Néhány gondolatvisszhang Vályi Gyulával kapcsolatban

András Szilárd, BBTE,
Magyar Matematika és Informatika Intézet
Kolozsvár

Az XIX. század végén és a XX. század elején a magyar matematikusok legjobbjai Kolozsváron tanítottak a Magyar Királyi Ferenc József Tudományegyetemen. A teljesség igénye nélkül említjük meg Vályi Gyulát, Martin Lajost, Réthy Mórt, Schlesinger Lajost, Klug Lipótot, Farkas Gyulát, Fejér Lipótot, Haar Alfrédot és Riesz Frigyest. Több kutatási eredményük ma már alapeszköznek számít. Így például a Riesz-féle reprezentációs tétel, a Farkas-lemma, a Haar-mérték, a Fejér-féle összegzés, az átdarabolhatóság problémaköre mellet a másodrendű felületek Vályi Gyula által megfogalmazott osztályozása az alapelőadások része. Munkásságuk nemcsak tudományos szempontból, hanem pedagógusi, intézetfejlesztési szempontból is rendkívül figyelemre méltó, hisz az egyetem alapításától számított néhány évtized leforgása alatt sikerült a kolozsvári egyetem hírnevét megalapozni és ehhez méltó utódokat kinevelni. Példaképnek tekinthetők tehát nemcsak kutatókként, hanem pedagógusokként, illetve felelős értelmiségi vezetőkként is. Embert próbáló feladat kutatói teljesítményüket utolérni, de egyéb tekintetben talán még nehezebb példájukat követni ma, amikor a Babeş-Bolyai Tudományegyetemen ismét létezik Magyar Matematika és Informatika Intézet, illetve több más egyetemen próbálja az erdélyi kisebbség kitermelni azt az értelmiségi réteget, amely a közösség érdekeit képes összeegyeztetni a személyes érdekeivel, képes alárendelni magát a divaton, a látszaton, a trenden messze túlmutató emberi értékeknek, prioritásoknak.

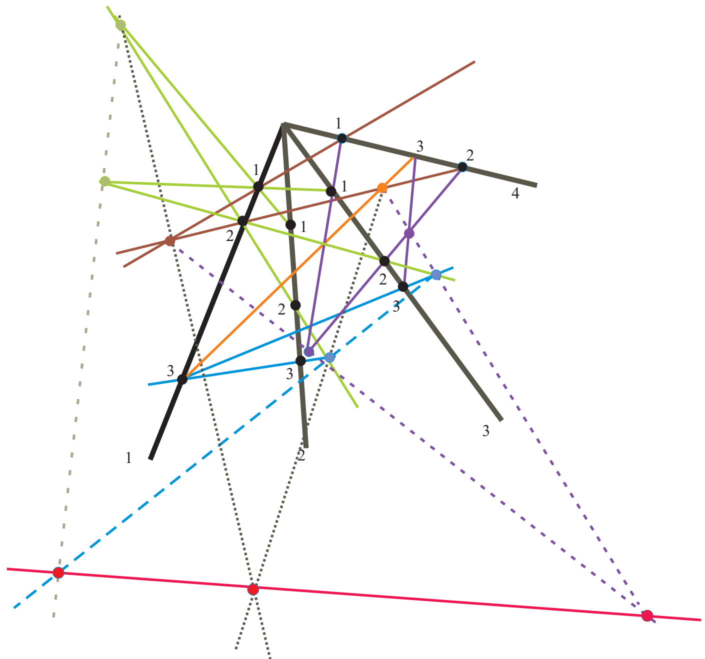
A Babeş-Bolyai Tudományegyetem Matematika és Informatika Karának oktatójaként az elmúlt 10 évben több olyan tantárgyat (parciális differenciálegyenletek, elemi matematika, didaktika, elemi számelmélet, geometria) tanítottam, ami szorosan kötődik Vályi Gyula munkásságához. Így alkalmam adódott ihletet meríteni a Vályi Gyula által tanulmányozott problémák mélységéből, szépségéből. Ugyanakkor sikerült is bizonyos problémák, problémakörök vizsgálatát szerves módon beilleszteni az oktatott tantárgyak tematikájába. A továbbiakban néhány olyan problémát, eredményt, további kutatási lehetőséget vázolok, amely kapcsolódik Vályi Gyula néhány értekezéséhez, azok szemléletéhez.

1. Desargues tételének analogonja tetraéderekre

Vályi Gyula ezt a problémát a [4]-es dolgozatában vizsgálta, bár több más dolgozata is kapcsolódik a perspektív tetraéderek elméletéhez. A továbbiakban kijelentjük két n-dimenziós általánosítását (a bizonyítás ötlete mindkettőhöz megtalálható [3]-ban). Az első két n-szimplex perspektivitására vonatkozik, a második több n-szimplex valamilyen magasabb dimenziós altér szerinti perspektivitására. További vizsgálatot igényelne azoknak a Vályi-féle konfigurációknak a megkeresése, amelyekben a szimplexek többszörösen perspektívek lehetnek.

1. Tétel. *$\mathbb{R}^n$-ben az Ox_i, $1 \le i \le n+1$ egyeneseken felvesszük az $A_{ji} \in (Ox_i$, $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ pontokat úgy, hogy a keletkező hipersíkok mind általános helyzetűek legyenek (a pontok által meghatározott bármely $1 \le k \le n$ hipersík általános helyzetben van). Minden $i \in \{1,2,\ldots,n+1\}$ és $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ esetén jelöljük H_{ji}-vel az $\{A_{jl} \mid l \ne i\}$ pontok által meghatározott hipersíkot és jelöljük M_i-vel a H_{ji}, $1 \le j \le n$ hipersíkok metszéspontját. Az így szerkesztett M_i, $1 \le i \le n+1$ pontok egy egyenesre illeszkednek.*

2. Tétel. $\mathbb{R}^n$*-ben az* Ox_i, $1 \le i \le n+1$ *egyeneseken felvesszük az* $A_{ji} \in (Ox_i$ $j \in \{1,2,\dots,p\}$ *pontokat* ($2 \le p \le n$) *úgy, hogy a keletkező hipersíkok mind általános helyzetűek legyenek. Minden* $i \in \{1,2,\dots,n+1\}$ *és* $j \in \{1,2,\dots,p\}$ *esetén jelöljük* H_{ji}*-vel az* $\{A_{jl} \mid l \ne i\}$ *pontok által meghatározott hipersíkot és jelöljük* M_i*-vel a* H_{ji}, $1 \le j \le p$ *hipersíkok metszetét (a feltételek alapján ez egy* $n-p$ *dimenziós lineáris varietás). Bizonyítsuk be, hogy az* M_i, $1 \le i \le n+1$ *varietások illeszkednek egy* $n+1-p$ *dimenziós lineáris varietásra.*



1. ábra: Három dimenzióban három tetraéderre a Desargues-tétel általánosítása

2. A Vályi-féle számelméleti függvény

Az [5] és [6] dolgozatokban Vályi Gyula azt vizsgálta, hogy hány olyan háromszög van, mely az n-edik talpponti háromszöggel hasonló, de nem hasonló a d-edikkel, ha $d < n$. Ez a szemléletmód valójában egy konstrukció (a talpponti háromszög szerkesztése) ismétlésének vizsgálatát jelenti a dinamikus rendszerek szempontjából. Pontosabban a konstrukció periodikus pontjainak meghatározását jelenti. Vályi több cikkében használt olyan számlálási módszereket, technikákat, függvényeket, amelyek a matematikai vérkeringésben mások nevéhez fűződve terjedtek el. Az általánosított Vályi-féle függvény

$$v(n,a,b) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \cdot \left(a^d - b^d\right).$$

A Vályi számlálási módszeréből valójában felírható, hogy ha $f: I \to I$ egy függvény és x_d a d-edik iterált fixpontjainak száma, akkor az n periódusú pontok száma $|P_f(n)| = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \cdot x_d$ és az n-edik iterált fixpontjaihoz tartozó periodikus pályák száma és az f^n fixpontjaihoz tartozó periodikus pályák száma

$F(n)=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi\left(\frac{n}{d}\right)\cdot x_d$. Ezek az összefüggések alapeszközöket jelentenek számlálási problémák megoldásában és több későbbi számlálási módszerrel hozhatók kapcsolatba (pl. a Pólya–Burnside-lemma). Vályi ezeket a tulajdonságokat nem jelentette ki külön, mert sajátos leképezésekre használta, de a gondolatmenete valójában tartalmazta ezeket az eredményeket.

Az érdekesség kedvéért megemlítjük, hogy ezek hogyan alkalmazhatók pl. a Wilson-tétel egy általánosításának bizonyítására (lásd [1]).

Feladat. *Egy n oldalú szabályos sokszög csúcsain tervezzünk forgatással egymásba nem vihető maximális hosszúságú irányított körutakat! Határozzuk meg a különböző irányított körutak számát!*

Megoldás. Ha rögzítünk egy alaphelyzetet és ebben a helyzetben a csúcsok számozását (0-tól $n-1$-ig), akkor minden maximális hosszúságú körút egy $x=0,(c_0\ldots c_{n-1})$ valós számmal kódolható (c_{j-1} a körútban a j-edikként érintett csúcs sorszáma). Ha K a körutak kódjait tartalmazó halmaz, akkor a $\frac{2\pi}{n}$ szögű forgatás egy $g:K\to K$ függvényt jelent, és a forgatással egymásba nem vihető körutak száma a g függvény n-edik iteráltjához tartozó fixpontok által generált periodikus pályák számát jelenti. Így elégséges meghatározni minden $d\,|\,n$-re a g^d fixpontjainak a számát.

Ehhez szükségünk van a következő két észrevételre:

- Ha $d>1$ osztója n-nek és X egy $d\cdot\frac{2\pi}{n}$ szögű forgatással önmagába vihető irányított körút, akkor X egyetlen szakaszának végpontjaiban található számok különbsége sem osztható d-vel.
- $d=1$ esetén a 0-ból induló szakasz végpontjába írt ν szám relatív prím az n-nel.

Mindkét észrevételt indirekt bizonyítással látjuk be.

Az első észrevétel bizonyítása. Ha $d>1$-re van olyan szakasz, amelynek a végpontjaiban található számok különbsége osztható d-vel, akkor a sokszöget elforgathatjuk úgy, hogy ez a két végpont a 0 és a $\nu\cdot d$ ($\nu\in\mathbb{N}$) legyen. Ennek a szakasznak a $d\cdot\frac{2\pi}{n}$ szögű elforgatásából a $(d,(\nu+1)\cdot d)$ szakaszt kapjuk (ha $(\nu+1)d\geq n,$ akkor az n-nel való osztási maradék jelenik meg a szakasz végpontjában). Ez a szakasz szintén része a körútnak, és ha a $d\cdot\frac{2\pi}{n}$ szögű forgatást ismételjük, akkor továbbra is olyan szakaszokat kapunk, amelyek részei a körútnak. Így a

$$(0,\nu\cdot d),(d,(\nu+1)\cdot d),\cdots,(n-\nu d,0)$$

párok n-nel való osztási maradékai által jellemzett szakaszok mind részei a körútnak. Másrészt ezek a szakaszok $d\,|\,n$ miatt egy zárt körutat alkotnak, amely nem tartalmazza az összes csúcsot (mert $d>1$). Ez viszont ellentmond annak, hogy maximális hosszúságú irányított körútból indultunk ki, tehát az első észrevételt igazoltuk.

A második észrevétel bizonyítása. Ha X invariáns a $\frac{2\pi}{n}$ szögű forgatásra nézve, akkor a $(0,\nu)$ szakasz mellett a

$$(\nu,2\nu),...,(k\nu,(k+1)\nu)$$

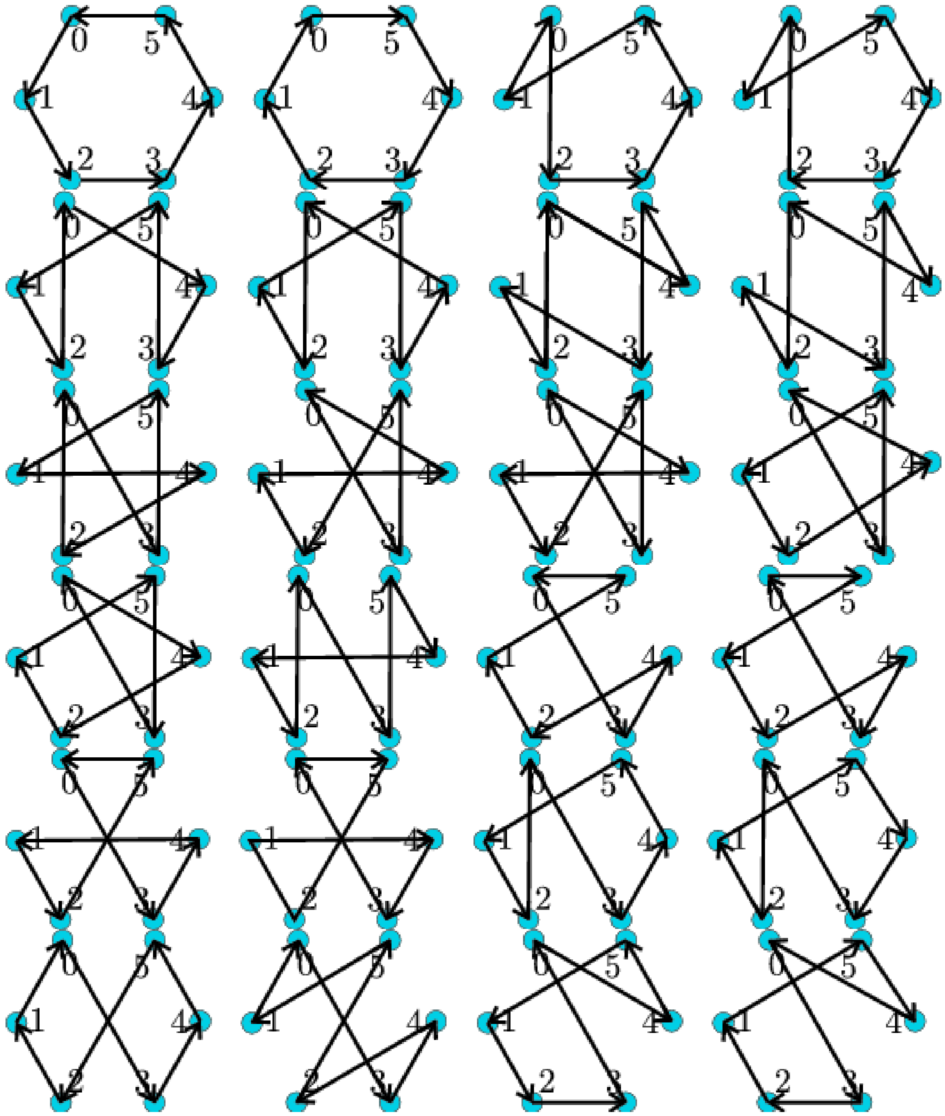
párok n-el való osztási maradéka által jellemzett szakaszok is részei az X körútnak ($k\geq 1$ természetes szám). Viszont ha $(n,\nu)>1$, akkor létezik olyan $k\in\mathbb{N}$, $k<n-1$, amelyre $(k+1)\nu$ osztható n-nel, így az előbbi szakaszok zárt körutat alkotnak. Másrészt az előbbi szakaszok egyike sem halad át az 1-es csúcson, tehát a körút ismét nem maximális hosszúságú.

Ha az X irányított körút invariáns a $d\cdot\frac{2\pi}{n}$ szögű forgatásra nézve, akkor a körút első d csúcsa egy olyan darabot definiál, melynek az elforgatottjai adják a körút többi részét (a darabkákat összekötő szakaszokkal együtt). Az észrevételek alapján a 0-ból kiinduló szakasz végpontját $\left(n-\frac{n}{d}\right)$ lehetséges csúcsból választhatjuk ki, a következő csúcsot $\left(n-\frac{2\cdot n}{d}\right)$ különböző módon és így tovább. Tehát az első d csúcs $\left(\frac{n}{d}\right)^{d-1}\cdot(d-1)!$ módon válsztható ki. Ezek meghatározzák a körútnak $\frac{n}{d}$ egybevágó ívét (mindegyik ív $d-1$ szakaszból áll). A 0-ból kiinduló ívnek a végpontját viszont $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ más ív kezdőpontjával köthetjük össze, tehát a $d\cdot\frac{2\pi}{n}$ szögű forgatásra nézve $\left(\frac{n}{d}\right)^{d-1}\cdot(d-1)!\cdot\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ invariáns irányított körút tervezhető (ez a szám a g^d fixpontjainak a száma). Így az n-edik iterált fixpontjaihoz tartozó periodikus pályák, vagyis a forgatással egymásba nem vihető irányított körutak száma

$$OC_n=\frac{1}{n}\cdot\sum_{d|n}\varphi^2\left(\frac{n}{d}\right)\cdot\left(\frac{n}{d}\right)^{d-1}\cdot(d-1)! \tag{27}$$

A 2 ábrán $n=6$ esetén látható a 24 lehetséges irányított körút.

Megjegyzés. *Ha $n=p$ prímszám, akkor az előbbi összegben csak két tag van és így az $OC_p=\frac{(p-1)!+(p-1)^2}{p}$ egyenlőségből következik, hogy $(p-1)!+1$ osztható p-vel. Ez a tulajdonság Wilson-tételként ismert.*



2. ábra: Forgással egymásba nem vihető körutak

Szakirodalom

1. András Szilárd: *A combinatorial generalization of Wilson's theorem*, Australasian Journal of Combinatorics, 49(2011), 265-272
2. András Szilárd: *Dinamikus rendszerek*, Editura Didactică și Pedagogică, Bukarest, 2007
3. András Szilárd, Szilágyi Zsolt: *Geometria II*, Státus Kiadó, Csíkszereda, 2003
4. Vályi Gyula: *Desargues tantételének térbeli analogonjáról*, Matematikai és természettudományi Értesítő, XI. kötet, 30-44 oldal (megtalálható Vályi Gyula Értekezései-ben)
5. Vályi Gyula: *A talpponti háromszögekről*, Math. és Phys. Lapok, 10(1901) 309-321.
6. Vályi Gyula: *Über die Fusspunktdreiecke*, Monaths. für Math. Und Phys., 14 (1903) 243-252.
7. *Vályi Gyula emlékkonferencia*, Kolozsvár, 2004. november 11-12, Erdélyi Múzeum Egyesület kiadványa 2005 (szerk. Kása Zoltán)
8. Weszely Tibor: *Vályi Gyula élete és munkássága*, Kriterion Kiadó, Bukarest, 1983