

Elemi matematika szakkör

Kolozsvár, 2016. május 9.

1.1. Feladat. Írjuk növekvő sorrendbe az összes olyan számot, amelyben nem szerepel a 6-os és a 7-es számjegy. Milyen szám áll a 2010-edik helyen?

1.2. Feladat. A méhek családfája alapján állapítsd meg, hogy hány n -ed rendű nagyapja és nagyanyja van egy herének! A méheknél a királynő megtermékenyített petéiből kelnek ki a dolgozó méhek és a meg nem termékenyített petékből a hímek.

1.3. Feladat. Egy béka ugrál az $A_1 A_2 \dots A_8$ szabályos nyolcszög csúcsain. Az A_5 csúcs kivételével minden csúcsról ugorhat szomszédos csúcsra, de ha az A_5 csúcsra ugrott, akkor ott kell maradnia. Jelöljük a_n -nel azoknál az n ugrásból álló különböző ugrássorozatoknak a számát, amelyek kezdőpontja A_1 és végpontja A_5 . Igazold, hogy $a_{2n-1} = 0$ és

$$a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left((2 + \sqrt{2})^{n-1} - (2 - \sqrt{2})^{n-1} \right).$$

1.4. Feladat. Hány különböző módon fedhető le egy $2 \times n$ -es tábla 2×1 -es dominókkal?

1.5. Feladat. Hány különböző módon fedhető le egy $3 \times 2n$ -es tábla 2×1 -es dominókkal?

1.6. Feladat. Hány fixpontja van az $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$,

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & \text{ha } x < \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \text{ha } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

függvény n -edik iteráltjának?

1.7. Feladat. (Radó Ferenc Emlékverseny, 2006) Egy sálat $2n$ darab téglalap alakú darabból varrtak össze. Határozzuk meg a különböző lehetséges sálak számát, ha a téglalap alakú darabok mindegyikét k szín közül valamelyikkel színeztük?

1.8. Házi feladat. Leírtuk növekvő sorrendben azokat a természetes számokat, amelyekben nem szerepel sem a 4-es, sem a 7-es számjegy. Hányadik ebben a sorrendben a 2015?

1.9. Házi feladat. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 és 9 számjegyekből hány darab olyan kilencjegyű szám alkotható, amelynek számjegyei egymástól különböznek és

- az 1-es előbb áll, mint a 2-es;
- az 1-es a közvetlenül a 2-es előtt áll.

1.10. Házi feladat. Egy pénzérmét 10-szer dobunk fel és rendre lejegyezzük, hogy fej vagy írás az eredmény.

- Hány lehetséges eredménysorozatot kaphatunk?
- Ezek közt hány olyan van, amelyben van 8 darab egymásutáni fej?
- Hány olyan, amelyben pontosan 3 fej szerepel?

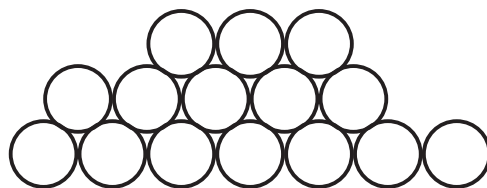
- *Hány olyan, amelyben legfeljebb 4 fej szerepel?*
- *Hány olyan, amelyben nincs egymás után 3 fej?*

1.11. Házi feladat. (Olaszország, 1996) Az a, b, c szimbólumokkal hány olyan n hosszúságú karaktersorozat írható le, amelyben az a szimbólumok száma páros?

1.12. Házi feladat. (Románia, 1995) Egy kör kerületén felvettük az $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontokat. Minden pont színét adott p szín közül választjuk ki. Hány olyan színezés lehetséges, amelyben nincs egymás mellett két azonos színű pont?

1.13. Házi feladat. (NMO, 1999) Határozd meg az összes olyan véges sok pontból álló síkbeli S ponthalmazt, amelyben bármely két különböző pont által meghatározott szakasz felezőmerőlegese az S szimmetriatengelye!

1.14. Házi feladat. Azonos méretű korongokat helyezünk egymás mellé úgy, hogy az alsó sor összefüggő legyen és minden további sorban az összes korong az alatta levő sor pontosan két korongját érintse (lásd a mellékelt ábrát). Az ilyen elrendezések közül nevezzük korongtömbnek azokat az elrendezéseket, amelyekben minden sor összefüggő. Hány különböző korongtömbnek tartalmazhat az első sora n korongot?



1.1. ábra. Korongtömb