

Elemi matematika szakkör

Kolozsvár, 2015. november 23.

1.1. Feladat. Határozd meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amely teljesíti a következő egyenlőséget bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén:

$$f(x+y) = f(x)f(a-y) + f(y)f(a-x),$$

ahol $a \in \mathbb{R}$ rögzített paraméter és $f(0) = \frac{1}{2}$. (Balkán olimpia, 1987, Athén)

1.2. Feladat. Határozd meg az összes olyan $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyre

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2},$$

bármely $x \in \mathbb{R}^*$.

1.3. Feladat. Határozd meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amely teljesíti a következő egyenlőséget bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén:

$$f(x-y) - xf(y) \leq 1-x.$$

1.4. Feladat. Határozd meg az összes olyan $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ függvényt, amely teljesíti a következő egyenlőséget bármely $x \in \mathbb{Z}$ esetén:

$$f(f(x)) = x + 2.$$

1.5. Feladat. Határozd meg az összes olyan $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ függvényt, amely teljesíti a következő egyenlőséget bármely $x \in \mathbb{Z}$ esetén:

$$3f(f(x)) = 2f(x) + x.$$

1.6. Feladat. Hány olyan $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ függvény létezik, amelyre

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

1.7. Feladat. Határozd meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \setminus \{1, \frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyre

$$f(x) + x \cdot f\left(\frac{x}{2x-1}\right) = 2,$$

bármely $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, \frac{1}{2}\}$.

1.8. Házi feladat. Szerkessz olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyre $f(x) \notin \mathbb{Z}$ és $f(f(x)) \notin \mathbb{Z}$, bármely $x \in \mathbb{Z}$, de $f(f(f(x))) \in \mathbb{Z}$, bármely $x \in \mathbb{Z}$.

1.9. Házi feladat. Határozd meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyre

$$f(f(x)) = \begin{cases} \sqrt{2}, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

1.10. Házi feladat. *Határozd meg az összes olyan $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyre*

$$f(xyz) = xf(y) + yf(z) + zf(x), \quad \forall x, y, z > 1.$$

1.11. Házi feladat. *Határozd meg az összes olyan véges $A \subset \mathbb{R}$ halmazt, amelyre létezik olyan $f : A \rightarrow A$ függvény, amelyre $f(x) = x^2 - |x| + 1$, $\forall x \in A$.*

Megjegyzés A házi feladat megoldása során használható számológép vagy számítógép, de a feladatok megoldása a gondolatmenet részletezését jelenti, nemcsak az eredmény kiszámolását. Házi feladatot a felületen regisztrált felhasználók küldhetnek be.

**A HÁZI FELADATOK BEKÜLDÉSI HATÁRIDEJE:
2015. december 5., 23:00**