

András Szilárd, Szilágyi Judit

Matematika, másként

Kivonat: Néhány olyan konkrét kezdeményezésről, tevékenységről, tapasztalatról tartunk beszámolót, amelyek elsődleges célja volt a matematikának az élvezhető oldalát is bemutatni. Ezek során előnybe részesítettük a matematika játékos oldalát és a kíváncsiságvezérelt oktatást. Tevékenységeink során foglalkoztunk hátrányos helyzetű gyerekekkel, elemi-, általános- és középiskolások átlagos és kiemelten tehetséges csoportjaival, illetve több továbbképzőt tartottunk tanároknak, tanítóknak. A bemutatott tevékenységek egy része a PRIMAS FP7-es projekthez kötődik, más részük a csíkszeredai SimpleX Egyesület által beindított tevékenységsorozat része.

Kulcsszavak: kíváncsiságvezérelt oktatás, tevékenységre épített matematikatanulás, felzárkóztatás, tehetségápolás.

Miért van szükség más megközelítésre?

Az utóbbi két évtizedben egy igen aggasztó jelenséggel kell szembenéznünk. Európa-szerte egyre kevesebb fiatal mutat érdeklődést a matematikai és természettudományos pályák iránt. Míg az egyetemet végzettek száma növekvőben van Európában és országunkban is, addig a matematika és természettudományos szakokat választók száma csökken, sőt a bármilyen tudományos karriert befutni vágyók száma is csökkenőben van. Mivel a technológiára épülő élet fenntartása ilyen körülmények közt veszélybe kerül, a helyzetet részletesen elemezte az elmúlt évtizedben több erre a célra kinevezett európai szakbizottság.

A 2004 áprilisában Brüsszelben bemutatott Gago-jelentés szerint ekkor az EU-ban 5,7 kutató jutott 1000 főre, a tagságra váró országokban pedig átlagosan 2,6 kutató. Ehhez képest a gazdasági és technológiai fejlődés fenntartása legalább egy 8 kutatót átlagot igényel, ami azt jelenti, hogy Európának félmillióval több kutatóra dolgozó emberre lenne szüksége. Különösen rossz volt a helyzet a természettudományok, (ezek közt főként a fizika) és a matematika terén. Ezeken a területeken, bizonyos európai országokban, nem csak a kutatók de a tanárok száma sem elegendő. Más országokban még elegendő, de a közeljövőben már nem lesz. A Gago-jelentésben megjelenő MAPS- (Mapping Physics Students in Europe) tanulmány

szerint 1997 és 2002 közt 17 százalékkal csökkent Európában a fizikában diplomázottak száma. A 2007-es Rocard- jelentés: Science Education Now megerősíti az előző jelentés megállapításait, sőt a helyzet súlyosbodásáról beszél. Ebben a jelentésben az egyik legfontosabb javaslat a kíváncsiság-vezérelt oktatás előtérbe helyezése. Kíváncsiság-vezérelt tanuláson a jelentés szerzői azt a folyamatot értik, amely problémák feltárására, kísérletek elemzésére, alternatívák megtalálására, kis kutatások megtervezésére, sejtesek megfogalmazására, információgyűjtésre, modell- alkotásra, koherens érvek megfogalmazására irányul (LIM et al. 2004).

A román tanügyi rendszer állapotát tárgyaló 2007-es Miclea-jelentés is kitér számos a fenti jelentésekben említett problémára. Románia a tudományos publikációk lakossághoz viszonyított száma szerint 11-szer kisebb teljesítményt mutat az EU-s átlagnál, ötször kisebbet Magyarországhoz és kétszer kisebbet Bulgáriához képest. Románia innovációs együttthatója 2006-ban kétszer kisebb volt Bulgáriáénál, háromszor Magyarországénál és ötször az EU átlagnál és a legnagyobb csökkenő tendenciát mutatja az összes felmért ország közt. A Miclea-jelentés is ennek egyik okát a tanügyi rendszer jelenlegi állapotában látja és annak radikális átalakítását, javasolja. Sok más fontos megoldandó probléma mellett kiemelt fontosságot tulajdonít a kompetencia-alapú oktatásnak. Mindez a különböző európai felmérésekből is látszik. A 2003-as Pisa-felméréseken és a TIMSS-felméréseken Románia a vizsgált 42 ország közt a 34.-ik helyet foglalta el, a nemzetközi átlagtól minden felmért kompetenciában lemaradt. Mindezt megerősítették a 2009-es felmérések, amelyek alapján Románia az Európai Unió tagállamai közül az utolsó helyen van. Mindez azt mutatja, hogy a matematika és természettudományos oktatás világszerte nem túl jó helyzete nálunk még rosszabb képet mutat. A fennálló helyzet kötelezővé teszi azokat a vizsgálódásokat, amelyeknek tárgya ezen helyzet kialakulása és a változtatás lehetősége.

Meg kell először említenünk néhány olyan általános problémát, amivel jelenleg szembesülünk bármilyen tárgy tanítása során, mint:

- az egyre erősödő hiányos szövegértés
- az absztrakciós képesség egyre nagyobb hiánya,
- a nyelvezet elszegényedése és általa az érzelmi és értelmi élet szegényedése,
- a sok forrásból jövő állandó ingerlésnek való kitettség miatti jóval magasabb ingerküszöb.

Mindez azt jelenti, hogy a tanított célcsoport alapjellemezői komoly változáson mentek keresztül. Mivel a tanítás célcsoportfüggő, ezért a felmérésektől függetlenül világos, hogy a taníthatóság kérdését és a tanítás módszereit folyamatosan újra kell értékelni. Ugyanakkor az új technológiák által biztosított lehetőségek következtében az elmúlt harminc-nyolcvan évben a matematikán belül egyre nagyobb szerephez jutott az alkalmazott matematika. Ez a változás az iskolai matematikában (legalábbis nálunk) még nem igazán érzékelhető.

Századunk gyerekeinek pont ezekből kifolyólag erősebb impulzusokra van szükségük, ahhoz, hogy aktív résztvevőivé váljanak a tanulásnak. Ugyanakkor nagyobb teret kell adni a verbális-írásos megközelítés melletti más megközelítéseknek, alkalmazásoknak, amelyek kiegészítik, alátámasztják a helyes megértést. Ahhoz, hogy ezt elérjük, felül kell vizsgáljunk a módszereinket, és azokat a módszereket kell előtérbe helyezni, amelyek kötelezővé teszik a diák aktív részvételét a tanórán. El kell érnünk, hogy a diák cselekvő módon reagáljon az őt érő kihívásokra. Ez különben az utóbbi időben sokat hangoztatott kompetencia szó egyik értelmezése is: az egyén belső késztetése, hogy cselekvéssel válaszoljon egy adott helyzet kihívására, tehát nem azonos sem a tudással, sem a képességgel, magában foglalja ezeket, de nem egyenlő velük (BLOMHOJ és JENSEN, 2003).

Természetesen a tanárnak önmagában nehéz feladat ezen új (rég) módszerek megtalálása, alkalmazása, határainak megszabása. A rendszernek kellene támogatni és megszervezni az erre irányuló erőfeszítéseket. Sajnos ennek gyakorlati megvalósítása egyáltalán nem tapasztalható. Ezek közt a körülmények közt nagyon nagy jelentőséggel bírnak azok a kezdeményezések, amik ezt támogatják és valamilyen együttműködés által szélesebb körben terjeszteni tudják tapasztalataikat.

A SimpleX Egyesület kezdeményezései

Néhány erdélyi egyetemi és középiskolai matematikatanár, aki a tehetséggondozásban kifejtett tevékenysége közben fedezte fel az állandó együttműködés fontosságát, közös tevékenységeket kezdett szervezni, amelyek eleinte csak a tehetséggondozásra irányultak, de hamarosan sokkal szélesebb körűvé váltak. Az általuk alapított Simplex egyesület mára már elsődleges feladatának tartja olyan tevékenységek szervezését, amelyek azt hivatottak példázni, hogy a matematikát másképpen is lehet tanítani, úgy, hogy a diák számára

élvezhetőbb legyen, és egy másfajta kihívást jelentsen, olyant, aminek cselekvő résztvevője. Az egyesület tagjai különböző olyan európai projektben vettek részt, aminek célkitűzése a matematika tanításának minőségét javítani Európaszerte. Itt szerzett tapasztalataikat különböző módokon kamatoztatják:

- A projektek keretében, majd azokon kívül is olyan tevékenységeket majd hosszabb táborokat szerveznek diákoknak, amelyek különböző témaköröket a kíváncsiságvezérelt oktatás eszközeivel, módszereivel dolgoz fel.

- Továbbképzéseket tartanak a témakörben tanároknak, tanítóknak, a gyakorlati tevékenységeket részesítve előnyben.

- Cikkeket írnak különböző szaklapokban a szerzett tapasztalatokról.

- A tananyag különböző részeit feldolgozzák a kíváncsiságvezérelt tanítás elveinek betartásával. Tananyagainak egy része könyv formában is megjelent (ANDRÁS et al. 2010).

- Egyes tapasztalataikról különböző konferenciákon is beszámolnak.

A tapasztalat azt mutatja, hogy a kooperációra, a tanárok közti együttműködésre fokozott szükség és igény van. Egyrészt minőségi, professzionális, alternatív tananyagok előkészítése akkora idő és energia ráfordítást igényel, ami csak több ember közreműködésével valósítható meg. Ilyen tananyagok nélkül viszont elképzelhetetlen a másképp való tanítás. Másrészt sok megközelítendő probléma multidiszciplináris tudásanyagot igényel, ami szintén több ember közreműködését igényli (sok alkalmazott kutatócsoport heterogén szerkezetű, ez az igény tehát a kutatásban is megjelent). Harmadrészt, a diákokban lezajló hosszú távú tanulási folyamatok létrejöttének egyik elengedhetetlen kelléke az ismételt szemléletváltás. Emiatt a diákok tanulásának hatékonyságát emelheti az, hogy egy adott tananyagot több, összehangolt tanári szempontból is lát a diák. Táborainkban több olyan foglalkozást tartottunk, amelyet egy tanári közösség gondolt ki, készített elő, és tartott meg. (tehát a foglalkozást kettő, három vagy több tanár tartotta). Ugyanakkor a több tanár jelenléte lehetővé tette a tanulási folyamatok alaposabb követését, a tevékenységek hatékonyabb elemzését, és ezáltal fejlesztését is. A diákoktól kapott visszajelzések is arra utalnak, és azt bizonyítják, hogy a több tanári szempont, a több, esetleg különböző megközelítés, a különböző tanítási stílusok, stratégiák a diákok számára kifejezetten hasznosak. Mindez azt bizonyítja, hogy a diákjainknak is jobb volna,

ha a tanáraikat egy összetartó, közösen dolgozó közösségként láthatnák.

Példa egy tananyagra

Feladat klasszikus megfogalmazásban: Határozd meg az $(a + b + c)^3$ kifejtését!

Tevékenység centrikus megközelítésben a következő problémát vizsgálhatjuk:

Egy faluban a vénasszonyok pletykálnak. Egyikük hallott egy történetet és elmondta három ismerősének. Az egyiknek szóban mesélte el, az eredeti történetet a -szor felnagyítva, egy másiknak írásban adta tovább, b -szer felnagyítva azt, míg a harmadiknak c -szer felnagyítva adta tovább. A továbbiakban mindenki, aki hallotta a pletykát (esetleg több verzióban), az a következő nap továbbadja három ismerősének, a -szer, b -szer, illetve c -szer felnagyítva (torzítva). Figyelembe véve, hogy a pletyka visszafele nem terjed, modellezzük a pletyka terjedését a faluban. Szervezzünk olyan összejöveteleket, amelyeken azok az emberek vesznek részt, akik az eredeti pletykát ugyanolyan torzításban hallották! Hány összejövetelt szervezhetünk a harmadik nap, és hány résztvevője lesz az egyes összejöveteleknek?

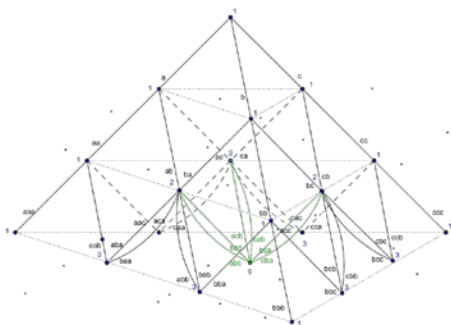
A modell elkészítésére rendelkezésre áll kellő mennyiségű fonal vagy drót és a erre felfűzhető gyöngyök. A mellékelt ábrán látható egy diákcsapat (egyetemi hallgatók), amelynek tagjai a pletyka terjedését tanulmányozzák.



Egy másik diákcsapat hasonló szerkezetet hozott létre csak más anyagokból:



Mindkét csapat a következő ábrán látható modellhez jutott (ezt nevezzük Pascal-triédernek):



A probléma egyszerűbb változata az, amikor minden vénasszony csak két ismerősének adja tovább a pletykát. Ebben az esetben az $(a + b)^2$, $(a + b)^3$, $(a + b)^4$, stb. kifejezések kiszámítását modellezzük, tehát valójában Newton binomiális tételét, a Pascal háromszöget és a kombinációk fogalmát jeleníthetjük meg egyszerű, kézzelfogható módon, anélkül, hogy bármilyen értelmezést kellene megadnunk a foglalkozás elején. A résztvevők a saját kezűleg elkészített alakzatokról olvashatják le a kifejtés tagjait, itt azonosíthatják a kombinációkat (a fonalakon megjelenő gyöngykóddal), leolvashatják a kombinációk számát (az egy összejevetelen

megjelenő emberek száma) és ugyanakkor teljesen természetesen módon megkapják a Pascal háromszöget, a kombinációk számát, stb. Ez a kontextus és a megfelelően irányított tevékenység lehetőséget teremt arra, hogy a diákok több óra tananyagát egyszerre átláthassák. Kiküszöböli a gyakorlatban tapasztalt leggyakoribb hibákat (pl. a kombináció fogalmának és a kombinációk számának az összekeverését), rámutat a tapasztalt tulajdonságok bizonyításának egy természetes módjára, valamint a kombinációs együtthatók több tulajdonságára (pl. arra, hogy az összegük 2^n). Érdemes megjegyezni, hogy a diákok a megszerkesztett konfiguráció bármely tulajdonságát választanak ki tanulmányozás céljából, az mindig egy olyan fogalomhoz, vagy tulajdonsághoz vezet, amely a kötelező tananyag része. Így a tevékenység lehetőség ad arra, hogy a diákok kérdései mentén építsük a tananyagot, minimális tanári beavatkozással. Például az egyszerűsített probléma esetén az egyik diákcsoport által létrehozott modell a következő ábrán látható:



Ez a Pascal háromszög és a létrehozott modell alapján egyszerűen leolvashatóak a Pascal háromszög alaptulajdonságai.

Amennyiben a tevékenység kivitelezésére csak egy óra áll rendelkezésünkre, érdemes az alapfeladatot módosítani és a terjedés útvonalát megadni. Ez azt jelenti, hogy lerajzoljuk, hogy ki kinek adja tovább a hozzá eljutott pletykákat. Az egyszerűsített verzió esetében az összejöveteleket rögzítjük, vagy akár azt is mondhatjuk, hogy valójában ezek a csomópontok egy-egy vénasszonyt jelölnek és minden vénasszony továbbmondja az összes általa hallott pletykát.

Ezzel egy kicsit módosul a tevékenység, de a lényegi részek továbbra is megmaradnak. A mellékelt ábra mutatja a pontok rögzítésének egy lehetséges módját.



Brousseau elméletének (BROUSSEAU, 1997) szemszögéből ez a tevékenység egy tipikus példa, amely során a környezet manipulálásával érhetjük el didaktikai és tartalomorientált céljainkat, anélkül, hogy a didaktikai szerződést módosítanánk és egyúttal minimálisra redukálva a tanári beavatkozást.

A bemutatott tananyag jól ábrázol néhány fontos nehézséget, jellegzetességet a kíváncsiságvezérelt oktatással kapcsolatban. A legfontosabb talán azt kiemelni, hogy ez a megközelítés radikálisan különbözik a tankönyvekből ismert felépítéstől, hisz itt a felépítendő tananyag szerkezete nem adott (és nem lineáris), hanem a kontextus lehetőséget ad több, akár szimultán struktúra felépítésére is, annak függvényében, hogy a diákok milyen kérdéseket fogalmazznak meg, mire kíváncsiak. Ugyanakkor az is kiderül, hogy a tanulás-szervezési megoldások a tevékenység szerves részei (a kooperatív munka elengedhetetlen a modellek kialakításához, csak a közös megbeszélés során lehet az összes fontos részletet előtérbe hozni, stb.), valójában a tartalom megszabja, a kivitelezés módjának nagy részét. Ez azt bizonyítja, hogy a kíváncsiságvezérelt tananyagok esetén külön oda kell figyelni a kivitelezés módjára is. Ugyanakkor a tevékenység konkrét lefolyása nagyon függ a diákok kérdéseitől, a felmerülő problémáktól, emiatt a tevékenység tervezése teljesen más szinten történik, mint a hagyományos tananyagok esetén, ahol egy lecketerv konkrétan tartalmazhatta az óra mozzanatait.

Nemzetközi projektek

2003-tól kezdődően az Európai Bizottság és néhány tagállam minisztériuma több olyan nemzetközi projektet finanszírozott, amelynek elsődleges célja az alkalmazott matematikára, a modellezésre, a kíváncsiságvezérelt oktatásra épülő tananyagok fejlesztése és széles körű terjesztése (Lema, Sinus Transfer). Így napjainkban egy, teljes Európán végigsöprő, matematikatanítást átalakító mozgalom tanúi lehetünk (jelenleg több mint 14 FP7-es projekt foglalkozik a kíváncsiságvezérelt oktatás elterjesztésével, lásd a Proconet hálózatot). Ezek a projektek egy jó lehetőséget jelentenek azok számára, akik fogékonyak az új módszerekre, az új tananyagokra, hajlandók más szemléletmód befogadására, kialakítására. A tapasztalat azt mutatja, hogy a tanári társadalom nagy része igencsak konzervatív és érdekes módon a diákok is nehezen illeszkednek be az új oktatási módszerek által generált helyzetekbe. A DQME II (Developing Quality in Mathematics Education II) projekt keretén belül több olyan tevékenységet, felmerést hajtottunk végre, amelyhez modellezési feladatokat használtunk (ANDRÁS–SZILÁGYI 2010, ANDRÁS–NAGY 2010). A tapasztalat azt mutatta, hogy az alternatív tananyagok használata során szükséges tanári attitűdöket külön fejleszteni kell és a diákok viszonyulását is csak hosszú folyamatok során lehet átalakítani. Brousseau terminológiája (BROUSSEAU 1997) szerint nemcsak a környezet ('milieu'), hanem a didaktikai szerződés is megváltozik ilyenkor és emiatt váratlan nehézségek kerülnek előtérbe. A PRIMAS (Promoting Inquiry in Mathematics and Science Across Europe) projekt tevékenységeinek megtervezése során Chevillard megközelítését (MORTENSEN–WINSLOW 2011) vettük alapul és így tevékenységeink célcsoportja nemcsak tanárokat és diákokat tartalmaz, hanem szülőket, döntéshozatali tényezőket is. A 2010–2011-es tanév második félévében a Farkas Gyula Egyesület és a SimpleX Egyesület támogatásával több, mint 22 iskolában tartottunk logikai játszóházzal egybekötött foglalkozásokat, amelyeknek során a diákok valamilyen tevékenységre építve tanulhattak matematikát. Ugyanakkor tartottunk továbbképzéseket több, mint 50 matematika-tanárnak és több mint 50 tanítónak. A diákokkal tartott tevékenységek kivétel nélkül nagyon sikeresek voltak. Ez azt mutatja, hogy megfelelően átgondolt oktatási stratégiával, tananyagokkal és kellő idő ráfordításával az oktatás minősége lokálisan lényegesen javítható. Ugyanakkor a tapasztalat azt is igazolta, hogy a tananyagok kevésbé transzferábilisak, mint a hagyományos oktatás esetén, az oktató felkészültsége és személyisége sokkal fontosabb, mint a hagyományos

oktatás esetén (annak ellenére, hogy a legtöbb esetben csak támogató, stratégiai irányító szerepe van), éppen ezért a tanárképzés minőségének hangsúlyosabb szerepet kell adni. A képzések elsősorban kíváncsiságvezérelt tananyagokra épültek, azt próbálták tudatosítani a résztvevőkben, hogy a matematikatanítás során a tanár elsősorban a diákkal dolgozik és nem a matematikával. Így nemcsak a matematika szemszögéből szükséges felépíteni a tananyagot, hanem a megérthetőség, a befogadás szempontjából is. A legfontosabb tapasztalat az, hogy a teljes tananyagot radikálisan át kellene szerkeszteni, egészen más struktúrában kellene gondolkodni, ha azt szeretnénk, hogy diákjainknak esélye legyen a tartalmak elmélyítésére (és itt elsősorban nem arra a 10%-ra gondolunk, aki amúgy is megérti). Ugyanakkor külön részletezni kellene a különböző tanítási stratégiákat is, nemcsak a tartalmakat. A képzési és továbbképzési rendszert sokkal személyre szabottabbá kellene tenni, ahol a tanári készségek fejlődését egyénre szabottan lehet támogatni és nyomon követni. Mindez persze olyan méretű változásokat igényelne, amelyet a jelenlegi oktatáspolitikai, az oktatási rendszer és az oktatói testület nem képes kivitelezni. Mindehhez sokkal stabilabb, hosszú távon (15-20 év) előre gondolkodó, felelősségteljes társadalmi környezetre lenne szükség.

Irodalomjegyzék

ANDRÁS SZILÁRD – SZILÁGYI JUDIT (2010): Modelling drug administration regimes for asthma: a Romanian experience, *Teaching Mathematics and its Applications*, Oxford Journals, 29, 1, 1 – 13

ANDRÁS SZILÁRD – CSAPÓ HAJNALKA – NAGY ÖRS – SIPOS KINGA – SOÓS ANNA – SZILÁGYI JUDIT (2010): *Kíváncsiságvezérelt matematikatanítás*, Státus Kiadó, Csíkszereda

ANDRÁS SZILÁRD – NAGY ÖRS (2010): Measuring with unscaled pots--algorithm versus chance, *Electronic Journal of Mathematics and Technology*, 4, 3, 1 – 10

ANDRÁS SZILÁRD – SIPOS KINGA – SOÓS ANNA (2011): Welke Wirrel Warrel is moeilijker?, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 12, 2, 121 – 126

BLOMHØJ, M. – HØJGAARD JENSEN, T. (2003): Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning, *Teaching Mathematics and its applications*, 22 (3), pp. 123-139.

LINN, M. C. – DAVIS, E. A. – BELL, K. (2004): *Internet Environments for Science Education*, Lawrence Erlbaum Associates

MASON, J. – JOHNSTON-WILDER, S. (2006): *Designing and Using Mathematical Tasks*, Tarquin Publications

MORTENSEN, F. M. – WINSLOW, C. (2011): *The Antropological theory of the didactical* (Peer reviewed papers from a PhD course at the University of Copenhagen, 2010), University of Kopenhagen

BROUSSEAU, G. (1997): *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990*, Springer

<http://www.lemma-project.org/web.lemaproject/web/eu/tout.php>

<http://www.sinus-transfer.eu/>

<http://proconet.ph-freiburg.de/>

www.primas-project.eu