Kíváncsiság vezérelt matematikaoktatás

András Szilárd, Nagy Örs, Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Matematika és Informatika Kar

Az utóbbi évtizedben több olyan nemzetközi felmérés született, amely a matematika és a tudományok oktatásának hatékonyságát vizsgálta a fenntartható gazdasági és társadalmi fejlődés szempontjából. A legátfogóbbak a 2004-es Gago-jelentés (Europe needs more scientists) és a 2007-es Rocard-jelentés (Science Education Now: A renewed pedagogy for the future of Europe). Mindkét jelentés végső ajánlásai között szerepel a matematika és a tudományok oktatásában alkalmazott pedagógiai módszerek megújítása, pontosabban a kíváncsiság vezérelt oktatás (Inquiry Based Learning) széles körű alkalmazása. Többek között a jelentések hatására döntéshozói szinten is tudatosultak azok az égető problémák, amelyekkel a matematikát és a tudományokat oktatók szembesülnek; így az Európai Bizottság is több ilyen irányú projektet támogat. 2010 januárjától a korábbi Comenius projektek mellett (pl. DQME II) Romániában két FP7-es (Seventh Framework Programme) projekt működik: A FIBONACCI (http://www.fibonacci-project.eu) és a PRIMAS (http://www.primas-project.eu). Ezeknek a projekteknek két alapvető célkitűzése van: egyrészt olyan tananyagok fejlesztése/kipróbálása, amelyek illeszkednek a romániai tantervhez és tükrözik az IBL alapelveit, másrészt olyan oktatói testület kiképzése, amely hosszú távon közelebb hozhatja a matematikát és a tudományokat a diákokhoz.

A továbbiakban ismertetünk két olyan tevékenységet, amelyet a PRIMAS, illetve a DQME II projekt keretén belül tartottunk. Mindkét feladatot (foglalkozást) a 9. osztály (13-15 éves korosztály) számára ajánljuk.

I. foglalkozás.

Szükségünk van egy 140 g-os és egy 400 g-os Finetti rudacskákat tartalmazó, felbontatlan dobozra, egy vonalzóra és egy mérlegre.

1. feladat. Hány Finetti rudacskát tartalmaz a mellékelt ábrán látható doboz?

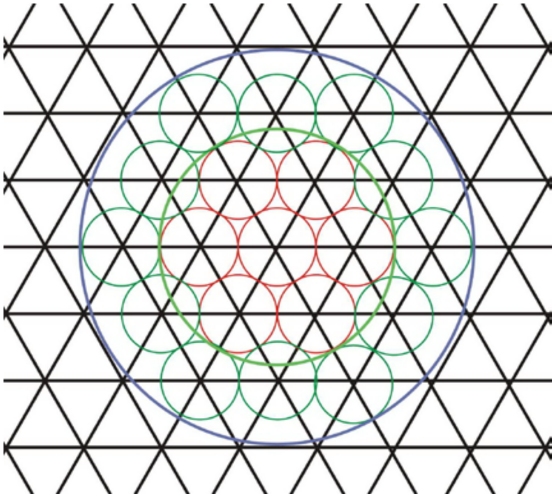
A felirat alapján a doboz 140 g töltött ostyarudacskát tartalmaz (és a rudacskák száma nem jelenik meg a feliraton). A rudacskák majdnem olyan magasak, mint a doboz és a doboz aljára majdnem merőlegesen állnak.

2. feladat. Mekkora a 400 g töltött ostyarudacskát tartalmazó doboz átmérője, ha ugyanakkora rudacskákat tartalmaz, mint az előbbi doboz?

3. feladat. Milyen matematikai problémák merülnek fel az előbbi két feladat kapcsán?

1. feladat lehetséges megoldása. Érdemes megmérni a doboz átmérőjét és jó lenne ismerni a rudacskák átmérőjét is.

Feltételezzük, hogy (a jobb térkihasználtság érdekében) a rudacskák a doboz aljára merőlegesen állnak, így elégséges egy keresztmetszetet vizsgálni. A rudacskák átmérője ismeretlen, ezért valamilyen becslésre van szükségünk. A dobozon látható képeken a rudacskák átmérője $1{,}1$ cm, ezért megközelítőleg $1{,}1$ cm-es átmérővel számolunk. A doboz külső átmérője majdnem 7 cm, és ebből le kell vonni majdnem 1 cm-t ahhoz, hogy a doboz tetején a nyílás átmérőjét megkapjuk.

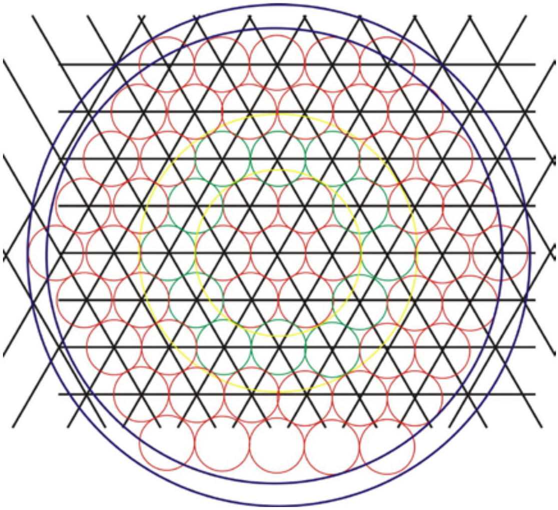


A matematikai modell tehát abból áll, hogy meg kell állapítanunk, hogy adott 6 cm átmérőjű körlap belsejébe hány $1{,}1$ cm átmérőjű körlap helyezhető el átfedés nélkül. A valóságban természetesen a rudacskák nem állnak annyira szorosan egymás mellett, azért az $1{,}1$ cm-es átmérő a gyakorlatban magába foglalhatja a rudacskák közti hézag méretét is. Így egy átmérőre legfeljebb 5 rudacska illeszkedhet. Ha a középpontból kiindulva megpróbáljuk elhelyezni a kis körlapokat, akkor a mellékelt ábrán látható konfigurációhoz jutunk. Ez mutatja, hogy így 19 kis körlap helyezhető el, tehát a dobozban levő Finetti rudacskák száma megközelítőleg 19.

Megjegyzés. A doboz kibontása után ellenőrizhető, hogy a doboz valóban megközelítőleg 19 rudacskát tartalmaz, tehát megközelítőleg $7{,}35$ g egy rudacska tömege. Ha megmérjük a rudak tömegét, akkor látható, hogy ez átlagosan 8 g, tehát átlagosan 1 rudacskával több van a dobozban, mint amennyi szükséges lenne ahhoz, hogy a doboz tartalmának tömege 140 g legyen.

2. feladat lehetséges megoldása. Az előbbi feladat alapján egy rudacska tömege átlagosan 8 g, tehát a 400 g-os dobozban körülbelül 50 darab Finetti rudacska van. Próbáljuk meg ezeket elhelyezni az előbbi konfigurációnak megfelelően. Látható, hogy $9 \cdot 1{,}1 = 9{,}9$ cm átmérőjű körlapra elhelyezhető 61 darab $1{,}1$ cm átmérőjű körlap, ezért lehetséges csökkenteni a nagy körlap átmérőjét. Ha egy kicsit csökkentjük (kb. $9{,}3$ cm-re) ezt az átmérőt, akkor még mindig elhelyezhető $61 - 6 = 55$ kis körlap. Ha viszont lecsökkentjük $8 \cdot 1{,}1 = 8{,}8$ cm-re a nagy körlap átmérőjét, akkor nem fog ráférni a szükséges 50 kis körlap. Így tehát a doboz átmérője körülbelül $10{,}3$ cm (mivel a lyuk belső átmérője és a külső átmérő közti különbség 1 cm).

Megjegyzés. Ha megmérjük a dobozt, akkor látható, hogy az átmérője $10{,}2$ cm és 52 rudacskát tartalmaz, tehát a becslésünk elfogadható.



3. Felmerülő matematikai problémák:

1. Legfeljebb hány darab r sugarú körlap helyezhető el adott R sugarú körlap belsejében átfedés nélkül?

Ekvivalens megfogalmazás: Ha egy R sugarú körlap belsejébe r sugarú körlapokat helyezünk, akkor legalább hányad része marad lefedetlenül?

2. Határozzuk meg, hogy adott sokszög (pl. téglalap) vagy tetszőleges síkbeli tartomány belsejébe hány darab r sugarú körlap helyezhető el átfedés nélkül!

Ekvivalens megfogalmazás: Ha egy síkbeli tartomány belsejébe r sugarú körlapokat helyezünk el, akkor legalább hányad része marad lefödetlenül?

3. Adott testre határozzuk meg, hogy legfeljebb hány r sugarú gömb helyezhető el a belsejében!

Ekvivalens megfogalmazás: Ha egy test belsejébe r sugarú gömböket helyezünk, akkor térfogatának legalább hányad része marad lefödetlenül?

4. Ha a síkra r sugarú körlapokat helyezünk, akkor legalább hány százaléka marad lefödetlenül?

5. Mi változik ha az előbbi problémákban nem csak r sugarú köröket (gömböket) használunk, hanem több fajta körünk (gömbünk) van, pl. $r_1, r_2, \ldots, r_k$ sugarúakat?

6. Az előbbi feladatokra hogyan lehet hatékony megoldási algoritmusokat szerkeszteni, amelyek ha nem is a legoptimálisabb megoldást adják, mégis képesek eléggé jól megközelíteni a legjobb lefödéseket?

II. foglalkozás

1. feladat. Adott töltőtérfogat mellett milyen méretűre kell készíteni a konzervdobozokat, ha azt szeretnénk, hogy a felhasznált bádogmennyiség minimális legyen?

2. feladat. Hogyan kell kinéznie egy konzervdoboznak, ha a konzervdoboz aljának és tetejének kivágása során a felhasznált anyagmennyiség p-ed része elvesztődik (a kivágás alakja és az eredeti anyag alakja miatt) és a gyártó adott töltőtérfogat mellett a legkevesebb anyagot szeretné felhasználni a doboz gyártásához?

1. feladat megoldása. Jelölje R az alapkör sugarát és h a doboz magasságát. A doboz térfogata $V = \pi R^2 h$ és a felszínhez használt anyag mennyisége

$$F = 2\pi Rh + 2\pi R^2 ,$$

tehát F minimumát keressük, ha V értéke adott. Így $h = \dfrac{V}{\pi R^2}$, tehát az

$$F(R) = R^2 + \frac{V}{\pi R}$$

kifejezés legkisebb lehetséges értékét keressük rögzített V esetén. A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alapján

$$F(R) = R^2 + \frac{V}{2\pi R} + \frac{V}{2\pi R} \geq 3\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}$$

és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. Ebben az esetben $h = 2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$, tehát az optimális anyagtakarékosság eléréséhez a $\dfrac{h}{2R} = 1$ egyenlőség szükséges.

Megjegyzés. A gyakorlatban sok konzervdoboz valóban ilyen alakú. Az F függvény minimuma a tevékenység során más módon is meghatározható, pl. egy Excel táblázatban kiszámítjuk a függvény értékeit és a numerikus értékek alapján határozzuk meg a minimális értéket.

2. feladat megoldása. Jelölje R az alapkör sugarát és h a doboz magasságát. A doboz térfogata $V = \pi R^2 h$ és a felszínhez használt anyag mennyisége

$$F = 2\pi Rh + 2(1+p)\pi R^2 ,$$

tehát F minimumát keressük, ha V értéke adott. Így $h = \dfrac{V}{\pi R^2}$, tehát az

$$F(R) = (1+p)R^2 + \frac{V}{\pi R}$$

kifejezés legkisebb lehetséges értékét keressük rögzített V esetén. A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alapján

$$F(R) = (1+p)R^2 + \frac{V}{2\pi R} + \frac{V}{2\pi R} \geq 3\sqrt[3]{\frac{(1+p)V^2}{4\pi^2}}$$

és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi(1+p)}}$. Ebben az esetben $h = 2(1+p)\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi(1+p)}}$, tehát az optimális anyagtakarékosság eléréséhez a $\frac{h}{2R} = 1+p$ egyenlőség szükséges.

Megjegyzés. Standard méretűnek számít a $7,5$ cm átmérőjű és 11 cm magasságú doboz is. Ezek a méretek akkor optimálisak, ha a tetejét és az alját egy körülbelül 8 cm oldalhosszúságú négyzetből vágjuk ki és a szélén keletkező $0,25$ cm vastagságú körgyűrűt az illesztéshez használják (ezt gyűrik fel és préselik össze az oldallappal).

Didaktikai megjegyzések

1. Mindkét tevékenységet érdemes kiscsoportos foglalkozás keretén belül megszervezni, mert így több alternatív szempont, matematikai probléma kerül elő.

2. Az első foglalkozás alapvetően a problémaérzékenység fejlesztését célozza meg, és a további kutatásokat motiválhatja, hisz a legtöbb megfogalmazott probléma nagyon nehéz, esetleg nem teljes mértékben megoldott.

3. Mindkét foglalkozás segítségével világosan lehet szemléltetni a modellezési tevékenységek lépéseinek a fontosságát (lásd a Blum-féle modell: a helyzeti modell megszerkesztése, a matematikai modell megszerkesztése, a modell validálása, stb.). Ugyanakkor az első esetben jól érzékelhető a gyakorlatorientált tevékenységek és a hagyományos matematikai megközelítésmód néhány fontos különbsége: a gyakorlatorientált megközelítésmód esetén nem lényeges az elméleti háttér tisztázása, sokkal inkább a minél pontosabb (de esetleg nem abszolút pontos) és gyakorlati szempontból használható numerikus eredmény.

4. A második tevékenység során érdemes az első feladattal kezdeni és a diákokra bízni az egyre valósághűbb modell elkészítését. Így ők vezetik be a különböző paramétereket (p) és megvizsgálják a gyártási folyamat során felmerülő problémákat, amelyek megszabhatják az optimalitást (anyagveszteség, a kivágás alakjából fakadó megszorítások, a perem préseléséhez szükséges anyagmennyiség, amely nem látható a dobozon stb.)

5. Ajánlott a konzervdoboz gyártásáról szóló ismeretterjesztő film bemutatása, a konzervdoboz történetének rövid áttekintése, a felhasznált anyagok ismertetése valamint az újrahasznosítás kérdésének a megtárgyalása (lásd Wikipédia illetve Youtube, Hogyan készült a konzervdoboz? – Discovery műsora)

Szakirodalom

1. *România educaţiei, românia cercetării*, Raportul comisiei prezidenţiale, 2007

2. Michel Rocard, Peter Csermely, Doris Jorde, Dieter Lenzen, Harriet Walberg-Henriksson, Valerie Hemmo: *Science Education Now: A renewed pedagogy for the future of Europe*, 2007 (raport pentru Comisia Europeană)

3. José Mariano Gago, John Ziman, Paul Caro, Costas Constantinou, Graham Davies, Ilka Parchmannn, Miia Rannikmäe, Svein Sjøberg: *Increasing human resources for science and technology in Europe*, 2004

4. Werner Blum, Peter L. Galbraith: *Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI study*

5. João Filipe Matos, Werner Blum, Ken Houston, Susana Paula Carrelra: *Modelling and Mathematics Education*, Ictma 9, 2001

6. Peter Galbraith,W. Blum,G. Booker: *Mathematical modelling: teaching and assessment in a technology-rich world*, 1998

7. Blum, Werner: *Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht - Herausforderung für Schüler und Lehrer*, 8-23. old., Franzbecker Verlag, Hildesheim, 2006

8. Henn, Hans-Wolfgang: *Warum manchmal Katzen vom Himmel fallen oder von guten und von schlechten Modelle*, In: H. Hischer: Modellbildung, Computer und Mathematikunterricht, 9-17. old., Franzbecker Verlag, Hildesheim, 2000

9. Hinrichs, Gerd: *Modellieren im Mathematikunterricht*, Spectrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2008.
10. Fodor Ferenc: *The Densest Packing of 19 Congruent Circles in a Circle*, Geometriae Dedicata **74:** 139–145, 1999
11. http://www2.stetson.edu/~efriedma/cirincir/
12. Kravitz, Sidney: *Packing Cylinders into Cylindrical Containers*. Math. Mag. 40 (1967), no. 2, 65-71.