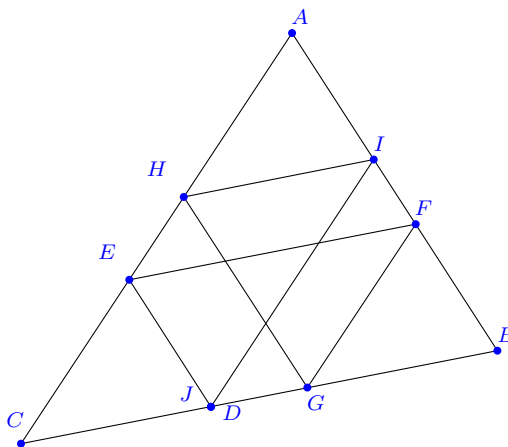


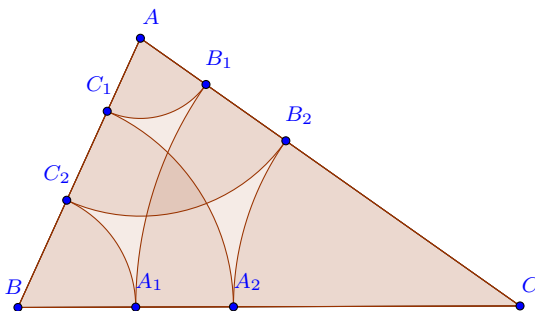
Elemi matematika szakkör

Kolozsvár, 2015. október 19.

1.1. Feladat. Az ABC háromszögben D a BC tetszőleges pontja és $E, H \in AC$, $F, I \in AB$, $G, J \in BC$ úgy, hogy $DE \parallel GH \parallel AB$, $EF \parallel IH \parallel BC$ és $FG \parallel IJ \parallel AC$. Igazold, hogy a J pont egybeesik a D ponttal!



1.2. Feladat. Az ABC háromszögben A_1 a BC tetszőleges pontja. Ebből kiindulva rendre megszerkesztjük a $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$, $A_2 \in BC$, $B_2 \in AC$, $C_2 \in AB$, illetve $A_3 \in BC$ pontokat úgy, hogy $CA_1 = CB_1$, $AB_1 = AC_1$, $BC_1 = BA_2$, $CA_2 = CB_2$, $AB_2 = AC_2$ illetve $BC_2 = BA_3$. A szerkesztés során a C középpontú CA_1 sugarú körön az A_1B_1 rövidebb körív irányítása az óramutatók járásával megegyező és hasonlóan a többi pont szerkesztésénél is. Mit mondhatunk az A_1 és A_3 relatív helyzetéről?

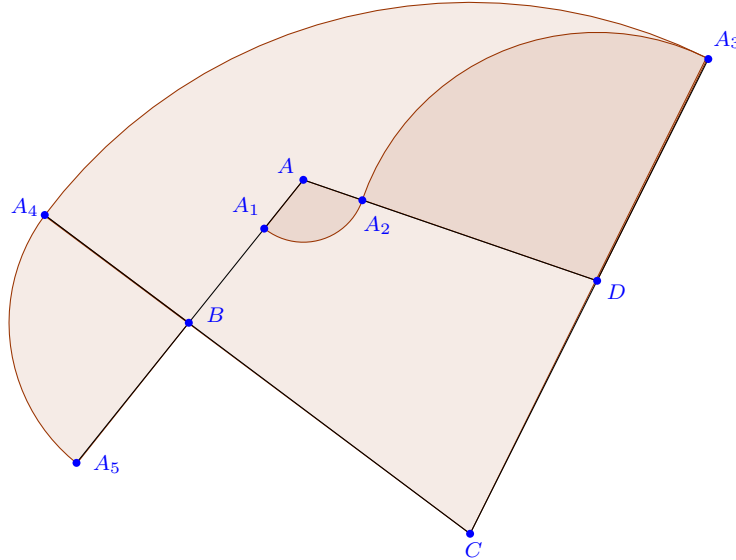


1.3. Feladat. Az ABC háromszögben $A_0 \in BC$, $B_0 \in CA$ és $C_0 \in AB$ rögzített pontok és A_1 a BC tetszőleges pontja. Rendre megszerkesztjük az $A_1B_1 \parallel A_0B_0$, $B_1 \in AC$, $B_1C_1 \parallel B_0C_0$, $C_1 \in AB$ illetve $C_1A_2 \parallel C_0A_0$, $A_2 \in BC$ egyeneseket és pontokat. A_2 -ből kiindulva hasonló módon szerkesztjük meg a B_2, C_2 , illetve A_3 pontokat és így tovább. Bizonyítsd be, hogy az így elvégzett szerkesztés pontosan akkor záródik be, ha AA_0 , BB_0 és CC_0 összefutóak.

1.4. Feladat. Fogalmazzál meg és bizonyítsd be az 1.3. feladathoz hasonló tulajdonságot négyszögre!

1.5. Feladat. Fogalmazzál meg és bizonyítsd be az 1.3. feladathoz hasonló tulajdonságot ötszögre!

1.6. Házi feladat. Az $ABCD$ négyszög AB oldalának tetszőleges A_1 pontjából kiindulva rendre megszerkesztjük az $A_2 \in AD, A_3 \in DC, A_4 \in CB, A_5 \in BA$ pontokat úgy, hogy $AA_1 = AA_2, DA_2 = DA_3, CA_3 = CA_4, BA_4 = BA_5$ és a négy csúcs közül az egyiknél egyik irányban végezzük a szerkesztést, a többinél az ellenkező irányban. Ugyanezt megismételjük A_5 -ből kiindulva és megszerkesztjük az $A_6 \in AD, A_7 \in DC, A_8 \in CB, A_9 \in BA$ pontokat. Bizonyítsd be, hogy $A_9 = A_1$.



1.7. Házi feladat. Az $A_1A_2A_3A_4A_5$ sokszög A_1A_2 oldalán levő tetszőleges B_1^1 pontból kiindulva rendre megszerkesztjük $B_1^2 \in A_2A_3, B_1^3 \in A_3A_4, B_1^4 \in A_4A_5, B_1^5 \in A_5A_1$ majd $B_2^1 \in A_1A_2$ pontokat úgy, hogy $A_2B_1^1 = A_2B_1^2, A_3B_1^2 = A_3B_1^3, A_4B_1^3 = A_4B_1^4, A_5B_1^4 = A_5B_1^5, A_1B_1^5 = A_1B_2^1$. Ezután a B_2^1 pontból kiindulva ezt a szerkesztést kezdjük ismételni (itt is minden csúcs körül ugyanabban az irányban történik a szerkesztés). Bizonyítsd be, hogy ez a szerkesztés egy idő után bezáródik (vagyis visszajutunk a B_1^1 pontba)!

1.8. Házi feladat. Legyen P az $A_1A_2 \dots A_{2n+1}$ sokszög egy belső pontja és jelöljük C_i -vel az $A_iP \cap A_{i+n}A_{i+n+1}$ metszéspontot minden $1 \leq i \leq 2n+1$, ahol $A_{2n+2} = A_1, A_{2n+3} = A_2$, stb. Egy tetszőleges $B_1^1 \in A_{n+1}A_{n+2}$ pontból kiindulva megszerkesztjük a $B_1^k \in A_{n+k}A_{n+k+1}$ pontokat $2 \leq k \leq 2n+1$ esetén úgy, hogy $B_1^k B_1^{k+1} \parallel C_k C_{k+1}$ minden $1 \leq k \leq 2n$ esetén. Ezután szerkesszük meg a $B_2^1 \in A_{n+1}A_{n+2}$ pontot úgy, hogy $B_1^{2n+1} B_2^1 \parallel C_{2n+1} C_1$ és ebből a pontból tovább folytatva szerkesszük meg a $B_2^k \in A_{n+k}A_{n+k+1}$ pontokat $2 \leq k \leq 2n+1$ esetén úgy, hogy $B_2^k B_2^{k+1} \parallel C_k C_{k+1}$ minden $1 \leq k \leq 2n$ esetén. Bizonyítsd be, hogy $B_2^{2n+1} B_1^1 \parallel C_{2n+1} C_1$!

1.9. Nyitott kérdés. Fogalmazd meg és bizonyítsd be az 1.3. feladat egy térbeli analogonját!

Megjegyzés A házi feladat megoldása során használható számológép vagy számítógép, de a feladatok megoldása a gondolatmenet részletezését jelenti, nemcsak az eredmény kiszámolását. Házi feladatot a felületen regisztrált felhasználók küldhetnek be.

A HÁZI FELADATOK BEKÜLDÉSI HATÁRIDEJE:
2015. október 25., 23:00