

Elemi matematika szakkör

Kolozsvár, 2016. május 23.

1.1. Feladat. *Bizonyítsd be, hogy az*

$$x_0 = 1, x_1 = 41, x_{n+2} = 3x_n + \sqrt{8(x_n^2 + x_{n+1}^2)}, \forall n \geq 0$$

összefüggésekkel értelmezett sorozat minden tagja természetes szám!

1.2. Feladat. *Az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozat teljesíti az*

$$a_{n+1} = \frac{1 + 4a_n + \sqrt{1 + 24a_n}}{16}$$

rekurziót $n \geq 1$ esetén és $a_1 = 1$. Határozd meg a sorozat általános tagját!

1.3. Feladat. *Az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot a következőképpen értelmezzük:*

$$x_0 = 2, x_1 = 6 \text{ és } x_{n+1} = 6x_n - x_{n-1}.$$

Igazold, hogy

$$x_n = \left[(3 + 2\sqrt{2})^n \right] + 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

és, hogy $x_n + 2(-1)^n$ teljes négyzet!

(III. Wildt József emlékverseny, 1993., Szász Róbert)

1.4. Feladat. *Adott az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat, ahol*

$$x_0 = \frac{1}{2} \text{ és } 2x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n} - \sqrt{1 - x_n}.$$

Határozd meg a sorozat általános tagját!

(I. Bolyai Farkas emlékverseny, 1995., Bencze Mihály)

1.5. Feladat. *Jelöljük $f(n)$ -nel annak a szorzatnak a legnagyobb lehetséges értékét, amelynek tényezői természetes számok és összegük n . Határozd meg $f(n)$ -et ha $n \geq 1$.*

(V. NMMV., Székelyudvarhely, 1996., Urbán János)

1.6. Feladat. *Adott az*

$$u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + \frac{2}{n+1}$$

rekurziót teljesítő sorozat, ahol $\frac{3}{2} \leq u_1 \leq 2$. Bizonyítsd be, hogy

$$1 < u_n < 1 + \frac{1}{n-1}, \quad \forall n \geq 2.$$

(VI. NMMV, Kaposvár, 1997., András Szilárd)

1.7. Házi feladat. Az $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sorozatra teljesülnek az

$$x_1 = 3, x_2 = 7, x_{n+1} = |x_n| - x_{n-1}$$

egyenlőségek, $\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$. Bizonyítsd be, hogy a sorozat periodikus!

1.7. Házi feladat. Jelöljük $f(n)$ -nel az

$$\left[\frac{1^2}{n} \right], \left[\frac{2^2}{n} \right], \dots, \left[\frac{n^2}{n} \right]$$

számok közt előforduló különböző értékek számát. Határozd meg $f(n)$ -et!

1.7. Házi feladat. Határozd meg az összes olyan $f : Z \rightarrow Z$ függvényt, amelyre

$$3f(f(x)) = 2f(x) + x, \quad \forall x \in Z!$$

(IV. Nemzetközi Magyar Matematikai Verseny, 1995., András Szilárd)