

Elemi matematika szakkör

Kolozsvár, 2015. november 9.

1.1. Feladat. Tekintsünk egy E halmazt és annak minden A részhalmazára az A halmaz $f_A : E \rightarrow \{0, 1\}$ karakterisztikus függvényét, amelyet az

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

egyenlőségekkel értelmezzük. Igazold, hogy

- $U = V \Leftrightarrow f_U = f_V$, ha $U, V \subset E$;
- $f_{A \cap B} = f_A \cdot f_B$;
- $f_{\bar{A}} = 1 - f_A$;
- $f_{A \setminus B} = f_A \cdot (1 - f_B)$;
- $f_{A \cup B} = f_A + f_B - f_A \cdot f_B$.

1.2. Feladat. Vezessél le összefüggést $f_{A \Delta B}$ -re, ahol $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$!

1.3. Feladat. Igazold, hogy

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C), \quad \forall A, B, C \subset E!$$

Adjál legalább három különböző bizonyítást!

1.4. Feladat. Vezessél le összefüggést $f_{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}$ -re, ahol $A_1, A_2, \dots, A_n \subset E$!

1.5. Feladat. A karakterisztikus függvény segítségével vezesd le a logikai szita formulát az $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ halmaz számosságára vonatkozóan!

1.6. Feladat. Vezessél le összefüggést $f_{A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_n}$ -re, ahol $A_1, A_2, \dots, A_n \subset E$!

1.7. Feladat. Adott n különböző levél és n különböző címre elcímezett boríték. A leveleket egy hanyag titkárnő véletlenszerűen borítékolja. Mennyi a valószínűsége, hogy egyetlen levél sem jut a címzetthez?

1.8. Házi feladat. Igazold, hogy ha $A \Delta X \Delta B = C$, akkor $X = A \Delta C \Delta B$!

1.9. Házi feladat. A karakterisztikus függvény segítségével vezesd le a logikai szita formulát az $A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_n$ halmaz számosságára vonatkozóan!

1.10. Házi feladat. Igazold, hogy az $A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_n$ halmaz pontosan azokat az elemeket tartalmazza, amelyek az $A_1, A_2, \dots, A_n$ halmazok közül pontosan páratlan sokban vannak benne!

1.11. Házi feladat. Adott n különböző levél és n különböző címre elcímezett boríték. A leveleket egy hanyag titkárnő véletlenszerűen borítékolja. Mennyi a valószínűsége, hogy páratlan azoknak a leveleknek a száma, amelyek eljutnak a címzetthez?

Megjegyzés A házi feladat megoldása során használható számológép vagy számítógép, de a feladatok megoldása a gondolatmenet részletezését jelenti, nemcsak az eredmény kiszámolását. Házi feladatot a felületen regisztrált felhasználók küldhetnek be.

A HÁZI FELADATOK BEKÜLDÉSI HATÁRIDEJE:

2015. november 15., 23:00