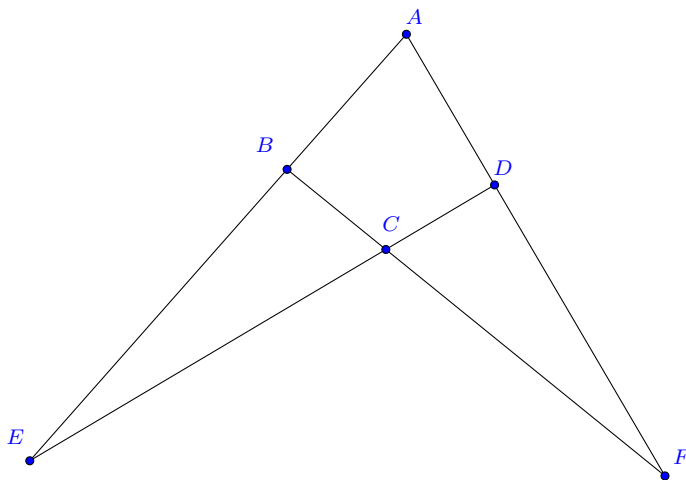


Elemi matematika szakkör

Kolozsvár, 2015. október 26.

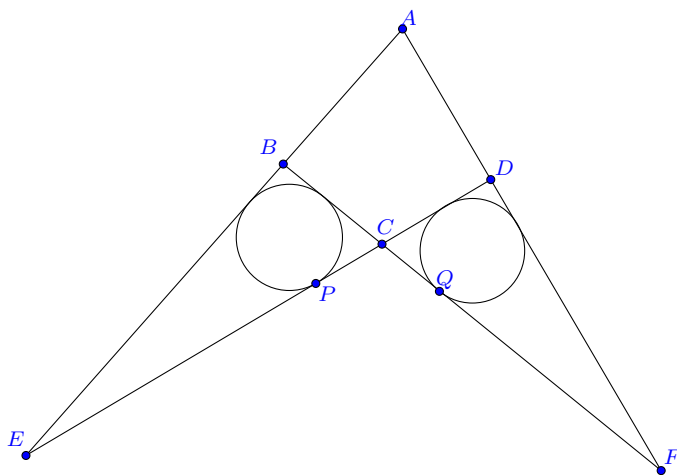
1.1. Feladat. Az $ABCD$ konvex négyszögben $\{E\} = AB \cap CD$ és $\{F\} = AD \cap BC$ (lásd a mellékel ábrát). Bizonyítsd be, hogy a következő három kijelentés egyenértékű:

1. Az $ABCD$ négyszögbe írható kör (vagyis létezik olyan kör, amely a négyszög belsőjében van és érinti mind a négy oldalát);
2. $AB + CD = AD + BC$;
3. $AE + CF = AF + EC$.



1.2. Feladat. Az $ABCD$ konvex négyszögben $\{E\} = AB \cap CD$ és $\{F\} = AD \cap BC$ (lásd a mellékel ábrát). Az ECB és FCD háromszögekbe írható körök az EC , illetve a CF oldalt a P és a Q pontban érintik. Bizonyítsd be, hogy a következő két kijelentés egyenértékű:

1. Az $ABCD$ négyszögbe írható kör;
2. $PD = BQ$.



1.3. Feladat. Az ABC háromszögben jelöljük I -vel a háromszögbe írható kör középpontját. Bizonyítsd be, hogy ha $AB + IC = AC + IB$, akkor a háromszög egyenlő szárú.

1.4. Feladat. Az ABC háromszögben jelöljük I -vel a háromszögbe írható kör középpontját. Legyen $\{B'\} = BI \cap AC$ és $\{C'\} = CI \cap AB$. Jelöljük továbbá P -vel, illetve Q -val a BIC' és CIB' háromszögekbe írható köröknek a BI , illetve a CI szakaszokkal való érintési pontjait. Bizonyítsd be, hogy ha $PB' = QC'$, akkor $AB = AC$.

1.5. Feladat. Az ABC háromszögben jelöljük G -vel a háromszög súlypontját. Bizonyítsd be, hogy ha $AB + GC = AC + GB$, akkor a háromszög egyenlő szárú.

1.6. Házi feladat. Az ABC háromszögben jelöljük G -vel a háromszög súlypontját és rendre A', B', C' -tel a BC , CA , illetve AB oldal felezőpontját. Jelöljük továbbá P -vel, illetve Q -val a BGC' és CGB' háromszögekbe írható köröknek a BI , illetve a CI szakaszokkal való érintési pontjait. Bizonyítsd be, hogy ha $PB' = QC'$, akkor $AB = AC$.

1.7. Házi feladat. Az ABC háromszögben $A' \in BC$, $B' \in CA$ és $C' \in AB$ valamint AA' , BB' és CC' egy O pontban összefutó egyenesek. Bizonyítsd be, hogy ha az $AC'OB'$, $BA'OC'$ és $CA'OB'$ négyszögek közül kettőbe írható kör, akkor a harmadikba is írható kör!

1.8. Házi feladat. Az $ABCD$ konvex négyszögben $\{E\} = AB \cap CD$ és $\{F\} = AD \cap BC$. Bizonyítsd be, hogy annak szükséges és elégséges feltétele, hogy létezzen olyan kör, amely egyidejűleg érinti az AE és az AF meghosszabbítását valamint az EC és FC szakaszokat az, hogy teljesüljön az $AE + EC = AF + CF$ egyenlőség.

1.9. Házi feladat. Fogalmazzál meg és bizonyítsd be az 1.7 feladathoz hasonló tulajdonságot az előbbi feladatból kiindulva (vagyis a négyszög oldalait érintő körök ne legyenek a négyszögek belsejében)!

Megjegyzés A házi feladat megoldása során használható számológép vagy számítógép, de a feladatok megoldása a gondolatmenet részletezését jelenti, nemcsak az eredmény kiszámolását. Házi feladatot a felületen regisztrált felhasználók küldhetnek be.

A HÁZI FELADATOK BEKÜLDÉSI HATÁRIDEJE:
2015. november 1., 23:00