

Elemi matematika szakkör

Kolozsvár, 2016. május 30.

1.1. Feladat. Tekintsük az $x^2 - 2y^2 = 1$ egyenletet, ahol $x, y \in \mathbb{N}$ és $y \neq 0$.

- Keress legalább három, páronként különböző (x, y) megoldást!
- Igazold, hogy az egyenletnek végtelen sok megoldása van!
- Bizonyítsd be, hogy ha (x_0, y_0) megoldás, akkor az

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} &= x_n + 2y_n \end{cases} \quad (1.1)$$

összefüggésekkel értelmezett rekurziós sorozatokból szerkesztett (x_n, y_n) számpárok mind megoldások.

- Bizonyítsd be, hogy ha (x_0, y_0) megoldás, akkor az

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 2x_n - 3y_n \\ y_{n+1} &= -x_n + 2y_n \end{cases}$$

összefüggésekkel értelmezett rekurziós sorozatokból szerkesztett (x_n, y_n) számpárok mind megoldások.

- Igazold, hogy az $x_0 = 2, y_0 = 1$ számpárból induló (1.1) rekurziós összefüggéssel értelmezett sorozat előállítja a vizsgált egyenlet összes megoldását!

1.2. Feladat. Bizonyítsd be, hogy ha D egy természetes szám, amely nem teljes négyzet, akkor az $x^2 - Dy^2 = 1$ Pell egyenletnek végtelen sok $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ megoldása van és ezek előállíthatók az

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_0x_n + Dy_0y_n \\ y_{n+1} &= y_0x_n + x_0y_n \end{cases}$$

rekurziós sorozatokkal, ahol (x_0, y_0) a legkisebb, $(1, 0)$ -tól különböző megoldás.

1.3. Feladat. Oldd meg a következő Pell egyenleteket:

- $x^2 - 3y^2 = 1$; • $x^2 - 5y^2 = 1$; • $x^2 - 6y^2 = 1$; • $x^2 - 7y^2 = 1$.

1.4. Feladat. Határozd meg azokat az $n \in \mathbb{N}$ értékeket, amelyekre az első n természetes szám összege teljes négyzet.

1.5. Feladat. Bizonyítsd be, hogy végtelen sok olyan egymásutáni természetes számokból álló számhármasság létezik, amelynek minden tagja felírható két teljes négyzet összegéként!

Putnam verseny

1.6. Feladat. Bizonyítsd be, hogy végtelen sok olyan egymásutáni természetes számokból álló számnégyes létezik, amelynek minden tagja felírható két teljes négyzet összegéként!

1.7. Feladat. Határozd meg az összes olyan háromszöget, amelynek oldalhosszai egymásutáni egész számok és amelynek a területe is egész szám!

1.8. Feladat. Oldd meg az $x^2 - 2y^2 = -1$ negatív Pell egyenletet, a pozitív egészekből alkotott számpárok halmazán!

1.9. Feladat. Oldd meg a $3x^2 - 2y^2 = 1$ Pell típusú egyenletet, a pozitív egészekből alkotott számpárok halmazán!

1.10. Feladat. Bizonyítsd be, hogy az $ax^2 - by^2 = 1$, $x, y \in \mathbb{N}$ Pell típusú egyenletnek ($a, b \in \mathbb{N}$ paraméterek) nem létezik megoldása, ha ab 1-nél nagyobb teljes négyzet!

1.11. Feladat. Bizonyítsd be, hogy ha $a, b \in \mathbb{N}$ és ab nem teljes négyzet, akkor az

$$ax^2 - by^2 = 1, \quad x, y \in \mathbb{N} \quad (1.2)$$

Pell típusú egyenletnek az összes megoldása előállítható

$$x_n = Au_n + bBv_n, \quad y_n = Bu_n + aAv_n$$

alakban, ahol (x_n, y_n) az

$$u^2 - abv^2 = 1$$

Pell egyenlet megoldása és (A, B) az (1.2) egyenlet legkisebb megoldása!

1.12. Feladat. Határozd meg azokat az n természetes számokat, amelyekre $2n + 1$ is és $3n + 1$ is teljes négyzet!

American Mathematical Monthly

1.13. Feladat. Bizonyítsd be, hogy végtelen sok olyan n természetes szám létezik, amelyre $n!$ osztható $n^2 + 1$ -gyel!

Kvant

1.14. Feladat. Bizonyítsd be, hogy végtelen sok, egész számokból álló megoldása van az $x^2 - xy - y^2 = 1$ egyenletnek!

1.15. Házi feladat. Oldd meg az egész számokból álló számpárok halmazán az $x^2 + (x + 1)^2 = y^2$ egyenletet!

1.16. Házi feladat. Melyek azok a háromszögek, amelyeknek az oldalai egy egész számokból álló, $d = 3$ különbségű számtani sorozat egymás utáni tagjai, és a területe is egész szám?

1.17. Házi feladat. Bizonyítsd be, hogy az $x^2 + y^3 = z^4$ egyenletnek végtelen sok, egész számokból álló megoldása van!

1.18. Házi feladat. *Egy szórakozott matematikaprofesszor elindult, hogy meglátogassa egy volt tanítványát. Mikor az utca elejére ért rájött, hogy elfelejtette a tanítvány házszámát. Ebben az utcában csak az egyik oldalon voltak házak, számozásuk 1-gyel kezdődött és egyesével növekedett. A professzor emlékezett rá, hogy legalább 200 és legfeljebb 500 ház van az utcában. Továbbá arra is, hogy tanítványa háza az utca numerikus középpontjában áll, azaz a házszámoknak az utca elejétől a házig vett összege megegyezik a háztól az utca végéig vett házszámok összegével. Rövid gondolkodás után a professzor rájött, hogy hova kell mennie. Meg tudjuk-e mi is határozni a kérdéses házszámot?*

1.19. Házi feladat. *Határozd meg az összes olyan $k, m (k < m)$ egész számokból álló számpárt, amelyekre*

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = (k + 1) + (k + 2) + (k + 3) + \dots + m.$$

1.20. Házi feladat. *Bizonyítsd be, hogy a $\sqrt{5m^2 + 10m + 6} = n - 1802$ egyenletnek végtelen sok $m, n \in \mathbb{Z}$ megoldása van!*

1.21. Házi feladat. *Bizonyítsd be, hogy léteznek olyan $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$ sorozatok, amelyekre a $b_n^2 + 1$ osztható $a_n(a_n + 1)$ -gyel, minden $n \geq 1$ esetén!*

NMO shortlist