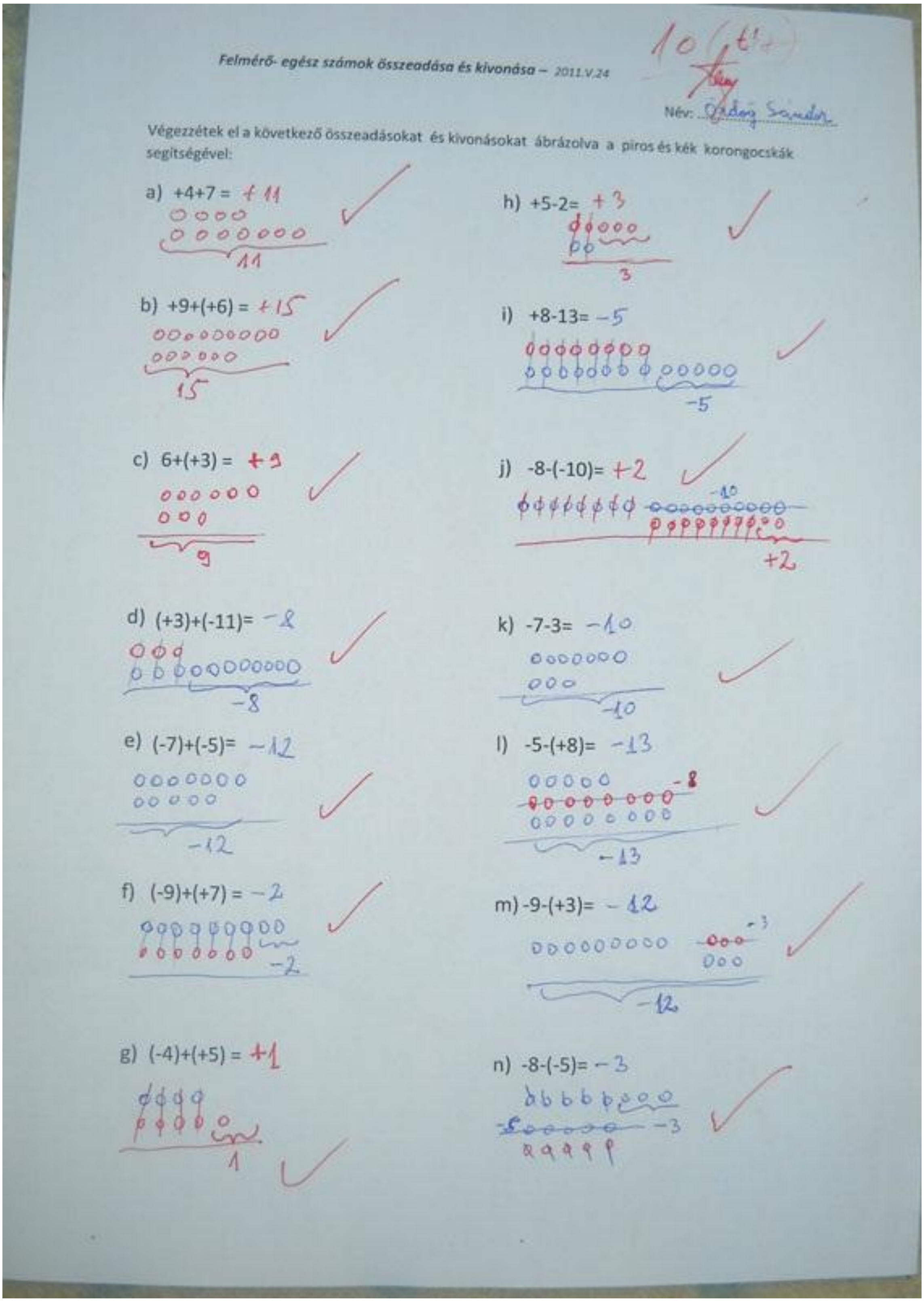
7. (+10):(-2)=

8. + 5 · (-1) + (-16) : (-8) =

9. 12 : (- 3) + (- 18) : (- 6) =

Értékelés:

- Minden helyes megoldás 10 pont (9 feladat 90 pont)
- Maximális pontszám 100 pont
- Hivatalból 10 pon



Felmérő- egész számok összeadása és kivonása – 2011.V.24

Név: Ördög Sándor

Végezzétek el a következő összeadásokat és kivonásokat ábrázolva a piros és kék korongocskák segítségével:

a) +4+7 = +11

b) +9+(+6) = +15

c) 6+(+3) = +9

d) (+3)+(-11)= -8

e) (-7)+(-5)= -12

f) (-9)+(+7) = -2

g) (-4)+(+5) = +1

h) +5-2= +3

i) +8-13= -5

j) -8-(-10)= +2

k) -7-3= -10

l) -5-(+8)= -13

m) -9-(+3)= -12

n) -8-(-5)= -3

90p ≈ 9 (kiváló)

Felmérő- egész számok összeadása és kivonása – 2011.V.24

Név: Mészáros Ilona

Végezzétek el a következő összeadásokat és kivonásokat ábrázolva a piros és kék korongocskák segítségével:

a) +4+7 = +11 ✓

b) +9+(+6) = +15 ✓

c) 6+(+3) = +9 ✓

d) (+3)+(-11)= −8 ✓

e) (-7)+(-5)= −12 ✓

f) (-9)+(+7) = −2 ✓

g) (-4)+(+5) = +1 ✓

h) +5-2= +5 + −2 = +3 ✓

i) +8-13= +8 + −13 = −5 ✓

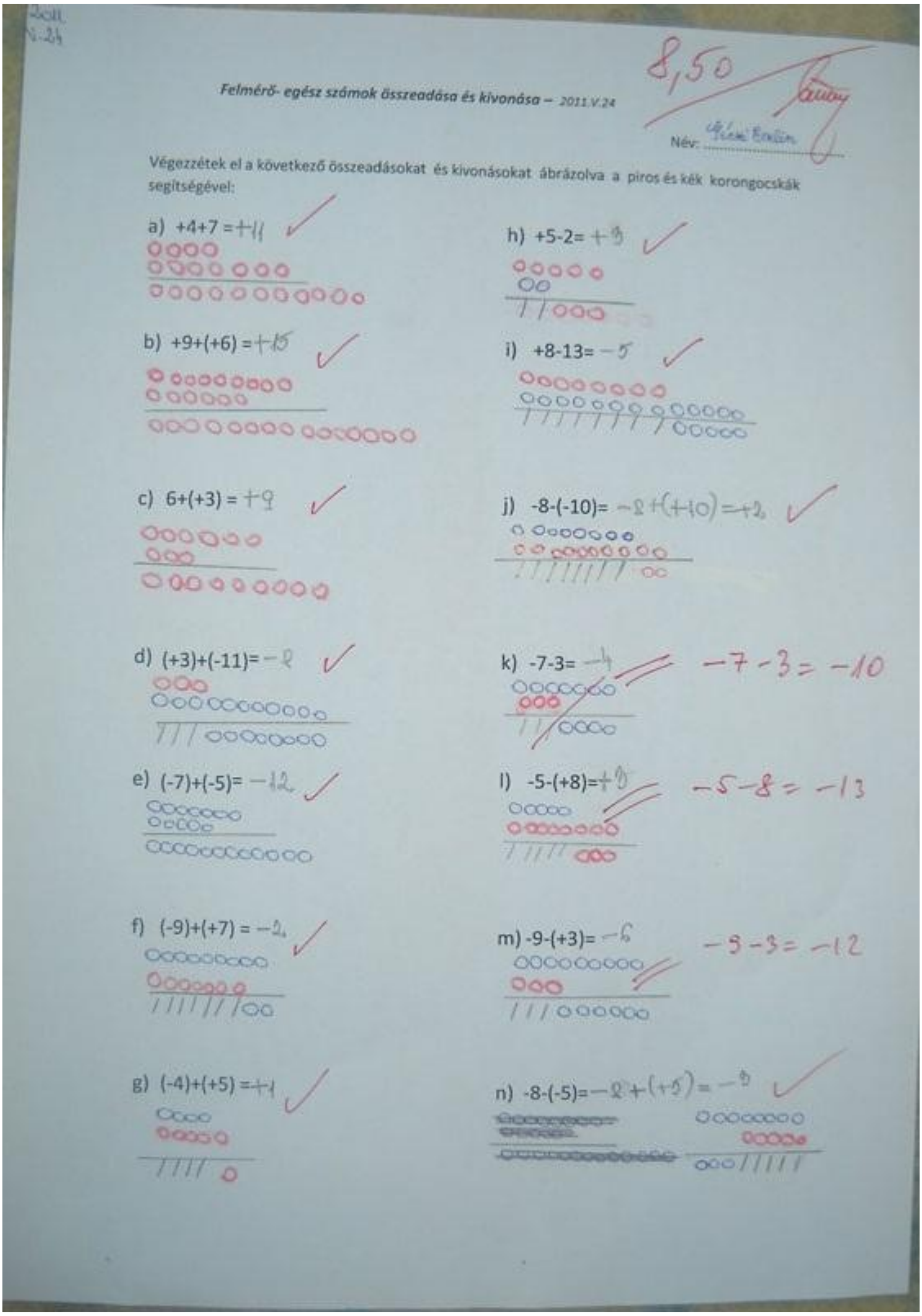
j) -8-(-10)= −8 + (+10) = +2 ✓

k) -7-3= −7 + (−3) = −10 ✓

l) -5-(+8)= +3 −13

m) -9-(+3)= −6 −12

n) -8-(-5)= ~~(8+5)~~ −8 + (+5) = −3 ✓



8,50

Felmérő- egész számok összeadása és kivonása – 2011.V.24

Név: ....

Végezzétek el a következő összeadásokat és kivonásokat ábrázolva a piros és kék korongocskák segítségével:

a) +4+7 = +11

b) +9+(+6) = +15

c) 6+(+3) = +9

d) (+3)+(-11)= -8

e) (-7)+(-5)= -12

f) (-9)+(+7) = -2

g) (-4)+(+5) = +1

h) +5-2= +3

i) +8-13= -5

j) -8-(-10)= -8+(+10)=+2

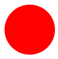
k) -7-3= -4 −7−3= −10

l) -5-(+8)=+3 −5−8= −13

m) -9-(+3)= -6 −9−3= −12

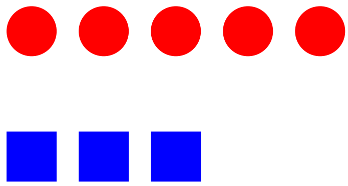
n) -8-(-5)= -8+(+5)= -3

A törpék a bányában  tallérokat kapnak fizetségként, **készpénzben**.

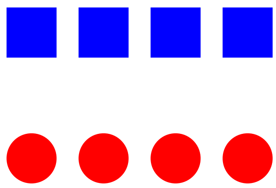
Ha az erdei boltban hitelre vásárolnak, akkor az 1 tallér **adósságot** ilyen cédulán jegyzik fel  . Az 1  adósságot 1  készpénzzel válthatnak ki a boltban a törpék.

Mennyi vagyona van elszámoláskor a törpéknek?

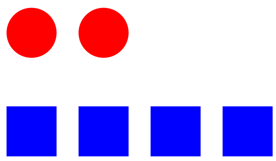
Tudor vagyona: ……………………………



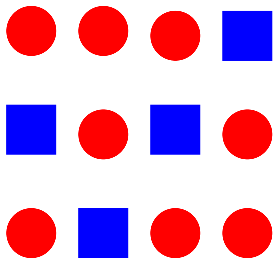
Vidor vagyona: …………………………



Morgó vagyona: …………………………..

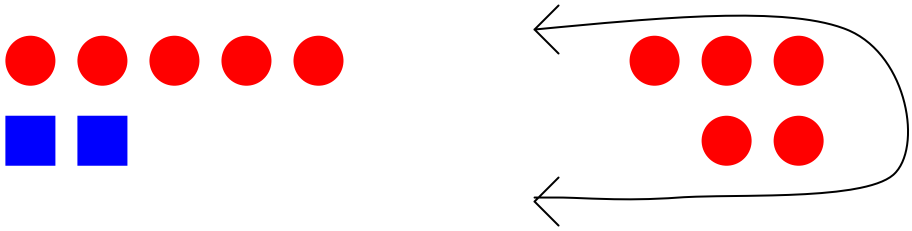


Hapci vagyona: …………………………..



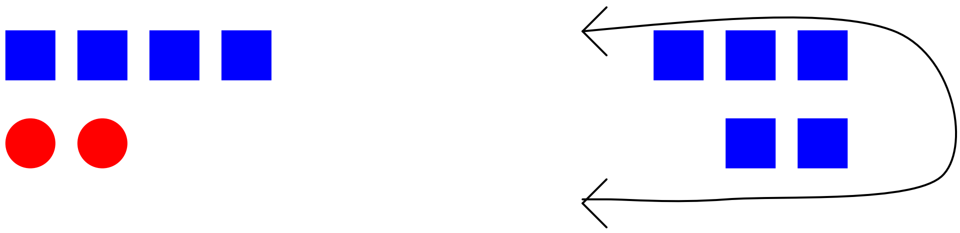
Írd le a képeket a matematika nyelvén!

a) Hapci vagyoni helyzetét a rajzról leolvashatod. 5 tallért kap születésnapjára Hófehérkétől. Mennyi pénze lesz?



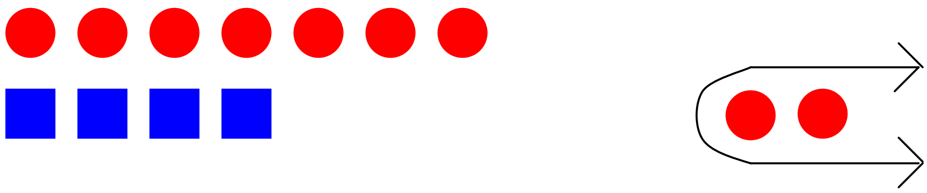
……………………………………………………………………………………..

b) Kuka vagyoni helyzetét a rajzról leolvashatod. Kölcsön kér Okoskától 5 tallért. Mennyi vagyona lesz ezután?



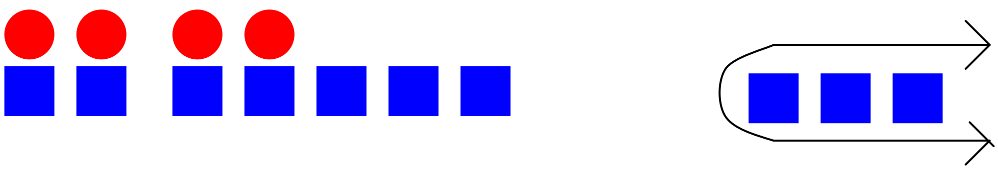
………………………………………………………………………………………..

c) Okoska vagyoni helyzetét a rajzról leolvashatod. Kölcsön adott Kukának 2 tallért. Mennyi lett így a vagyona?



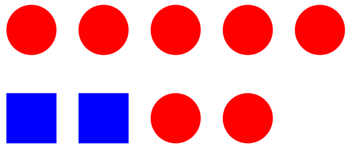
………………………………………………………………………………………...

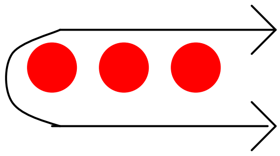
d) Morgónak vagyoni helyzetét a rajzról leolvashatod. Vidor átvállalt tőle 3 adósságcédulát. Mennyi vagyona lett Morgónak?



…………………………………………………………………………………………

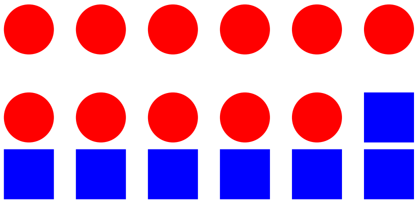
e) Szende vagyonát az ábráról leolvashatod. A boltban 3 tallér adósságát rendezte. Mennyi pénze maradt?

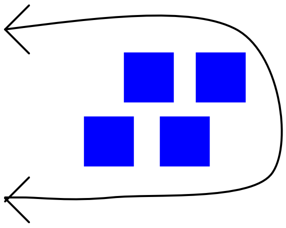




…………………………………………………………………………………...

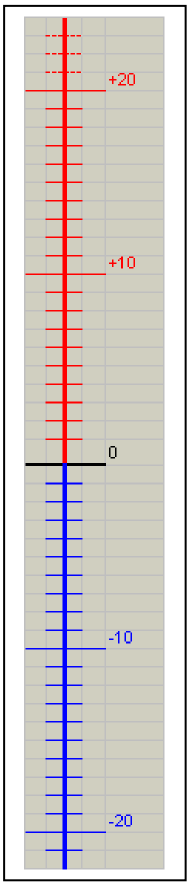
f) Szundinak 4 tallérja volt. 4 törpétől átvállalt 1-1 adósságcédulát, összesen 4 tallér értékben. Mennyi pénze lett?





……………………………………………………………………………………

Lépegess a hőmérőn!



a) Mutasson a hőmérő 0 °C-ot!

Hány °C lesz, ha 8 °C-kal melegebb lesz?

Válasz: …………….

b) Mutasson a hőmérő 0 °C-ot!

Hány °C lesz, ha 6 °C-kal hidegebb lesz?

Válasz: ……………

c) Reggel a hőmérséklet +2 °C volt.

Mennyi délben a hőmérséklet, ha 13 °C-kal melegebb van?

Válasz: …………….

d) Délután a hőmérő –4 °C-ot mutatott.

Este kilencre 5 °C-ot hűlt a levegő. Mennyit mutat a hőmérő?

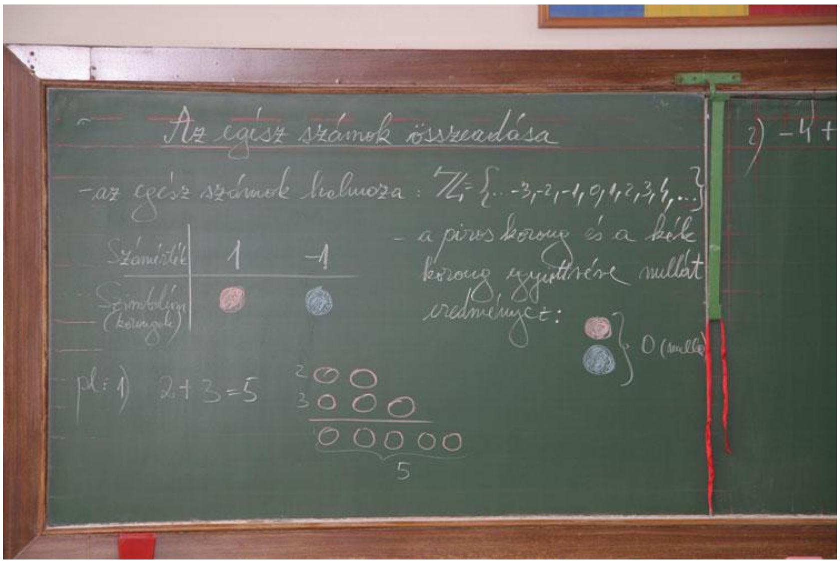
Válasz: ……………..

e) Tegnap este +6 °C volt.

Ma reggelre 8 °C-kal csökkent a hőmérséklet. Hány °C van?

Válasz: ……………..

FÉNYKÉPEK MUNKA KÖZBEN

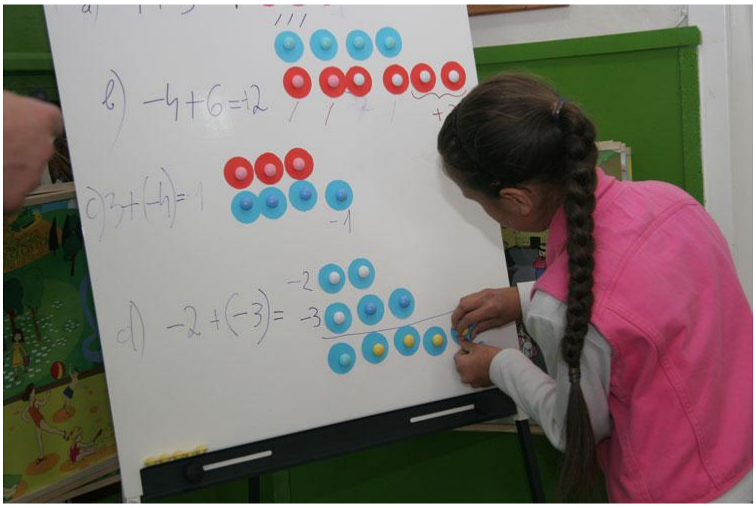


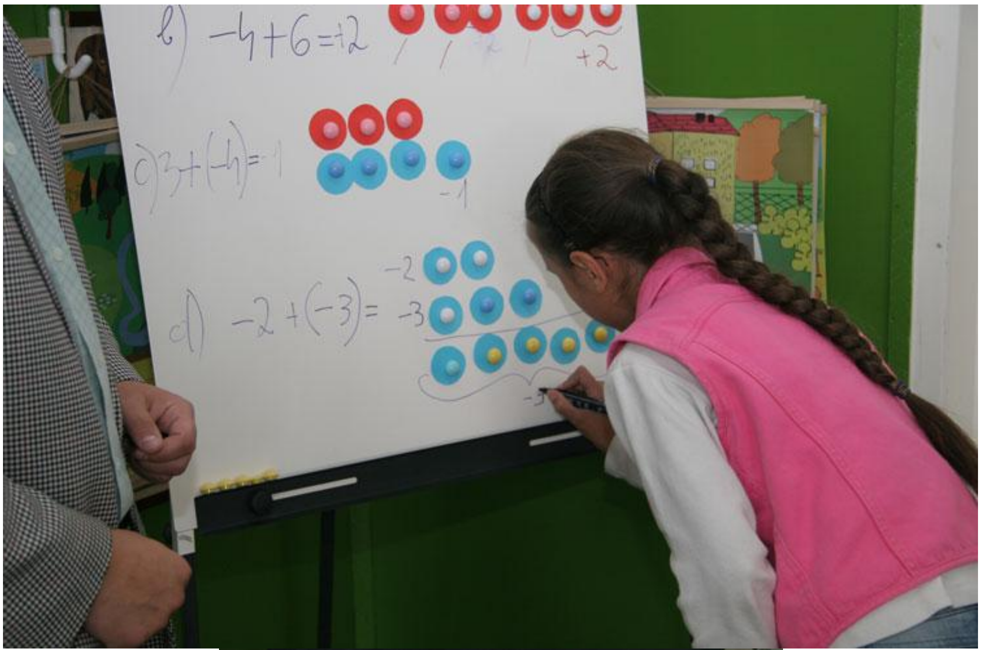

-1
1
-4+3=-1

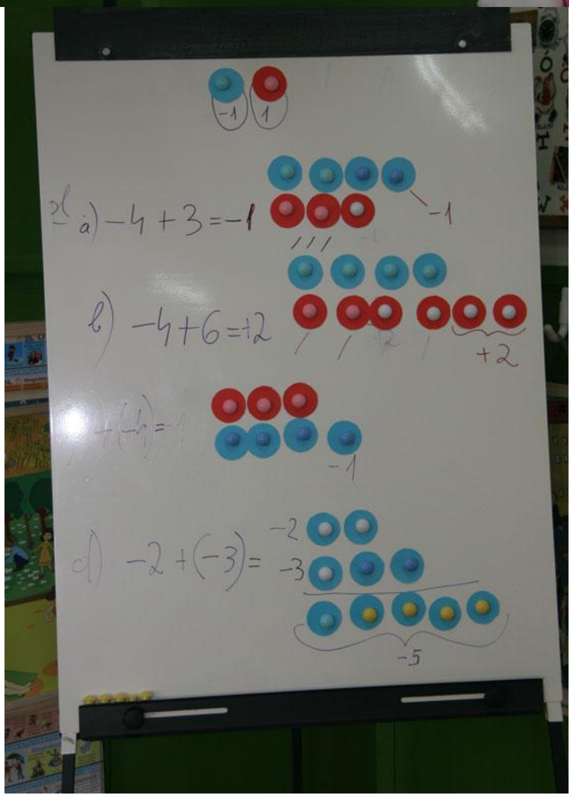

a) -4+3=-1
b) -4+6=2


-4+3=-1
-4+6=+2


-4+6=+2
-1
+2


b) −4+6=+2
c) 3+(−4)=−1
d) −2+(−3)=


b) −4+6=+2
+2
c) 3+(−4)=−1
−1
d) −2+(−3)=
−2
−3


−1
1
a) −4+3=−1
−1
b) −4+6=+2
+2
−1
d) −2+(−3)=
−2
−3
−5

DECLARAŢIE DE AUTENTICITATE PE PROPRIE RĂSPUNDERE

Subsemnatul (a) ____, înscris la examenul pentru obţinerea Gradului didactic I, seria 2010-2012, specializarea ____, prin prezenta, certific că lucrarea metodico-ştiinţifică cu titlul ____

____

____

____

_______________.

conducător ştiinţific ____

este rezultatul propriilor mele activităţi de investigare teoretică şi aplicativă şi prezintă rezultatele personale obţinute în activitatea mea didactică.

În realizarea lucrării am studiat doar surse bibliografice consemnate în lista bibliografică, iar preluările din diferitele surse, inclusiv din alte lucrări personale, au fost citate în lucrare.

Prezenta lucrare nu a mai fost utilizată în alte contexte evaluative – examene sau concursuri.

Data: ______________ Semnătura:

____